UNIVERSITÉ DE VALENCIENNES

MASTER 1 DE MATHÉMATIQUES
Analyse fonctionnelle

par

Aziz El Kacimi

CAHIER DE COURS ET D'EXERCICES

Année universitaire 2009-2010

.

AVANT-PROPOS

L'analyse fonctionnelle est un thème central dans beaucoup de branches des mathématiques : équations aux dérivées partielles, analyse complexe, analyse globale sur les variétés, théorie des représentations des groupes, géométrie différentielle... Son objet est l'étude, sous divers aspects, et en particulier l'aspect topologique, des espaces fonctionnels $E = \mathcal{F}(X, \mathbb{K})$ et de leurs opérateurs ($\mathbb{K}$ est le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). C'est ce qu'on se propose d'étudier de façon élémentaire dans ce cours.

Une première partie sera sous forme de cours et de travaux dirigés. Dans le chapitre I on introduit les espaces normés et quelques exemples. On démontre le théorème de Baire et on énonce le théorème d'Ascoli et le théorème de Riesz sur l'équivalence de la dimension finie et la compacité locale d'un espace normé. Dans le chapitre II on étudie les propriétés des applications linéaires continues. On y démontre quelques théorèmes importants : le théorème de Banach, le théorème de Banach-Schauder et le théorème du graphe fermé. Dans le chapitre III, le théorème de Hahn-Banach est présenté sous ses deux formes : géométrique et analytique. Dans le chapitre IV on aborde la dualité dans les espaces normés : dual topologique et ses différentes topologies (forte et faible), la réflexivité et la transposition. Un exemple d'espace réflexif et un autre non réflexif sont donnés en détail.

Le reste du cours est traité sous forme de séminaires par les étudiants. Il consiste essentiellement en ce qui suit.

• Étude des espaces de Hilbert. Théorème de projection orthogonale. Bases hilbertiennes.

• Opérateurs bornés sur un espace normé, leur spectre et puis les opérateurs compacts.

• Opérateurs bornés sur un espace de Hilbert.

• Théorème de décomposition spectrale pour un opérateur hermitien compact.

.

CHAPITRE I

ESPACES NORMÉS

Ce chapitre a pour but de donner la définition d'un espace normé, un certain nombre d'exemples et tous les ingrédients préliminaires qui servent à les étudier. Pour plus de détails, on peut consulter la référence [Ek]. Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $|\lambda|$ sera sa valeur absolue dans le cas réel et son module dans le cas complexe.

1. Premières définitions

Dans toute cette section E sera un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$ qui sera exclusivement $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (si besoin est, nous préciserons à chaque fois lequel des deux on prend).

1.1. Définition. *Une* ***semi-norme*** *sur E est une application $p : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ vérifiant les propriétés qui suivent :*

i) $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$, $\forall x \in E$ et $\forall \lambda \in \mathbb{K}$;

ii) $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$, $\forall x, y \in E$.

L'axiome i) implique $p(0) = 0$. Si en plus la relation $p(x) = 0$ implique $x = 0$, on dira que p est une *norme* sur E.

Une norme sera notée habituellement $|| \ \ ||$ et le couple $(E, || \ \ ||)$ sera appelé *espace normé*. On définit une distance $d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ en posant $d(x,y) = ||x-y||$. Cette distance possède deux propriétés importantes :

i) elle est *invariante* par translation *i.e.* elle vérifie $d(x+a, y+a) = d(x,y)$ pour tous vecteurs $x, y, a \in E$;

ii) elle est *homogène i.e.* $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x,y)$ pour tous $x, y \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$.

Inversement, toute distance d sur E invariante par translation et homogène définit une norme sur E par la formule $||x|| = d(0,x)$.

1.2. Topologie associée à une norme

Soit $|| \ \ ||$ une norme sur E. On vient de voir qu'elle donne lieu à une distance d. Une boule ouverte (resp. fermée) de centre x et de rayon $r \in \mathbb{R}_+^*$ est définie par :

$$B(x,r) = \{y \in E : ||x-y|| < r\} \qquad (\text{resp. } \overline{B}(x,r) = \{y \in E : ||x-y|| \leq r\}).$$

Lorsque $x = 0$, ces boules seront notées simplement $B(r)$ et $\overline{B}(r)$. Une partie U non vide sera dite *ouverte* si, pour tout $x \in U$, il existe $r_x \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $B(x, r_x) \subset U$; on dira qu'une partie de E est *fermée* si son complémentaire est ouvert. L'ensemble vide $\emptyset$ est bien entendu ouvert. De façon évidente, l'espace E et $\emptyset$ seront donc à la fois ouverts et fermés. La famille $\mathcal{T}$ de toutes les parties ouvertes :

i) contient E et la partie vide ;

ii) est stable par réunion quelconque ;

iii) est stable par intersection finie.

Elle forme donc une topologie sur E qu'on appelle *topologie canonique* de l'espace normé $(E, ||\ \ ||)$.

Une translation $\tau_a : x \in E \longmapsto x + a \in E$ est une isométrie ; c'est donc un homéomorphime pour cette topologie. Une homothétie de rapport $\lambda \in \mathbb{K}$ non nul $h_\lambda : x \in E \longmapsto \lambda x \in E$ est une bijection lipschitzienne (de rapport $|\lambda|$), c'est donc un homéomorphisme de E.

1.3. Définition. *Un espace normé* $(E, ||\ \ ||)$ *est un* ***espace de Banach*** *si l'espace métrique sous-jacent* (E, d) *est complet.*

La complétude est une notion très importante. Les exemples d'espaces de Banach ne manquent pas comme nous allons en voir dans la suite.

Un sous-espace vectoriel V de E est naturellement muni de la norme induite par celle de E. Si E est de Banach alors V est de Banach si, et seulement si, il est fermé.

Soit V un sous-espace vectoriel de E. Les éléments de l'espace vectoriel quotient sont les classes d'équivalence dans E pour la relation : $x \sim y \Longleftrightarrow x - y \in V$.

1.4. Proposition. *Supposons V fermé. Alors on peut le munir d'une norme en posant, pour tout $X \in E/V$, $||X||_{E/V} = \inf_{x \in X} ||x||$. Si E est complet, E/V est aussi complet.*

Démonstration. Le fait que $||\ \ ||_{E/V}$ soit une norme est facile à établir ; on laisse la démonstration au lecteur. Soit $(X_m)_m$ une suite de Cauchy dans E/V. On peut en extraire une suite $(X_{m_k})_k$ telle que :

$$||X_{m_k} - X_{m_{k+1}}||_{E/V} < \frac{1}{2^k}.$$

En utilisant la définition de la norme $||\ \ ||_{E/V}$ sur E/V à partir de celle $||\ \ ||$ sur E on peut trouver dans chacun des X_{m_k} un élément x_k tel que

$$||x_k - x_{k+1}|| < \frac{1}{2^k}.$$

La suite $(x_k)_k$ ainsi construite est de Cauchy dans E ; elle y converge donc vers un élément x. Posons $X = \pi(x)$. Comme $||X_{m_k} - X||_{E/V} \leq ||x_k - x||$ la suite X_{n_k} converge bien vers X. Par suite $(X_m)_m$ converge vers X dans E/V *i.e.* E/V est complet. □

2. Exemples d'espaces normés

Nous allons en donner les plus représentatifs en dimension finie et en dimension infinie.

2.1. Le premier d'entre eux à considérer est bien sûr le corps $\mathbb{K}$ considéré comme espace vectoriel sur lui-même ; il a pour dimension 1. On peut définir dessus une norme $|\lambda|$ qui est, comme on l'a déjà dit, la valeur absolue de λ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et le module de λ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Pour cette norme, $\mathbb{K}$ est un espace de Banach. Cette propriété est la base de toute l'analyse !

2.2. Tout espace E de dimension finie égale à n est isomorphe, via le choix d'une base $(e_1, \cdots, e_n)$, à $\mathbb{K}^n$ par l'application :

$$(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{K}^n \longmapsto x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n \in E.$$

Sur un tel espace on peut définir plusieurs normes qui en font un espace de Banach ; donnons en deux :

$$\begin{aligned} ||x||_p &= \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{avec } p \in [1, +\infty[\\ ||x||_\infty &= \sup_{i=1,\ldots,n} |x_i|. \end{aligned}$$

Nous verrons que *sur un espace E de dimension finie, toutes les normes définissent la même topologie.* Ce fait est important ; il n'est pas immédiat mais il n'est pas difficile à établir : la démonstration se fait en usant d'une récurrence sur la dimension de E.

2.3. Soit (X, d) un espace métrique ; alors l'ensemble $E = \mathcal{B}(X, \mathbb{K})$ des fonctions (réelles ou complexes) bornées continues est un espace de Banach lorqu'on le munit de la norme :

$$||f||_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|. \tag{I.1}$$

2.4. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Alors, pour tout $p \geq 1$, l'espace $L^p(\Omega, \mu)$ des classes (modulo l'égalité μ-presque partout) de fonctions (réelles ou complexes) de puissance $p^{\text{ème}}$ intégrable muni de la norme :

$$||f||_p = \left(\int_\Omega |f(\omega)|^p d\mu(\omega) \right)^{\frac{1}{p}} \tag{I.2}$$

est un espace de Banach. Si $\Omega = \mathbb{N}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ et $\mu = m$ (la *mesure de comptage* sur $\mathbb{N}$ *i.e.* $m(A) =$ cardinal de A si A est fini et $+\infty$ sinon) alors $L^p(\mathbb{N}, m)$ n'est rien d'autre que l'espace de Banach, que l'on note habituellement $\ell^p(\mathbb{K})$, des suites (réelles ou complexes) de puissance $p^{\text{ème}}$ sommable.

3. Séries dans un espace normé

Dans ce paragraphe, nous allons donner la notion de *série convergente* et celle de série *commutativement convergente* dans un espace normé. On étudiera en particulier le cas où l'espace est complet. Nous fixerons donc un espace normé $(E, ||\ ||)$.

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans E. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on pose $S_N = x_0 + x_1 + \ldots + x_N$. On dira que la série de terme général x_n (ou simplement la série x_n) *converge* vers $S \in E$ si la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge vers $S \in E$ (au sens de la norme $||\ ||$ bien sûr). Le vecteur S est appelé *somme* de la série ; on écrit $S = \sum_{n=0}^{\infty} x_n$.

On dira que la série (x_n) est *normalement convergente* si la série des nombres réels $||x_n||$ est convergente au sens usuel. Une série convergente sans être normalement convergente est dite *semi-convergente.*

3.1. Proposition. *Supposons E complet. Alors toute série normalement convergente est convergente et on a :*

$$\left\|\sum_{n=0}^{\infty} x_n\right\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} ||x_n||. \tag{I.3}$$

Démonstration. Comme la série converge normalement, la suite de nombres réels $\alpha_N = \sum_{n=0}^{N} ||x_n||$ est de Cauchy ; pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$n \geq p \geq N_0 \Longrightarrow |\alpha_n - \alpha_p| \leq \varepsilon.$$

D'où $||x_{p+1} + \ldots + x_n|| \leq \varepsilon$ pour $n \geq p \geq N_0$; on en déduit que la suite $S_N = x_0 + \ldots + x_N$ est de Cauchy ; elle converge donc puisque E est complet. L'inégalité :

$$\left\|\sum_{n=0}^{\infty} x_n\right\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} ||x_n||$$

découle du fait que pour tout $N \in \mathbb{N}$ on a $||\sum_{n=0}^{N} x_n|| \leq \sum_{n=0}^{N} ||x_n||$. $\square$

L'hypothèse *E est complet* est en fait nécessaire (si on veut que cette implication soit vraie pour toute série) comme on peut le montrer dans la proposition qui suit.

3.2. Proposition. *On suppose que toute série* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *normalement convergente est convergente. Alors* E *est complet.*

Démonstration. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans E. Alors, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, il existe $n_k \in \mathbb{N}$ tel que :

$$n, m \geq n_k \Longrightarrow ||x_n - x_m|| \leq \frac{1}{2^k}.$$

Considérons la suite des entiers n_k (qu'on peut supposer strictement croissante). La norme de la série $x_{n_0} + \sum_{k=0}^{\infty}(x_{n_{k+1}} - x_{n_k})$ est majorée par la série numérique convergente $||x_{n_0}|| + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}$; elle converge donc en vertu de l'hypothèse faite sur E. Mais comme :

$$S_N = x_{n_0} + \sum_{k=0}^{N-1}(x_{n_{k+1}} - x_{n_k}) = x_{n_N+1}$$

la suite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ est convergente. On a donc montré que la suite de Cauchy (x_n) admet une sous-suite convergente $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$; elle est donc convergente *i.e.* E est complet. □

3.3. Définition. *On dira qu'une série* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *est* ***commutativement convergente*** *si, pour toute bijection* $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, *la série* $\sum_{n=0}^{\infty} x_{\sigma(n)}$ *est convergente vers une limite* S *indépendante de* σ.

La proposition qui suit, que nous ne démontrerons pas, donne des conditions suffisantes pour qu'une série convergente soit commutativement convergente.

3.4. Proposition. *Si la série* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *est à la fois convergente et normalement convergente, alors elle est commutativement convergente. Si* E *est de dimension finie, la convergence commutative de la série* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *implique sa convergence normale.*

4. Théorème de Riesz

Soit (X, d) un espace métrique. On dira que que X est *compact* si, de tout recouvrement ouvert $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ de X on peut extraire un recouvrement fini $\{U_{i_1}, \cdots, U_{i_q}\}$. C'est aussi équivalent au fait que toute suite (x_n) admet une sous-suite (x_{n_k}) convergente. On dira que X est *localement compact* si tout point $x \in X$ admet un voisinage compact. La compacité locale est importante bien qu'elle ne soit pas toujours indispensable.

4.1. Propriétés

i) Soient X un espace métrique compact, Y un espace métriqe et $f : X \longrightarrow Y$ une application continue. Alors $f(X)$ est une partie compacte de Y.

ii) Soient (X, d) un espace métrique compact et $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue. On a les propriétés suivantes.

• f est uniformément continue ;

• f est bornée ;

• si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, il existe $x_0, x_1 \in X$ tels que $f(x_0) = \inf_{x\in X} f(x)$ et $f(x_1) = \sup_{x\in X} f(x)$.

4.2. Exemples

• Tout intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$ est compact.

• Toute partie fermée bornée de $\mathbb{R}^n$ est compacte.

• Toute partie fermée d'un espace compact est compacte.

• L'espace $\mathbb{K}^n$ muni de l'une quelconque de ses normes n'est pas compact mais il est toujours localement compact. C'est donc aussi le cas pour un espace normé (réel ou complexe) de dimension finie.

4.3. Proposition. *Soient $(E, ||\ \ ||)$ un espace normé et $\overline{B}$ sa boule unité fermée. Alors E est localement compact si, et seulement si, $\overline{B}$ est compacte.*

Démonstration. Supposons E localement compact. Alors 0 possède un voisinage compact U ; ce voisinage contient une boule ouverte $B(0, \varepsilon)$. La boule unité fermée $\overline{B}$ est alors l'image de $\overline{B}(0, \varepsilon)$ par l'homothétie $x \in E \longmapsto \frac{1}{\varepsilon} x \in E$ (qui est une application continue) donc compacte.

Inversement, supposons $\overline{B}$ compacte et soit $x \in E$. Alors l'image de $\overline{B}$ par la translation $y \in E \longmapsto y + x \in E$ (qui est un homéomorphisme) est un compact de E mais aussi un voisinage de x ; donc E est localement compact. □

Un espace normé de dimension infinie peut-il être localement compact ? Non comme l'atteste le théorème qui suit. On peut en trouver une démonstration dans [Ek] (dans le cadre plus général des espaces vectoriels topologiques).

4.4. Théorème de Riesz. *Soit $(E, ||\ \ ||)$ un espace normé localement compact. Alors E est de dimension finie.*

5. Compléments

Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et A une partie de X. On appelle :

- *adhérence* de A dans X le plus petit fermé noté $\overline{A}$ de X contenant A ; évidemment A est fermée si, et seulement si, $A = \overline{A}$; si $\overline{A} = X$ on dira que A est *dense* dans X ;

- *intérieur* de A le plus grand ouvert contenu dans A.

On dira qu'un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est *séparé* si pour tout x et tout y dans X distincts, il existe un voisinage U_x de x et un voisinage V_y de y tels que $U_x \cap V_y = \emptyset$. Par exemple un espace métrique est toujours un espace topologique séparé.

On aura besoin de généraliser la notion de compacité à un espace topologique. On dira que X est *compact* s'il est séparé et si de tout recouvrement ouvert $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ on peut extraire un nombre fini d'ouverts U_i qui recouvrent encore X. On dira que X est *localement compact* si tout point $x \in X$ admet un voisinage compact.

Une partie A d'un espace topologique séparé X est dite *relativement compacte* si son adhérence $\overline{A}$ est compacte.

Soit $f : X \longrightarrow Y$ une application continue où X et Y sont des espaces topologiques séparés et A une partie de X alors :

- si A est compacte, $f(A)$ est aussi compacte dans Y,

- si f est surjective et si A est dense, alors $f(A)$ est dense dans Y.

Toute fonction continue $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ définie sur un espace topologique compact X est bornée et atteint ses bornes inférieure et supérieure en des points de X (comme ce qu'on a déjà énoncé pour un espace métrique compact)

5.1. Théorème de Baire. *Soient (X, d) un espace métrique complet et $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de parties fermées de X d'intérieur vide. Alors la réunion A des A_n est d'intérieur vide.*

Démonstration. Il faut montrer que A ne contient aucune boule. Soient $x \in A$ et $B = B_0$ une boule ouverte centrée en x. La partie A_1 étant d'intérieur vide l'ouvert $B \cap A_1^c$ (où E^c dénote le complémentaire dans X d'une partie E) contient l'adhérence d'une boule B_1 centrée en un point x_1 et de rayon ≤ 1. De même $B_1 \cap A_2^c$ contient l'adhérence d'une boule B_2 centrée en un point x_2 et de rayon $\leq \frac{1}{2}$. De cette manière on construit une suite de boules $B_n = B(x_n, r_n)$ avec $r_n \leq \frac{1}{2^n}$ et telles que pour tout $n \geq 1$ on ait :

$$\overline{B}_n \subset B_{n-1} \cap A_n^c.$$

La suite $(x_n)_{n \geq 1}$ des centres de ces boules est une suite de Cauchy dans X. Elle converge donc vers un point $a \in X$ qui appartient à l'intersection des adhérences de toutes les boules B_n ; donc $a \in \cap_n A_n^c$ et par suite $a \notin \cup_n A_n$. Mais $a \in B$; donc

$\cup_n A_n$ ne peut pas contenir B. Nous avons donc montré que quelle que soit la boule ouverte qu'on se donne, elle ne peut pas être contenue dans A. Autrement dit A n'a pas d'intérieur. $\square$

Soient maintenant $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et (E, d) un espace métrique. On dira qu'une famille $\mathcal{F}$ d'applications de X dans E est *équicontinue au point* $x \in X$ si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage U de x dans X tel que :

$$y \in U \Longrightarrow \sup_{f \in \mathcal{F}} d(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

On dira que $\mathcal{F}$ est *équicontinue*, si elle est équicontinue en tout point $x \in X$.

Notons $C(X, E)$ l'ensemble des applications continues de X dans E. Soient K un compact de X et U un ouvert de E. On pose $O(K, U) = \{f \in C(X, E) \big| f(K) \subset U\}$ et on note $\mathcal{K}_0$ l'ensemble des $O(K, U)$ lorsque K décrit l'ensemble des compacts de X et U celui des ouverts de E. La topologie $\mathcal{K}$ engendrée par la famille $\mathcal{K}_0$ est appelée *topologie de la convergence compacte* sur $C(X, E)$; cela signifie qu'une suite (f_n) dans $C(X, E)$ converge vers $f \in C(X, E)$ au sens de $\mathcal{K}$ si, et seulement si, pour tout compact C de X, la suite obtenue en restreignant chaque f_n à C converge uniformément vers la restriction de f à ce compact. On a alors le résultat important suivant que nous énoncerons sans donner de démonstration (*cf.* [Sc] par exemple).

5.2. Théorème d'Ascoli. *Soit $\mathcal{F}$ une partie de $C(X, E)$. Pour que $\mathcal{F}$ soit relativement compacte (i.e., son adhérence est compacte) pour la topologie $\mathcal{K}$ il suffit :*

i) qu'elle soit équicontinue ;

ii) pour tout $x \in X$, l'ensemble $\{f(x) \big| f \in \mathcal{F}\}$ soit relativement compact dans E.

Si X est localement compact, ces deux conditions sont aussi nécessaires.

CHAPITRE II

APPLICATIONS LINÉAIRES CONTINUES

Nous introduisons la notion d'application linéaire continue qui accompagne de façon naturelle celle d'espace normé. Diverses propriétés sont étudiées et un théorème fondamental est démontré : celui de l'application ouverte et ses conséquences, en particulier le théorème du graphe fermé. D'autres tout aussi importants sont énoncés sans démonstration.

1. Généralités

Soient $(E, ||\quad||_E)$ et $(F, ||\quad||_F)$ deux espaces normés qu'on supposera fixés tout le long de cette section.

1.1. Proposition. *Une application linéaire $u : E \longrightarrow F$ est continue si, et seulement si, il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $x \in E$ on ait* :

$$||u(x)||_F \leq \alpha ||x||_E. \tag{II.1}$$

Démonstration. Supposons u continue ; elle est donc continue à l'origine *i.e.* si $x \to 0$ dans E, $u(x) \to 0$ dans F. Alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que :

$$||x||_E \leq \eta \Longrightarrow ||u(x)||_F \leq \varepsilon.$$

Soit $x \in E$ non nul (pour $x = 0$ l'inégalité qu'on veut établir est évidente) ; alors on a:

$$\left|\left| u\left(\eta \frac{x}{||x||_E}\right)\right|\right|_F \leq \varepsilon$$

c'est-à-dire $||u(x)||_F \leq \frac{\varepsilon}{\eta}||x||_E$. Il suffit alors de prendre $\alpha = \frac{\varepsilon}{\eta}$.

La condition (II.1) est clairement suffisante pour la continuité de u. En effet, elle implique, pour tous $x, y \in E$, $||u(x) - u(y)||_F \leq ||u(x - y)||_F \leq \alpha||x - y||_E$, ce qui signifie que u est lipschitzienne (de rapport α), donc continue. □

Il découle de la proposition 1.1 qu'il y a équivalence entre continuité en 0, continuité uniforme et condition de Lipschitz.

Comme F est séparé, le noyau $\mathrm{Ker} u = \{x \in E : u(x) = 0\}$ de l'application linéaire continue $u : E \longrightarrow F$ est un sous-espace vectoriel fermé de E.

L'ensemble $\mathcal{L}_c(E, F)$ des applications linéaires continues de E dans F est un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$. Comme toute application linéaire continue est bornée sur la boule unité (fermée) de E, $\mathcal{L}_c(E, F)$ peut être muni de la norme (le vérifier) :

$$\text{(II.2)} \qquad |||u||| = \sup_{||x||_E \leq 1} ||u(x)||_F \quad \text{ou encore} \quad |||u||| = \sup_{x \neq 0} \frac{||u(x)||_F}{||x||_E}.$$

On a aussi l'inégalité importante suivante : si $u : E \longrightarrow F$ et $v : F \longrightarrow G$ sont des applications linéaires continues entre espaces normés alors :

$$\text{(II.3)} \qquad |||v \circ u||| \leq |||u|||.|||v|||$$

On a en outre le résultat suivant dont la démonstration n'est pas difficile à donner.

1.2. Théorème. *Si l'espace normé F est complet, $\mathcal{L}_c(E, F)$ est un espace de Banach.*

Soient maintenant V un sous-espace dense d'un espace normé E et $u : V \longrightarrow F$ une application linéaire continue.

1.4. Théorème. *Si F est complet, l'application u se prolonge de manière unique en une application linéaire continue $\overline{u} : E \longrightarrow F$ qui vérifie $|||\overline{u}||| = |||u|||$.*

Démonstration Soit $x \in E$; alors il existe une suite $(x_k)_k$ d'éléments de V telle que $x = \lim x_k$; c'est donc une suite de Cauchy. Comme u est uniformément continue $(u(x_n))$ est une suite de Cauchy dans F qui est complet ; elle y converge donc vers un élément $\overline{u}(x)$ de F ; si $(x'_k)_k$ est une autre suite de V qui converge vers x alors la suite $u(x_1), u(x'_1), u(x_2), u(x'_2), \ldots, u(x_k), u(x'_k), \ldots$ est de Cauchy dans F, donc convergente. Par suite $\lim u(x_k) = \lim u(x'_k)$. Le vecteur $\overline{u}(x)$ ne dépend donc pas du choix de la suite x_k. Ce qui définit bien $\overline{u}$ sur E. La linéarité de $\overline{u}$ découle de la continuité des opérations "somme" et "multiplication par un scalaire".

D'autre part comme u est continue il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $x \in V$, $||u(x)||_F \leq \alpha ||x||_V$; par densité de V dans E on a encore, pour tout $x \in E$, $||\overline{u}(x)||_F \leq \alpha ||x||_E$. Ce qui montre bien l'égalité $|||\overline{u}||| = |||u|||$. $\square$

Une application u d'un espace normé E dans un espace normé F linéaire bijective, continue et ouverte (*i.e.* u^{-1} est continue) est appelée *isomorphisme topologique* de E sur F. Si u est une *isométrie i.e.* $\forall x \in E : ||u(x)||_F = ||x||_E$ on dira que u est un *isomorphisme d'espaces normés.*

Dorénavant on ne mettra pas d'indice pour spécifier l'espace sur lequel est définie une norme considérée sauf quand il y a risque de confusion.

Soit maintenant V un sous-espace fermé de l'espace normé E. Alors l'espace quotient E/V est muni de la norme $||X|| = \inf_{x\in X} ||x||$ pour laquelle on démontre facilement la :

1.5. Proposition. *La projection canonique $\pi : E \longrightarrow E/V$ est continue et a pour norme $|||\pi||| = 1$ et l'image par π de la boule unité ouverte B_E de E est la boule unité ouverte $B_{E/V}$ de E/V.*

On a d'autre part la :

1.6. Proposition. *Soit $u : E \longrightarrow F$ une application linéaire continue nulle sur V. Alors il existe une et une seule application linéaire continue $v : E/V \longrightarrow F$ telle que $u = v \circ \pi$ et $|||v||| = |||u|||$.*

Démonstration. Soient $X \in E/V$ et $x, x' \in X$; alors $x - x' = f \in V$. Donc $0 = u(f) = u(x - x') = u(x) - u(x')$. Si on pose $v(X) = u(x)$ avec x un représentant quelconque de la classe X modulo V on définit bien v en tant qu'application linéaire vérifiant $u = v \circ \pi$. Par (II.3) on a $|||u||| \leq |||v|||$ (puisque $|||\pi||| = 1$). D'autre part comme pour tout point $X \in B_{E/V}$ il existe $x \in B_E$ tel que $X = \pi(x)$ on a $|||v||| \leq |||u|||$. C'est-à-dire $|||u||| = |||v|||$. Ce qui démontre la proposition. □

Soient $E_1, \ldots, E_n$ et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Une application Φ définie sur $E_1 \times \ldots \times E_n$ et à valeurs dans F est dite *n-linéaire* si, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ et pour tous $x_1 \in E_1, \ldots, x_{i-1} \in E_{i-1}, x_{i+1} \in E_{i+1}, \ldots, x_n \in E_n$ fixés, l'application $x_i \in E_i \longmapsto \Phi(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) \in F$ est linéaire. Si $n = 2$, E_1 et E_2 sont un même espace E et $F = \mathbb{K}$, on dira que Φ est une *forme bilinéaire* sur E.

Soient $(E_1, ||\ \ ||_1), \ldots, (E_n, ||\ \ ||_n)$ et $(F, ||\ \ ||_F)$ des espaces normés. On munit le produit cartésien $E_1 \times \ldots \times E_n$ de l'une des normes équivalentes suivantes $||x|| = \sum_{i=1}^n ||x_i||_i$ ou $||x|| = \sup_i\{||x_i||_i\}$ où $x = (x_1, \ldots, x_n)$.

1.7. Proposition. *Une application n-linéaire $\Phi : E_1 \times \ldots \times E_n \longrightarrow F$ est continue si, et seulement si, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in E_1 \times \ldots \times E_n$ on ait $||\Phi(x_1, \ldots, x_n)||_F \leq \alpha ||x_1||_1 \cdot \ldots \cdot ||x_n||_n$.*

La démonstration est presque la même que celle de la propositon 1.1. □

Si $\Phi : E_1 \times \ldots \times E_n \longrightarrow F$ est continue alors pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ et tous $x_1 \in E_1, \ldots, x_{i-1} \in E_{i-1}, x_{i+1} \in E_{i+1}, \ldots x_n \in E_n$ fixés, l'application partielle Φ_i :

$E_i \longrightarrow F$ définie par $\Phi_i(x_i) = \Phi(x_1, \ldots, x_n)$ est continue. La réciproque est vraie pour $n = 2$ et si l'un des E_i est de Banach (*cf.* exercice 7).

On définit une norme sur $\mathcal{L}_c(E_1, \ldots, E_n; F)$, espace vectoriel des applications n-linéaires continues de $E_1 \times \ldots \times E_n$ dans F en posant :

$$|||\Phi||| = \sup_{||x_1||_1 \leq 1, \ldots, ||x_n||_n \leq 1} ||\Phi(x_1, \ldots, x_n)||_F \tag{II.4}$$

ou encore :

$$|||\Phi||| = \sup_{x_1 \neq 0, \ldots, x_n \neq 0} \frac{||\Phi(x_1, \ldots, x_n)||_F}{||x_1||_1 \cdot \ldots \cdot ||x_n||_n}.$$

C'est le plus petit nombre $\alpha > 0$ vérifiant l'inégalité :

$$||\Phi(x_1, \ldots, x_n)||_F \leq \alpha ||x_1||_1 \cdot \ldots \cdot ||x_n||_n.$$

2. Quelques théorèmes

2.1. Théorème de l'application ouverte. *Soient E et F deux espaces de Banach et $u : E \longrightarrow F$ une application linéaire continue. Pour que u soit ouverte il faut, et il suffit, qu'elle soit surjective.*

Démonstration. Si u est ouverte, l'image de la boule unité B de E contient un homothétique $\eta B'$ (avec $\eta > 0$) de la boule unité B' de F. Donc si $y \in F - \{0\}$ est quelconque $\frac{\eta}{2||y||} y \in \eta B'$; alors il existe $x \in E$ tel que $y = u(x)$ *i.e.* u est surjective.

Supposons u surjective. Il suffit de montrer que $u(B)$ contient une boule ouverte centrée en 0 dans F. On a :

$$F = \bigcup_{n \geq 1} \overline{u(nB)} = \bigcup_{n \geq 1} n\overline{u(B)}.$$

(découle de la surjectivité de u). Si tous les $n\overline{u(B)}$ étaient d'intérieur vide F serait d'intérieur vide d'après le théorème de Baire, ce qui est absurde. Par suite, l'un de ces ensembles (et donc tous puisque ils sont homothétiques) est d'intérieur non vide en particulier $\overline{u(B)}$ est d'intérieur non vide. Il existe alors $y_0 \in \text{int } (\overline{u(B)})$ et $\varepsilon > 0$ tels que la boule ouverte $B(y_0, \varepsilon)$ de centre y_0 et de rayon ε soit contenue dans int $(\overline{u(B)})$. Comme $\overline{u(B)}$ est symétrique par rapport à l'origine $B(-y_0, \varepsilon) \subset \text{int } \overline{u(B)}$ et comme il est en plus convexe, la boule ouverte de rayon $\frac{\varepsilon}{2}$ centrée à l'origine est contenue dans int $\overline{u(B)}$; 0 est donc un point intérieur de $\overline{u(B)}$. Il existe donc $\rho > 0$ tel que

$\rho B' \subset \overline{u(B)}$. Soit $y \in F$ tel que $||y|| < \frac{\rho}{2}$ et définissons une suite (x_n) telle que $x_0 = 0$ et pour tout $n \geq 1$:

$$||x_{n+1} - x_n|| < \frac{1}{2^{n+1}} \quad \text{et} \quad ||y - u(x_n)|| < \frac{\rho}{2^{n+1}}.$$

Une telle suite existe. En effet supposons-la construite jusqu'au rang n ; on a :

$$y - u(x_n) \in \overline{u\left(\frac{1}{2^{n+1}} B\right)}.$$

On peut donc trouver $z_n \in \frac{1}{2^{n+1}} B$ vérifiant :

$$||y - u(x_n) - u(z_n)|| < \frac{\rho}{2^{n+2}}$$

L'élément $x_{n+1} = x_n + z_n$ est alors le $(n+1)^{\text{ème}}$ terme cherché. La suite (x_n) est de Cauchy ; elle converge donc vers un point $x \in E$ qui vérifie $y = u(x)$ et :

$$||x|| \leq \sum_{n=1}^{\infty} ||x_n - x_{n-1}|| < 1$$

c'est-à-dire $x \in B$; par suite $y \in u(B)$, donc $\frac{\rho}{2} B' \subset u(B)$ puisque y est choisi quelconque vérifiant $||y|| < \frac{\rho}{2}$. Ce qui montre que u est ouverte. □

Une des applications importantes de ce théorème est donnée par les corollaires qui suivent.

2.2. Corollaire. *Soit u une application linéaire continue bijective d'un espace de Banach E dans un espace de Banach F. Alors u est un isomorphisme topologique.*

On peut aussi utiliser ce corollaire pour montrer que dans un espace de dimension finie toutes les normes sont équivalentes. Mais on peut le faire plus simplement à la main en usant d'une base de E.

Notons $\mathcal{G}$ le graphe de u *i.e.* la partie de $E \times F$ (E et F sont toujours des espaces de Banach) dont les éléments (x, y) vérifient $y = u(x)$; c'est un sous-espace normé de l'espace de Banach $E \times F$.

2.3. Corollaire (Théorème du graphe fermé). *L'application u est continue si, et seulement si, $\mathcal{G}$ est fermé.*

Démonstration. Supposons u continue. Alors $\mathcal{G}$ est fermé comme noyau de l'application linéaire continue $(x, y) \in E \times F \longrightarrow y - u(x) \in F$. Réciproquement si $\mathcal{G}$ est fermé dans

$E \times F$ il est de Banach. Notons $p : E \times F \longrightarrow E$ la première projection. La restriction de p à $\mathcal{G}$ est continue, bijective puisqu'elle admet pour inverse $x \in E \longrightarrow (x, u(x))$. Celle-ci est donc continue d'après le théorème 2.1 ; par suite u est continue. $\square$

Pour continuer l'étude des propriétés des applications linéaires entre deux espaces normés E et F, nous avons besoin d'introduire certaines topologies sur l'espace vectoriel $\mathcal{L}_c(E, F)$ autres que celle définie par la norme $|||u||| = \sup_{||x|| \leq 1} ||u(x)||$ qu'on appelle la *topologie forte.*

Soit Φ une famille *filtrante* de parties de E *i.e.* $\Phi \subset \mathcal{P}(E)$ et telle que pour tous $A, B \in \Phi$ il existe $C \in \Phi$ contenant $A \cup B$. On appelle Φ-*topologie* sur $\mathcal{L}_c(E, F)$ et on note $\mathcal{T}_\Phi$ la topologie de la convergence uniforme sur les parties de E qui appartiennent à la famille Φ. C'est-à-dire qu'une suite (u_n) dans $\mathcal{L}_c(E, F)$ converge vers 0 au sens de $\mathcal{T}_\Phi$ si pour tout élément $A \in \Phi$ la restriction de (u_n) à A converge uniformément vers 0. Pour cette topologie, chaque élément $u \in \mathcal{L}_c(E, F)$ admet comme base de voisinages la famille de parties de la forme

$$V(u, A, \varepsilon) = \left\{ v \in \mathcal{L}_c(E, F) : \sup_{x \in A} ||u(x) - v(x)|| < \varepsilon \right\}.$$

où $A \in \Phi$ et $\varepsilon > 0$.

Trois familles Φ vont nous intéresser principalement :

i) $\Phi = \mathcal{B} = \{$parties bornées de $E\}$; $\mathcal{T}_\Phi$ n'est alors rien d'autre que la topologie de la convergence uniforme sur les bornés, c'est-à-dire la *topologie de la norme.* On la notera $\mathcal{T}_\mathcal{B}$.

ii) $\Phi = \mathcal{C} = \{$parties compactes de $E\}$; on la notera $\mathcal{T}_\mathcal{C}$; c'est la *topologie de la convergence compacte.*

iii) $\Phi = \mathcal{F} = \{$parties finies de $E\}$; c'est la *topologie de la convergence simple* ou *topologie faible* qu'on notera $\mathcal{T}_\mathcal{F}$.

Comme $\mathcal{F} \subset \mathcal{C} \subset \mathcal{B}$ on a les implications évidentes qui suivent entre les différents types de convergence :

Convergence pour $\mathcal{T}_\mathcal{B} \Longrightarrow$ Convergence pour $\mathcal{T}_\mathcal{C} \Longrightarrow$ Convergence pour $\mathcal{T}_\mathcal{F}$.

Les implications réciproques ne sont pas vraies en général.

On peut voir que *toute partie* $\mathcal{U}$ *bornée dans l'espace normé* $\mathcal{L}_c(E, F)$ *est équicontinue.* Dans le cas où E est un espace de Banach ce résultat reste encore vrai (exercice 5) si $\mathcal{U}$ vérifie la condition plus faible suivante : $\forall x \in E$, $\sup_{u \in \mathcal{U}} ||u(x)|| < +\infty$. On dira que $\mathcal{U}$ est *simplement bornée.*

2.4. Théorème de Banach-Steinhaus. *Soient E un espace de Banach, F un espace normé et (u_n) une suite dans $\mathcal{L}_c(E,F)$ qui converge au sens de la topologie $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$ vers une application linéaire u. Alors $u \in \mathcal{L}_c(E,F)$ et (u_n) converge vers u au sens de la topologie $\mathcal{T}_{\mathcal{C}}$.*

Démonstration. La suite (u_n) converge simplement vers u *i.e.* pour tout $x \in E$, la suite $(u_n(x))$ converge vers $u(x)$ dans F ; elle est donc simplement bornée. D'après l'exercice 6, la famille $\mathcal{U} = (u_n)$ est donc équicontinue, d'où $u \in \mathcal{L}_c(E,F)$. Comme $\overline{\mathcal{U}} = \{u_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{u\}$ est l'adhérence de $\mathcal{U}$ pour la topologie $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$ elle est équicontinue. Par suite les restrictions de $\mathcal{T}_{\mathcal{C}}$ et $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$ à $\overline{\mathcal{U}}$ coïncident (exercice 5) c'est-à-dire (u_n) converge vers u uniformément sur tout compact de E. $\square$

CHAPITRE III

THÉORÈME DE HAHN-BANACH

Les applications linéaires $E \longrightarrow F$ auxquelles nous allons nous intéresser seront les *formes linéaires i.e.* F est le corps de base $\mathbb{K}$. Tout le chapitre sera consacré au *théorème de Hahn-Banach.* Il est au tout premier rang de l'analyse fonctionnelle ! Il admet deux formes. La première, dite *géométrique*, permet de séparer strictement un ensemble convexe fermé d'un ensemble compact fermé par un hyperplan fermé. Sa forme *analytique* assure le prolongement avec conservation de la norme d'une forme linéaire continue dès lors qu'on la connaît sur un sous-espace vectoriel. Avant d'énoncer et de démontrer ce théorème sous ses deux formes, nous ferons quelques rappels sur la convexité et la caractérisation d'une forme linéaire continue à l'aide de son noyau.

1. Préliminaires

1.1. Proposition. *Soient f une forme linéaire non nulle sur un espace normé E et H son noyau. Alors f est continue si, et seulement si, H est fermé.*

Démonstration. Supposons f continue ; alors H est fermé comme image réciproque de $\{0\}$ qui est fermé dans $\mathbb{K}$. Réciproquement, si H est fermé, l'espace quotient E/H est normé. Comme f est non nulle, il existe au moins un vecteur x_0 tel que $f(x_0) = 1$. Alors tout $x \in E$ est équivalent (modulo H) à $f(x)x_0$ puisque :

$$f(x - f(x)x_0) = f(x) - f(x)f(x_0) = 0.$$

Notons $\pi : E \longrightarrow E/H$ la projection canonique ; alors :

$$|f(x)| \cdot ||\pi(x_0)|| = ||\pi(f(x)x_0)|| = ||\pi(x)|| \leq ||x||.$$

Comme $x_0 \notin H$ cette inégalité donne $|f(x)| \leq \frac{||x||}{||\pi(x_0)||}$ *i.e.* f est continue. □

1.2. Proposition. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace normé (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et $f : E \longrightarrow \mathbb{K}$ une forme linéaire sur E de noyau H (qui est un hyperplan de E). Alors si H n'est pas fermé il est forcément dense.*

Démonstration. Soit $\overline{H}$ l'adhérnce de H. Alors H est strictement contenu dans $\overline{H}$ (puisque H n'est pas fermé) ; il existe donc un vecteur $e \in \overline{H}$ tel que $f(e) = 1$. Soit x

un vecteur quelconque de E ; on a $x = (x - f(x)e) + f(x)e$. Posons $x_1 = x - f(x)e$ et $x_2 = f(x)e$; alors clairement $x_2 \in \overline{H}$ et :

$$\begin{aligned} f(x_1) &= f(x - f(x)e) \\ &= f(x) - f(f(x)e) \\ &= f(x) - f(x)f(e) \\ &= f(x) - f(x) \ \text{ puisque } f(e) = 1 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc $x_1 \in H$. Comme $x = x_1 + x_2$ et que $H \subset \overline{H}$, $x \in \overline{H}$; on en conclut que $E \subset \overline{H}$ et par suite $\overline{H} = E$ c'est-à-dire H est dense dans E. $\square$

1.3. Convexité dans un espace vectoriel

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. On dira qu'une partie A de E est *convexe* si $\forall x, x' \in A$ et $\forall t \in [0,1]$ le vecteur $(1-t)x + tx'$ appartient à A. De manière équivalente A est convexe si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, tout $(x_1, \ldots, x_n) \in A^n$ et tout $(t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}_+^n$ tel que $\sum_{i=1}^n t_i = 1$, le vecteur $\sum_{i=1}^n t_i x_i$ est dans A. Par exemple un sous-espace affine, une boule dans un espace normé, le demi-espace $\{x \in E : f(x) \geq \alpha\}$ où f est une forme linéaire réelle et $\alpha \in \mathbb{R}$, un cône $C = \bigcup_{\alpha > 0} \alpha A$ de base une boule $A \subset E$ sont des parties convexes de E. On vérifie sans peine :

- que si A est convexe et si $u : E \longrightarrow F$ est une application affine alors $f(A)$ est un convexe de F ; de même si B est un convexe de F, $u^{-1}(B)$ est un convexe de E,

- toute intersection de convexes est un convexe,

- toute somme de parties convexes de E est un convexe de E.

Soit A une partie de E ; alors l'intersection de toutes les parties convexes de E contenant A est un convexe appelé *enveloppe convexe de* A et est noté habituellement $\widehat{A}$; c'est aussi le plus petit (au sens de l'inclusion) convexe contenant A. On vérifie sans peine que :

$$\widehat{A} = \left\{ \sum_{i=1}^n t_i x_i \;\middle|\; t_i \in \mathbb{R}_+ \ , \sum_{i=1}^n t_i = 1, \ \ x_i \in A, \quad n \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

Dans un espace normé E, on appelle usuellement *enveloppe convexe* de A le plus petit convexe fermé contenant A. L'adhérence et l'intérieur d'une partie convexe sont convexes.

Un hyperplan vectoriel H (sous-espace vectoriel de codimension 1) d'un espace vectoriel réel E peut toujours être considéré comme le noyau de la forme linéaire $\pi : E \longrightarrow E/H = \mathbb{R}$. Soit f une forme affine réelle sur E et posons :

$$E_+(f) = \{x \in E : \ f(x) > 0\} \quad \text{et} \quad E_-(f) = \{x \in E : \ f(x) < 0\},$$

$$\overline{E}_+(f) = \{x \in E : \ f(x) \geq 0\} \quad \text{et} \quad \overline{E}_-(f) = \{x \in E : \ f(x) \leq 0\}.$$

On dira que $H = \{f = 0\}$ *sépare* (resp. *sépare strictement*) deux parties A et B si $A \subset \overline{E}_-(f)$ et $B \subset \overline{E}_+(f)$ (resp. $A \subset E_-(f)$ et $B \subset E_+(f)$).

Dans toute la suite on se donne un espace normé $(E, || \ \ ||)$ (réel ou complexe).

2. Forme géométrique

2.1. Théorème de Hahn-Banach. *Soient U une partie ouverte convexe de E et V un sous-espace affine de E tel que $U \cap V = \emptyset$. Alors il existe un hyperplan affine H fermé tel que $V \subset H$ et $U \cap H = \emptyset$.*
Démonstration. Quitte à effectuer une translation on peut supposer que V est un sous-espace vectoriel. D'autre part nous distinguerons deux cas : E réel et E complexe.

1$^{\text{er}}$ cas : E réel.

Notons $\mathcal{V}$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E qui contiennent V et dont l'intersection avec U est vide. Cet ensemble est ordonné par inclusion.

i) Si $\mathcal{V}_0$ est une partie totalement ordonnée de $\mathcal{V}$, $\bigcup V_0$, où V_0 parcourt $\mathcal{V}_0$, est un sous-espace vectoriel de E qui contient V et qui ne rencontre pas U, donc un élément de $\mathcal{V}$ qui est la borne supérieure de $\mathcal{V}_0$; par suite $\mathcal{V}$ est *inductif* ; d'après le lemme de Zorn il admet un élément maximal M. Le sous-espace M est nécessairement fermé ; en effet comme U est ouvert et vérifie $U \cap M = \emptyset$ l'adhérence $\overline{M}$ de M ne rencontre pas non plus U ; ce qui contredirait le caractère de maximalité de M s'il n'était pas fermé.

ii) L'espace quotient E/M est normé ; notons $\pi : E \longrightarrow E/M$ la projection canonique et C le cône ouvert de base $\pi(U)$ dans E/M. Comme M est un sous-espace vectoriel qui ne rencontre pas U, $0 \notin C$.

iii) L'espace E/M est de dimension 1. Supposons le contraire. Alors $(E/M) - \{0\}$ est une partie connexe de E/M et comme elle est différente de C, la frontière $Fr(C)$ de C (l'adhérence de C moins son intérieur) contient un point X. Ce point X ne peut pas appartenir à $-C = \{-Z | Z \in C\}$; en effet si $-C$ contenait X, il serait un voisinage de X puisqu'il est ouvert ; par suite il existerait $\varepsilon > 0$ tel que la boule $B(X, \varepsilon) \subset -C$; d'autre part comme X est adhérent à C cette boule contiendrait un point Y de C ; donc $Y \in C$ et $Y \in -C$ c'est-à-dire Y et $-Y$ sont dans C ; comme C est convexe (c'est un cône de base une partie convexe), $0 \in C$, ce qui n'est pas le cas comme on l'a démontré en ii). Soit V_X le sous-espace vectoriel engendré par X ; il est strictement contenu dans E/M et ne rencontre pas le cône C, donc $H = \pi^{-1}(V_X)$ contient strictement M et ne rencontre pas l'ouvert U. Ce qui contredit encore une fois la maximalité de M.

iv) L'espace quotient E/M est donc normé de dimension 1 tel que C ne contient pas 0 *i.e.* M est un hyperplan fermé ne rencontrant pas U. On prend $H = M$.

$2^{\text{ème}}$ cas : E complexe.

L'espace E est en particulier un espace vectoriel réel. D'après ce qui précède il existe un hyperplan réel fermé H_0 de l'espace réel E qui ne rencontre pas U. Comme V est un sous-espace vectoriel complexe de E, il est stable par l'automorphisme $x \in E \longmapsto ix \in E$ *i.e.* $V = iV$. Par conséquent $H = H_0 \cap iH_0$ est un sous-espace vectoriel complexe fermé de codimension complexe 1 (car de codimension réelle 2) qui contient V et qui ne rencontre pas U. Ce qui termine la démonstration de la version géométrique du théorème de Hahn-Banach. □

Une autre version de la séparation entre ensembles convexes est donnée par le théorème qui suit.

2.2. Théorème. *Supposons E réel. Soient C et K deux parties convexes disjointes de E avec C fermée et K compacte. Alors C et K sont strictement séparées par un hyperplan affine fermé H.*

Démonstration. La distance $\delta = \inf_{c \in C, k \in K} ||c - k||$ entre les deux fermés disjoints C et K est strictement positive. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon < \delta$; alors l'ensemble $U = C - K + B(0, \varepsilon)$ est égal à $\bigcup_{c \in C, k \in K} \{c - k + B(0, \varepsilon)\}$. C'est donc un ensemble convexe ouvert de E (convexe parce que somme de convexes et ouvert parce que réunion d'ouverts). Il ne contient pas l'origine car pour $c \in C$, $k \in K$ et $b \in B(0, \varepsilon)$ on a :

$$\begin{aligned} ||c - k + b|| &\geq \big| ||c - k|| - ||b|| \big| \\ &\geq |\delta - \varepsilon| > 0. \end{aligned}$$

D'après le théorème 2.1, il existe un hyperplan vectoriel H, noyau d'une forme linéaire continue f, qui ne rencontre pas U ($\{0\}$ joue le rôle du sous-espace V). Supposons que $f_{|U} > 0$ *i.e.* pour tout $c \in C$, tout $k \in K$ et tout $b \in B(0, \varepsilon)$, $f(c) - f(k) + f(b) > 0$ ou encore $f(k) - f(b) < f(c)$. Cette inégalité étant vraie pour c, k et b variant de manière indépendante on aura :

$$\text{(III.1)} \qquad \sup_{k\in K} f(k) + \sup_{||b||\leq\varepsilon} f(b) \leq \inf_{c\in C} f(c).$$

Mais $\sup_{||b||\leq\varepsilon} f(b) = \varepsilon||f||$ (parce que f est une forme linéaire continue sur E). Le nombre : $\sup_{k\in K} f(k)$ existe bien car f est continue et K compact ; l'inégalité (III.1) implique donc que $\inf_{c\in C} f(c)$ existe bien. On aura donc :

$$\text{(III.2)} \qquad \inf_{c\in C} f(c) - \sup_{k\in K} f(k) \geq \varepsilon||f||.$$

Ceci montre aisément qu'il existe un réel α tel que :

$$K \subset \{x \in E \ \ : f(x) < \alpha\} \quad \text{et} \quad C \subset \{x \in E \ \ : f(x) > \alpha\}$$

i.e. K et C sont strictement séparés par l'hyperplan réel affine fermé d'équation $f(x) = \alpha$. □

De ce théorème on tire le

2.3. Corollaire. *Toute partie convexe fermée C de E est l'intersection des demi-espaces fermés qui la contiennent.*

Démonstration. Soit a un point de E n'appartenant pas à C. On applique le théorème 3.4 au fermé convexe C et au compact convexe $\{a\}$: il existe une forme affine continue f_a telle que $C \subset \overline{E}_+(f_a)$ et $\{a\} \subset \overline{E}_-(f_a)$. Il est alors clair que l'ensemble $\displaystyle\bigcap_{a\in E-C} \overline{E}_+(f_a)$ est fermé et est égal à C. □

3. Forme analytique

3.1. Théorème de Hahn-Banach. *Soient V un sous-espace normé de E non réduit à $\{0\}$ et f une forme linéaire continue non nulle sur V. Alors il existe une forme linéaire continue $\widetilde{f}$ sur E telle que*

i) $\widetilde{f}_{|V} = f$,

ii) $|||\widetilde{f}||| = |||f|||$.

Démonstration. D'abord on peut supposer que V est fermé sinon on prolonge à l'adhérence $\overline{V}$ via le théorème 1.4 du chapitre II. D'autre part, la démonstration distinguera le cas réel du cas complexe. On supposera bien sûr $V \neq E$.

1^{er} cas : E réel.

i) Soit $x_0 \in E - V$ et posons $M_1 = V \oplus \mathbb{R}x_0$. Soit f_1 la forme linéaire sur M_1 définie par $f_1(x + \lambda x_0) = f(x) + \lambda\alpha$ où α est un nombre réel qui est l'image de x_0 par f_1 et qu'on choisira de telle sorte que la norme de f_1 soit égale à celle de f. Il faut donc, et il suffit, d'avoir :

$$|f_1(x + \lambda x_0)| \leq |||f|||.||x + \lambda x_0||$$

pour tout $x \in V$ et tout réel λ ; ce qui est encore équivalent à :

$$|f(x) - \alpha| \leq |||f|||.||x - x_0|| \tag{III.3}$$

pour tout $x \in V$, c'est-à-dire :

$$f(x) - |||f|||.||x - x_0|| \leq \alpha \leq f(x) + |||f|||.||x - x_0|| \tag{III.4}$$

pour tout $x \in V$. Posons :

$$A_x = f(x) - |||f|||.||x - x_0|| \quad \text{et} \quad B_x = f(x) + |||f|||.||x - x_0||.$$

Alors α vérifiant (III.4) existe si, et seulement si, les intervalles $[A_x, B_y]$ ont un point commun pour tous $x, y \in V$. Mais :

$$\begin{aligned} f(x) - f(y) &= f(x - y) \\ &\leq |||f|||.||x - y|| \\ &\leq |||f|||.\left(||x - x_0|| + ||y - x_0||\right). \end{aligned}$$

Ce qui donne l'inégalité $A_x \leq B_y$ pour tous $x, y \in V$. Le nombre α peut donc être choisi de telle sorte que f_1 soit continue et de norme égale à celle de f.

ii) Soit maintenant $\mathcal{V}$ l'ensemble de tous les couples (V', f') où V' est un sous-espace vectoriel de E contenant V et f' est une extension continue de f à V' telle que $|||f'||| = |||f|||$. On munit $\mathcal{V}$ de l'ordre partiel suivant :

$$(V', f') \leq (V'', f'')$$

si, et seulement si, $V' \subset V''$ et f'' est un prolongement continu de f'. Si $\mathcal{V}_0$ est une partie totalement ordonnée de $\mathcal{V}$ on pose

$$V_\infty = \bigcup_{V_0 \in \mathcal{V}_0} V_0.$$

Alors V_∞ est un sous-espace de E contenant V. Si $x \in V_\infty$ il existe $(V_0, f_0) \in \mathcal{V}_0$ tel que $x \in V_0$; on pose alors $f_\infty(x) = f_0(x)$. L'élément (V_∞, f_∞) est donc bien dans $\mathcal{V}$ et est une borne supérieure de $\mathcal{V}_0$; autrement dit, l'ensemble ordonné $\mathcal{V}$ est inductif. D'après le lemme de Zorn, il admet un élément maximal (V_M, f_M).

iii) V_M est forcément fermé sinon on prolonge à l'adhérence$\overline{V}_M$; d'autre part $E = V_M$; si ce n'était pas le cas il existerait d'après i) un sous-espace contenant strictement V_M sur lequel f_M se prolonge en une forme linéaire continue en conservant sa norme ; ce qui contredit le caractère de maximalité de (V_M, f_M). Le prolongement cherché est obtenu donc en posant $\widetilde{f} = f_M$.

2ème cas : E complexe.

On regarde E et V comme des espaces vectoriels réels et on note u la partie réelle de f qui est continue et a même norme que f (*cf.* exercice 9). D'après le 1er cas, u se prolonge en une forme linéaire continue réelle $\widetilde{u}$ sur l'espace vectoriel réel E ayant même norme que u. L'application $\widetilde{f} : E \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par :

$$\widetilde{f}(x) = \widetilde{u}(x) - i\widetilde{u}(ix)$$

est une forme $\mathbb{C}$-linéaire continue prolongeant f et de même norme. □

Le corollaire qui suit donne une conséquence intéressante de la forme analytique du théorème de Hahn-Banach.

3.2. Corollaire. *Soit x_0 un vecteur non nul de E. Alors il existe sur E une forme linéaire continue f telle que $f(x_0) = ||x_0||$ et $|||f||| = 1$.*

Démonstration. Soit V le sous-espace vectoriel de E engendré par x_0 *i.e.* l'ensemble des éléments de la forme λx_0 où $\lambda \in \mathbb{K}$. Posons $f_0(\lambda x_0) = \lambda ||x_0||$. Alors f_0 est une forme linéaire continue sur V de norme $|||f_0||| = 1$; d'après le théorème 3.1, elle se prolonge en une forme linéaire continue f sur E de norme 1. □

Ceci dit en particulier que si l'espace E n'est pas réduit à $\{0\}$, son *dual topologique* E' n'est pas non plus réduit à $\{0\}$.

3.3. Corollaire. *Soit V un sous-espace vectoriel de E. Alors V est dense si, et seulement si, toute forme linéaire continue sur E nulle sur V est nulle.*

Démonstration. Si V est dense alors, de façon évidente, une forme linéaire continue sur E nulle sur V est nulle. Inversement supposons que l'adhérence $\overline{V}$ de V soit strictement contenue dans E. Il existe alors $x_0 \in E - \overline{V}$ (non nul bien sûr). D'après le corollaire 3.2, il existe une forme linéaire continue sur $\overline{V} \oplus \mathbb{K}x_0$ nulle sur V et valant 1 en x_0 : il suffit de poser $f(v + \lambda x_0) = \lambda ||x_0||$ où $v \in \overline{V}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Par le théorème de Hahn-Banach (version analytique), f se prolonge en une forme linéaire continue $\widetilde{f}$ sur E, non nulle mais nulle sur V. Ce qui démontre le corollaire. □

4. Exemples

Nous allons donner des exemples précis de formes linéaires continues sur certains espaces de fonctions.

4.1. Formes linéaires positives

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. On rappelle qu'une partie E de Ω est dite *négligeable* s'il existe $A \in \mathcal{A}$ contenant E tel que $\mu(A) = 0$. On dira que la tribu $\mathcal{A}$ est *complète* pour μ si tout $E \subset \Omega$ vérifiant $A \subset E \subset B$ avec $A, B \in \mathcal{A}$ et $\mu(A - B) = 0$, appartient à $\mathcal{A}$; en particulier si E est négligeable, $E \in \mathcal{A}$. *Pour tout espace mesuré $(\Omega, \mathcal{A})$ il existe une tribu $\mathcal{A}^*$ contenant $\mathcal{A}$ et une mesure μ^* sur $\mathcal{A}^*$ qui prolonge μ et telles μ^* soit complète pour $\mathcal{A}^*$.*

Pour tout espace mesuré $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ et tout $p \geq 1$, on note comme toujours $L^p(\Omega, \mu)$ l'espace des classes (modulo l'égalité en dehors des ensembles de mesure nulle) de fonctions complexes mesurables de puissance $p^{\text{ème}}$ intégrable muni de la norme :

$$||g||_p = \left(\int_\Omega |g|^p d\mu(\omega) \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Pour $p = \infty$ on notera $L^\infty(\Omega, \mu)$ l'espace des classes de fonctions *μ-essentiellement bornées* sur Ω *i.e.* le quotient de :

$$\mathcal{L}^\infty(\Omega, \mu) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C} \text{ mesurable et bornée } \mu\text{-pp}\}$$

par l'espace $\mathcal{N}$ des fonctions mesurables μ-pp partout nulles. On le munit de la norme qui suit :

$$||f||_\infty = \inf \{\alpha \in \mathbb{R}_+ \ : \ |f| \leq \alpha \ \mu\text{-pp}\}.$$

C'est effectivement une norme sur $L^\infty(\Omega, \mu)$ et elle en fait un espace de Banach.

L'application $I : L^1(\Omega, \mu) \longrightarrow \mathbb{C}$ qui à g associe :

$$I(g) = \int_\Omega g(\omega) d\mu(\omega)$$

est une forme linéaire continue de norme 1 sur $L^1(\Omega, \mu)$. Elle vérifie en plus la propriété suivante : si g est réelle positive, $I(g)$ est un réel positif. On dira que I est une *forme linéaire positive*. Nous allons voir que pour certains espaces normés toutes les formes linéaires positives sont données par une intégrale associée à une certaine mesure.

Soient X un espace topologique séparé localement compact et $\mathcal{B}$ sa tribu borélienne (celle engendrée par les ouverts). Une mesure μ sur $\mathcal{B}$ est dite *régulière* si elle vérifie, pour tout $E \in \mathcal{B}$:

$$\mu(E) = \inf\{\mu(U) : \quad E \subset U, \quad U \text{ ouvert}\}$$

et pour tout $E \in \mathcal{B}$ de mesure finie :

$$\mu(E) = \sup\{\mu(K) : \quad K \subset E, \quad K \text{ compact}\}.$$

On rappelle que le support d'une fonction est l'adhérence de l'ensemble des points en lesquels elle n'est pas nulle. Notons $\mathcal{K}(X)$ l'espace des fonctions continues sur X à support compact muni de la norme $||g||_\infty = \sup_{x \in X} |g(x)|$. Une forme linéaire continue positive sur $\mathcal{K}(X)$ est appelée *mesure de Radon* sur X. Toute mesure μ sur $\mathcal{B}$ donne via l'intégrale une forme linéaire continue positive sur $\mathcal{K}(X) \subset L^1(X, \mu)$. La réciproque est connue sous le nom de *théorème de représentation de Riesz.* Sa démonstration est hautement non triviale ; nous nous contenterons de son énoncé.

4.2. Théorème de représentation de Riesz. *Soit F une forme linéaire continue positive sur $\mathcal{K}(X)$. Alors il existe une tribu $\mathcal{B}^*$ contenant $\mathcal{B}$, complète pour une mesure régulière μ finie sur les compacts, telle que :*

$$F(g) = \int_X g d\mu, \qquad \forall g \in \mathcal{K}(X).$$

CHAPITRE IV

DUALITÉ DANS LES ESPACES NORMÉS

L'objet de ce chapitre est d'étudier certaines relations entre un espace normé E, son dual topologique E' et son bidual E'' au moyen de deux topologies (la première dite *faible* sur E' et la deuxième dite *affaiblie* sur E). Nous verrons en particulier que même en dimension infinie les ensembles bornés de E' jouissent de très bonnes propriétés dans le cas où E est un espace de Banach. Les notions de transposition et de réflexivité sont introduites de façon non exhaustive.

1. Définitions et propriétés diverses

Pour deux espaces normés E et F réels ou complexes, on notera toujours $\mathcal{L}_c(E,F)$ l'espace des applications linéaires continues de E dans F muni de la norme :

$$|||u||| = \sup_{||x||\leq 1} ||u(x)||.$$

Pour $F = \mathbb{K}$, $\mathcal{L}_c(E,\mathbb{K})$ n'est rien d'autre que le dual topologique de E qu'on note simplement E' ; c'est un sous-espace vectoriel du dual algébrique E^* (l'ensemble de toutes les formes linéaires continues ou non).

La valeur d'une forme linéaire continue x' au point $x \in E$ sera notée $\langle x, x'\rangle$. On obtient donc une forme bilinéaire $(x,x') \in E \times E' \longrightarrow \langle x, x'\rangle \in \mathbb{K}$ continue de norme ≤ 1 puisque $|\langle x, x'\rangle| \leq |||x'|||.||x||$. En utilisant le théorème de Hahn-Banach, on montre que la norme de cette forme bilinéaire est en fait 1 et qu'on a :

$$(\langle x, x'\rangle = 0, \quad \forall x' \in E') \Longrightarrow x = 0. \tag{IV.1}$$

On dira alors que E et E' sont en *dualité séparante*. Rappellons que dans $E' = \mathcal{L}_c(E,\mathbb{K})$ il y a différentes topologies :

- la topologie de la norme ou la topologie forte notée $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$,

- la topologie faible $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$ qu'on notera dorénavant $\sigma(E',E)$ (c'est l'usage). C'est la topologie la moins fine sur E' qui rend continues toutes les formes linéaires :

$$x' \in E' \xrightarrow{\varphi_x} \langle x, x'\rangle \in \mathbb{K}$$

où x varie dans E.

Rappellons qu'un voisinage de $0 \in E'$ pour cette topologie contient une intersection finie de parties de la forme $V(0,x,\varepsilon) = \{x' \in E' \ : \ |\langle x, x'\rangle| < \varepsilon\}$ avec x dans E et ε dans $\mathbb{R}_+^*$. La proposition suivante est immédiate.

1.1. Proposition. *Le dual topologique E' de E s'identifie canoniquement au dual topologique $\widehat{E}'$ de son complété $\widehat{E}$.*

Bien que $\widehat{E}' = E'$ la topologie $\sigma(\widehat{E}', \widehat{E})$ sur $\widehat{E}'$ peut être strictement plus fine que la topologie $\sigma(E', E)$ sur E'. Ceci découle de la proposition qui suit qui donne une caractérisation des formes linéaires continues sur E' lorsqu'on le munit de la topologie $\sigma(E', E)$.

1.2. Proposition. *Soit f une forme linéaire sur E' continue pour la topologie $\sigma(E', E)$. Alors il existe $x \in E$ tel que, pour tout $x' \in E'$, $f(x') = \langle x, x'\rangle$.*

Démonstration. Comme f est continue sur E' pour la topologie $\sigma(E', E)$ l'ensemble :

$$\{x' \in E' \ : \ |f(x')| \leq 1\}$$

contient un voisinage de 0. Il existe donc un ensemble fini $\{x_1, \ldots, x_k\} \subset E$ et une constante réelle $C > 0$ tels que :

$$|f(x')| \leq C \sup_{i=1,\ldots,k} |\langle x_i, x'\rangle|. \tag{IV.2}$$

Par conséquent si on a $\langle x_i, x'\rangle = 0$ pour tout $i = 1, \ldots, k$ alors $f(x') = 0$. Donc $f = 0$ sur l'intersection des noyaux des formes linéaires $x' \longmapsto \langle x_i, x'\rangle$; par suite f est une combinaison linéaire finie avec des coefficients λ_i des formes linéaires $x' \longrightarrow \langle x_i, x'\rangle$ (*cf.* exercice 8). On peut donc prendre $x = \sum_i \lambda_i x_i$. □

On voit donc que les seules formes linéaires sur E' continues pour $\sigma(E', E)$ sont du type $x' \longmapsto \langle x, x'\rangle$ pour un certain $x \in E$. Par conséquent si E n'est pas complet il existe $\widehat{x} \in \widehat{E} - E$ tel que la forme linéaire $x' \in E' = \widehat{E}' \longrightarrow \langle \widehat{x}, x'\rangle \in \mathbb{K}$ ne soit pas continue pour $\sigma(E', E)$.

Les espaces E et E' jouent des "rôles presque symétriques" ; il est donc possible de définir sur E des topologies similaires à celles définies sur E'. D'abord E est un espace normé ; la topologie associée sera appelée la *topologie initiale*. Ensuite on peut considérer la topologie la moins fine sur E qui rend continues toutes les formes linéaires sur E déjà continues pour la topologie initiale ; cette topologie sera appelée la *topologie affaiblie* et notée $\sigma(E, E')$ (les rôles de E et E' sont intervertis en quelque sorte).

Il résulte de la définition même de $\sigma(E, E')$ que

- les formes linéaires continues sur E pour la topologie initiale sont les mêmes que les formes linéaires sur E continues pour la topologie affaiblie,

- les fermés convexes pour la topologie initiale et la topologie affaiblie sont les mêmes. Ceci découle de ce qui précède et du fait que tout convexe fermé est intersection des demi-espaces fermés qui le contiennent.

Rappellons qu'une partie $A \subset E$ (resp. une partie $A' \subset E'$) est dite *bornée* s'il existe $\rho > 0$ (resp. $\rho' > 0$) tel que $A \subset B(0, \rho)$ (resp. $A' \subset B'(0, \rho')$).

On peut donner la notion d'ensemble borné pour les deux autres topologies sur E et E' qui ne sont pas associées aux normes c'est-à-dire $\sigma(E, E')$ et $\sigma(E', E)$.

- Une partie A de E est dite *bornée pour* $\sigma(E, E')$ si pour tout $x' \in E'$ on a :

$$\sup_{x \in A} |\langle x, x' \rangle| < +\infty$$

- De la même manière, une partie A' de E' est *faiblement bornée* si pour tout $x \in E$ on a :

$$\sup_{x' \in A'} |\langle x, x' \rangle| < +\infty.$$

1.3. Proposition. *Soit A' une partie de E'. Alors*

i) A' est bornée si, et seulement si, A' est équicontinue ;

ii) si A' est équicontinue, elle est relativement compacte pour la topologie faible.

Démonstration. i) A' bornée signifie que $\sup_{x' \in A'} |||x'||| \leq C$ où C est une constante réelle positive. Ce qui implique de manière immédiate l'équicontinuité de A'. La réciproque est évidente.

ii) D'après i) A' est bornée, donc faiblement bornée *i.e.* pour tout $x \in E$ l'ensemble des scalaires $\{\langle x, x' \rangle : x' \in A'\}$ est borné, donc relativement compact. D'après le théorème d'Ascoli A' est relativement compacte pour la topologie de la convergence compacte sur E'qui est plus fine que la topologie faible, donc A' est relativement compacte pour la topologie $\sigma(E', E)$. □

Ceci nous permet de démontrer le

1.4. Théorème. *La boule unité fermée B' de E' est faiblement compacte i.e. compacte pour la topologie faible.*

Démonstration. Pour tout $x \in E$ on note $\varphi_x : E' \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $\varphi_x(x') = |\langle x, x' \rangle|$. Alors φ_x est une fonction semi-continue inférieurement sur E' pour la topologie faible. En effet d'après la définition de $\sigma(E', E)$ pour tout $\varepsilon > 0$ l'ensemble $V(0, x, \varepsilon) = \{x' \in E' \ : \ |\langle x, x'\rangle| \leq \varepsilon\}$ est fermé dans E'. Donc l'enveloppe supérieure de la famille $(\varphi_x)_{||x||\leq 1}$, qui n'est rien d'autre que l'application $x' \longmapsto |||x'|||$, est semi-continue inférieurement (*cf.* exercice 10). La boule unité fermée B' est donc faiblement fermée ; comme elle est bornée, elle est faiblement compacte. $\square$

Si l'espace E est séparable, B' est faiblement compacte si, et seulement si, de toute suite (x'_n) on peut extraire une sous-suite (x'_{n_k}) faiblement convergente : il existe un élément $x' \in B'$ tel que, pour tout $x \in E$, la suite numérique $(\langle x, x'_{n_k}\rangle)$ converge vers $\langle x, x'\rangle$.

L'exercice 11 montre que dans le dual E' d'un espace E normé il peut exister des ensembles faiblement bornés mais non bornés. Cela ne saurait se produire si l'espaces E est de Banach.

1.5. Proposition. *Soient E un espace de Banach et A' une partie de E'. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

i) A' est bornée,

ii) A' est faiblement bornée,

iii) A' est équicontinue.

Démonstration. Les assertions i) et iii) sont équivalentes même si E n'est pas complet; c'est la proposition 1.3. Il est d'autre part évident que i) implique ii). L'implication ii)$\Longrightarrow$ *i*) découle de l'exercice 6. $\square$

2. Réflexivité

Le fait que le dual E' d'un espace normé soit un espace de Banach va nous permettre de donner certaines propriétés sur le dual E'' de E' qu'on appelle le *bidual* de E. Soit $x \in E$ et considérons l'*application d'évaluation* en x :

$$\Phi_x : E' \longrightarrow \mathbb{K}$$

définie par $\Phi_x(x') = \langle x, x'\rangle$.

2.1. Proposition. *Pour tout $x \in E$ l'application Φ_x est une forme linéaire continue de norme $||x||$ sur l'espace E', donc un élément du bidual E'' de E. De plus l'application $x \longmapsto \Phi_x$ est une injection isométrique de E dans E''.*

Démonstration. Le fait que Φ_x soit une forme linéaire continue de norme $\leq ||x||$ sur E' est évident. Pour montrer que $|||\Phi_x||| = ||x||$, il suffit d'appliquer le corollaire 3.2

du chapitre III. Ceci montre aussi que l'application Φ est une injection isométrique de l'espace normé E dans l'espace normé E''. Autrement dit E est un sous-espace normé de E''. $\square$

On peut remarquer que la topologie faible $\sigma(E'', E')$ sur E'' induit la topologie affaiblie sur E.

2.2. Définition. *On dira qu'un espace normé E est* ***réflexif*** *si l'application naturelle $\Phi : E \longrightarrow E''$ est un isomorphisme topologique.*

Comme le dual d'un espace normé est toujours de Banach, E'' est de Banach ; donc une condition nécessaire (et en général non suffisante) pour que E soit réflexif est qu'il soit complet.

2.3. Théorème. *Pour qu'un espace de Banach E soit réflexif il faut, et il suffit, que sa boule unité fermée soit compacte pour la topologie affaiblie $\sigma(E, E')$.*

Ce théorème, dû à Banach et qui donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'un espace de Banach soit réflexif, est en fait utilisé pour prouver que la boule unité fermée est compacte pour la topologie $\sigma(E, E')$ qui est toujours un fait loin d'être trivial.

2.4. Exemple d'espace réflexif

Pour tout réel $p > 1$ on note $E_p = \ell^p$ l'espace des suites réelles de puissance $p^{\text{ème}}$ sommable muni de la norme :

$$||x||_p = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Soient $p > 1$ et $q > 1$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ et $\Phi : x \in E_q \longrightarrow \Phi_x \in E'_p$ définie par :

$$\Phi_x(y) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n y_n.$$

D'après l'inégalité de Hölder, cette somme a bien un sens et on a :

$$|\Phi_x(y)| \leq ||x||_q ||y||_p.$$

Ceci montre que Φ_x est bien une forme linéaire continue sur E_p de norme :

$$|||\Phi_x||| \leq ||x||_q. \qquad \text{(IV.3)}$$

Il est clair d'autre part que $\Phi_{x_1+x_2} = \Phi_{x_1} + \Phi_{x_2}$ et $\Phi_{\lambda x} = \lambda\Phi_x$ *i.e.* Φ est linéaire.

i) Montrons que Φ est une isométrie de E_q dans E'_p. Soient $x = (x_n)$ une suite de réels, $n \in \mathbb{N}$ et $Y_n = (y_{nk})_{k\in\mathbb{N}}$ l'élément de E_p défini comme suit

(IV.4) $$y_{nk} = \begin{cases} 0 & \text{si } k > n \text{ ou } 0 \le k \le n \text{ et } x_k = 0 \\ x_k|x_k|^{q-2} & \text{si } 0 \le k \le n \text{ et } x_k \neq 0. \end{cases}$$

Supposons que $x \in E_q$. Alors on a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} |x_k|^q &= |\Phi_x(Y_n)| \\ &\le |||\Phi_x||| \left(\sum_{k=0}^{n} |x_k|^{(q-1)p} \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Comme $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ on a $q = (q-1)p$. Ce qui donne :

$$\sum_{k=0}^{n} |x_k|^q \le |||\Phi_x||| \left(\sum_{k=0}^{n} |x_k|^q \right)^{\frac{1}{p}}$$

c'est-à-dire :

(IV.5) $$\left(\sum_{k=0}^{n} |x_k|^q \right)^{\frac{1}{q}} \le |||\Phi_x|||.$$

Comme le second membre de (IV.5) ne dépend pas de n on a :

(IV.6) $$||x||_q \le |||\Phi_x|||.$$

Les inégalités (IV.3) et (IV.6) montrent que $||\Phi_x|| = ||x||_q$ et donc que Φ est une isométrie ; elle est donc injective.

ii) Montrons que Φ est surjective. Soient $f \in E'_p$ et $(e_n)_n$ la suite d'éléments de E_p tels que $e_n = (\delta_n^k)_k$ où δ_n^k est le symbole de Kronecker. Posons $x_n = f(e_n)$ et notons Y_n l'élément de E_p défini par (IV.4). On a clairement

$$Y_n = \sum_{k=0}^{n} y_{nk} e_k.$$

D'où

$$f(Y_n) = \sum_{k=0}^{n} y_{nk} f(e_k) = \sum_{k=0}^{n} y_{nk} x_k = \sum_{k=0}^{n} |x_k|^q.$$

Ce qui donne :

$$\left| \sum_{k=0}^{n} |x_k|^q \right| \leq |||f|||.||Y_n||_p.$$

Un raisonnement analogue à celui fait en i) montre que $||x||_q \leq |||f|||$. Autrement dit $x \in E_q$. Par construction de x on a $\Phi_x(e_n) = f(e_n)$. Les formes linéaires continues Φ_x et f coincident sur tous les e_n donc sur le sous-espace V engendré algébriquement par les e_n (c'est-à-dire les combinaisons linéaires finies des e_n), par suite sur l'adhérence de V qui n'est rien d'autre que E_p.

iii) On vient donc de montrer que, pour $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, le dual de ℓ^p est isométrique à ℓ^q ; donc le bidual de ℓ^p (qui est le dual de ℓ^q) est isométrique à ℓ^p. L'espace de Banach ℓ^p est donc réflexif pour $p \in]1, +\infty[$. $\square$

2.5. Un espace de Banach non réflexif

Nous venons de voir que l'espace de Banach ℓ^p, $p \in]1, +\infty[$ est réflexif. Nous allons montrer que ℓ^1 ne l'est pas. Pour cela nous allons montrer que le dual de ℓ^1 est isométrique à ℓ^∞ (espace des suites réelles (ou complexes) bornées muni de la norme $||x||_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$) mais que le dual de ℓ^∞ n'est pas ℓ^1.

i) Soit $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un élément de ℓ^∞. Considérons l'application linéaire Φ_x : $\ell^1 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie en $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\Phi_x(y) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n y_n.$$

La série converge bien puisque la suite x_n est bornée et la suite y_n sommable. De façon évidente on a :

$$|\Phi_x(y)| \leq ||x||_\infty \cdot ||y||_1$$

qui montre bien que Φ_x est une forme linéaire continue de norme inférieure ou égale à $||x||_\infty$. On a donc une application linéaire $\Phi : x \in \ell^\infty \longrightarrow \Phi_x \in (\ell^1)'$ vérifiant $|||\Phi_x||| \leq ||x||_\infty$; Φ est injective car si $\Phi_x = 0$, alors en évaluant Φ_x sur les vecteurs $e^k = (\delta_n^k)_{k\in\mathbb{N}}$, $k \in \mathbb{N}$ on montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $x_n = 0$. Reste à montrer qu'elle vérifie $|||\Phi_x||| \geq ||x||_\infty$ et qu'elle est surjective. Cette dernière propriété s'établit de manière analogue à ce qui a été fait pour l'espace ℓ^p, $p > 1$; elle sera laissée au lecteur. Reprenons la suite $(e^k)_{k\in\mathbb{N}}$ avec $e^k = (\delta_n^k)_{k\in\mathbb{N}}$; on a pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} |x_k| &= |\Phi_x(e^k)| \\ &\leq |||\Phi_x||| \cdot ||e^k||_1 \\ &\leq |||\Phi_x|||. \end{aligned}$$

D'où $||x||_\infty \leq |||\Phi_x|||$. On a donc montré que le dual de ℓ^1 est isométrique à ℓ^∞. $\square$

ii) Soit V le sous-espace de ℓ^∞ dont les éléments sont les suites $x = (x_n)$ qui admettent une limite quand n tend vers $+\infty$. Soit $\theta : V \longrightarrow \mathbb{R}$ la forme linéaire <u>non nulle</u> définie par $\theta(x) = \lim_{n\to+\infty} x_n$. On a $|\theta(x)| \leq ||x||_\infty$ et $|\theta(\delta)| = 1$ où δ est l'élément de ℓ^∞ dont tous les termes sont égaux à 1. Il en résulte que θ est continue de norme égale à 1. D'après le théorème de Hahn-Banach θ se prolonge en une forme linéaire continue $\widetilde{\theta} : \ell^\infty \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $|||\widetilde{\theta}||| = |||\theta|||$. Soit e^k l'élément $e^k = (e_n^k)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $e_n^k = \delta_n^k$; il appartient à tous les espaces ℓ^1, ℓ^∞ et V. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$\widetilde{\theta}(e^k) = \theta(e^k) = \lim_{n\to+\infty} e_n^k = 0.$$

Soit $\Psi : \ell^1 \longrightarrow (\ell^1)''$ l'application évaluation qui est une injection isométrique de ℓ^1 dans son bidual $(\ell^1)''$. D'après i), $(\ell^1)'$ est isométrique à ℓ^∞, via l'application $\Phi : \ell^\infty \longrightarrow (\ell^1)'$. Nous allons montrer que $\widetilde{\theta}$ ne peut pas être dans l'image de Ψ. Pour cela il suffit de montrer que, pour tout $x \in \ell^1$ non nul, Ψ_x est non nulle sur au moins l'un des $\Phi(e^k)$. Ce qui établira que $\widetilde{\theta}$ n'est pas de la forme Ψ_x avec $x \in \ell^1$.

Comme $(e^k)_k$ est une base de ℓ^1, pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'application $\xi_k : \ell^1 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\xi_k(e^j) = \delta_k^j$ est une forme linéaire continue de norme 1. On a clairement $\xi_k = \Phi(e^k)$ et donc $\Psi_{e^j}(\xi_k) = \delta_n^j$. Soit $x \in \ell^1$ non nul ; alors $x = \sum_{n=0}^\infty a_k e^k$ où (a_k) est une suite sommable avec un a_{k_0} non nul. Alors $\Psi_x(\xi_{k_0}) = a_{k_0} \neq 0$. Ce qui termine la démonstration. $\square$

2.6. Un espace de Banach non séparable

Montrons que ℓ^∞ est non séparable ; il suffit pour cela de montrer que pour toute suite $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ avec $x^k = (x_n^k)_{n\in\mathbb{N}}$ il existe un élément $z \in \ell^\infty$ non adhérent à l'ensemble $\{x^k : k \in \mathbb{N}\}$. Posons :

$$z_n = \begin{cases} 0 & \text{si } |x_n^n| \geq 1 \\ 1 + |x_n^n| & \text{si } |x_n^n| < 1 \end{cases}$$

Il est clair que $z = (z_n)$ est un élément de ℓ^∞. Calculons la distance de z à un élément x^s. Comme $||z - x^s||_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |z_n - x^s_n|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$||z - x^s||_\infty \geq |z_n - x^s_n|.$$

En particulier pour $n = s$ on a :

$$||z - x^s||_\infty \geq |z_s - x^s_s|.$$

Mais

$$\begin{aligned} |z_s - x^s_s| &\geq \big||z_s| - |x^s_s|\big| \\ &\geq 1 \end{aligned}$$

et donc $||z - x^s||_\infty \geq 1$. □

2.7. Proposition. *Soit A une partie de E. Alors A est bornée si, et seulement si, elle est bornée pour la topologie affaiblie.*

Démonstration Si A est bornée, il est clair qu'elle est bornée pour la topologie affaiblie puisque pour tout $x' \in E'$:

$$\sup_{x \in A} |\langle x, x' \rangle| \leq \left(\sup_{x \in A} ||x|| \right) |||x'||| < +\infty.$$

Inversement supposons A bornée pour la topologie affaiblie ; elle est alors bornée pour la topologie faible sur E'' (puisque A peut être considérée comme partie de E'' en vertu de la remarque qui suit la proposition 2.1). Comme E' est un espace de Banach A est bornée (d'après la propositon 1.5) dans E'', donc bornée dans E puisque E s'injecte isométriquement dans E''. □

3. Transposition

Soient E et F deux espaces normés et $u : E \longrightarrow F$ une application linéaire continue.

3.1. Définition. *On appelle* **transposée** *de u l'application $u' : F' \longrightarrow E'$ définie par $u'(y')(x) = y'(u(x))$, ou de manière équivalente : pour tout $x \in E$ et tout $y' \in F'$ $\langle u(x), y' \rangle = \langle x, u'(y') \rangle$.*

On vérifie sans peine que *u' est une application linéaire ; elle est continue de norme égale à celle de u* (*cf.* exercice 12).

3.2. Proposition. *Soit $u : E \longrightarrow F$ une application linéaire entre deux espaces normés E et F. Alors u est continue si, et seulement si, elle est continue pour les topologies affaiblies respectives sur E et F.*

Démonstration. Supposons u continue. Alors pour tout $y' \in F'$ la forme linéaire $y' \circ u$ est continue sur E, donc continue pour la topologie affaiblie (puisque les formes linéaires continues sur E sont les mêmes que les formes linéaires continues pour la topologie affaiblie). Comme $\sigma(F, F')$ est la moins fine des topologies sur F rendant continues les formes linéaires $y' \in F$, u est continue en tant qu'application de E dans F (*cf.* exercice 13).

Réciproquement supposons u continue pour les topologies affaiblies sur E et F et soit B la boule unité de E ; alors pour tout $y' \in F'$:

$$\sup_{||x|| \leq 1} |\langle u(x), y' \rangle| = \sup_{||x|| \leq 1} |\langle x, u'(y') \rangle| = |||u'(y')||| < +\infty.$$

Par suite $u(B)$ est borné pour la topologie affaiblie, donc borné d'après la proposition 2.6. ; donc u est continue car bornée sur la boule unité de E. □

3.3. Un exemple de transposée

Notons $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ l'espace des fonctions réelles continues à support compact dans $\mathbb{R}^n$ muni de la norme de la convergence uniforme :

$$||\varphi||_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\varphi(x)|.$$

Une forme linéaire continue sur $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ est appelée *mesure* sur $\mathbb{R}^n$. Soit f un homéomorphisme de $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire une application bijective continue avec inverse f^{-1} continue. Alors f induit une application $u : \mathcal{K}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ définie par $u(\varphi) = \varphi \circ f$. Il est facile de voir que u est continue ; c'est même une isométrie de $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$; en effet :

$$||\varphi \circ f||_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\varphi(f(x))| = \sup_{f^{-1}(x) \in \mathbb{R}^n} |\varphi(x)| = ||\varphi||_\infty$$

puisque f est une bijection de $\mathbb{R}^n$.

La transposée u' de u est définie comme suit : si $\mu \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)'$ est une mesure sur $\mathbb{R}^n$ alors $u'(\mu)$ est la mesure :

$$u'(\mu)(\varphi) = \langle \mu, \varphi \circ f \rangle.$$

L'image de la mesure de Dirac δ_a en un point a de $\mathbb{R}^n$ est la mesure de Dirac $\delta_{f(a)}$ au point $f(a)$.

On dira qu'une mesure μ sur $\mathbb{R}^n$ est *invariante* par f (ou f-*invariante*) si $u'(\mu) = \mu$. Par exemple si x_0 est un point fixe de f (*i.e.* $f(x_0) = x_0$) alors δ_{x_0} est f-invariante.

La mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$ est invariante par toute translation.

EXERCICES

1. Soient (X,d) un espace métrique et $E=\mathcal{B}(X,\mathbb{K})$ l'espace vectoriel des fonctions (réelles ou complexes) bornées muni de la norme :

$$||f||_\infty=\sup_{x\in X}|f(x)|.$$

i) Montrer que $(E,||\ \ ||_\infty)$ est un espace de Banach.

ii) Soit E_0 le sous-espace de E formé par les fonctions continues. Montrer que E_0 est fermé dans E (et est donc un espace de Banach).

iii) On prend $X=\mathbb{R}$ muni de sa norme usuelle et on note $\mathcal{C}_0$ le sous-espace de E formé par les fonctions continues qui tendent vers 0 quand $|x|$ vers $+\infty$. Montrer que $\mathcal{C}_0$ est fermé dans E (et est donc un espace de Banach).

2. On note E l'espace vectoriel des fonctions continues $[0,1]\longrightarrow\mathbb{C}$. Pour toute fonction $f\in E$, on pose :

$$||f||_1=\int_0^1|f(x)|dx$$

$$||f||_2=\left(\int_0^1|f(x)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$||f||_\infty=\sup_{x\in[0,1]}|f(x)|.$$

i) Montrer que $||\ \ ||_1$, $||\ \ ||_2$ et $||\ \ ||_\infty$ sont des normes sur E.

ii) Montrer qu'il existe des constantes $k,K>0$ telles que $||f||_1\leq k||f||_2\leq K||f||_\infty$ pour toute fonction $f\in E$.

On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq1}$ dans E définies par :

$$f_n(x)=\begin{cases}0 & \text{pour } x\in[1/n,1]\\ 1-nx & \text{pour } x\in[0,1/n]\end{cases}$$

iii) Calculer $||f_n||_1$, $||f_n||_2$ et $||f_n||_\infty$

iv) Montrer que deux quelconques de ces normes ne sont jamais équivalentes.

3. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On dira que deux normes $||\ \ ||_1$ et $||\ \ ||_2$ sont *équivalentes* s'il existe deux constantes réelles $\alpha>0$ et $\beta>0$ telles que, pour tout $x\in E$, on ait $\alpha||x||_2\leq||x||_1\leq\beta||x||_2$. On munit l'espace $\mathbb{K}^n$ de la norme :

$$||x||=\sqrt{\sum_{j=1}^n|x_j|^2}$$

et on note $\mathbb{S} = \{x \in \mathbb{K}^n : ||x|| = 1\}$ sa sphère unité. Soit ρ une autre norme sur $\mathbb{K}^n$.

i) Montrer qu'il existe deux réels strictement positifs m et M tels que, pour tout $x \in \mathbb{S}$, on ait $m \leq \rho(x) \leq M$.

ii) En déduire que, pour tout $x \in E$, on a les inégalités qui suivent :

$$m||x|| \leq \rho(x) \leq M||x||.$$

iii) Montrer que, sur l'epace vectoriel $\mathbb{K}^n$, toutes les normes sont équivalentes.

iv) Soit $(F, ||\ ||_F)$ un $\mathbb{K}$-espace normé. Montrer que toute application linéaire $\mathbb{K}^n \longrightarrow F$ est continue.

4. Soient r un entier naturel et E l'espace des fonctions $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^r. Soit s un entier tel que $0 \leq s \leq r$. Pour toute fonction $f \in E$, on pose :

$$||f||_\infty^s = \max_{\ell=0,\cdots,s} \left\{ \sup_{x\in[0,1]} |f^\ell(x)| \right\}.$$

i) - Montrer que $||\ ||_\infty^s$ est une norme sur E. L'espace normé $(E, ||\ ||_\infty^s)$ est-il de Banach ?

ii) - On note $C^0([0,1], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues $[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ muni de la norme de la convergence uniforme. Soient $\varphi_0, \cdots, \varphi_r \in E$. Pour $f \in E$, on pose :

$$Df(x) = \sum_{\ell=0}^{r} \varphi_\ell(x) f^{(\ell)}(x).$$

L'application linéaire $D : E \longrightarrow C^0([0,1], \mathbb{R})$ ainsi définie est-elle continue ?

5. Soient E et F deux espaces normés, $\mathcal{L}_c(E,F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues de E dans F et $\mathcal{U}$ une partie équicontinue de $\mathcal{L}_c(E,F)$.

Montrer que les restrictions des topologies $\mathcal{T}_\mathcal{C}$ et $\mathcal{T}_\mathcal{F}$ à $\mathcal{U}$ coïncident.

6. Soit $\mathcal{U}$ une partie simplement bornée de $\mathcal{L}_c(E,F)$ où E est un espace de Banach et F un espace normé quelconque. Pour tout entier $n \geq 1$ on pose :

$$A_n = \left\{ x \in E : \sup_{u\in\mathcal{U}} ||u(x)|| \leq n \right\}.$$

i) Montrer que $E = \bigcup_n A_n$ et en déduire que int (A_1) n'est pas vide. (Appliquer le théorème de Baire à la suite (A_n) dans l'espace métrique complet E.)

ii) Montrer que l'origine 0 est point intérieur à A_1. En déduire qu'il existe $r > 0$ tel que la boule $B(0,r) \subset A_1$ et que $\mathcal{U}$ est borné dans l'espace normé $\mathcal{L}_c(E,F)$.

7. Soient E un espace de Banach, F et G deux espaces normés et $\phi : E \times F \longrightarrow G$ une application bilinéaire telle que les applications partielles

$$\phi(.,y) : x \in E \longrightarrow \phi(x,y) \in G \quad \text{et} \quad \phi(x,.) : y \in F \longrightarrow \phi(x,y) \in G$$

soient continues. Soient (x_n) et (y_n) deux suites tendant vers 0 respectivement dans E et F. Montrer que $(\phi(.,y_n))_n$ converge uniformément sur $\{x_n | n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ et en déduire que ϕ est continue. (Appliquer le théorème de Banach-Steinhaus.)

8. Soient E un espace vectoriel et $f_1, \ldots, f_k$, k formes linéaires sur E. Montrer que, si f est une forme linéaire sur E telle que :

$$\bigcap_{i=1}^{k} \mathrm{Ker} f_i \subset \mathrm{Ker} f,$$

alors il existe des nombres $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ tels que $f = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f_i$. (Commencer par le cas $k = 1$ et faire ensuite un raisonnement par récurrence.)

9. Soient E un espace normé complexe et f une forme $\mathbb{C}$-linéaire continue sur E. On note u la partie réelle de f qui est une forme $\mathbb{R}$-linéaire continue sur E et J l'automorphisme complexe de E qui à x associe ix.

Montrer que $f = u - J \circ u \circ J$ et que $|||f||| = |||u|||$. (Utiliser le fait que pour tout nombre complexe z il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $|z| = e^{i\theta} z$.)

10. Soit X un espace topologique. On dira qu'une fonction $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ est

- *semi-continue supérieurement* si, pour tout $\eta \in \mathbb{R}$, $\{x \in X : f(x) < \eta\}$ est ouvert.
- *semi-continue inférieurement* si pour tout $\eta \in \mathbb{R}$, $\{x \in X : f(x) > \eta\}$ est ouvert.

i) Montrer que f est semi-continue supérieurement (resp. inférieurement) si, et seulement si, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, l'ensemble $f^{-1}([\alpha, +\infty[)$ (resp. $f^{-1}(]-\infty, \alpha])$) est fermé dans X.

ii) Montrer que f est continue si, et seulement si, elle est semi-continue à la fois supérieurement et inférieurement.

iii) Soient $(f_i)_{i \in I}$ une famille de fonctions réelles sur X telles que pour tout $x \in X$ l'ensemble $(f_i(x))_{i \in I}$ soit borné. On pose

$$\underline{f} = \inf_{i \in I} f_i \quad \text{et} \quad \overline{f} = \sup_{i \in I} f_i$$

Montrer que, si pour tout $i \in I$, f_i est semi-continue supérieurement (resp. semi-continue inférieurement) alors il en est de même de $\underline{f}$ (resp. $\overline{f}$).

11. Soient H l'espace des suites réelles de carré sommable muni de la norme $||x||_2 = \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} x_n^2}$, $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les vecteurs de la forme $e_n = (x_i^n)_{i\in\mathbb{N}}$ avec $x_i^n = \delta_i^n$ et E le sous-espace engendré par $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *i.e.* l'ensemble des combinaisons linéaires finies des e_n ; alors l'adhérence de E est H. Soit $(e'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la famille de formes linéaires sur E définies par

$$e'_n(e_j) = \begin{cases} 1 & \text{si j=n} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

i) Calculer la norme de ne'_n.

ii) Montrer que la suite ne'_n est faiblement bornée mais qu'elle n'est pas bornée.

iii) Conclusion ?

12. Soient $u : E \longrightarrow F$ une application linéaire continue entre deux espaces normés E et F et $u' : F' \longrightarrow E'$ sa transposée. Montrer que u' est continue et a même norme que u.

13. Soit $(X_i, \mathcal{T}_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques et pour tout $i \in I$, soit $u_i : X \longrightarrow X_i$ une application d'un ensemble X dans X_i. On appelle *topologie associée* aux u_i la topologie $\mathcal{T}$ la moins fine sur X rendant continues toutes les applications u_i.

i) Montrer que $\mathcal{T}$ est la topologie engendrée par les $u_i^{-1}(\mathcal{T}_i)$.

ii) Soit $f : E \longrightarrow X$ une application d'un espace topologique E dans X. Montrer que f est continue si, et seulement si, pour chaque $i \in I$ l'application $E \stackrel{u_i \circ f}{\longrightarrow} X_i$ est continue (X étant muni de la topologie associée aux u_i).

14. Soient E un espace normé et V_1 et V_2 deux sous-espaces de E. On dira que V_2 est un *supplémentaire topologique* de V_1 (ou que V_1 est un supplémentaire topolgique de V_2) si l'application

$$(x_1, x_2) \in V_1 \times V_2 \longrightarrow x_1 + x_2 \in E$$

est un isomorphisme topologique.

i) Montrer que si V_2 est un supplémentaire topologique de V_1 alors V_1 et V_2 sont fermés.

Supposons que V_1 soit un sous-espace vectoriel de dimension finie de E.

ii) Montrer que l'application identité $id : V_1 \longrightarrow V_1$ se prolonge en une application continue $f : E \longrightarrow V_1$.

iii) En déduire que V_1 admet un supplémentaire topologique V_2.

15. On note E l'espace des fonctions complexes continues sur l'intervalle $[0, 1]$ qu'on munit des deux normes

$$||f||_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| \text{ et } ||f||_2 = \left(\int_0^1 |f(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

On rappelle que $(E, || \ ||_\infty)$ est complet et que $(E, || \ ||_2)$ ne l'est pas. On a en plus $||f||_2 \leq ||f||_\infty$ pour toute fonction $f \in E$.

Soit M un sous-espace vectoriel de E complet pour la norme $|| \ ||_2$.

i) Montrer que M est complet pour la norme $|| \ ||_\infty$.

ii) Montrer que les normes $|| \ ||_\infty$ et $|| \ ||_2$ sont équivalentes sur le sous-espace M.

iii) Soit x un point de $[0,1]$. Montrer que la forme linéaire $f \in M \longrightarrow f(x) \in \mathbb{C}$ est continue.

iv) Soit B_∞ la boule unité fermée de $(M, || \ ||_\infty)$. Montrer que de toute suite (f_n) dans B_∞ on peut extraire une sous-suite $(f_{n_k})_k$ qui converge simplement vers $f \in M$.

(Utiliser la question iii) et l'assertion suivante qu'on admettra : *dans l'espace* $(M, || \ ||_2)$ *toute suite bornée* (f_n) *admet une sous-suite* (f_{n_k}) *faiblement convergente i.e. il existe un élément* $f \in M$ *tel que pour toute forme linéaire continue* φ *sur* M, *la suite scalaire* $(\varphi(f_{n_k}))$ *converge vers* $\varphi(f)$.)

v) En appliquant le *théorème de convergence dominée* montrer que $(f_{n_k})_k$ converge vers f pour la norme $|| \ ||_2$.

vi) Montrer que B_∞ est compacte pour la topologie définie par $|| \ ||_2$.

vii) En déduire que M est de dimension finie.

16. Soient E un espace normé et A une partie de E. On appelle *orthogonal* de A l'ensemble $A^\perp$ des formes linéaires $x' \in E'$ telles que $\langle a, x'\rangle = 0$ pour tout $a \in A$.

i) Montrer que $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel fermé de E'.

Soit V un sous-espace vectoriel fermé de E. On désigne par $j : V \hookrightarrow E$ l'inclusion de V dans E par $\pi : E \longrightarrow E/V$ la projection canonique et $j' : E' \longrightarrow V'$ et $\pi' : (E/V)' \longrightarrow E'$ leurs transposées respectives.

ii) Montrer que la suite

$$0 \longrightarrow (E/V)' \xrightarrow{\pi'} E' \xrightarrow{j'} V' \longrightarrow 0$$

(où la première et la dernière flèches sont les applications nulles) est exacte. (Utiliser le théorème de Hahn-Banach.)

iii) Montrer que le dual topologique $(E/V)'$ de E/V est isométrique à $V^\perp$ et que le dual topologique V' de V est isométrique à l'espace quotient $E'/V^\perp$.

iv) Montrer que si E est réflexif, V et E/V sont réflexifs.

Bibliographie

[Br] Brezis, H. *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications.* Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise, Masson (1987).

[Ek] El Kacimi, A. *Éléments d'intégration et d'analyse fonctionnelle.* Collection Mathématiques pour le Second Cycle, Ellipses (1999).

[KF] Kolmogorov, A. & Fomine, S. *Eléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle.* Editions MIR (1974).

[Ko] Komornik, V. *Précis d'analyse fonctionnelle.* Collection Mathématiques pour le Second Cycle, Ellipses (2002).

[Le] Lehmann, D. *Initiation à la topologie générale.* (1974). Collection Mathématiques pour le Second Cycle, Ellipses (2004)

[Ru] Rudin, W. *Real and Complex Analysis.* Tata McGraw Hill (1974).

[Sc] Schwartz, L. *Topologie générale et analyse fonctionnelle.* Hermann (1970).