Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis

Équations cohomologiques de flots riemanniens et de difféomorphismes d'Anosov

Thèse soutenue le 7 décembre 2006

par

Akbar Dehghan Nejad

pour obtenir le grade de

Docteur en Mathématiques

Composition du Jury

Président	R. Barre	*Université de Valenciennes*
Rapporteurs	A. Abouqateb	*Université Cadi Ayyad, Marrakech*
	J.-J. Lœb	*Université d'Angers*
Examinateurs	F. Lescure	*Université de Lille I*
	L. Vrancken	*Université de Valenciennes*
Directeur de Thèse	A. El Kacimi	*Université de Valenciennes*

N$^{\text{O}}$ d'ordre : 06 - 30

.

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier Aziz El Kacimi pour tout ce que j'ai appris à ses côtés, à l'écouter et à le lire. Je le remercie pour m'avoir proposé ce sujet, pour tous les conseils qu'il a pu me donner, pour s'être intéressé à ce que je faisais, pour m'avoir souvent motivé, pour avoir réussi à me faire revenir sur une position (rien que cela est un exploit, j'espère que tu t'en rends bien compte !) et pour avoir toujours été disponible dès que j'ai eu besoin de lui parler. Je suis certain que les nombreuses connaissances qu'il m'a transmises me seront très utiles dans mes futures recherches.

Je suis ravi que Abdelhak Abouquateb et Jean-Jacque Lœb se soient intéressés à mon travail et aient accepté de rapporter dessus. Qu'ils trouvent ici l'expression de toute ma gratitude.

Un grand merci également à François Lescure et Luc Vrancken pour avoir bien voulu faire partie du jury en tant qu'examinateurs et à Raymond Barre pour avoir gentiment accepté d'en assurer la présidence.

Je remercie le gouvernement iranien et le gouvernement français, qui m'ont permis financièrement de mener à bien la préparation de cette thèse. Bien sûr, je n'oublie pas de remercier Madame France Lamiscare qui a préparé et géré administrativement mon séjour en France.

Je remercie chaleureusement les membres du Laboratoire de Mathématiques de Valenciennes et plus particulièment Cédric Rousseau et Abdellatif Zeggar avec qui j'ai eu beaucoup de discussions mathématiques ou autres.

J'associe à ces remerciements l'ensemble de mes collègues de l'Université de Yazd en Iran.

Merci encore à tous mes amis d'Iran, de France et d'ailleurs, entre autres Norbert Cazzadori, pour leur soutien et leurs encouragements constants.

Durant mon itinérance, entre les universités de Yazd et Valenciennes, j'ai croisé beaucoup de personnes et je ne saurai tous les inclure ici. Elles m'ont toujours très bien accueilli ; je les en remercie.

Enfin je remercie tous les membres de ma famille et de ma belle famille, qui m'ont toujours accompagné pendant ces années de préparation de ma thèse.

.

CONTENU

INTRODUCTION

Un *système dynamique discret* (SDD en abrégé) est la donnée d'un couple (M, γ) où M est une variété et γ un difféomorphisme de M. On dira que deux SDD (M, γ) et (N, σ) sont *conjugués* s'il existe un difféomorphisme $h : M \longrightarrow N$ tel que $\sigma = h \circ \gamma \circ h^{-1}$. Un *système dynamique continu* (SDC en abrégé) est la donnée d'un couple (M, X) où M est une variété et X un champ de vecteurs sur M. Deux SDC (M, X) et (N, Y) sont dits *conjugués* s'il existe un difféomorphisme $h : M \longrightarrow N$ tel que $h_*(X) = Y$.

On se donne un SDD (M, γ) et un SDC (M, X). On note $C^\infty(M)$ l'espace des fonctions complexes de classe C^∞ sur M. On s'intéresse aux problèmes suivants. Soit $g \in C^\infty(M)$.

(1) Existe-t-il $f \in C^\infty(M)$ telle que $f - f \circ \gamma = g$?

(2) Existe-t-il $f \in C^\infty(M)$ telle que $X \cdot f = g$?

L'équation (1) est appelée *équation cohomologique discrète* du SDD (M, γ) et l'équation (2) *équation cohomologique continue* du SDC (M, X).

La résolution de ces deux équations est un problème important en théorie des systèmes dynamiques. Mais il est très difficile d'attaque dans la plupart des cas. On peut déjà remarquer (et ceci nous sera utile dans la suite) que si (M, γ) et (N, σ) sont deux SDD conjugués par $h : M \longrightarrow N$, alors $v \in C^\infty(N)$ est solution de l'équation $v - v \circ \sigma = g$ si, et seulement si, $u = v \circ h$ est solution de $u - u \circ \gamma = g \circ h$. De même si (M, X) et (N, Y) sont deux SDC conjugués par $h : M \longrightarrow N$, alors $v \in C^\infty(N)$ est solution de l'équation $Y \cdot v = g$ si, et seulement si, $u = v \circ h$ est solution de $X \cdot u = g \circ h$. Pour résoudre ce problème, on peut donc se donner la liberté de remplacer un système dynamique par tout autre qui lui est conjugué.

Les quelques résultats obtenus dans le domaine des équations cohomologiques sont fort intéressants. Par exemple, ceux de S. Greenfield et N. Wallach [GW], ceux de L. Flaminio et G. Forni [FF1] et [FF2] ou encore le papier [Fo] de G. Forni où il étudie l'équation cohomologique continue associée à un champ de vecteurs préservant un volume sur une surface compacte de genre supérieur ou égal à 2. Des résultats mettant un lien entre les équations cohomologiques continues et la théorie des représentations se trouvent dans [Mi].

Le but de notre travail est de résoudre explicitement ces équations cohomologiques (cas continu et cas discret) pour les flots riemanniens complets et les flots et difféomorphismes d'Anosov.

Le chapitre I est consacré aux rappels des ingrédients de géométrie différentielle dont nous aurons besoin : variétés différentiables, fibré tangent, actions de groupes et cohomologie de de Rham.

Le chapitre II se situe autour des équations cohomologiques et précise les éléments et outils qui permettent de les formuler et les résoudre dans les cas que nous considérons.

Dans le chapitre III nous rappelons le cas d'un champ linéaire sur le tore $\mathbb{T}^n$, qui est déjà connu mais qui nous sera utile. On y a rajouté quand même quelques (nouvelles) remarques complémentaires. Nous regardons aussi le cas d'une fibration en tores avec un champ linéaire diophantien tangent. Cette situation contient en particulier le cas d'un champ invariant (à gauche ou à droite) sur un groupe de Lie.

Une partie du chapitre IV généralise le contenu du chapitre III : on étudie la situation d'un flot riemannien complet. Nous traitons ensuite le cas d'un difféomorphisme et le champ qu'il définit par suspension. Dans cette situation géométrique, la résolution de l'équation cohomologique continue du champ est équivalente à celle de l'équation cohomologique discrète du difféomorphisme. C'est une étape fondamentale pour le chapitre V.

Enfin, dans le chapitre V, nous passons à l'équation cohomologique discrète associée à un difféomorphisme d'Anosov sur $\mathbb{T}^n$ induit par une matrice hyperbolique $A \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$ diagonalisable et à valeurs propres réelles positives ainsi que l'équation cohomologique continue du flot d'Anosov qu'elle définit par suspension sur le tore hyperbolique $\mathbb{T}_A^{n+1}$. Nous en déduisons d'autres invariants géométriques associés à de tels flots et difféomorphismes comme par exemple les distributions invariantes et la cohomologie feuilletée.

Notations

Dans tout ce texte, on adoptera les notations qui suivent. Elles auront peut-être l'occasion de changer légerement ; on prendra soin de le préciser à chaque fois que cela est nécessaire.

Dans toute la suite le mot “variété” signifiera variété différentiable de classe C^∞ connexe et orientable. Sauf mention expresse du contraire, les objets géométriques que l'on considérera (applications, fonctions, difféomorphismes, champs de vecteurs, formes différentielles *etc.*) seront aussi de classe C^∞.

– Si $\xi \longrightarrow M$ est un fibré vectoriel au-dessus de M, $C^\infty(\xi)$ désignera l'espace de Fréchet de ses sections C^∞. Lorsque le fibré ξ est trivial de fibre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $C^\infty(M)$ est l'espace des fonctions de classe C^∞ (réelles ou complexes) et on le notera $C^\infty(M)$.

– Si $f : M \longrightarrow N$ et une application différentiable, $d_x f : T_x M \longrightarrow T_{f(x)} N$ sera la différentielle de f au point $x \in M$.

– Si $\gamma : M \longrightarrow M$ est une bijection de M, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, γ^k sera la composée $|k|$ fois de γ ou de son inverse γ^{-1} suivant que k est positif ou négatif.

– Supposons qu'on se situe sur l'espace $\mathbb{R}^p$ avec des coordonnées $(z_1, \cdots, z_p)$. Pour un multi-indice $\mathbf{k} = (k_1, \cdots, k_p) \in \mathbb{N}^p$, on pose :

i) $\mathbf{k}^{\mathbf{s}} = k_1^{s_1} \cdots k_p^{s_p}$ pour tout $\mathbf{s} = (s_1, \cdots, s_p) \in \mathbb{N}^p$,

ii) $|\mathbf{k}| = k_1 + \cdots + k_p$ (c'est la *longueur* de $\mathbf{k}$),

iii) $\frac{\partial^{|\mathbf{k}|}}{\partial z^{\mathbf{k}}} = \frac{\partial^{|\mathbf{k}|}}{\partial z^{k_1} \cdots \partial z^{k_p}}$.

– Un groupe topologique continu sera toujours noté G.

– Un groupe discret sera pour nous un groupe topologique dénombrable Γ muni de la topologie discrète.

– Soit X un champ de vecteurs sur M ; L_X désignera la dérivée de Lie dans la direction de X ; pour toute fonction f, Xf ou $X \cdot f$ sera la dérivée de f dans la direction de X.

CHAPITRE I

RAPPELS DE GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE

Ce chapitre a pour but de rappeler quelques notions de géométrie différentielle qui nous seront utiles dans la suite de notre travail. On considérera l'espace $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire usuel *i.e.* celui pour lequel la base canonique $(e_1, \cdots, e_n)$ est orthonormale. Le mot "différentiable" signifiera "indéfiniment différentiable". Une bonne partie de ce chapitre est constitué d'extraits de [Ek3].

1. Variétés difféntiables

Soit M un espace topologique paracompact *i.e.* M est séparé et tel que tout recouvrement ouvert admet un recouvrement ouvert plus fin et localement fini. *On dira que M est une* ***variété topologique*** *de dimension $n \in \mathbb{N}$ si tout point $x \in M$ possède un voisinage ouvert U homéomorphe à $\mathbb{R}^n$ i.e. il existe une application bijective $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow U$ telle que φ et son inverse φ^{-1} soient continues.* La paire (U, φ) est appelée *carte locale* et $(x_1, \ldots, x_n) = \varphi^{-1}(x)$ seront les *coordonnées* de x. Si (U, φ) et (V, ψ) sont deux cartes locales telles que l'intersection $U \cap V$ soit non vide alors un point $x \in U \cap V$ sera repéré par ses coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ dans U et ses coordonnées $(x'_1, \ldots, x'_n)$ dans V. Comme le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \varphi^{-1}(U \cap V) & \xrightarrow{\varphi} & U \cap V \\ \downarrow & & || \\ \psi^{-1}(U \cap V) & \xrightarrow{\psi} & U \cap V \end{array}$$

est commutatif on doit avoir :

$$(x'_1, \ldots, x'_n) = \psi^{-1} \circ \varphi(x_1, \ldots, x_n). \tag{I.1}$$

L'application $\psi^{-1} \circ \varphi$ est appelée *changement de coordonnées* de la carte (U, φ) à la carte (V, ψ). *Deux cartes locales (U, φ) et (V, ψ) sont dites C^r-**compatibles** si l'une des conditions suivantes est remplie* *i)* $U \cap V = \emptyset$,

ii) $U \cap V \neq \emptyset$ *et* $\psi^{-1} \circ \varphi$ *est un difféomorphisme de classe* C^r *; ceci a un sens car cette application est définie sur un ouvert de* $\mathbb{R}^n$ *et à valeurs dans* $\mathbb{R}^n$*.*

Un ensemble de cartes locales $(U_i, \varphi_i)_{i\in I}$ sur M est appelé C^r*-atlas* si $(U_i)_{i\in I}$ est un recouvrement de M et si deux cartes quelconques (U_i, φ_i) et (U_j, φ_j) sont C^r-compatibles. Deux C^r-atlas $(U_i, \varphi_i)_{i\in I}$ et $(V_j, \psi_j)_{j\in J}$ sont dits *équivalents* si leur réunion est un C^r-atlas *i.e.* pour tout $i \in I$ et tout $j \in J$, les cartes (U_i, φ_i) et (V_j, ψ_j) sont C^r-compatibles.

1.1. Définition. *Une classe d'équivalence de* C^∞*-atlas est appelée* ***structure différentiable*** *sur* M*. On dira que* M *est une variété différentiable.*

On dira que M est une *variété analytique* (réelle) ou de classe C^ω si elle admet un atlas $(U_i, \varphi_i)_{i\in I}$ tel que les applications $\varphi_j^{-1} \circ \varphi_i$ (pour $U_i \cap U_j \neq \emptyset$) soient analytiques en tant qu'applications d'un ouvert de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

Il est clair que toute variété analytique est une variété différentiable.

Tout ouvert non vide d'une variété différentiable de dimension n *est une variété différentiable de dimension* n*.*

Une variété différentiable M est dite *orientable* si elle peut être définie à l'aide d'un atlas (U_i, φ_i) pour lequel les difféomorphismes (I.1) préservent l'orientation de $\mathbb{R}^n$: pour $x \in U_i \cap U_j$, le déterminant de l'application linéaire $d\left(\varphi_j^{-1} \circ \varphi_i\right)(\varphi_i^{-1}(x))$ est strictement positif.

Dans toute la suite de cette section on ne considérera que les variétés différentiables connexes.

1.2. Applications différentiables

Soient M et N deux variétés différentiables de dimensions respectives n et p. On dira qu'une application $f : M \longrightarrow N$ est *différentiable* au point $x \in M$ si, pour toute carte locale de M, (U, φ) contenant x et toute carte locale (V, ψ) de N contenant $f(x)$ et tout voisinage ouvert W de x contenu dans U et tel que $f(W) \subset V$, l'application $\psi^{-1} \circ f \circ \varphi : \varphi^{-1}(W) \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \psi^{-1}(V) \subset \mathbb{R}^p$ est différentiable. On dira que f est *différentiable*, si elle est différentiable en tout point de M. En particulier, on dira qu'une fonction $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ est *différentiable* si, pour toute carte locale (U, φ), la fonction $f \circ \varphi : \varphi^{-1}(U) \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow U \longrightarrow \mathbb{R}$ est différentiable. La dérivée partielle de $\frac{\partial f}{\partial x_k}(x)$ sera donc par définition $\frac{\partial f}{\partial x_k}(x) = \frac{\partial(f\circ\varphi)}{\partial x_k}(\varphi^{-1}(x))$.

Si f est différentiable, bijective et f^{-1} différentiable, on dira que f est un *difféomorphisme* de M sur N. Dans ce cas les variétés M et N ont nécessairement la même dimension.

On notera $C^\infty(M, N)$ l'ensemble des applications différentiables de M dans N et simplement $C^\infty(M)$ lorsque $N = \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) ; ce dernier est une algèbre pour la multiplication des fonctions. L'ensemble des difféomorphismes d'une variété sur elle-même est un groupe (pour la composition des applications) noté $\mathrm{Diff}(M)$.

Soient M une variété et $\rho : M \longrightarrow \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ une fonction. On appelle *support* de ρ et on note $\mathrm{supp}(\rho)$ l'adhérence de l'ensemble $\{x \in M : \rho(x) \neq 0\}$.

Soit $\mathcal{U} = (U_i)_i$ un recouvrement ouvert de M. On dira que $\mathcal{U}$ est *localement fini* si tout point $x \in M$ possède un voisinage qui ne rencontre qu'un nombre fini d'ouverts de la famille $\mathcal{U}$. Sur une variété différentiable (paracompacte comme cela a été supposé avant) un tel recouvrement existe toujours ; on peut même le choisir dénombrable.

Soit $\mathcal{U} = (U_i)_i$ un recouvrement localement fini sur M. On appelle *partition de l'unité subordonnée* à $\mathcal{U}$ une famille de fonctions réelles différentiables positives $(\rho_i)_i$ telles que

- pour tout $i \in I$, *supp*(ρ_i) est contenu dans U_i,

- $\sum_i \rho_i = 1$.

Tout recouvrement ouvert localement fini $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ de M admet une partion de l'unité différentiable $(\rho_i)_{i\in I}$.

2. Le fibré tangent

Soient M une variété différentiable et $(U_i, \varphi_i)_{i\in I}$ un atlas définissant M. On a vu qu'une fonction $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ est différentiable si, pour tout $i \in I$, la fonction $f \circ \varphi_i : \varphi^{-1}(U_i) \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow U_i \longrightarrow \mathbb{R}$ est différentiable et que la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x_k}(x)$ est donnée par $\frac{\partial f}{\partial x_k}(x) = \frac{\partial(f\circ\varphi_i)}{\partial x_k}(\varphi_i^{-1}(x))$. Pour tout $k = 1, \ldots, n$, on obtient donc un opérateur $\frac{\partial}{\partial x_k}$ qui à toute fonction différentiable f sur U_i associe la fonction $\frac{\partial f}{\partial x_k}$. En chaque point $x \in U_i$, les opérateurs $\frac{\partial}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}(x)$ sont linéairement indépendants.

En tout point $x \in M$, les opérateurs $\frac{\partial}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}(x)$ engendrent donc sur $\mathbb{R}$ un espace vectoriel de dimension n indépendant de la carte choisie (U_i, φ_i) pour le définir.

2.1. Définition. *On appelle* ***espace tangent*** *à M en x, l'espace vectoriel T_xM engendré par les opérateurs $\frac{\partial}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}(x)$ à l'aide d'une carte quelconque (U_i, φ_i).*

Soit maintenant h une application différentiable d'une variété M de dimension n dans une variété N de dimension q. On supposera que M et N sont définies par les atlas respectifs $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$ et $(V_j, \psi_j)_{j \in J}$ et, pour ne pas alourdir les notations, on fera comme si les ouverts de coordonnées U_i et V_j étaient en fait les espaces euclidiens $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^q$. Pour tout $x \in M$ de coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ l'application h définit une application linéaire

$$d_x h : T_xM \longrightarrow T_{h(x)}N$$

qui à tout opérateur $\frac{\partial}{\partial x_k}(x)$, k variant de 1 à n, associe l'opérateur $d_x h\left(\frac{\partial}{\partial x_k}(x)\right)$ donné sur une fonction $f : N \longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$d_x h\left(\frac{\partial}{\partial x_k}(x)\right)(f) = \sum_{\ell=1}^{q} \frac{\partial y_\ell}{\partial x_k}(x) \frac{\partial f}{\partial y_\ell}(h(x))$$

où $(y_1, \ldots, y_q)$ sont les coordonnées du point $h(x)$ pour tout $x \in M$. On peut vérifier que la définition de l'application $d_x h$ ne dépend pas du système de coordonnées locales. On l'appelle *application tangente* à h au point $x \in M$.

Pour tout $i \in I$ on pose $\Omega_i = \bigcup\limits_{x \in U_i} T_xM$. L'application $\Phi_i : U_i \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \Omega_i$ définie par $\Phi_i(x, f_1, \ldots, f_n) = \left(x, \sum_{k=1}^n f_k \frac{\partial}{\partial x_k}(x)\right)$ est une bijection. On définit une unique structure de variété différentiable de dimension $2n$ sur l'ensemble $TM = \bigcup\limits_{x \in M} T_xM$. On a une projection canonique $\pi : TM \longrightarrow M$ définie par $\pi(x, u_x) = x$.

2.2. Définition. *On appelle* ***fibré tangent*** *à M la variété TM et la projection canonique $\pi : TM \longrightarrow M$.*

On appelle *section* du fibré TM ou *champ de vecteurs* sur M toute application $X : M \longrightarrow TM$ telle que $\pi \circ X = id_M$. Sur une carte locale (U_i, φ_i) de coordonnées

$(x_1, \ldots, x_n)$, un champ de vecteurs a pour expression

$$X_i(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \frac{\partial}{\partial x_k}(x) \tag{I.2}$$

où les f_k sont des fonctions de classe C^∞ sur U_i. L'ensemble $C^\infty(TM)$ des champs de vecteurs sur M, ou des sections C^∞ du fibré TM, est un module sur l'anneau $C^\infty(M)$ des fonctions de classe C^∞. Soient X et Y deux champs de vecteurs sur M ; on peut les écrire localement :

$$X_i(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \frac{\partial}{\partial x_k}(x) \ \text{ et } \ Y_i(x) = \sum_{\ell=1}^{n} g_\ell(x) \frac{\partial}{\partial x_\ell}(x).$$

Un calcul facile montre que pour toute fonction $h : M \longrightarrow \mathbb{R}$, de classe C^∞, on a :

$$X_i(Y_i(h)) - Y_i(X_i(h)) = \sum_{k,\ell} \left(f_k \frac{\partial g_\ell}{\partial x_k} \frac{\partial h}{\partial x_\ell} - g_\ell \frac{\partial f_k}{\partial x_\ell} \frac{\partial h}{\partial x_k} \right).$$

On définit ainsi un nouveau champ (local) de vecteurs $X_iY_i - Y_iX_i$; on montre que ceci ne dépend pas de la carte choisie ; on obtient alors un champ de vecteurs $XY - YX$ global qu'on note $[X, Y]$ et qu'on appelle *crochet* de X et Y ; $[X, Y]$ est le commutateur de X et Y vus comme opérateurs (*différentiels d'ordre* 1) sur $C^\infty(M)$. On vérifie facilement l'identité suivante dite *identité de Jacobi* :

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [Y, X]] = 0 \tag{I.3}$$

On dira que $(C^\infty(TM), [\ ,\ ])$ est l'*algèbre de Lie* des champs de vecteurs sur M.

Une variété M (de dimension n) est dite *parallélisable* s'il existe n champs de vecteurs tangents partout linéairement indépendants ; dans ce cas le $C^\infty(M)$-module $C^\infty(TM)$ est *libre* de rang n.

Considérons maintenant deux variétés M et N de dimensions respectives m et n, X un champ de vecteur sur M et $\gamma : M \longrightarrow N$ un difféomorphisme. On appelle *image* de X par γ le champ de vecteurs $\gamma_* X$ sur N défini par $\gamma_* X = d\gamma \circ X \circ \gamma^{-1}$ *i.e.* :

$$\forall\ y \in N :\ \gamma_* X(y) = d_{\gamma^{-1}(y)}\gamma\ (X(\gamma^{-1}(y))).$$

Dans le cas où $M = N$, le champ X est dit *invariant* par γ si $\gamma_* X = X$, c'est-à-dire si:

$$\forall\ x \in M,\ X(\gamma(x)) = d_x\gamma(X(x)). \tag{I.4}$$

Soient X un champ de vecteurs sur une variété M et $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction sur M. On appelle *dérivée* de Lie de f suivant X la fonction $L_X f$ sur M définie par $L_X f(x) = d_x f\ (X(x))$.

Regardons un aspect plus géometrique des champs de vecteurs : pour un champ $x \longmapsto V_x$ du plan, le simple tracé des vecteurs V_x vus comme vecteurs d'origine x permet de voir une famille de courbes auxquelles ces vecteurs sont tangents. On appelle *trajectoire* ou *courbe intégrale* d'un champ de vecteurs X sur une variété M toute courbe $t \longmapsto c(t)$, définie sur un intervalle ouvert $I \subseteq \mathbb{R}$ et à valeurs dans M et telle que, pour tout $t \in I$, on ait $c'(t) = X_{c(t)}$.

Pour un ouvert U de $\mathbb{R}^n$, si $X = \sum^n{}_{k=1} X^k \frac{\partial}{\partial x_k}$, cela revient à dire que les composantes de c sont solutions du système différentiel du premier ordre :

$$\frac{dc^k}{dt} = X^k(c^1, ..., c^n) \quad \text{avec} \quad 1 \leq k \leq n. \tag{I.5}$$

Les fonctions X^k étant lisses, on peut appliquer les résultats classiques d'existence et d'unicité pour les systèmes différentiels.

2.3. Proposition. *Soient X un champ de vecteurs sur un ouvert U de $\mathbb{R}$ et x un point de U. Alors il existe un intervalle ouvert I contenant 0 et une trajectoire $c : I \longrightarrow U$ de X telle que $c(0) = x$; si $c_1 : I_1 \longrightarrow U$ est une autre trajectoire ayant la même propriété, c et c_1 coïncident sur $I_1 \cap I$.*

On démontre ensuite qu'il existe un unique intervalle de définition maximal de c. Nous noterons c_x la trajectoire correspondante. Si I_x est l'intervalle de définition (maximal) de c_x, la réunion des $I_x \times \{x\}$, quand x parcourt U, est un ouvert Ω de $\mathbb{R} \times U$, contenant $\{0\} \times U$, pour lequel l'application $(x, t) \longrightarrow c_x(t)$ est lisse. Par conséquent, si $t \longrightarrow c(t)$ est une trajectoire, il en est de même de $t \longrightarrow c(t + a)$ pour n'importe quel réel a. Tenant compte de l'unicité, on obtient l'identité $c_x(t+a) = c_{c_x(a)}(t)$. Nous allons réécrire cette relation en mettant l'accent sur la variable "espace" plutôt que la variable "temps". Autrement dit, on pose :

$$\varphi_t{}^X(x) = c_x(t).$$

En particulier $\varphi^X{}_0(x) = x$, et l'identité ci-dessus donne :

$$\varphi^X{}_{t+t'}(x) = \varphi_t{}^X(\varphi^X{}_{t'}(x)).$$

On écrit alors, avec un abus de notation évident :

$$\varphi^X{}_{t+t'} = \varphi_t{}^X \circ \varphi^X{}_{t'} = \varphi_{t'}{}^X \circ \varphi^X{}_t.$$

2.4. Definition. *L'application* $\varphi^X : \Omega \longrightarrow U$ *s'appelle* **le flot** *du champ de vecteurs* X*.*

La propriété suivante, très pratique, permet le passage inverse du flot au champ. Soit ψ une application définie sur un ouvert de $I \times U$ contenant $\{0\} \times U$ et à valeurs dans U telle que :

i) $\psi(t, \psi(t', x)) = \psi(t + t', x)$ dès que les deux membres ont un sens ;

ii) $\psi(0, x) = x$;

iii) $\frac{d}{dt}\psi(t, x)_{|t=0} = X_x$.

Alors $\psi(t, x) = \psi_t^X(x)$ partout où ψ est définie. Pour démontrer ce fait, il suffit de remarquer que :

$$\frac{d}{dt}\psi(t, x)\big|_{t=t_0} = \frac{d}{dt}\psi(t + t_0, x)\big|_{t=t_0} = \frac{d}{dt}\psi(t, \psi(t_0, x))\big|_{t=t_0} = X_{\psi(t_0,x)}.$$

3. Actions de groupes

Un *groupe topologique* est un groupe G muni d'une topologie pour laquelle l'application $g, g' \in G \times G \longmapsto gg'^{-1} \in G$ est continue.

Soient M une variété et G un groupe topologique d'élément neutre e. Une *action* de G sur M est la donnée d'une application continue $\Phi : (g, x) \in G \times M \longmapsto gx \in M$ telle que :

(1) $\Phi(e, x) = x$ pour tout $x \in M$;

(2) $\Phi(gg', x) = \Phi(g, \Phi(g', x))$ pour tous $g, g' \in G$ et tout $x \in M$.

Si, pour tout $g \in G$, l'application $x \in M \longmapsto gx \in M$ est un difféomorphisme, on dira que l'action est *différentiable*.

L'action Φ définit une relation d'équivalence ouverte :

$$x \sim y \iff \text{ il existe } g \in G \text{ tel que } y = gx.$$

On munit l'ensemble quotient, noté M/G de la *topologie quotient* : c'est la plus fine des topologies sur M/G rendant continue la projection canonique $\pi : M \longrightarrow M/G$.

Rappelons que :

1) La classe d'équivalence d'un élément $x \in M$ est son *orbite* notée O_x ;

2) $x \in M$ est un point fixe si $O_x = \{x\}$;

3) pour tout $x \in M$, l'ensemble $G_x = \{g \in G, gx = x\}$ est un sous-groupe de G appelé *groupe d'isotropie* de x ou *stabilisateur* de x ; on le note G_x ;

4) une partie M_0 de M est dite *invariante* si, pourc tout $x \in M_0$, l'orbite O_x est contenue dans M_0 ;

L'action de G sur M est dite :

5) *libre* si tous les groupes d'isotropie sont réduits à l'élément neutre ;

6) *transitive* si M ne contient qu'une seule G-orbite ;

7) *totalement discontinue* si tout $x \in M$ admet un voisinage ouvert U tel que, pour tout $g \in G$, $U \cap gU = \emptyset$;

8) *séparante* si tous $x, y \in M$ ayant des orbites distinctes admettent des voisinages ouverts respectifs U et V tels que, pour tous $g, h \in G$, on ait $gU \cap hU = \emptyset$;

9) *propre* si, pour tout compact K de M, l'ensemble $\{g \in G, K \cap gK \neq \emptyset\}$ est relativement compact dans G, donc fini si G est discret.

Lorsque G est dénombrable discret et agit librement et proprement sur M, alors l'action est séparante et proprement discontinue. Cela permet de munir M/G d'une structure de variété.

3.1. Proposition. *Soient M une variété de dimension n et G un groupe dénombrable discret agissant librement et proprement sur M. Alors le quotient $X = M/G$ est une variété de dimension n et la projection canonique $\pi : M \longrightarrow X$ est un revêtement.*

Les exemples de telles situations ne manquent pas. Donnons-en deux qui vont apparaître constamment chez nous.

3.2. Exemples

i) Le tore $\mathbb{T}^n$ est l'espace produit de n cercles $\mathbb{S}^1$. C'est une variété différentiable compacte connexe sans bord de dimension n. Mais on peut aussi l'obtenir comme quotient par une action de groupe. L'action $(\mathbf{m}, x) \in \mathbb{Z}^n \times \mathbb{R}^n \longmapsto x + \mathbf{m} \in \mathbb{R}^n$ de $\mathbb{Z}^n$ sur $\mathbb{R}^n$ est propre et libre, et la variété $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ est difféomorphe au tore $\mathbb{T}^n$. La projection canonique $\pi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{T}^n$ est donnée par :

$$\pi(x_1, \cdots, x_n) = (e^{2i\pi x_1}, \cdots, e^{2i\pi x_n}).$$

ii) Si N est une variété de dimension n et γ un difféomorphisme de N, on définit une action de $\mathbb{Z}$ sur $N \times \mathbb{R}$ en posant :

$$k(t,x) = (t+k, \gamma^k(x)).$$

Il est très facile de voir que cette action est libre et propre. Comme le groupe $\mathbb{Z}$ est discret, le quotient de $\widehat{M} = N \times \mathbb{R}$ par cette action est une variété de dimension $n+1$. On dira qu'elle est obtenue par *suspension* de (N, γ).

Sur $\widehat{M}$ on a un champ de vecteurs canonique $\widehat{X} = \frac{\partial}{\partial t}$ invariant sous l'action du difféomorphisme $\sigma : (x,t) \in \widehat{M} \longmapsto (x+1, \gamma x) \in \widehat{M}$ (qui est le générateur de l'action de $\mathbb{Z}$ sur $\widehat{M}$). Il induit donc un champ X sur la variété quotient M.

4. Cohomologie de de Rham

C'est un invariant topologique important pour les variétés. Il a l'avantage de pouvoir être calculé à l'aide des formes différentielles que nous allons commencer par introduire d'abord sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ ensuite nous transposerons la définition dans le cas général par le biais des cartes locales. Notre référence est [Ek3].

On se donne une variété différentiable M de dimension n définie à l'aide d'un atlas (U_i, φ_i).

4.1. Formes différentielles sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$

Supposons d'abord que M est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soit r un entier naturel et notons $\Lambda^r\mathbb{R}^n$ l'espace des r-formes extérieures sur $\mathbb{R}^n$. On appelle *forme différentielle de degré* r ou simplement *r-forme* sur M toute application $\alpha : M \longrightarrow \Lambda^r\mathbb{R}^n$ de classe C^∞. Pour chaque $x \in M$, α_x est une r-forme linéaire alternée sur $\mathbb{R}^n$. L'ensemble des r-formes différentielles sur M est donc un espace vectoriel réel ; on le notera $\Omega^r(M)$. On voit que $\Omega^r(M) = \{0\}$ si $r > n$; on pose $\Omega^r(M) = \{0\}$ pour $r < 0$. Décrivons explicitement les espaces $\Omega^r(M)$.

Pour chaque $i = 1, \cdots, n$, la 1-formes dx_i est la différentielle de la fonctions coordonnée qui à $x \in M$ associe sa $i^{\text{ème}}$ coordonnée $x_i \in \mathbb{R}$. Prises en un point, les 1-formes $dx_1, \cdots, dx_n$ constituent une base de l'espace vectoriel $\Lambda^1\mathbb{R}^n$. Comme une 1-forme α sur M est une application $M \longrightarrow \Lambda^1\mathbb{R}^n$, elle s'écrit sous la forme :

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i dx_i$$

où les α_i sont des fonction C^∞ sur M.

Pour r quelconque, en prenant tous les produits extérieurs possibles $dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_r}$ pour $1 \leq i_1 < \ldots < i_r \leq n$ on définit une base de $\Lambda^r \mathbb{R}^n$. Ainsi toute r-forme différentielle α sur M est du type :

$$\alpha = \sum \alpha_{i_1 \ldots i_r} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_r}$$

où la somme porte sur tous les r-uplets $(i_1, \ldots, i_r)$ tels que $1 \leq i_1 < \ldots < i_r \leq n$ et les $\alpha_{i_1 \ldots i_r}$ sont des fonctions C^∞ sur M. On pose :

$$\Omega^*(M) = \bigoplus_{r=0}^{n} \Omega^r(M).$$

Deux formes différentielles $\alpha \in \Omega^r(M)$ et $\beta \in \Omega^s(M)$ s'écrivant :

$$\alpha = \sum \alpha_{i_1 \ldots i_r} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_r} \text{ et } \beta = \sum \beta_{j_1 \ldots j_s} dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_s}$$

ont pour produit extérieur :

$$\alpha \wedge \beta = \sum \alpha_{i_1 \ldots i_r} \beta_{j_1 \ldots j_s} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_r} \wedge dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_s}$$

où la somme est étendue à tous les r-uplets $(i_1, \ldots, i_r)$ et s-uplets $(j_1, \ldots, j_s)$ tels que $1 \leq i_1 < \ldots < i_r \leq n$ et $1 \leq j_1 < \ldots < j_s \leq n$. On obtient ainsi une forme différentielle de degré $r + s$ sur M.

4.2. Effet d'une application différentiable

Soient M et N deux ouverts respectivement de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$ et $\varphi : M \longrightarrow N$ une application C^∞. Alors pour tout point $x \in M$, la différentielle $d_x\varphi$ est une application linéaire de l'espace $\mathbb{R}^n$ dans l'espace $\mathbb{R}^p$. Pour tout $r \in \mathbb{N}$, elle induit une application linéaire :

$$\varphi^* : \Omega^r(N) \longrightarrow \Omega^r(M)$$

définie pour toute r-forme β sur N de la façon suivante : pour tout point $x \in M$ et tout système de r vecteurs $(u_1, \ldots, u_r)$ de $\mathbb{R}^n$ on pose :

$$\varphi^*(\beta)(x)(u_1, \ldots, u_r) = \beta(\varphi(x))(d_x\varphi(u_1), \ldots, d_x\varphi(u_r)).$$

On dira que $\varphi^*(\beta)$ est l'*image réciproque* de β par φ. Les propriétés essentielles de l'application $\varphi^* : \Omega^r(N) \longrightarrow \Omega^r(M)$ sont les suivantes :

(1) si φ est l'identité d'un ouvert $M \subset \mathbb{R}^n$ alors φ^* est l'identité de $\Omega^r(M)$ pour tout r ; si $M \xrightarrow{\varphi} N \xrightarrow{\psi} L$ sont deux applications C^∞ alors $(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^*$.

(2) Si φ est un difféomorphisme alors φ^* est un isomorphisme entre les algèbres graduées $\Omega^*(N)$ et $\Omega^*(M)$ et on a $(\varphi^*)^{-1} = (\varphi^{-1})^*$.

Mettons-nous maintenant dans le cas général *i.e.* M n'est plus forcément un ouvert de $\mathbb{R}^n$ mais une variété quelconque définie comme on l'a dit par l'atlas $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$. On posera $\varphi_{ij} = \varphi_j^{-1} \circ \varphi_i$.

Une *r-forme différentielle* sur M est une collection $\alpha = (\alpha_i)_{i \in I}$ où α_i est une r-forme sur l'ouvert $\varphi_i^{-1}(U_i)$ telle que sur toute intersection non vide $U_i \cap U_j$ on ait la condition de recollement :

$$\alpha_i = \varphi_{ij}^*(\alpha_j). \tag{I.6}$$

L'espace des r-formes différentielles sur M sera toujours noté $\Omega^r(M)$. Toutes les propriétés qu'on vient de donner de l'espace $\Omega^r(M)$ dans le cas M difféomorphe à $\mathbb{R}^n$ se transportent systématiquement au cas où M est une variété.

On conviendra que dorénavant l'écriture dans une carte locale $(U, x_1, \ldots, x_n)$ d'une r-forme α sur M sera $\alpha = \sum \alpha_{i_1 \ldots i_r} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_r}$ où la sommation est, comme d'habitude, étendue à tous les r-uplets d'entiers $(i_1, \ldots, i_r)$ avec $1 \leq i_1 < \ldots < i_r \leq n$.

4.3. La cohomologie

À toute r-forme $\alpha = (\alpha_i)$ on associe la $(r+1)$-forme $d\alpha$ définie par la formule :

$$(d\alpha)_i = \sum \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \alpha_{i_1 \ldots i_r}}{\partial x_i} dx_i \right) \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_r}.$$

On vérifie sans peine que la collection $(d\alpha_i)$ satisfait encore la condition de recollement (I.6). On définit ainsi pour tout r un opérateur linéaire $d : \Omega^r(M) \longrightarrow \Omega^{r+1}(M)$. On l'appelle *différentielle extérieure* sur M. On vérifie facilement que l'opérateur :

$$d^2 = d \circ d : \Omega^r(M) \xrightarrow{d} \Omega^{r+1}(M) \xrightarrow{d} \Omega^{r+2}(M)$$

est nul. La différentielle d commute à φ^* pour toute application différentiable $\varphi : M \longrightarrow N$ *i.e.*, pour tout $r \in \mathbb{N}$, le diagramme qui suit est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \Omega^r(N) & \xrightarrow{d} & \Omega^{r+1}(N) \\ \varphi^* \downarrow & & \downarrow \varphi^* \\ \Omega^r(M) & \xrightarrow{d} & \Omega^{r+1}(M). \end{array}$$

On dira que la r-forme α est *fermée* ou que c'est un *cocycle* si $d\alpha = 0$, *exacte* ou que c'est un *cobord* s'il existe $\beta \in \Omega^{r-1}(M)$, appelée *primitive* de α, telle que $\alpha = d\beta$. Comme $d^2 = 0$, toute forme exacte est fermée. On pose :

$$Z^r(M) = \{r\text{-formes fermées sur } M\} \text{ et } B^r(M) = \{r\text{-formes exactes sur } M\}.$$

D'après ce qu'on vient de voir, à toute variété M, on peut associer une suite d'espaces vectoriels et d'opérateurs linéaires :

$$\text{(S)} \qquad 0 \longrightarrow \Omega^0(M) \xrightarrow{d} \Omega^1(M) \xrightarrow{d} \ldots \xrightarrow{d} \Omega^n(M) \longrightarrow 0$$

(où les première et dernière flèches sont bien sûr les applications nulles). C'est un objet naturel ; on l'appelle *complexe de de Rham* de M. Comme $d^2 = 0$ on a pour tout $r \in \mathbb{N}$, $B^r(M) \subset Z^r(M)$. On dira alors que la suite (S) est *semi-exacte*. Le défaut d'exactitude est mesuré par le quotient :

$$H^r(M) = Z^r(M)/B^r(M)$$

qu'on appelle $r^{\text{ème}}$ *espace de cohomologie de de Rham* de M.

CHAPITRE II

AUTOUR DES ÉQUATIONS COHOMOLOGIQUES

Nous exposons dans ce chapitre diverses questions fortement liées aux équations cohomologiques susmentionnées. Soit M une variété compacte. L'espace vectoriel $C^\infty(M)$ des fonctions complexes de classe C^∞ sur M sera muni de sa topologie C^∞ usuelle ; elle en fait un espace de Fréchet.

1. Cohomologie des groupes

Soit Γ un groupe discret (dénombrable pour simplifier) agissant sur un espace vectoriel E. L'action d'un élément $\gamma \in \Gamma$ sur un élément $u \in E$ sera notée $\gamma \cdot u$.

1.1. Définition

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, soit $C^k(\Gamma, E)$ l'ensemble des fonctions de Γ^k dans E qu'on appelle *k-cochaînes inhomogènes* sur Γ à valeurs dans E. On définit l'application linéaire $d : C^k(\Gamma, E) \longrightarrow C^{k+1}(\Gamma, E)$ par :

$$\begin{aligned}(dc)(\gamma_1, \dots, \gamma_{k+1}) = {} & \gamma_1 \cdot c(\gamma_2, \dots, \gamma_{k+1}) \\ & + \sum_{i=1}^{k} (-1)^i c(\gamma_1, \dots, \gamma_{i-1}, \gamma_i\gamma_{i+1}, \gamma_{i+2}, \dots, \gamma_{k+1}) \\ & + (-1)^{k+1} c(\gamma_1, \dots, \gamma_k).\end{aligned} \tag{II.1}$$

L'opérateur d satisfait $d^2 = 0$; l'image $B^k(\Gamma, E)$ de $d : C^{k-1}(\Gamma, E) \longrightarrow C^k(\Gamma, E)$ est donc un sous-espace vectoriel du noyau $Z^k(\Gamma, E)$ de $d : C^k(\Gamma, E) \longrightarrow C^{k+1}(\Gamma, E)$. Les quotients

$$H^k(\Gamma, E) = Z^k(\Gamma, E)/B^k(\Gamma, E) \ \text{ pour } \ k \in \mathbb{N} \tag{II.2}$$

sont appelés les *groupes de cohomologie* de Γ à valeurs dans le Γ-module E.

1.2. Exemples

Supposons, pour simplifier, que l'action de Γ sur E est triviale. Une autre manière de définir la cohomologie $H^*(\Gamma, E)$ est la suivante. Il existe un espace topologique connexe noté $K(\Gamma, 1)$ (ou $B\Gamma$) appelé *classifiant* de Γ, défini à homotopie près par les conditions :

$$\pi_i(K(\Gamma, 1)) = \begin{cases} \Gamma & \text{si } i = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Par définition la cohomologie de Γ à coefficients dans E sera la cohomologie singulière à coefficients dans E de l'espace $K(\Gamma, 1)$.

Par exemple, si Γ agit librement et proprement sur un espace contractile M, $K(\Gamma, 1) = M/\Gamma$ et la cohomologie du groupe Γ s'identifie canoniquement à celle de l'espace quotient M/Γ.

(1) - $\Gamma = \mathbb{Z}^n$; alors $K(\mathbb{Z}^n, 1)$ est (à homotopie près) le tore $\mathbb{T}^n$ et donc :

$$H^*(\mathbb{Z}^n, E) = E^{C_n^*}$$

où $C_n^* = \frac{n!}{*!(n-*)!}$.

(2) - Γ est le groupe engendré par $\gamma_1, \ldots, \gamma_g, \sigma_1, \ldots, \sigma_g$ (avec $g \geq 2$) vérifiant la relation $\gamma_1 \sigma_1 \gamma_1^{-1} \sigma_1^{-1} \ldots \gamma_g \sigma_g \gamma_g^{-1} \sigma_g^{-1} = 1$. Alors $K(\Gamma, 1)$ est la surface compacte orientable de genre g. Dans ce cas la cohomologie de Γ est donnée par :

$$H^*(\Gamma, E) = \begin{cases} E & \text{si } * = 0, 2 \\ E^{2g} & \text{si } * = 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1.3. Cas de $\Gamma = \mathbb{Z}$

Supposons que Γ est le groupe infini cyclique $\mathbb{Z}$ et que son action sur E est engendrée par un élément γ. Alors un calcul facile montre que :

$$H^*(\Gamma, E) = \begin{cases} E^\gamma & \text{si } * = 0 \\ E/\langle x - \gamma x \rangle & \text{si } * = 1 \\ 0 & \text{si } * \geq 2 \end{cases} \tag{II.3}$$

où $\langle x - \gamma x \rangle$ est le sous-espace vectoriel de E constitué des éléments de la forme $x - \gamma x$ avec x variant dans E. Le calcul de $H^1(\Gamma, E)$ se ramène donc à la résolution de l'équation cohomologique :

Étant donné $y \in E$, existe-t-il $x \in E$ tel que $y = x - \gamma x$?

Nous aurons à traiter de ce genre de problème dans notre travail.

2. Distributions invariantes

2.1. Définition. *Une **distribution** sur M est une forme linéaire continue $\varphi \in C^\infty(M) \xrightarrow{T} \langle T, \varphi\rangle \in \mathbb{C}$ i.e. un élément du dual topologique $\mathcal{D}'(M)$ de $C^\infty(M)$.*

L'espace vectoriel $\mathcal{D}'(M)$ sera muni de la *topologie faible i.e.* la topologie la moins fine qui rend continues toutes les évaluations linéaires $e_\varphi : T \in \mathcal{D}'(M) \longmapsto \langle T, \varphi\rangle \in \mathbb{C}$. Toute forme volume μ sur M permet de définir une injection $f \in C^\infty(M) \longmapsto T_f \in \mathcal{D}'(M)$ donnée par :

$$\langle T_f, \varphi\rangle = \int_M (f\varphi)\mu.$$

Toute distribution de ce type est dite *régulière*.

2.2. Définition. *Soit $M \xrightarrow{\gamma} M$ un difféomorphisme. Une distribution $T \in \mathcal{D}'(M)$ est dite **invariante** par γ (ou simplement γ-invariante) si elle vérifie $\langle T, \varphi \circ \gamma\rangle = \langle T, \varphi\rangle$ pour toute fonction $\varphi \in C^\infty(M)$.*

On dira que T est invariante par un groupe Γ de difféomorphismes de M (ou Γ-invariante) si elle est invariante par chacun de ses éléments. (Il suffit en fait de vérifier la propriété sur les éléments d'un système générateur de Γ.) Les distributions Γ-invariantes forment un sous-espace vectoriel $\mathcal{D}'_\Gamma(M)$ fermé (pour la topologie faible) de $\mathcal{D}'(M)$. Le calcul de l'espace $\mathcal{D}'_\Gamma(M)$ est loin d'être trivial même pour des données (M, Γ) simples et explicites. Quelques travaux cependant ont été entrepris dans cette direction (*cf.* par exemple [AE], [EMM]).

Notons $\mathcal{C}$ le sous-espace vectoriel de $C^\infty(M)$ engendré algébriquement par les éléments de la forme $\varphi - \varphi \circ \gamma$ où $\varphi \in C^\infty(M)$ et $\gamma \in \Gamma$. Par définition même, une distribution est Γ-invariante si, et seulement si, elle est nulle sur $\mathcal{C}$; elle induit donc une forme linéaire continue sur l'espace quotient $C^\infty(M)/\mathcal{C}$ (ou sur le séparé associé $C^\infty(M)/\overline{\mathcal{C}}$ où $\overline{\mathcal{C}}$ désigne l'adhérence de $\mathcal{C}$). Dans le cas où Γ est engendré par un seul élément γ, $C^\infty(M)/\mathcal{C}$ n'est rien d'autre que le premier espace de cohomologie $H^1(\mathbb{Z}, C^\infty(M))$ du groupe $\mathbb{Z}$ à valeurs dans le $\mathbb{Z}$-module $C^\infty(M)$, l'action étant :

$$(k, f) \in \mathbb{Z} \times C^\infty(M) \longrightarrow f \circ \gamma^k \in C^\infty(M).$$

Son calcul se ramène à celui de $\mathcal{C}$ et donc à la résolution de l'*équation cohomologique discrète* (le terme "cohomologique" s'introduit de façon naturelle) :

$$f - f \circ \gamma = g. \tag{II.4}$$

2.3. Équation cohomologique continue

Soit X un champ de vecteurs sur M. Alors X définit un opérateur différentiel du premier ordre $X : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$ par $(X \cdot f)(x) = d_x f(X_x)$. Il est naturel de s'intéresser aux solutions de l'*équation cohomologique continue* :

$$X \cdot f = g. \tag{II.5}$$

L'opérateur $X : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$ admet une extension naturelle aux distributions $X : T \in \mathcal{D}'(M) \longrightarrow X \cdot T \in \mathcal{D}'(M)$ avec :

$$\langle X \cdot T, \varphi \rangle = -\langle T, X \cdot \varphi \rangle.$$

On pourrait donc s'intéresser à la résolution de l'équation cohomologique continue au niveau des distributions:

$$X \cdot T = S. \tag{II.6}$$

Une distribution T est dite *invariante* par X ou X-*invariante* si elle vérifie $X \cdot T = 0$ *i.e.* elle est nulle sur l'image de $X : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$ qui est l'espace des *divergences* de X. Une condition nécessaire (et non suffisante en général) pour que l'équation (II.5) admette une solution f est donc $\langle T, g \rangle = 0$ pour toute distribution T invariante par X.

Le problème de la régularité des solutions a une grande importance. On dira que X est *globalement hypoelliptique* si, pour toute distribution $T \in \mathcal{D}'(M)$:

$$X \cdot T \in C^\infty(M) \Longrightarrow T \in C^\infty(M).$$

Le seul exemple connu d'un tel champ est celui d'un champ linéaire diophantien (*cf.* 1.3 chapitre III) sur le tore $\mathbb{T}^n$. Ce qui a amené S. Greenfield et N. Wallach à émettre dans [GW] la :

Conjecture. *Soient M une variété compacte orientable de dimension n et X un champ de vecteurs partout non nul préservant un volume C^∞ sur M. On suppose que X est globalement hypoelliptique. Alors M est difféomorphe au tore $\mathbb{T}^n$ et X est conjugué à un champ linéaire diophantien.*

3. Cohomologie feuilletée

3.1. Définition d'un feuilletage

On rappelle qu'un *feuilletage* $\mathcal{F}$ de dimension m sur une variété M est la donnée d'un sous-fibré τ de rang m du fibré tangent TM *complètement intégrable*, c'est-à-dire que pour toutes sections $X, Y \in C^\infty(\tau)$ de τ (*i.e.* des champs de vecteurs sur M tangents à τ), le crochet $[X, Y]$ est encore une section de τ. Les sous-variétés connexes tangentes à τ sont appelées *feuilles* de $\mathcal{F}$.

3.2. Le complexe feuilleté

Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage de dimension m sur M. Pour tout $r \in \mathbb{N}$, on note $\Lambda^r(T^*\mathcal{F})$ le fibré coalgèbre extérieure de degré r sur $T\mathcal{F}$ (le fibré tangent à $\mathcal{F}$). Ses sections sont les formes différentielles *feuilletées* de degré r ; elles forment un espace vectoriel qu'on notera $\Omega^r_{\mathcal{F}}(M)$. On a un opérateur de différentiation extérieure le long des feuilles $d_{\mathcal{F}} : \Omega^r_{\mathcal{F}}(M) \longrightarrow \Omega^{r+1}_{\mathcal{F}}(M)$ défini (comme dans le cas classique) par la formule :

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{F}}\alpha(X_1, \cdots, X_{r+1}) = &\sum_{i=1}^{r+1} (-1)^i X_i \cdot \alpha(X_1, \cdots, \widehat{X}_i, \cdots, X_{r+1}) \\ &+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \alpha([X_i, X_j], X_1, \cdots, \widehat{X}_i, \cdots, \widehat{X}_j, \cdots, X_{r+1}) \end{aligned}$$

où $\widehat{X}_i$ signifie qu'on a omis l'argument X_i. On vérifie facilement que l'opérateur $d_{\mathcal{F}}$ est de carré nul. On obtient ainsi un complexe différentiel (dit *complexe feuilleté*) :

$$\text{(CF)} \qquad 0 \longrightarrow \Omega^0_{\mathcal{F}}(M) \xrightarrow{d_{\mathcal{F}}} \Omega^1_{\mathcal{F}}(M) \xrightarrow{d_{\mathcal{F}}} \cdots \xrightarrow{d_{\mathcal{F}}} \Omega^{m-1}_{\mathcal{F}}(M) \xrightarrow{d_{\mathcal{F}}} \Omega^m_{\mathcal{F}}(M) \longrightarrow 0.$$

On note $Z^r_{\mathcal{F}}(M)$ le noyau de $d_{\mathcal{F}} : \Omega^r_{\mathcal{F}}(M) \longrightarrow \Omega^{r+1}_{\mathcal{F}}(M)$ et $B^r_{\mathcal{F}}(M)$ l'image de $d_{\mathcal{F}} : \Omega^{r-1}_{\mathcal{F}}(M) \longrightarrow \Omega^r_{\mathcal{F}}(M)$.

3.3. Définition. *Le quotient $H^r_{\mathcal{F}}(M) = Z^r_{\mathcal{F}}(M)/B^r_{\mathcal{F}}(M)$ est le $r^{\text{ème}}$ espace vectoriel de* ***cohomologie feuilletée*** *de $(M, \mathcal{F})$.*

C'est un invariant important du feuilletage. Par exemple le dual topologique de $H^m_{\mathcal{F}}(M)$ contient les *cycles feuilletés* au sens de [Su] et donc, en particulier, les mesures transverses invariantes (*cf.* [Ek1]). Le calcul de $H^*_{\mathcal{F}}(M)$ est souvent très ardu ! Pour une utilisation intéressante de la cohomologie feuilletée dans l'étude de la rigidité de certaines actions de groupes de Lie voir [MM].

Il arrive que l'espace vectoriel topologique $H^r_{\mathcal{F}}(M)$ (les espaces de formes feuilletées sont munis de la topologie C^∞) ne soit pas séparé ! On appelle alors *cohomologie feuilletée réduite* le quotient $\overline{H}^r_{\mathcal{F}}(M) = Z^r_{\mathcal{F}}(M)/\overline{B^r_{\mathcal{F}}(M)}$ où $\overline{B^r_{\mathcal{F}}(M)}$ est l'adhérence de $B^r_{\mathcal{F}}(M)$.

Si X est un champ non singulier sur M, il induit un feuilletage (ou flot) $\mathcal{F}$. On peut définir sa cohomologie feuilletée de façon plus simple. Notons τ le fibré tangent à $\mathcal{F}$ et ν un sous-fibré supplémentaire à τ dans TM. Soit χ la 1-forme différentielle telle que $\chi(X) = 1$ et $\chi_{|\nu} = 0$. Il est facile de voir que, pour tout $r \in \mathbb{N}$, on a :

$$\Omega^r_{\mathcal{F}}(M) = \begin{cases} C^\infty(M) & \text{si } r = 0 \\ C^\infty(M) \otimes \chi & \text{si } r = 1 \\ 0 & \text{si } r \geq 2 \end{cases}$$

et que le complexe feuilleté se réduit à :

$$0 \longrightarrow \Omega^0_{\mathcal{F}}(M) \xrightarrow{d_X} \Omega^1_{\mathcal{F}}(M) \longrightarrow 0$$

où d_X est l'opérateur défini par $d_X f = (X \cdot f) \otimes \chi$. Son conoyau $\Omega^1_{\mathcal{F}}(M)/\mathrm{Im} d_X$ est exactement le premier espace de *cohomologie feuilletée* $H^1_{\mathcal{F}}(M)$ de $\mathcal{F}$. Il ne dépend pas du champ qui le définit : on vérife aisément, en exhibant explicitement un isomorphisme de complexes feuilletés, qu'on obtiendrait la même cohomologie si on remplaçait le champ X par un champ $Z = hX$ avec h fonction partout non nulle. On montre qu'il ne dépend pas non plus du choix du fibré supplémentaire ν.

Le calcul de l'espace $H^1_{\mathcal{F}}(M)$ revient exactement à la résolution de l'équation cohomologique continue pour le champ X.

CHAPITRE III

CHAMPS LINÉAIRES ET FIBRATIONS EN TORES

1. Flots linéaires

Soit $n \geq 2$ un entier. L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ sera équipé de son produit scalaire habituel $\langle\ ,\ \rangle$; la norme associée sera notée $|\cdot|$. Le tore $\mathbb{T}^n$ est obtenu comme le quotient de $\mathbb{R}^n$ par son réseau standard $\mathbb{Z}^n$. Pour $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n$, on note $\Theta_{\mathbf{m}}$ la fonction $\Theta_{\mathbf{m}}(x) = e^{2i\pi\langle \mathbf{m}, x\rangle}$. Une fonction sur $\mathbb{T}^n$ n'est rien d'autre qu'une fonction $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ qui vérifie $f(x + \mathbf{m}) = f(x)$ pour tous $x \in \mathbb{R}^n$ et $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n$.

Si $f : \mathbb{T}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ est une fonction intégrable, elle peut être développée en série de Fourier :

$$f(x) = \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n} f_{\mathbf{m}} \Theta_{\mathbf{m}}(x)$$

où les $f_{\mathbf{m}}$ sont les coefficients de Fourier donnés par les formules intégrales :

$$f_{\mathbf{m}} = \int_{\mathbb{T}^n} f(x) e^{-2i\pi\langle \mathbf{m}, x\rangle} dx.$$

Si en plus f est de carré intégrable, les coefficients $f_{\mathbf{m}}$ vérifient la condition de convergence $\sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n} |f_{\mathbf{m}}|^2 < +\infty$.

De la même façon, toute distribution T sur le tore $\mathbb{T}^n$ (vue comme une distribution $\mathbb{Z}^n$-périodique sur $\mathbb{R}^n$) peut s'écrire sous la forme :

$$T = \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n} T_{\mathbf{m}} \Theta_{\mathbf{m}}$$

où la famille de nombres complexes $T_{\mathbf{m}}$ (indexée par $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n$) est à *croissance polynomiale*, c'est-à-dire, il existe un entier $r \in \mathbb{N}$ et une constante $C > 0$ tels que $|T_{\mathbf{m}}| \leq C|\mathbf{m}|^r$ pour tout $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n$.

Pour tout $r \in \mathbb{N}$, on note $W^{1,r}$ l'espace des fonctions f sur le tore $\mathbb{T}^n$ données par leurs coefficients de Fourier $(f_{\mathbf{m}})_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n}$ vérifiant la condition $\displaystyle\sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n} |\mathbf{m}|^r |f_{\mathbf{m}}| < +\infty$. De même, $W^{2,r}$ sera l'espace des fonctions f sur le tore $\mathbb{T}^n$ données par leurs coefficients de Fourier $(f_{\mathbf{m}})_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^n}$ vérifiant la condition $\displaystyle\sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^n} |\mathbf{m}|^{2r}|f_{\mathbf{m}}|^2 < +\infty$. Ce sont des espaces complets pour les normes :

$$||f||_{1,r} = |f_{\mathbf{0}}| + \sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^n\setminus\{\mathbf{0}\}} |\mathbf{m}|^r|f_{\mathbf{m}}| \quad \text{pour } f \in W^{1,r}$$

et

$$||f||_{2,r} = \sqrt{|f_{\mathbf{0}}|^2 + \sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^n\setminus\{\mathbf{0}\}} |\mathbf{m}|^{2r}|f_{\mathbf{m}}|^2} \quad \text{pour } f \in W^{2,r}$$

L'espace $W^{2,r}$ est le $r^{\text{ème}}$ espace de Sobolev du tore $\mathbb{T}^n$; il a une structure d'espace de Hilbert donnée par le produit hermitien :

$$\langle f, g\rangle_r = f_{\mathbf{0}}\overline{g}_{\mathbf{0}} + \sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^n\setminus\{\mathbf{0}\}} |\mathbf{m}|^{2r} f_{\mathbf{m}}\overline{g}_{\mathbf{m}}.$$

On a des inclusions naturelles :

$$C^\infty(\mathbb{T}^n) \subset \cdots \subset W^{1,r+1} \subset W^{1,r} \subset \cdots \subset W^{1,0}$$

et

$$C^\infty(\mathbb{T}^n) \subset \cdots \subset W^{2,r+1} \subset W^{2,r} \subset \cdots \subset W^{2,0} = L^2(\mathbb{T}^n).$$

La proposition suivante est facile à démontrer.

1.1. Proposition. *Soit* $T = \sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^n} T_{\mathbf{m}}\Theta_{\mathbf{m}}$ *une série (les* $T_{\mathbf{m}}$ *sont des nombres complexes). Alors les assertions i), ii) et iii) qui suivent sont équivalentes :*

i) T *est une distribution régulière (i.e.* T *est une fonction de classe* C^∞*) ;*

ii) pour tout $r \in \mathbb{N}$*, la série* $\displaystyle\sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^n} |\mathbf{m}|^{2r}|T_{\mathbf{m}}|^2$ *est convergente ;*

iii) pour tout $r \in \mathbb{N}$*, la série* $\displaystyle\sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^n} |\mathbf{m}|^{r}|T_{\mathbf{m}}|$ *est convergente.*

De plus :

iv) pour tout $r \in \mathbb{N}$*, les injections* $j_{1,r} : W^{1,r+1} \hookrightarrow W^{1,r}$ *et* $j_{2,r} : W^{2,r+1} \hookrightarrow W^{2,r}$ *sont des opérateurs compacts.*

Les trois premiers points de cette proposition disent : $\displaystyle\bigcap_{r\in\mathbb{N}} W^{1,r} = \bigcap_{r\in\mathbb{N}} W^{2,r} = C^\infty(\mathbb{T}^n)$. L'assertion ii) nous servira dans ce chapitre et l'assertion iii) dans le chapitre V. Elle seront utilisées de façon substantielle.

On considère le champ de vecteurs linéaire (*i.e.* dont les coefficients sont constants) $X = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \frac{\partial}{\partial x_k}$ sur le tore $\mathbb{T}^n$ où $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ est un vecteur de $\mathbb{R}^n$. On suppose que les nombres $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ sont $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants ; cela implique en particulier que les orbites de X sont denses et que la somme $(\alpha_1 + \cdots + \alpha_n)$ est non nulle. La 1-forme différentielle $\frac{1}{\alpha_1+\cdots+\alpha_n} \sum_{i=1}^{n} dx_i$ sera notée χ ; elle vaut 1 sur X et son noyau ν est l'hyperplan d'équation $\alpha_1 z_1 + \cdots + \alpha_n z_n = 0$. Le champ X définit un opérateur différentiel d'ordre 1 et l'équation cohomologique associée s'écrit :

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \frac{\partial f}{\partial x_k} = g. \tag{III.1}$$

Pour la résoudre, nous allons utiliser le développement en série de Fourier des fonctions sur le tore $\mathbb{T}^n$. On aura besoin d'une définition sur les approximations diophantiennes.

Tout vecteur $\alpha \in \mathbb{R}^n$ définit une forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$: $x \in \mathbb{R}^n \longmapsto \langle \alpha, x \rangle \in \mathbb{R}$ et donc a fortiori sur le réseau $\mathbb{Z}^n$.

1.2. Définition [Sc]. *i) On dira que le vecteur α est* ***diophantien*** *s'il existe des nombres réels $A > 0$ et $\delta > 0$ tels que $|\langle \alpha, \mathbf{m} \rangle| \geq \frac{A}{|\mathbf{m}|^\delta}$ pour tout $\mathbf{m} = (m_1, ..., m_n) \in \mathbb{Z}^n$ non nul. Dans ce cas, on dira que le champ X est diophantien.*

ii) On dira que α est un ***vecteur de Liouville*** *s'il existe $A > 0$ tel que, pour tout $\delta > 0$, il existe $\mathbf{m}_\delta \in \mathbb{Z}^n$ vérifiant $|\langle \alpha, \mathbf{m}_\delta \rangle| \leq \frac{A}{|\mathbf{m}_\delta|^\delta}$. Dans ce cas, on dira que le champ X est de Liouville.*

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer et de démontrer le théorème qui suit. (Comme nous l'avons déjà signalé, ce résultat est connu et fait partie du folklore.)

1.3. Théorème. *i) Supposons X diophantien. Alors l'équation* (III.1) *a une solution $f \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ si, et seulement si $\int_{\mathbb{T}^n} g(x)dx = 0$. Dans ce cas, l'espace vectoriel $H^1_{\mathcal{F}}(\mathbb{T}^n)$ est de dimension 1 engendré par la 1-forme feuilletée χ.*

ii) Si X est de Liouville, il existe une famille infinie libre $(g_\delta)_{\delta \in \mathbb{N}}$ telle que l'équation $X \cdot f = g_\delta$ n'ait aucune solution. Dans ce cas, $H^1_{\mathcal{F}}(\mathbb{T}^n)$ est un espace vectoriel topologique de dimension infinie non séparé. Mais $\overline{H}^1_{\mathcal{F}}(\mathbb{T}^n)$ est de dimension 1 engendré par χ.

iii) Dans tous les cas, l'espace $\mathcal{D}'_X(\mathbb{T}^n)$ des distributions X-invariantes est de dimension 1 engendré par la mesure de Haar $dx_1 \otimes \cdots \otimes dx_n$ sur le groupe de Lie $\mathbb{T}^n$.

Démonstration. Si on intègre les deux membres de l'équation (III.1), celui de gauche donne 0. Donc une condition nécessaire d'existence d'une solution est $\int_{\mathbb{T}^n} g(x)dx = 0$. Supposons-la remplie. Les développements de Fourier de f et g :

$$f(x) = \sum_{\mathbf{m}\in Z^n} f_{\mathbf{m}} e^{2i\pi\langle x,\mathbf{m}\rangle} \quad \text{et} \quad g(x) = \sum_{\mathbf{m}\in Z^n} g_{\mathbf{m}} e^{2\pi i\langle x,\mathbf{m}\rangle}$$

permettent de ramener l'équation (III.1) au système suivant :

$$\text{(S)} \qquad 2i\pi\langle \mathbf{m}, \alpha\rangle f_{\mathbf{m}} = g_{\mathbf{m}} \quad \text{avec} \quad \mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n.$$

La condition nécessaire $\int_{\mathbb{T}^n} g(x)dx = 0$ signifie en fait que $g_{\mathbf{0}} = 0$. On pose :

$$\text{(III.2)} \qquad f_{\mathbf{m}} = \begin{cases} 0 & \text{si } \mathbf{m} = \mathbf{0} \\ \frac{g_{\mathbf{m}}}{2i\pi\langle\alpha,\mathbf{m}\rangle} & \text{si } \mathbf{m} \neq \mathbf{0}. \end{cases}$$

La fonction f est donc donnée formellement par ses coefficients de Fourier $(f_{\mathbf{m}})_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^n}$. Étudions sa régularité. Soit $r \in \mathbb{N}$.

i) <u>α diophantien</u>

On a :

$$|\mathbf{m}|^{2r}|f_{\mathbf{m}}|^2 = |\mathbf{m}|^{2r}\left|\frac{g_{\mathbf{m}}}{2i\pi\langle\alpha,\mathbf{m}\rangle}\right|^2 \leq \frac{1}{A^2 4\pi^2}|g_{\mathbf{m}}|^2|\mathbf{m}|^{2(r+\delta)}.$$

Comme g est de classe C^∞, la série $\sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^n} |g_{\mathbf{m}}|^2|\mathbf{m}|^{2(r+\delta)}$ converge (proposition 1.1), par suite :

$$\sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^n} |\mathbf{m}|^{2r}|f_{\mathbf{m}}|^2 < +\infty$$

qui montre bien que f est de classe C^∞. On voit donc que le champ X est globalement hypoelliptique.

Le fait que l'espace vectoriel $H^1_{\mathcal{F}}(\mathbb{T}^n)$ soit de dimension 1 engendré par la 1-forme χ est immédiat.

ii) <u>α de Liouville</u>

On sait qu'il existe $A > 0$ tel que, pour tout $\delta \in \mathbb{N}^*$, il existe $\mathbf{m}_\delta \in \mathbb{Z}^n$ vérifiant $|\langle\alpha, \mathbf{m}_\delta\rangle| \leq \frac{A}{|\mathbf{m}|^\delta}$. Soit $(\delta_k)_k$ une suite strictement croissante dans $\mathbb{N}^*$; les $\mathbf{m}_{\delta_k}$ correspondants seront simplement notés $\mathbf{m}_k$. On définit alors une fonction g à l'aide de ses coefficients de Fourier :

$$\text{(III.3)} \qquad g_{\mathbf{m}} = \begin{cases} |\mathbf{m}_k|^{-\frac{\delta_k}{2}} & \text{si } \mathbf{m} = \mathbf{m}_k \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il est facile de vérifier, à l'aide de l'assertion ii) de la proposition 1.1, que g est de classe C^∞. Mais :

$$\begin{aligned} |f_{\mathbf{m}_k}|^2 &= \left| \frac{g_{\mathbf{m}_k}}{2i\pi\langle\alpha, \mathbf{m}_k\rangle} \right|^2 \\ &= \frac{|\mathbf{m}_k|^{-\delta_k}}{4\pi^2|\langle\alpha, \mathbf{m}_k\rangle|^2} \\ &\geq \frac{1}{4\pi^2 A^2}|\mathbf{m}_k|^{\delta_k}. \end{aligned}$$

Les coefficients $f_{\mathbf{m}}$ sont donc à croissance surpolynomiale et ne définissent même pas une distribution f solution de l'équation $X \cdot f = g$! De cette façon on peut fabriquer une famille infinie libre de fonctions $(g^\delta)_{\delta\in\mathbb{N}^*}$ de classe C^∞ pour lesquelles l'équation n'a pas de solution. Le conoyau de l'opérateur $X : C^\infty(\mathbb{T}^n) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{T}^n)$ est donc de dimension infinie.

On peut aussi montrer que lorsque le vecteur α est de Liouville, le champ X n'est pas globalement hypoelliptique. En effet, soit $(\mathbf{m}_k)$ la famille de multi-indices qu'on vient de considérer associée à la suite $(\delta_k)_k$. Soient q n'importe quel entier naturel et T la distribution sur $\mathbb{T}^n$ (qui n'est même pas une fonction de carré intégrable) donnée par ses coefficients de Fourier :

$$T_{\mathbf{m}} = \begin{cases} |\mathbf{m}_k|^q & \text{si } \mathbf{m} = \mathbf{m}_k \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{III.4}$$

Alors $X \cdot T$ est la distribution donnée par les coefficients :

$$(X \cdot T)_{\mathbf{m}} = \begin{cases} \langle\alpha, \mathbf{m}_k\rangle|\mathbf{m}_k|^q & \text{si } \mathbf{m} = \mathbf{m}_k \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Un calcul simple, utilisant la décroissance rapide de la quantité $|\langle\alpha, \mathbf{m}_k\rangle|$ (quand k tend vers l'infini) montre que $X \cdot T$ est une fonction de classe C^∞.

Si g est un polynôme trigonométrique sans terme constant, l'équation a toujours une solution : le problème de la convergence ne se pose pas. Comme l'adhérence du sous-espace engendré algébriquement par ces polynômes est de codimension 1 (c'est l'orthogonal de la fonction constante $\mathbf{1}$), l'image de l'opérateur différentiel d'ordre 1 $X : C^\infty(\mathbb{T}^n) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{T}^n)$ n'est pas fermée, donc $H^1_{\mathcal{F}}(\mathbb{T}^n)$ n'est pas séparé mais l'espace $\overline{H}^1_{\mathcal{F}}(\mathbb{T}^n)$ de cohomologie feuilletée réduite est de dimension 1 engendré par χ.

iii) Comme l'espace vectoriel topologique $\mathcal{D}'_X(\mathbb{T}^n)$ des distributions X-invariantes est toujours le dual topologique de $\overline{H}^1_{\mathcal{F}}(\mathbb{T}^n)$, il est de dimension 1. Et on voit de façon immédiate, qu'à une constante multiplicative près, il ne contient que la mesure de Lebesgue $dx_1 \otimes \cdots \otimes dx_n$. $\square$

2. Fibrations en tores

Soient M une variété et X un champ de vecteurs non singulier sur M. On suppose que les adhérences des orbites de X sont des tores $\mathbb{T}^n$ et qu'elles sont les fibres d'une fibration localement triviale au-dessus d'une variété W de dimension d :

$$\mathbb{T}^n \hookrightarrow M \xrightarrow{\pi} W.$$

Ceci est le cas si, par exemple, le champ X définit un flot transversalement parallélisable complet (*cf.* chapitre IV). Pour tout ouvert $U \subset W$ relativement compact et trivialisant la fibration, on notera $(u, x_1, \cdots, x_n)$ les coordonnées d'un point de $\pi^{-1}(U)$ via le difféomorphisme (de trivialisation) $\phi : U \times \mathbb{T}^n \longrightarrow V = \pi^{-1}(U)$.

Nous allons mettre une topologie sur l'espace des fonctions $f : M \longrightarrow \mathbb{C}$ adaptée à cette structure et qui permet le contrôle de la régularité de ces fonctions. Soit $f : M \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction mesurable. Via le difféomorphisme ϕ, la restriction de f à V peut être vue comme une fonction notée $f_U : U \times \mathbb{T}^n \longrightarrow \mathbb{C}$; on utilisera donc les coordonnées $(u, x) = (u, x_1, \cdots, x_n)$. On dira que f est *localement de carré intégrable* si tout point admet un voisinage du type U tel que $|f_U|^2$ soit intégrable. On regardera alors f_U comme une distribution qu'on notera simplement f.

Si on fixe $u \in W$, pour tous multi-indices $\mathbf{r} \in \mathbb{N}^d$ et $\mathbf{s} \in \mathbb{N}^n$, la distribution $\frac{\partial^{|\mathbf{r}|+|\mathbf{s}|} f}{\partial u^{\mathbf{r}} \partial x^{\mathbf{s}}}$ se développe en série de Fourier :

$$\frac{\partial^{|\mathbf{r}|+|\mathbf{s}|} f}{\partial u^{\mathbf{r}} \partial x^{\mathbf{s}}}(u, x) = \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^{\mathbf{n}}} \frac{\partial^{|\mathbf{r}|} f_{\mathbf{m}}}{\partial u^{\mathbf{r}}}(u)(2i\pi)^{|\mathbf{s}|} \mathbf{m}^{\mathbf{s}} e^{2i\pi \langle x, \mathbf{m} \rangle}.$$

Soient $r, s \in \mathbb{N}$. On pose :

$$||f||_{r,s}^U = \left(\sum_{|\mathbf{r}| \leq r} \int_U \left| \frac{\partial^{|\mathbf{r}|} f_{\mathbf{0}}}{\partial u^{\mathbf{r}}}(u) \right|^2 du + \sum_{|\mathbf{r}| \leq r} \sum_{|\mathbf{s}| \leq s} \int_U \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n \setminus \{\mathbf{0}\}} |\mathbf{m}|^{2|\mathbf{s}|} \left| \frac{\partial^{|\mathbf{r}|} f_{\mathbf{m}}}{\partial u^{\mathbf{r}}}(u) \right|^2 du \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Soit $L^2_{\text{loc}}(M)$ l'espace des fonctions $f : M \longrightarrow \mathbb{C}$ localement de carré intégrable. L'ensemble des $f \in L^2_{\text{loc}}(M)$ qui vérifient $||f||_{r,s}^U < +\infty$ pour tout ouvert relativement compact (homéomorphe à une boule de $\mathbb{R}^d$) trivialisant la fibration π est un espace vectoriel $W^{r,s}(M)$ sur lequel $|| \ ||_{r,s}^U$ est une semi-norme. Cette semi-norme est en fait associée au produit hermitien (sur $L^2(U)$) :

$$\langle f, g\rangle_{r,s}^U = \sum_{|\mathbf{r}|\leq r} \int_U \frac{\partial^{|\mathbf{r}|} f_{\mathbf{0}}}{\partial u^{\mathbf{r}}} \overline{\frac{\partial^{|\mathbf{r}|} g_{\mathbf{0}}}{\partial u^{\mathbf{r}}}} du + \sum_{|\mathbf{r}|\leq r} \sum_{|\mathbf{s}|\leq s} \int_U \sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^n\setminus\{\mathbf{0}\}} |\mathbf{m}|^{2|\mathbf{s}|} \frac{\partial^{|\mathbf{r}|} f_{\mathbf{m}}}{\partial u^{\mathbf{r}}} \overline{\frac{\partial^{|\mathbf{r}|} g_{\mathbf{m}}}{\partial u^{\mathbf{r}}}} du.$$

Soit $\{U_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ un recouvrement localement fini de W par des ouverts U_j où chacun d'eux est relativement compact (homéomorphe à une boule de $\mathbb{R}^d$) et trivialisant la fibration π; notons la norme $|| \ ||_{r,s}^{U_j}$ par $|| \ ||_{r,s}^j$. Alors $f \in L^2_{\mathrm{loc}}(M)$ est de classe C^∞ si, et seulement si, $||f||_{r,s}^j < +\infty$ pour tous $j, r, s \in \mathbb{N}$.

On suppose maintenant que ϕ conjugue le système dynamique (V, X) au système dynamique $(U \times \mathbb{T}^n, Z)$ où Z est le champ “linéaire” $Z = \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ et $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ ne dépend pas de $u \in U$. (Pour simplifier, le champ Z sera noté X.)

Pour toute fonction $f \in L^2_{\mathrm{loc}}(M)$, on note $I(f)$ la fonction sur W définie par :

(III.5) $$I(f)(u) = \int_{\mathbb{T}^n} f(u, x_1, \cdots, x_n) dx_1 \cdots dx_n.$$

Il est facile de voir (via le théorème de Fubini) que $I(f) \in L^2_{\mathrm{loc}}(W)$ et que l'application $I : L^2_{\mathrm{loc}}(M) \longrightarrow L^2_{\mathrm{loc}}(W)$ est linéaire continue et surjective. En plus, elle envoie l'espace $C^\infty(M)$ surjectivement sur l'espace $C^\infty(W)$. On a le :

2.1. Théorème. *Supposons le champ X diophantien. Soit $g \in C^\infty(M)$. Alors l'équation cohomologique continue $X \cdot f = g$ a une solution $f \in C^\infty(M)$ si, et seulement si, $I(g) = 0$.*

Démonstration. Elle se fera en deux étapes. D'abord sur un ouvert $V_j = \pi^{-1}(U_j)$ difféomorphe à $U_j \times \mathbb{T}^n$ ensuite dans le cas général.

i) On se met sur V_j qu'on confondra avec $U_j \times \mathbb{T}^n$. Écrite au niveau des coefficients de Fourier, l'équation $X \cdot f = g$ donne le système :

(III.6) $$2i\pi\langle \alpha, \mathbf{m}\rangle f_{\mathbf{m}}(u) = g_{\mathbf{m}}(u) \quad \text{pour} \quad \mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n.$$

On voit donc que la condition nécessaire pour que g soit du type $X \cdot f$ est que $g_{\mathbf{0}}(u) = 0$, qui n'est rien d'autre que la condition $I(g) = 0$. Supposons-la satisfaite. On a alors une solution formelle :

$$\text{(III.7)} \qquad f_{\mathbf{m}}(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } \mathbf{m} = \mathbf{0} \\ \frac{g_{\mathbf{m}}(u)}{2i\pi\langle\alpha,\mathbf{m}\rangle} & \text{si } \mathbf{m} \neq \mathbf{0}. \end{cases}$$

Il est très facile de montrer que ces coefficients définissent bien une fonction f de classe C^∞ : il suffit de vérifier que pour tous $j, r, s \in \mathbb{N}$, on a $||f||_{r,s}^{j} < +\infty$; ceci se fait sans aucune difficulté.

ii) Soit $\{\overline{\rho}_j\}$ une partition de l'unité sur W subordonnée au recouvrement $\{U_j\}$. Alors $\{\rho_j\}$ où $\rho_j = \overline{\rho}_j \circ \pi$ est une partition de l'unité sur M subordonnée au recouvrement $\{V_j\}$ qui vérifie $X \cdot \rho_j = 0$ pour tout j. Pour chaque $j \in \mathbb{N}$, on note g_j la restriction de g à l'ouvert V_j ; alors g_j est une fonction de classe C^∞ sur V_j satisfaisant la condition $I(g_j) = 0$. D'après le point i), il existe une fonction de classe C^∞ sur V_j qu'on notera f_j et qui vérifie $X \cdot f_j = g_j$. Il est alors immédiat de voir que $f = \sum_{j\in\mathbb{N}} \rho_j f_j$ est une fonction de classe C^∞ sur M et est une solution du problème *i.e.* vérifie $X \cdot f = g$. Ce qui termine la démonstration. □

De ce théorème on tire le corollaire qui suit.

2.2. Corollaire. *L'espace vectoriel de cohomologie feuilletée $H^1_{\mathcal{F}}(M)$ du feuilletage $\mathcal{F}$ associé au champ X s'identifie à l'espace de Fréchet $C^\infty(W) \otimes \chi$ où χ est la 1-forme feuilletée induisant sur chaque fibre la 1-forme $\frac{1}{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}\sum_{i=1}^n dx_i$.*

2.3. L'exemple des groupes de Lie

L'un des exemples les plus intéressants pour illustrer ce qu'on vient d'obtenir dans cette section est celui où la variété M est un groupe de Lie connexe et X un champ invariant à gauche.

Soit G un groupe de Lie connexe de dimension m d'algèbre de Lie $\mathcal{G}$. Tout élément $X \in \mathcal{G}$ définit un champ invariant à gauche sur G et un sous-groupe à un paramètre $H = \{e^{tX} : t \in \mathbb{R}\}$. L'adhérence K de H est un sous-groupe abélien connexe de G qui est :

(1) - H lui-même isomorphe à $\mathbb{R}$ si H est fermé isomorphe à $\mathbb{R}$,

(2) - H lui-même isomorphe au cercle $\mathbb{S}^1$ si H est fermé isomorphe à $\mathbb{S}^1$,

(3) - isomorphe à un tore $\mathbb{T}^n$ (avec $n \geq 2$) sinon. Dans ce cas, la restriction de X à K est un champ de vecteurs invariant à orbites denses.

Dans tous les cas, on a une fibration principale $K \hookrightarrow G \xrightarrow{\pi} B = G/K$. On peut montrer que dans le :

– cas (1), l'équation cohomologique $X \cdot f = g$ a toujours une solution C^∞ pour toute fonction g de classe C^∞ sur M ;

– cas (2), l'équation cohomologique $X \cdot f = g$ a une solution si, et seulement si, l'intégrale de g sur la fibre de π est nulle.

Situons le cas (3) dans le contexte du théorème 2.1. Soient ψ l'isomorphisme entre les groupes de Lie K et $\mathbb{T}^n$ et $\widetilde{X} = \psi_*(X)$ l'image directe de X par ψ. Alors $\widetilde{X}$ est un champ linéaire. Pour tout ouvert U de B trivialisant la fibration principale π, le système dynamique (V, X) (où $V = \pi^{-1}(U)$) est C^∞-conjugué au système dynamique $(U \times \mathbb{T}^n, \widetilde{X})$. On dira que X est *diophantien* si $\widetilde{X}$ l'est.

En appliquant le théorème 2.1, on montre alors que, si le champ X est diophantien, l'équation cohomologique continue $X \cdot f = g$ sur le groupe de Lie G a une solution, si et seulement si, l'intégrale de g sur la fibre de la fibration principale $K \hookrightarrow G \longrightarrow B$ est nulle. $\square$

.

CHAPITRE IV

FLOTS RIEMANNIENS COMPLETS ET SUSPENSION DE DIFFÉOMORPHISMES

1. Cas d'un flot riemannien complet

Un *feuilletage* $\mathcal{F}$ de *codimension* n sur M est aussi la donnée d'un recouvrement ouvert $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$, de submersions f_i de U_i au-dessus d'une variété transverse T de dimension n tels que, pour $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, il existe un difféomorphisme $\gamma_{ij} : f_i(U_i \cap U_j) \longrightarrow f_j(U_i \cap U_j)$ vérifiant $f_j = \gamma_{ij} \circ f_i$. Le système $\{\mathcal{U}, f_i, \gamma_{ij}\}$ est appelé *cocycle feuilleté* définissant $\mathcal{F}$. On dira que $\mathcal{F}$ est *transversalement orientable* si T est munie d'une orientation préservée par les γ_{ij}.

On dira qu'un champ de vecteurs Y sur M est *feuilleté* si, pour tout champ de vecteurs X tangent à $\mathcal{F}$, le crochet $[X, Y]$ est encore tangent à $\mathcal{F}$. Le flot local associé à un tel champ préserve le feuilletage $\mathcal{F}$. Les champs tangents à $\mathcal{F}$ forment un idéal $\Gamma(\mathcal{F})$ du module $\chi(M, \mathcal{F})$ des champs feuilletés sur M. Le quotient $\chi(M/\mathcal{F}) = \chi(M, \mathcal{F})/\Gamma(\mathcal{F})$ est une algèbre de Lie appelée *algèbre des champs basiques* de $\mathcal{F}$. On dira qu'une forme différentielle α est *basique* si elle vérifie $i_X\alpha = 0$ et $L_X\alpha = 0$ pour tout champ X tangent à $\mathcal{F}$. (Ici i_X et L_X désignent respectivement le produit intérieur de α par X et la dérivée de Lie de α le long de X.) Une fonction *basique* est simplement une fonction constante sur les feuilles ; l'espace des fonctions basiques est une algèbre qu'on notera $C^\infty(M/\mathcal{F})$.

Une *structure transverse* à $\mathcal{F}$ est une structure géométrique sur T invariante par les difféomorphismes (locaux) γ_{ij}.

i) Si T est un groupe de Lie G et les γ_{ij} les restrictions de translations à gauche, on dira que $\mathcal{F}$ est un *G-feuilletage de Lie.*

ii) On dira que $\mathcal{F}$ est *transversalement parallélisable* (on notera T.P en abrégé) si le $C^\infty(M/\mathcal{F})$-module $\chi(M/\mathcal{F})$ est libre de rang n. Cela signifie que la variété T admet un parallélisme invariant par les difféomorphismes (locaux) γ_{ij}. Les champs de ce parallélisme se relèvent en n champs de vecteurs feuilletés transverses à $\mathcal{F}$ et linéairement indépendants en chaque point. On dira que $\mathcal{F}$ est T.P *complet* si ces champs sont complets.

iii) Supposons T munie d'une métrique riemannienne pour laquelle les γ_{ij} sont des isométries locales. On dira alors que $\mathcal{F}$ est *riemannien.* Ceci signifie que le fibré normal $\nu\mathcal{F} = TM/T\mathcal{F}$ supporte une métrique invariante le long des feuilles ou encore que la distance entre les feuilles est localement constante. Si $(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)$ sont des coordonnées locales autour d'un point $z \in M$ telles que (localement) le feuilletage soit défini par les équations $dy_1 = \ldots = dy_n = 0$, la métrique sur $\nu\mathcal{F}$ s'écrit :

(IV.1) $$g(z) = \sum_{i,j} g_{ij}(y) dy_i \otimes dy_j.$$

Sur une variété M donnée, tout feuilletage de Lie est transversalement parallélisable et tout feuilletage transversalement parallélisable est riemannien.

1.1. Théorème [Mo]. *Supposons $\mathcal{F}$ transversalement parallélisable complet. Alors :*

i) l'adhérence de toute feuille de $\mathcal{F}$ est une sous-variété de M,

ii) il existe un groupe de Lie G_0 tel que le feuilletage $\mathcal{F}_0$ induit sur chaque adhérence est de Lie de groupe G_0 à feuilles denses,

iii) les adhérences des feuilles forment une fibration $\pi : M \longrightarrow W$ localement triviale au-dessus d'une variété complète W ; le cocycle de cette fibration est à valeurs dans le groupe $\mathrm{Diff}(F, \mathcal{F}_0)$ des difféomorphismes de la fibre type F qui respectent le feuilletage $\mathcal{F}_0$.

La variété W est appelée *variété basique* de $\mathcal{F}$ et $\pi : M \longrightarrow W$ *fibration basique* de $\mathcal{F}$.

1.2. Théorème [Mo]. *Supposons $\mathcal{F}$ riemannien complet (la métrique est complète) et, pour simplifier, transversalement orientable. Notons $p : M^\# \longrightarrow M$ le R-fibré principal des repères orthonormés directs transverses à $\mathcal{F}$ (où R est le groupe linéaire spécial* $\mathrm{SO}(n)$). *Alors $\mathcal{F}$ se relève à $M^\#$ en un feuilletage $\mathcal{F}^\#$ tel que :*

i) dim $\mathcal{F}^\#$ =dim $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}^\#$ est T.P complet,

ii) $\mathcal{F}^\#$ est invariant par l'action naturelle de R sur $M^\#$.

La variété basique de $\mathcal{F}^\#$ sera par définition la *variété basique* de $\mathcal{F}$. L'action de R sur $M^\#$ préserve le feuilletage $\mathcal{F}^\#$; elle envoie donc adhérence de feuille sur adhérence de feuille et, par suite, induit une action sur W. La métrique riemannienne transverse à $\mathcal{F}^{\#}$ définit une métrique riemannienne sur W pour laquelle cette action est par isométries.

On pose $N = \dim R = \frac{n(n-1)}{2}$ et on note $X_1, \cdots, X_N$ les champs fondamentaux de l'action de R sur $M^{\#}$. Ce sont des champs feuilletés ; ils se complètent par n champs horizontaux feuilletés $Y_1, \cdots, Y_n$ pour former un parallélisme transverse à $\mathcal{F}^{\#}$. Soient $\theta^1, \cdots, \theta^N$ les 1-formes basiques sur $M^{\#}$ telles que :

$$\theta^i(X_j) = \delta_i^j \qquad \text{et} \qquad \theta^k(Y_\ell) = 0 \ \text{ pour tout } k = 1, \cdots, N \text{ et tout } \ell = 1, \cdots, n.$$

Alors $\Theta = \theta^1 \wedge \cdots \wedge \theta^N$ est une forme volume normalisée sur les fibres de la fibration principale $R \longrightarrow M^{\#} \xrightarrow{p} M$. Elle est basique et invariante par les champs $X_1, \cdots, X_N$ *i.e.* pour tout $k = 1, \cdots, N$ on a $L_{X_k}\Theta = 0$.

Notons $F^{\#}$ la fibre type de la fibration basique $\pi^{\#} : M^{\#} \longrightarrow W$. Soit $f : M \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction de classe C^∞. On a un diagramme commutatif :

$$\text{(IV.2)} \qquad \begin{array}{ccccc} & & R & & \\ & & \downarrow & & \\ F^{\#} & \hookrightarrow & M^{\#} & \xrightarrow{\pi^{\#}} & W \\ & & p\downarrow & & \\ & & M & \xrightarrow{f} & \mathbb{C}. \end{array}$$

La projection $p : M^{\#} \longrightarrow M$ induit une application $p^* : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M^{\#})$ définie par $p^*(f) = f \circ p$. La fonction $f^{\#} = f \circ p$ est un élément de $C^\infty_R(M^{\#})$ (espace des fonctions C^∞ sur $M^{\#}$ invariantes sous l'action de R) et $p^* : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty_R(M^{\#})$ est en fait un isomorphisme d'espaces de Fréchet. Si f est basique pour $\mathcal{F}$, $p^*(f)$ est basique pour $\mathcal{F}^{\#}$ donc définit une fonction $\overline{f}$ sur W ; comme $p^*(f)$ est R-invariante, $\overline{f}$ sera invariante sous l'action de R sur W *i.e.* $\overline{f} \in C^\infty_R(W)$. On voit facilement que l'application $\zeta : f \in C^\infty(M/\mathcal{F}) \longmapsto \overline{f} \in C^\infty_R(W)$ ainsi définie est un isomorphisme d'espaces de Fréchet. On a une application linéaire continue $\sigma : C^\infty(M^{\#}) \longrightarrow C^\infty_R(M^{\#})$ définie par :

$$\text{(IV.3)} \qquad \sigma(f^{\#}) = \int_R f^{\#}\Theta.$$

La restriction de σ à $C^\infty_R(M^{\#})$ vaut l'identité *i.e.* σ est une *rétraction* de $C^\infty(M^{\#})$ sur $C^\infty_R(M^{\#})$.

Si $\mathcal{F}$ est un flot défini par un champ X, $\mathcal{F}^{\#}$ est un flot défini par un champ $X^{\#}$ tel que $p_*(X^{\#}) = X$. L'adhérence de toute feuille de $\mathcal{F}^{\#}$ est alors un tore sur lequel $\mathcal{F}^{\#}$ est défini par un champ de vecteurs linéaire (*cf.* [Ca]). Cette adhérence se projette par p sur l'adhérence d'une feuille de $\mathcal{F}$ et le flot induit sur cette adhérence est aussi linéaire. On dira que $\mathcal{F}$ est *diophantien* si $\mathcal{F}^{\#}$ l'est au sens de la définition donnée dans le chapitre III. On a un diagramme commutatif :

(IV.4)
$$\begin{array}{ccc} C^\infty(M^{\#}) & \xrightarrow{X^{\#}} & C^\infty(M^{\#}) \\ \sigma\downarrow & & \downarrow\sigma \\ C^\infty_R(M^{\#}) & \xrightarrow{X^{\#}} & C^\infty_R(M^{\#}) \\ p^*\uparrow & & \uparrow p^* \\ C^\infty(M) & \xrightarrow{X} & C^\infty(M). \end{array}$$

L'équation cohomologique continue du SDC (M, X) est donc équivalente à l'équation cohomologique continue $X^{\#} \cdot f^{\#} = g^{\#}$ du SDC $(M^{\#}, X^{\#})$ équivariante sous l'action du groupe R ; cela signifie qu'on se donne $g^{\#} \in C^\infty_R(M^{\#})$ et on cherche $f^{\#} \in C^\infty_R(M^{\#})$ telle que $X^{\#} \cdot f^{\#} = g^{\#}$. D'après le théorème du chapitre III, cette équation admet une solution $f^{\#} \in C^\infty(M^{\#})$ si, et seulement si, l'intégrale de $f^{\#}$ sur la fibre de la fibration basique $F^{\#} \hookrightarrow M^{\#} \xrightarrow{\pi^{\#}} W$ est nulle. Si cette solution n'est pas R-invariante, on la remplace par $\sigma(f^{\#})$ qui en est une. Pour toute fonction $f \in C^\infty(M)$, on pose :

(IV.5)
$$I(f) = (p^*)^{-1}\left(\int_{F^{\#}} p^*(f)\right)$$

(c'est l'intégrale de la fonction $p^*(f)$ sur la fibre de $\pi^{\#}$). La quantité $\int_{F^{\#}} p^*(f)$ est une fonction C^∞, $\mathcal{F}^{\#}$-basique sur $M^{\#}$ et invariante par l'action de R, donc son image réciproque par p^* est une fonction C^∞ sur M basique pour le feuilletage $\mathcal{F}$. L'application I est donc en fait à valeurs dans $C^\infty(M/\mathcal{F})$; c'est une surjection de l'espace de Fréchet $C^\infty(M)$ sur l'espace de Fréchet $C^\infty(M/\mathcal{F})$. On a alors le :

1.3. Théorème. *Soit $\mathcal{F}$ un flot riemannien complet sur M défini par un champ X. On suppose $\mathcal{F}$ diophantien. Alors l'équation cohomologique continue $X \cdot f = g$ a une solution si, et seulement si, on a $I(f) = 0$. L'espace $H^1_{\mathcal{F}}(M)$ est canoniquement isomorphe à l'espace $C^\infty(M/\mathcal{F}) \otimes \chi$ qui est aussi isomorphe à $C^\infty_R(W)$.*

Comme R est un groupe de Lie compact, l'espace des fonctionnelles invariantes sur $C^\infty(W)$ est exactement le dual de $C^\infty_R(W)$ (*cf.* [AE]). D'où le :

1.4. Corollaire. *L'espace $\mathcal{D}'_X(M)$ des distributions sur M invariantes par le champ X est canoniquement isomorphe à l'espace $\mathcal{D}'_R(W)$ des distributions sur W invariantes par le groupe compact R.*

Nous allons terminer cette section en donnant un exemple concret sur lequel on verra exactement tous les objets géométriques qui interviennent.

1.5. Exemple

Soit M la sphère $\mathbb{S}^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$. On considère le champ de vecteurs holomorphe sur $\mathbb{C}^2$ donné par :

$$Z = i\lambda_1 z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + i\lambda_2 z_2 \frac{\partial}{\partial z_2}$$

où λ_1 et λ_2 sont des réels $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants. Il induit sur M un champ réel (sans singularité) donc un feuilletage $\mathcal{F}$ de dimension réelle 1. Comme le flot (complexe) de Z préserve la métrique kählérienne standard sur $\mathbb{C}^2$, $\mathcal{F}$ est un flot riemannien. Ce flot a deux orbites fermées qui sont des cercles correspondant aux points $z_1 = 0$ et $z_2 = 0$. Ici le groupe R est égal à $\mathrm{SO}(2)$ et la fibration basique $F^\# \longrightarrow M^\# \longrightarrow W$ a comme fibre $F^\#$ le tore $\mathbb{T}^2$. La suite exacte d'homotopie de la fibration principale $\mathrm{SO}(2) \longrightarrow M^\# \longrightarrow M$ donne $\pi_2(M^\#) = 0$ et un isomorphisme $\pi_1(M^\#) \simeq \pi_1(\mathrm{SO}(2)) \simeq \mathbb{Z}$. Écrivons celle de la fibration basique $F^\# \hookrightarrow M^\# \longrightarrow M$:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\pi_2(M^\#) & \longrightarrow & \pi_2(W) & \longrightarrow & \pi_1(F^\#) & \longrightarrow & \pi_1(M^\#) & \longrightarrow & \pi_1(W) & \longrightarrow & 0 \\
\| & & \| & & \| & & \| & & \| & & \\
0 & \longrightarrow & \pi_2(W) & \longrightarrow & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \pi_1(W) & \longrightarrow & 0.
\end{array}$$

L'examen de cette suite exacte montre que forcément $\pi_1(W) = 0$ et $\pi_2(W) \simeq \mathbb{Z}$ donc W est la sphère $\mathbb{S}^2$. L'action de $\mathrm{SO}(2)$ sur cette sphère est par isométries ; comme $\mathrm{SO}(2)$ est abélien, toutes ces isométries fixent deux mêmes points diamétralement opposés. Le quotient de $\mathbb{S}^2$ par cette action est donc l'intervalle fermé $[0, 1]$.

Si le vecteur (λ_1, λ_2) est diophantien, l'espace vectoriel de cohomologie feuilletée $H^1_{\mathcal{F}}(M)$ est séparé et isomorphe (en tant qu'espace de Fréchet) à l'espace $C^\infty([0, 1])$. Au niveau de l'équation cohomologique, on peut dire que $X \cdot f = g$ a une solution si, et seulement si, pour toute adhérence d'orbite F, on a $\int_F g = 0$. $\square$

Le chapitre V sera consacré à la résolution explicite des équations cohomologiques (discrète et continue) d'un système dynamique d'Anosov résoluble et dans lequel nous aurons besoin des remarques et résultats de la section qui suit.

2. Suspension d'un difféomorphisme

Soient M une variété compacte et $\gamma : M \longrightarrow M$ un difféomorphisme. On note (x,t) les coordonnées d'un point z de $\widetilde{N} = M \times \mathbb{R}$ et $\widetilde{X}$ le champ $\frac{\partial}{\partial t}$; $\widetilde{X}$ est invariant par le difféomorphisme $(x,t) \in M \times \mathbb{R} \longmapsto (\gamma(x), t+1) \in M \times \mathbb{R}$ et induit donc un champ de vecteurs X partout non nul sur la variété quotient $N = M \times \mathbb{R}/(x,t) \simeq (\gamma(x), t+1)$. La deuxième projection $\widetilde{\pi} : \widetilde{N} = M \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est équivariante par rapport aux actions du groupe $\mathbb{Z}$: $\tau_k : t \in \mathbb{R} \longrightarrow t+k \in \mathbb{R}$ et $(\gamma^k, \tau_k) : (x,t) \in \widetilde{N} \longrightarrow (\gamma^k(x), t+k) \in \widetilde{N}$; cela signifie que, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, le diagramme suivant est commutatif :

(IV.6)
$$\begin{array}{ccc} \widetilde{N} & \xrightarrow{(\gamma^k, \tau_k)} & \widetilde{N} \\ \widetilde{\pi} \downarrow & & \downarrow \widetilde{\pi} \\ \mathbb{R} & \xrightarrow{\tau_k} & \mathbb{R} \end{array}$$

Donc $\widetilde{\pi}$ induit une submersion $\pi : N \longrightarrow \mathbb{S}^1$; c'est en fait une fibration plate de monodromie γ. Notons $\mathcal{F}$ le flot défini par X ; on dit que $(N, \mathcal{F})$ est la *suspension* de (M, γ). On a le :

2.1. Théorème. *Les espaces vectoriels topologiques $H^1_{\mathcal{F}}(N)$ et $H^1(\mathbb{Z}, C^\infty(M))$ sont canoniquement isomorphes. L'équation cohomologique continue $X \cdot f = g$ a donc une solution sur N si, et seulement si, l'équation cohomologique discrète $K - K \circ \gamma = \Phi$ a une solution sur M pour $\Phi(x) = \int_0^1 g(x,t)dt$.*

Démonstration. Soit $\mathcal{U} = \{U_1, U_2\}$ un recouvrement du cercle $\mathbb{S}^1$ par deux intervalles ouverts U_1 et U_2. Alors $U_1 \cap U_2$ est la réunion disjointe de deux intervalles ouverts U_+ et U_-. Les ouverts $V_1 = \pi^{-1}(U_1)$, $V_2 = \pi^{-1}(U_2)$, $V_+ = \pi^{-1}(U_+)$ et $V_- = \pi^{-1}(U_-)$ sont respectivement difféomorphes à $M \times U_1$, $M \times U_2$, $M \times U_+$ et $M \times U_-$ et la variété N se reconstitue en recollant les ouverts V_1 et V_2 à l'aide de l'identité sur V_+ et l'application γ sur V_-. Comme les feuilletages induits sur les ouverts V_1, V_2, V_+ et V_- sont intégrablement homotopes au feuilletage par points sur M (cela signifie que la rétraction, par exemple de V_1 sur $M \times \{*\}$, préserve chaque feuille individuellement *cf.* [Ek1]), on a :

$$H^0_{\mathcal{F}}(V_1) = H^0_{\mathcal{F}}(V_2) = H^0_{\mathcal{F}}(V_+) = H^0_{\mathcal{F}}(V_-) = C^\infty(M)$$

et

$$H^1_{\mathcal{F}}(V_1) = H^1_{\mathcal{F}}(V_2) = H^1_{\mathcal{F}}(V_+) = H^1_{\mathcal{F}}(V_-) = 0.$$

Soient $\Omega^*_{\mathcal{F}}(N) \xrightarrow{r} \Omega^*_{\mathcal{F}}(V_1) \oplus \Omega^*_{\mathcal{F}}(V_2)$ et $\Omega^*_{\mathcal{F}}(V_1) \oplus \Omega^*_{\mathcal{F}}(V_2) \xrightarrow{j} \Omega^*_{\mathcal{F}}(V_+) \oplus \Omega^*_{\mathcal{F}}(V_-)$ les applications définies par :

$$r(\omega) = (\omega_{|V_1}, \omega_{|V_2}) \quad \text{et} \quad j(\alpha, \beta) = (\alpha_{|V_+} - \beta_{|V_+}, \alpha_{|V_-} - \gamma^*(\beta_{|V_-})).$$

Soit $\{\overline{\rho}_1, \overline{\rho}_2\}$ une partition de l'unité de classe C^∞ associée au recouvrement $\{U_1, U_2\}$ de $\mathbb{S}^1$. On pose $\rho_1 = \overline{\rho}_1 \circ \pi$ et $\rho_2 = \overline{\rho}_2 \circ \pi$. Alors $\{\rho_1, \rho_2\}$ est une partition de l'unité de classe C^∞ associée au recouvrement $\{V_1, V_2\}$ de N. À l'aide de cette partition on construit une section de j et on montre ainsi qu'on a une suite exacte (de complexes différentiels feuilletés) :

$$\text{(IV.7)} \qquad 0 \longrightarrow \Omega^*_{\mathcal{F}}(N) \xrightarrow{r} \Omega^*_{\mathcal{F}}(V_1) \oplus \Omega^*_{\mathcal{F}}(V_2) \xrightarrow{j} \Omega^*_{\mathcal{F}}(V_+) \oplus \Omega^*_{\mathcal{F}}(V_-) \longrightarrow 0.$$

Cette suite donne lieu à une suite exacte longue de cohomologie feuilletée qui, dans notre situation présente, se réduit à la suite (exacte) :

$$0 \longrightarrow H^0(N, \mathcal{F}) \xrightarrow{r} C^\infty(M) \oplus C^\infty(M) \xrightarrow{j} C^\infty(M) \oplus C^\infty(M) \xrightarrow{\xi} H^1_{\mathcal{F}}(N) \longrightarrow 0$$

où r et j sont définies par $r(h) = (h, h)$ et $j(f, g) = (f - g, f - g \circ \gamma)$. (L'espace $H^0_{\mathcal{F}}(N)$ est constitué des fonctions constantes sur les feuilles ; il s'identifie donc au sous-espace de $C^\infty(M)$ formé des fonctions constantes sur les orbites de γ.) L'application ξ étant surjective, $H^1_{\mathcal{F}}(N)$ s'identifie (en tant qu'espace vectoriel topologique) au quotient de $C^\infty(M) \oplus C^\infty(M)$ par le noyau de ξ ; mais comme la suite est exacte, ce dernier est l'image de j. Un calcul détaillé et facile à mener montre que celle-ci s'identifie à $C^\infty(M) \oplus \mathcal{C}$ où $\mathcal{C}$ est le sous-espace de $C^\infty(M)$ engendré par les fonctions de la forme $g - g \circ \gamma$. Par conséquent :

$$H^1_{\mathcal{F}}(N) = C^\infty(M) \oplus C^\infty(M) / C^\infty(M) \oplus \mathcal{C} = C^\infty(M)/\mathcal{C} = H^1(\mathbb{Z}, C^\infty(M)).$$

Ceci démontre la première partie du théorème.

Les fonctions C^∞ sur N sont les fonctions C^∞ : $M \times \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{C}$ qui vérifient la condition d'invariance :

$$\text{(CI)} \qquad f(\gamma(x), t+1) = f(x, t) \quad \text{pour tout } (x, t) \in M \times \mathbb{R}.$$

Soit $g \in C^\infty(M)$; on cherche $f \in C^\infty(M)$ telle que $X \cdot f = g$, c'est-à-dire $\frac{\partial f}{\partial t}(x,t) = g(x,t)$ pour tout $(x,t) \in M \times \mathbb{R}$. On intègre :

$$\text{(IV.8)} \qquad f(x,t) = \int_1^t g(x,u)du + K(x).$$

Il est clair que f ainsi définie est une fonction C^∞ sur $M \times \mathbb{R}$; elle doit vérifier en plus la condition (CI) *i.e.* :

$$\int_1^{t+1} g(\gamma(x),u)du + K(\gamma(x)) = \int_1^t g(x,u)du + K(x).$$

Un calcul immédiat utilisant la γ-invariance de g donne :

$$K(x) - K(\gamma(x)) = \int_0^1 g(x,t)dt.$$

Nous sommes donc amenés à trouver une fonction $K \in C^\infty(M)$ telle que :

$$K - K \circ \gamma = \Phi$$

où $\Phi(x) = \int_0^1 g(x,t)dt$. L'existence de K est donc équivalente à l'existence de la solution f qu'on cherche. $\square$

On déduit de ce qui précède que l'espace $\mathcal{D}'_X(N)$ des distributions invariantes par X sur N (*i.e.* les distributions T qui vérifient $X \cdot T = 0$) est isomorphe à l'espace $\mathcal{D}'_\gamma(M)$ des distributions γ-invariantes sur M. En fait, on peut préciser l'isomorphisme dans le :

2.2. Théorème. *La transposée p' de l'application linéaire continue et surjective p qui à $g \in C^\infty(N)$ associe $p(g) = \int_0^1 g(.,t)dt \in C^\infty(M)$ est un isomorphisme de $\mathcal{D}'_\gamma(M)$ sur $\mathcal{D}'_X(N)$.*

Démonstration. Nous allons d'abord construire une section $s : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(N)$ de l'application p (*i.e.* s vérifie $p \circ s =$ identité de $C^\infty(M)$). Soit $\theta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction C^∞, positive, à support dans $]0,1[$, valant 1 sur un voisinage ouvert de $\frac{1}{2}$ et telle que $\int_0^1 \theta(t)dt = 1$. Alors θ peut être aussi vue comme fonction sur $M \times \mathbb{R}$ (constante sur les fibres de la deuxième projection). La variété M sera vue comme le facteur $M \times \{\frac{1}{2}\}$ de $M \times \mathbb{R}$. Si $\varphi \in C^\infty(M)$, $\theta\varphi$ est une fonction C^∞ sur $M \times \mathbb{R}$. Il est alors facile de voir que la quantité :

$$\overline{\varphi}(x,t) = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \theta(t+\ell)\varphi(\gamma^\ell(x))$$

est bien définie et est une fonction C^∞ qui vérifie la condition (CI) donc induit une fonction C^∞ sur N. On posera alors $s(\varphi) = \overline{\varphi}$. Le fait que s soit effectivement une section de p est facile à vérifier. L'application p est donc surjective et, par suite, sa transposée $p' : \mathcal{D}'(M) \longrightarrow \mathcal{D}'(N)$ est injective. Montrons qu'elle envoie un élément de $\mathcal{D}'_\gamma(M)$ sur un élément de $\mathcal{D}'_X(N)$. Soit $T \in \mathcal{D}'_\gamma(M)$; alors, pour toute fonction $\varphi \in C^\infty(M)$, on a $\langle T, \varphi - \varphi \circ \gamma \rangle = 0$. On doit montrer que $X \cdot (p'(T)) = 0$, c'est-à-dire $\langle p'(T), X \cdot \psi \rangle = 0$ pour toute fonction ψ. Soit $\psi \in C^\infty(N)$. On a :

$$\begin{aligned}
\langle X \cdot (p'(T)), \psi \rangle &= -\langle p'(T), X \cdot \psi \rangle \\
&= -\langle T, p(X \cdot \psi) \rangle \\
&= -\left\langle T, \int_0^1 \frac{\partial \psi}{\partial t}(\cdot, t) dt \right\rangle \\
&= -\langle T, \psi(\cdot, 1) - \psi(\cdot, 0) \rangle.
\end{aligned}$$

Comme ψ vérifie la condition (CI) on a $\psi(x, 0) = \psi(\gamma(x), 1)$. En posant $\varphi(x) = \psi(x, 1)$, on voit alors que $\psi(\cdot, 1) - \psi(\cdot, 0) = \varphi - \varphi \circ \gamma$. Donc $\langle X \cdot (p'(T)), \psi \rangle = -\langle T, \varphi - \varphi \circ \gamma \rangle = 0$ puisque T est γ-invariante. Ce qui démontre que $p'(T)$ est invariante par X. La transposée p' de p est donc une application linéaire de $\mathcal{D}'_\gamma(M)$ dans $\mathcal{D}'_X(N)$. On sait déjà qu'elle est injective ; montrons qu'elle est surjective. Soit $S \in \mathcal{D}'_X(N)$. On cherche $T \in \mathcal{D}'_\gamma(M)$ telle que $p'(T) = S$, c'est-à-dire, pour toute fonction $\psi \in C^\infty(N)$? on doit avoir :

$$\begin{aligned}
\langle S, \psi \rangle &= \langle p'(T), \psi \rangle \\
&= \langle T, p(\psi) \rangle.
\end{aligned}$$

Comme p est surjective, il suffit de définir T en posant $\langle T, p(\psi) \rangle = \langle S, \psi \rangle$ tout en s'assurant que, si ψ est dans le noyau de p, alors $\langle S, \psi \rangle = 0$. Mais dire que $p(\psi) = 0$ signifie $\int_0^1 \psi(\cdot, t) dt = 0$; dans ce cas $\int_0^1 \psi(\cdot, t) dt$ est de la forme $K - K \circ \gamma$ (avec $K \in C^\infty(M)$ constante !) et donc, d'après le théorème 3.1, ψ est de la forme $X \cdot \zeta$ avec $\zeta \in C^\infty(N)$. Par suite $\langle S, \psi \rangle = \langle S, X \cdot \zeta \rangle = -\langle X \cdot S, \zeta \rangle = 0$ car S est invariante par X. On a donc montré que la transposée p' de p est un isomorphisme. $\square$

CHAPITRE V

SYSTÈMES DYNAMIQUES D'ANOSOV

0. Qu'est-ce qu'un flot d'Anosov ?

0.1. Définition *Soit M une variété fermée de dimension $n \geq 3$. On dit qu'un flot différentiable Φ^t sur M est un* **flot d'Anosov** *si :*

- Φ^t est sans point fixe global (c'est à dire sans orbite réduite à un point)

- le fibré tangent à M se décompose en la somme de trois sous-fibrés continus stables par Φ^t :

$$TM = T^{ss} \oplus T^{uu} \oplus \mathbb{R}.Y$$

tels que T^{uu} est dilaté et T^{ss} contracté par Φ^t. (Y est le champ tangent à Φ^t).

On dit que Y est un *champ d'Anosov* si son flot est un flot d'Anosov.

A un flot d'Anosov, on peut associer plusieurs feuilletages. Posons :

$$T^s = T^{ss} \oplus \mathbb{R}Y \quad \text{ et } \quad T^u = T^{uu} \oplus \mathbb{R}Y.$$

Les distributions T^s et T^u sont intégrables et définissent respectivement le *feuilletage stable* et le *feuilletage instable*. Comme le passage de Y à $-Y$ permute les feuilletages stable et instable, il est d'usage de s'intéresser uniquement au feuilletage stable. On définit ainsi la *codimension* de Y comme étant la codimension de son feuilletage stable.

0.2. Définition. *Soit N une variété fermée de dimension au moins 2. Un difféomorphisme ϕ de N est dit* **difféomorphisme d'Anosov** *si le fibré tangent à N se décompose en la somme continue de deux sous-fibrés :*

$$TN = T^{uu} \oplus T^{ss}$$

où T^{ss} et T^{uu} sont ϕ-invariants, et ϕ contracte T^{ss} et dilate T^{uu}. En pareil cas, T^{ss} et T^{uu} sont uniquement intégrables et donnent lieu à des feuilletages dits respectivement stable et instable.

Le lien entre difféomorphismes d'Anosov et flots d'Anosov est le suivant : considérons la variété

$$M = N \times \mathbb{R}/(n,t) \sim (\phi(n), t+1)$$

où ϕ est un difféomorphisme d'Anosov de N. Alors, on vérifie sans peine que le flot $\frac{\partial}{\partial t}$ est un flot d'Anosov sur M. Son feuilletage stable est engendré par T^{ss} et $\frac{\partial}{\partial t}$ et son feuilletage instable est engendré par T^{uu} et $\frac{\partial}{\partial t}$. Ainsi, les difféomorphismes d'Anosov peuvent être vus comme des cas particuliers de flots d'Anosov. Réciproquement, il est conjecturé que la plupart des flots d'Anosov sont des suspensions de difféomorphismes d'Anosov en codimension 1. C'est la conjecture de Verjovsky (voir par exemple [Gh2] pour un énoncé précis).

1. Les ingrédients

Soit $A \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$ une matrice diagonalisable sur le corps des nombres réels ayant toutes ses valeurs propres positives. On supposera qu'elle est *hyperbolique* *i.e.* 1 n'est pas dans son spectre. On notera B la transposée de A.

1.1. L'espace $C^\infty(\mathbb{T}^n)$

La matrice B agit linéairement sur le réseau $\mathbb{Z}^n$. Soit Σ une partie de ce réseau contenant un et un seul représentant de chaque orbite de cette action. L'orbite de $\mathbf{0}$ est réduite à $\{\mathbf{0}\}$. Il est clair que :

$$\mathbb{Z}^n = \bigcup_{\mathbf{m} \in \Sigma} \{B^k(\mathbf{m}) : k \in \mathbb{Z}\} \tag{V.1}$$

est une partition de $\mathbb{Z}^n$.

Pour tout $\mathbf{m} \in \Sigma$, soit $V_{\mathbf{m}}$ le sous-espace de $C^\infty(\mathbb{T}^n)$ engendré par la famille de fonctions $\{\Theta_{B^k\mathbf{m}} : k \in \mathbb{Z}\}$ *i.e.* toutes les fonctions $f \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ qui s'écrivent :

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_{B^k\mathbf{m}} \Theta_{B^k\mathbf{m}}. \tag{V.2}$$

L'espace $V_{\mathbf{0}}$ est égal à $\mathbb{C}$ (les fonctions constantes) et nous avons une décomposition orthogonale :

$$C^\infty(\mathbb{T}^n) = \bigoplus_{\mathbf{m} \in \Sigma} V_{\mathbf{m}}. \tag{V.3}$$

1.1. L'action de A sur $C^\infty(\mathbb{T}^n)$

L'action du groupe $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{T}^n$ par la matrice A induit une action sur $C^\infty(\mathbb{T}^n)$ définie par l'application $f \in C^\infty(\mathbb{T}^n) \longrightarrow f \circ A \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$. Si $f \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ est de la forme $f = \sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^n} f_{\mathbf{m}}\Theta_{\mathbf{m}}$, alors :

$$f \circ A = \sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^n} f_{\mathbf{m}}\Theta_{B\mathbf{m}}.$$

L'action préserve chaque $V_{\mathbf{m}}$ (et bien sûr aussi le sous-espace $V_{\mathbf{0}} = \mathbb{C}$). Pour $f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f_{B^k\mathbf{m}}\Theta_{B^k\mathbf{m}} \in V_{\mathbf{m}}$, on a :

$$f \circ A = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f_{B^k\mathbf{m}}\Theta_{B^{k+1}\mathbf{m}}.$$

Pour tout $\mathbf{m} \in \Sigma$, soit $\pi_{\mathbf{m}} : C^\infty(\mathbb{T}^n) \longrightarrow V_{\mathbf{m}}$ la projection orthogonale sur le sous-espace $V_{\mathbf{m}}$ et $\ell_{\mathbf{m}} : C^\infty(\mathbb{T}^n) \longrightarrow \mathbb{C}$ la forme linéaire continue définie par :

$$\ell_{\mathbf{m}}(f) = \pi_{\mathbf{m}}(f)(\mathbf{0}) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f_{B^k\mathbf{m}}. \tag{V.4}$$

L'orbite $\Lambda_{\mathbf{0}}$ étant réduite à $\mathbf{0}$, la forme linéaire $\ell_{\mathbf{0}}$ n'est rien d'autre que l'intégrale :

$$\ell_{\mathbf{0}}(f) = \int_{\mathbb{T}^n} f(x)dx = f_{\mathbf{0}}.$$

On pose :

$$\mathcal{H} = \bigcap_{\mathbf{m}\in\Sigma} (\text{Noyau de } \ell_{\mathbf{m}})$$

qui est un sous-espace fermé de $C^\infty(\mathbb{T}^n)$. Le théorème qui suit constitue le résultat fondamental de cette partie. Il donne les conditions exactes de résolution de l'équation cohomologique discrète pour $(\mathbb{T}^n, A)$.

2. Le théorème principal

2.1. Théorème. *Il existe un opérateur compact $L : \mathcal{H} \longrightarrow C^\infty(\mathbb{T}^n)$ tel que, pour toute fonction $\Phi \in \mathcal{H}$, la fonction $K = L(\Phi)$ est solution de l'équation cohomologique discrète $K - K \circ A = \Phi$.*

Démonstration. On va la mener en procédant en quatre étapes. Posons $\Sigma_* = \Sigma \setminus \{\mathbf{0}\}$ et $V_* = \bigoplus_{\mathbf{m}\in\Sigma_*} V_{\mathbf{m}}$. On a donc une décomposition orthogonale $C^\infty(\mathbb{T}^n) = V_{\mathbf{0}} \oplus V_*$ et l'opérateur $\delta : K \in C^\infty(\mathbb{T}^n) \longmapsto (K - K \circ A) \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ respecte cette décomposition; δ est nul sur $V_{\mathbf{0}}$ et δ restreint à V_* est injectif. En fait on se ramène à l'équation cohomologique sur le sous-espace V_*.

2.1.1. Solution formelle

Soit $\Phi \in V_*$. On cherche $K \in V_*$ telle que $K - K \circ A = \Phi$. On développe K et Φ en séries de Fourier :

$$\Phi = \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n} \Phi_{\mathbf{m}} \Theta_{\mathbf{m}} \quad \text{et} \quad K = \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n} K_{\mathbf{m}} \Theta_{\mathbf{m}}$$

(les coefficients $\Phi_{\mathbf{0}}$ et $K_{\mathbf{0}}$ étant nuls puisque $K, \Phi \in V_*$) où les coefficients de Fourier doivent vérifier, pour tout $r \in \mathbb{N}$, les conditions de convergence :

$$\sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n} |\mathbf{m}|^r |\Phi_{\mathbf{m}}| < +\infty \quad \text{et} \quad \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n} |\mathbf{m}|^r |K_{\mathbf{m}}| < +\infty.$$

Traduite au niveau des coefficients de Fourier, l'équation cohomologique discrète est équivalente au système d'équations fonctionnelles suivant :

$$K_{\mathbf{m}} - K_{B^{-1}\mathbf{m}} = \Phi_{\mathbf{m}} \quad \text{avec} \quad \mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n.$$

On voit apparaître la condition nécessaire $\Phi_{\mathbf{0}} = \int_{\mathbb{T}^n} \Phi = 0$ qui est déjà supposée puisque $\Phi \in V_*$. Ce système a deux solutions formelles :

$$\text{(V.5)} \qquad K_{\mathbf{m}} = -\sum_{i=1}^{\infty} \Phi_{B^i\mathbf{m}} \quad \text{ou} \quad K_{\mathbf{m}} = \sum_{i=0}^{\infty} \Phi_{B^{-i}\mathbf{m}} \quad \text{pour } \mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n \setminus \{\mathbf{0}\}.$$

(Ces quantités existent bien.) Comme l'opérateur $K \in V_* \longrightarrow (K - K \circ A) \in V_*$ est injectif, ces deux solutions doivent coïncider, donc on doit avoir la condition :

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} \Phi_{B^i\mathbf{m}} = 0$$

i.e. $\ell_{\mathbf{m}}(\Phi) = 0$ pour tout $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n$. Désormais, la donnée Φ sera un élément de $\mathcal{H}$ (qui est contenu dans V_*).

On aura défini l'opérateur linéaire L en décrétant $L(\Phi) = K$ lorsque on aura montré que la fonction $K = \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n} K_{\mathbf{m}} \Theta_{\mathbf{m}}$ ($K_{\mathbf{0}}$ étant choisi égal à 0) ainsi construite est dans $W^{1,r}$, pour tout $r \in \mathbb{N}$ et donc de classe C^∞. Cela signifie que, pour tout $r \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^n} |\mathbf{m}|^r |K_{\mathbf{m}}|$ est convergente.

2.1.2. Le bon choix de Σ

Soient $0 < \lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_q < 1 < \lambda_{q+1} \leq \cdots \leq \lambda_n$ les valeurs propres de B (ce sont les mêmes que celles de A) et $(e_1, \cdots, e_q, e_{q+1}, \cdots, e_n)$ une base normale propre. On note E_- et E_+ les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ engendrés respectivement par les systèmes de vecteurs propres $\{e_1, \cdots, e_q\}$ et $\{e_{q+1}, \cdots, e_n\}$. Nous avons donc une décomposition en somme directe $\mathbb{R}^n = E_- \oplus E_+$ et tout vecteur $u \in \mathbb{R}^n$ s'écrit :

$$u = \sum_{i=1}^{q} a_i e_i + \sum_{j=q+1}^{n} b_j e_j$$

où les a_i et b_j sont des réels. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$ nous avons :

$$B^k(u) = \sum_{i=1}^{q} \lambda_i^k a_i e_i + \sum_{j=q+1}^{n} \lambda_j^k b_j e_j.$$

Soit $\varepsilon > 0$. On note E_-^ε et E_+^ε les ε-voisinages respectivement de E_- et E_+. Il existe alors $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$k \geq k_0 \Longrightarrow B^k(u) \in E_+^\varepsilon \quad \text{et} \quad k \leq -k_0 \Longrightarrow B^k(u) \in E_-^\varepsilon.$$

Remarquons d'abord qu'aucun des éléments du réseau n'appartient à $E_- \cup E_+$. Comme toutes les valeurs propres $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ de B sont strictement positives, on peut définir B^t (puissance $t^{\text{ème}}$ de B) pour tout $t \in \mathbb{R}$. Soit z un élément non nul dans $\mathbb{R}^n$. L'orbite $\{B^k(z) : k \in \mathbb{Z}\}$ est contenue dans la courbe $t \in \mathbb{R} \longmapsto B^t(z) \in \mathbb{R}^n$. Dans la base propre $(e_1, \cdots, e_n)$, le carré de sa norme admet pour paramétrage la fonction différentiable $\rho : t \in \mathbb{R} \longmapsto |D^t|^2 = \langle D^t(z), D^t(z)\rangle \in \mathbb{R}_+$ (D est la matrice des valeurs propres). Cette fonction a pour dérivée seconde :

$$\rho''(t) = 4\langle((\ln D) \cdot D^t)(z), ((\ln D) \cdot D^t)(z)\rangle$$

(où $\ln D$ est la matrice diagonale dont les termes sont les logarithmes des valeurs propres de A donc de B) ; c'est une fonction strictement positive. Donc sa dérivée $\rho'(t)$ est une fonction strictement croissante. Quand t est proche de $-\infty$, $B^t(z)$ est voisin de

E_- et quand t est proche de $+\infty$, B^t est voisin de E_+ ; le point $B^t(z)$ passe par une position en laquelle $\rho(t)$ est minimale. En somme, la norme du vecteur $B^t(z)$ admet un minimum en un certain t_0, elle est décroissante sur $]-\infty, t_0[$ et croissante sur $]t_0, +\infty[$. Si on choisit un élément z de $\mathbb{Z}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$, on trouve un unique $\mathbf{m}$ dans l'orbite de z qui réalise le minimum de la famille $\{|B^k(z)| : k \in \mathbb{Z}\}$. L'ensemble Σ sera alors constitué de ces $\mathbf{m}$ et de $\mathbf{0}$.

Soit $\mathbf{m} \in \Sigma \setminus \{\mathbf{0}\}$. Alors les suites $(|B^k(\mathbf{m})|)$ et $(|B^{-k}(\mathbf{m})|)$ (indexées par $k \geq 0$) sont strictement croissantes. Comme $|B^k(\mathbf{m})|^2$ est un entier strictement positif pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a forcément :

$$|B^{|k|}(\mathbf{m})|^2 \geq (|k|+1) \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{Z}. \tag{V.6}$$

2.1.3. Convergence de la solution formelle

Maintenant, on va démontrer que la fonction $K = \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n} K_{\mathbf{m}} \Theta_{\mathbf{m}}$ construite à l'étape 2.1.1 est de classe C^∞. En utilisant le point iii) de la proposition 1.1 du chapitre III, cela revient à montrer que, pour tout $r \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n} |\mathbf{m}|^r |K_{\mathbf{m}}|$ est convergente. D'abord on a :

$$\begin{aligned} S &= \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n} |\mathbf{m}|^r |K_{\mathbf{m}}| \\ &= \sum_{\mathbf{m} \in \boldsymbol{\Sigma}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |B^k \mathbf{m}|^r |K_{B^k \mathbf{m}}| \\ &= \sum_{\mathbf{m} \in \boldsymbol{\Sigma}} \sum_{k \geq 0} |B^k \mathbf{m}|^r |K_{B^k \mathbf{m}}| + \sum_{\mathbf{m} \in \boldsymbol{\Sigma}} \sum_{k < 0} |B^k \mathbf{m}|^r |K_{B^k \mathbf{m}}| \end{aligned}$$

Posons :

$$S_+ = \sum_{\mathbf{m} \in \boldsymbol{\Sigma}} \sum_{k \geq 0} |B^k \mathbf{m}|^r |K_{B^k \mathbf{m}}| \quad \text{et} \quad S_- = \sum_{\mathbf{m} \in \boldsymbol{\Sigma}} \sum_{k < 0} |B^k \mathbf{m}|^r |K_{B^k \mathbf{m}}|.$$

Démontrons la convergence de la série S_+. On a d'abord (première expression de (5)):

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq 0} |B^k \mathbf{m}|^r |K_{B^k \mathbf{m}}| &= \sum_{k \geq 0} |B^k \mathbf{m}|^r \left| - \sum_{i=1}^{\infty} \Phi_{B^{k+i} \mathbf{m}} \right| \\ &\leq \sum_{k \geq 1} \left(\sum_{i=0}^{k-1} |B^i \mathbf{m}|^r \right) |\Phi_{B^k \mathbf{m}}|. \end{aligned}$$

Comme $|\mathbf{m}|^r \leq |B\mathbf{m}|^r \leq \cdots \leq |B^{k-1}\mathbf{m}|^r \leq |B^k\mathbf{m}|^r$, on a (pour $k \geq 1$) :

$$\sum_{i=0}^{k-1} |B^i\mathbf{m}|^r \leq k|B^k m|^r$$

et donc :

$$\sum_{k\geq 0} |B^k\mathbf{m}|^r |K_{B^k\mathbf{m}}| \leq \sum_{k=1}^{\infty} k|B^k\mathbf{m}|^r|\Phi_{B^k\mathbf{m}}|.$$

D'après l'inégalité (6), on a :

$$\begin{aligned}
S_+ &= \sum_{\mathbf{m}\in\Sigma} \sum_{k\geq 0} |B^k\mathbf{m}|^r |K_{B^k\mathbf{m}}| \\
&\leq \sum_{\mathbf{m}\in\Sigma} \sum_{k\geq 1} k|B^k\mathbf{m}|^r |\Phi_{B^k\mathbf{m}}| \\
&\leq \sum_{\mathbf{m}\in\Sigma} \sum_{k\geq 1} |B^k\mathbf{m}|^{r+2} |\Phi_{B^k\mathbf{m}}| \\
&< +\infty.
\end{aligned}$$

La dernière inégalité vient du fait que la donnée Φ est de classe C^∞. Nous avons donc montré que la série S_+ converge.

Pour démontrer la convergence de la série $S_- = \sum_{\mathbf{m}\in\boldsymbol{\Sigma}} \sum_{k<0} |B^k\mathbf{m}|^r|K_{B^k\mathbf{m}}|$, on remplace cette fois-ci le terme $K_{B^k\mathbf{m}}$ par la deuxième expression de (5) *i.e.* :

$$K_{B^k\mathbf{m}} = \sum_{i=0}^{-\infty} \Phi_{B^{k+i}\mathbf{m}}$$

et on procède exactement par le même type de majorations que pour la série S_+.

2.1.4. Compacité de l'opérateur L

La dernière inégalité et celle qu'on obtiendrait si on avait traité de la même manière la série S_-, montrent qu'on a l'estimation :

$$\begin{aligned}
\sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^n} |\mathbf{m}|^r |K_{\mathbf{m}}| &\leq \sum_{\mathbf{m}\in\Sigma} \sum_{k\in\mathbb{Z}} |B^k\mathbf{m}|^{r+2} |\Phi_{B^k\mathbf{m}}| \\
&\leq \sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^n} |\mathbf{m}|^{r+2} |\Phi_{\mathbf{m}}|
\end{aligned}$$

i.e. pour tout entier naturel r, l'opérateur $L : \Phi \in \mathcal{H} \subset W^{1,r+2} \longmapsto K \in C^\infty(\mathbb{T}^n) \subset W^{1,r}$ vérifie l'inégalité :

$$||L(\Phi)||_{1,r} \leq ||\Phi||_{1,r+2}.$$

Il est donc borné. Montrons qu'il est compact. Soit (Φ_p) une suite bornée dans $\mathcal{H}$. Alors la suite $L(\Phi_p)$ est bornée dans $W^{1,r}$ pour tout $r \in \mathbb{N}$ et en particulier dans $W^{1,1}$; elle admet donc une sous-suite $L(\Phi_p^0)$ qui converge dans $W^{1,0}$ (c'est la compacité de l'injection $W^{1,1} \hookrightarrow W^{1,0}$). Mais la suite $L(\Phi_p^0)$ est aussi bornée dans $W^{1,2}$; elle admet donc une sous-suite $L(\Phi_p^1)$ qui converge dans $W^{1,1}$ (c'est la compacité de l'injection $W^{1,2} \hookrightarrow W^{1,1}$). De cette façon on construit des suites $(\Phi_p^k)_p$ extraites de la suite $(\Phi_p)_p$ telles que :

– pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la suite $(\Phi_p^k)_p$ est extraite de $(\Phi_p^{k-1})_p$ pour $k \geq 1$;
– pour tout $k \in \mathbb{N}$, la suite $(L(\Phi_p^k))_p$ converge dans $W^{1,k}$.

Il n'est alors pas difficile de voir que la suite diagonale $L(\Phi_p^p)$ converge dans tout espace $W^{1,p}$ *i.e.* $L(\Phi_p^p)$ converge vers une limite Φ qui est la même dans tous les espaces $W^{1,r}$ donc dans l'espace $C^\infty(\mathbb{T}^n)$. Ce qui montre finalement que l'opérateur $L : \mathcal{H} \longrightarrow C^\infty(\mathbb{T}^n)$ est compact.

Ceci termine la démonstration du théorème principal. □

On voit donc que le sous-espace $\mathcal{C}$ de $C^\infty(\mathbb{T}^n)$ engendré par les éléments de la forme $K - K \circ A$ avec $K \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ est <u>fermé</u> puisque égal à $\mathcal{H}$.

2.2. Corollaire. *L'espace $\mathcal{D}'_A(\mathbb{T}^n)$ des distributions A-invariantes sur $\mathbb{T}^n$ est engendré par les formes linéaires continues $\ell_{\mathbf{m}} : f \in C^\infty(\mathbb{T}^n) \longmapsto \pi_{\mathbf{m}}(f)(\mathbf{0}) \in \mathbb{C}$ avec $\mathbf{m}$ variant dans Σ.*

Nous allons appliquer le théorème 2.1 pour résoudre l'équation cohomologique continue du flot d'Anosov associé à la matrice A. Mais d'abord une description explicite de la variété qui supporte ce champ paraît nécessaire.

On note $u_1, ..., u_n$ les vecteurs propres associés respectivement à $\lambda_1, ..., \lambda_n$. On a une action :

$$(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longmapsto A^t(x) \in \mathbb{R}^n$$

qui permet de construire le produit semi-direct $G = \mathbb{R}^n \rtimes \mathbb{R}$; G est un groupe de Lie résoluble (non nilpotent) 1-connexe dans lequel $\Gamma = \mathbb{Z}^n \rtimes \mathbb{Z}$ est un réseau cocompact. Le quotient G/Γ est une variété analytique réelle compacte notée $\mathbb{T}_A^{n+1}$ et appelée *tore* *hyperbolique* ; elle fibre sur le cercle $\mathbb{S}^1$ avec fibre le tore $\mathbb{T}^n$. Pour $i = 1, \cdots, n$, notons u_i le champ linéaire sur le tore $\mathbb{T}^n$ tel que $A_* u_i = \lambda_i u_i$. On vérifie facilement que les champs de vecteurs $X = \frac{\partial}{\partial t}$ et $X_i = \lambda_i^t u_i$ avec $i = 1, \cdots, n$ induisent des champs sur $\mathbb{T}_A^{n+1}$. Ils vérifient les relations de crochet :

$$\begin{cases} [X_i, X_j] = 0 \\ [X, X_i] = (\ln \lambda_i) X_i. \end{cases}$$

Pour tout $i = 1, \cdots, n$, les adhérences des orbites du champ X_i sont précisément les fibres de la fibration naturelle $\mathbb{T}^n \hookrightarrow \mathbb{T}_A^{n+1} \longrightarrow \mathbb{S}^1$. En plus X_i est diophantien (*cf.* [Sc]) ; on sait donc dans quelles conditions résoudre son équation cohomologique continue associée (*cf.* théorème 1.3 du chapitre III). Regardons plutôt le champ X. Comme toutes les valeurs propres $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ sont différentes de 1, le champ X définit un flot d'Anosov. C'est à son équation cohomologique que nous allons nous intéresser.

Tout élément de $C^\infty(\mathbb{T}_A^{n+1})$ est une fonction C^∞ : $(x, t) \in \mathbb{T}^n \times \mathbb{R} \stackrel{f}{\longmapsto} f(x, t) \in \mathbb{C}$ qui vérifie en plus la condition d'invariance $f(A(x), t+1) = f(x, t)$. Elle se développe en série de Fourier $f(x, t) = \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n} f_{\mathbf{m}}(t) \Theta_{\mathbf{m}}(x)$ où les coefficients de Fourier (dépendant de manière C^∞ du paramètre t) vérifient les relations :

$$f_{\mathbf{m}}(t+1) = f_{B\mathbf{m}}(t). \tag{C}$$

Notons I l'application linéaire continue de $C^\infty(\mathbb{T}_A^{n+1})$ dans $C^\infty(\mathbb{T}^n)$ qui à toute fonction g associe :

$$I(g) = \int_0^1 g(\cdot, t)\, dt.$$

2.3. Théorème. *Soit $g \in C^\infty(\mathbb{T}_A^{n+1})$. L'équation cohomologique continue $X \cdot f = g$ a une solution $f \in C^\infty(\mathbb{T}_A^{n+1})$ si, et seulement si, pour tout $\mathbf{m} \in \Sigma$, on a $\ell_{\mathbf{m}}(I(g)) = 0$. La solution est donnée, à une constante additive près, par la série :*

$$f(x, t) = \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n} \left(\int_1^t g_{\mathbf{m}}(u)\, du - \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 g_{B^k \mathbf{m}}(t)\, dt \right) e^{2i\pi \langle x, \mathbf{m} \rangle}.$$

Démonstration. On développe f et g sous forme de séries de Fourier :

$$f(x, t) = \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n} f_{\mathbf{m}}(t) \Theta_{\mathbf{m}}(x) \quad \text{et} \quad g(x, t) = \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n} g_{\mathbf{m}}(t) \Theta_{\mathbf{m}}(x).$$

Traduite au niveau des coefficients de Fourier, l'équation cohomologique se ramène alors au système :

$$\frac{\partial f_{\mathbf{m}}}{\partial t}(t) = g_{\mathbf{m}}(t) \quad \text{pour} \quad \mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n.$$

En intégrant chacune des équations de ce système, on obtient :

$$f_{\mathbf{m}}(t) = \int_1^t g_{\mathbf{m}}(u)du + K_{\mathbf{m}}.$$

Reste à vérifier que f ainsi définie (par ses coefficients de Fourier $f_{\mathbf{m}}$) satisfait la condition (C) *i.e.* :

$$\int_1^t g_{\mathbf{m}}(u)du + K_{\mathbf{m}} = \int_1^{t+1} g_{B^{-1}\mathbf{m}}(u)du + K_{B^{-1}\mathbf{m}}.$$

Mais on sait que $g_{\mathbf{m}}(t) = g_{B^{-1}\mathbf{m}}(t+1)$ pour tout $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n$ donc :

$$\int_0^t g_{B^{-1}\mathbf{m}}(v+1)dv = \int_0^t g_{\mathbf{m}}(v)dv.$$

On obtient :

$$\int_1^t g_{\mathbf{m}}(u)du + K_{\mathbf{m}} = \int_0^t g_{\mathbf{m}}(u)du + K_{B^{-1}\mathbf{m}}$$

i.e. :

$$K_{\mathbf{m}} - K_{B^{-1}\mathbf{m}} = \int_0^1 g_{\mathbf{m}}(u)du.$$

Pour tout $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n$, on pose $\Phi_{\mathbf{m}} = \int_0^1 g_{\mathbf{m}}(u)du$ et on applique le théorème 2.1 pour donner la solution finale sous forme de la série indiquée. □

2.4. Corollaire. *Si $\mathcal{F}$ est le feuilletage dont les feuilles sont les orbites de X, son espace vectoriel de cohomologie feuilletée $H^1_{\mathcal{F}}(\mathbb{T}^{n+1}_A)$ est fermé et s'identifie à l'orthogonal dans $C^\infty(\mathbb{T}^n)$ du sous-espace $\mathcal{H}$.*

2.5. Remarques

2.5.1. Les champs de vecteurs $X, X_1, \cdots, X_q$ définissent un feuilletage de codimension $n-q$ noté $\mathcal{F}_s$ et appellé *feuilletage stable* de A. De même, les champs de vecteurs $X, X_{q+1}, \cdots, X_n$ définissent un feuilletage de codimension q noté $\mathcal{F}_u$ et appellé *feuilletage instable* de A. Leurs cohomologies feuilletées respectives ont été calculées dans [ET] :

$$H^r_{\mathcal{F}_s}(\mathbb{T}^{n+1}_A) = H^r_{\mathcal{F}_u}(\mathbb{T}^{n+1}_A) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } r = 0 \text{ ou } 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

2.5.2. Supposons $q = n - 1$ c'est-à-dire que seule seule la valeur propre λ_n est supérieure à 1 ; alors le *feuilletage stable* $\mathcal{F}_s$ sur $\mathbb{T}_A^{n+1}$ est de codimension 1. De même, si $q = 1$ *i.e.* seule la valeur propre λ_1 est inférieure à 1, alors *feuilletage instable* $\mathcal{F}_u$ est de codimension 1. Dans ces cas, on dira que A est un difféomorphisme d'Anosov de *codimension* 1. Topologiquement, il est le seul : *tout diffómorphisme d'Anosov de codimension* 1 *sur une variété compacte est topologiquement conjugué à un difféomorphisme du tore donné par une matrice hyperbolique.* Pour une introduction rapide et agréable à toutes ces notions, on peut consulter [Ma] ou [Ve].

2.5.3. Les exemples de matrices hyperboliques habitant dans $\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$ diagonalisables et ayant toutes leurs valeurs propres positives ne manquent pas. Une des plus connues, en dimension 2 est la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; on la retrouve en tête de pas mal de situations ! Sa généralisation en toute dimension est donnée par la matrice qui suit (considérée dans [EN]).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix}$$

où les termes diagonaux $d_1, \cdots, d_n$ sont définis par $d_1 = 1$ et la relation de récurrence $d_{\ell+1} = 1 + d_1 \cdot d_2 \cdot \ldots \cdot d_\ell$ pour $\ell = 1, \cdots, n-1$. Cette matrice a sa valeur propre λ_1 dans l'intervalle $]0, 1[$ et toutes les autres $\lambda_2 \in]d_2, d_3[$, $\lambda_3 \in]d_3, d_4[$,$\cdots$,$\lambda_n \in]d_n, +\infty[$.

2.5.4. La mesure de Lebesgue sur $\mathbb{T}^n$ est bien entendu invariante par A et on l'a retrouvée ! Si $x \in \mathbb{T}^n$ est un point périodique de A (de tels points sont exactement ceux à coordonnées rationnelles) de période q, alors la mesure :

$$\mu_x = \sum_{j=0}^{q-1} \delta_{A^j x}$$

définie, sur toute fonction continue $\varphi \in C^0(\mathbb{T}^n)$, par :

$$\langle \mu_x, \varphi \rangle = \sum_{j=0}^{q-1} \varphi(A^j(x))$$

est une mesure A-invariante et donc, a fortiori, une distribution A-invariante. Un lecteur bien regardant aurait raison de poser la question : la mesure μ_x est-elle recensée par le corollaire 2.2 ? Voici la réponse.

Comme μ_x est une distribution invariante par le difféomorphisme A, on a, pour toute fonction $\varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ et tout $k \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} \langle \mu_x, \varphi \rangle &= \sum_{j=0}^{q-1} \varphi(A^j(x)) \\ &= \sum_{j=0}^{q-1} \varphi(A^{j+k}(x)). \end{aligned}$$

Mais φ s'écrit :

$$\varphi(x) = \sum_{\mathbf{m} \in \Sigma} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi_{B^k \mathbf{m}} e^{2i\pi \langle B^k \mathbf{m}, x \rangle}.$$

Et comme la matrice B est la transposée de A, on a :

$$\varphi(x) = \sum_{\mathbf{m} \in \Sigma} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi_{B^k \mathbf{m}} e^{2i\pi \langle \mathbf{m}, A^k x \rangle}.$$

Par suite :

$$\begin{aligned} \langle \mu_x, \varphi \rangle &= \sum_{j=0}^{q-1} \left(\sum_{\mathbf{m} \in \Sigma} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi_{B^k \mathbf{m}} e^{2i\pi \langle B^k \mathbf{m}, A^j x, \rangle} \right) \\ &= \sum_{\mathbf{m} \in \Sigma} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi_{B^k \mathbf{m}} \left(\sum_{j=0}^{q-1} e^{2i\pi \langle B^k \mathbf{m}, A^j x \rangle} \right) \\ &= \sum_{\mathbf{m} \in \Sigma} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi_{B^k \mathbf{m}} \left(\sum_{j=0}^{q-1} e^{2i\pi \langle \mathbf{m}, A^{j+k} x \rangle} \right) \\ &= \sum_{\mathbf{m} \in \Sigma} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi_{B^k \mathbf{m}} \left(\sum_{j=0}^{q-1} e^{2i\pi \langle \mathbf{m}, A^j x \rangle} \right). \end{aligned}$$

Comme la quantité :

$$\sum_{j=0}^{q-1} e^{2i\pi \langle \mathbf{m}, A^j x \rangle}$$

ne dépend que de x et de $\mathbf{m}$, on la note $a(x, \mathbf{m})$. On obtient ainsi :

$$\begin{aligned} \langle \mu_x, \varphi \rangle &= \sum_{\mathbf{m} \in \Sigma} a(x, \mathbf{m}) \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi_{B^k \mathbf{m}} \right) \\ &= \sum_{\mathbf{m} \in \Sigma} a(x, \mathbf{m}) \langle \ell_{\mathbf{m}}, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Ceci montre que :

$$\mu_x = \sum_{\mathbf{m} \in \Sigma} a(x, \mathbf{m}) \ell_{\mathbf{m}}$$

où la convergence de la série est entendue au sens de la topologie faible sur l'espace des distributions $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^n)$. $\square$

Références

[AE] ABOUQATEB, A. & EL KACIMI ALAOUI, A. *Fonctionnelles invariantes et courants basiques.* Studia Mathematica 143 (3), (2000), 199-219.

[An] ANOSOV, D.V. *Geodesic flows on compact Riemannian manifolds of negative curvature .* Proc. Steklov Inst. Math., A.M.S. Translations (1969).

[AGH] L. AUSLANDER, L. GREEN AND F. HAHN, *Flows on homogeneous spaces.* Ann. of Math. studies, No. 53, 1963.MR 29: 4841.

[BE] BARRE, R. & EL KACIMI ALAOUI, A. *Foliations.* Handbook of Differential Geometry No 1. Vol. II, (2006), 35-77.

[BT] BOTT, R. ET TU, L.W.*Differential Forms in Algebraic Topology*, Springer-Verlag, GTM (1982).

[Ca] CARRIÈRE, Y. *Flots riemanniens.* Structures transverses des feuilletages, Toulouse 1982, Astérisque 116, (1984), 31-52.

[CR] CYGAN, J.M. & RICHARDSON, L.F. *D-Harmonic distributions and global hypoellipticity on nilmanifolds.* Pacific Journal of Mathematice, vol, 147, NO. 1, 1991.

[Ek1] EL KACIMI ALAOUI, A. *Sur la cohomologie feuilletée.* Compositio Mathematica 49, (1983), 195-215.

[Ek2] EL KACIMI ALAOUI, A. *Invariants de certaines actions de Lie. Instabilité du caractère Fredholm.* Manuscripta Mathematica 74, (1992), 143-160.

[Ek3] EL KACIMI ALAOUI, A. *Quelques éléments de topologie algébrique et différentielle.* Cours de DEA, Lille-Valenciennes (2001).

[EMM] EL KACIMI ALAOUI, A., MOUSSA, T. & MATSUMOTO, S. *Currents invariant by a Kleinian group.* Hokkaido Mathematical Journal Vol. 26, (1997), 177-202.

[EN] EL KACIMI ALAOUI, A. & NICOLAU, M. *A class of C^∞-stable foliations.* Ergod. Th. & Dynam. Sys. 13, (1993), 697-704.

[ET] EL KACIMI ALAOUI, A. & TIHAMI, A. *Cohomologie bigraduée de certains feuilletages.* Bulletin de la Soc. Math. de Belgique Fasc. 2 Vol. 38, (1986), 144-157.

[FF1] FLAMINIO, L. & FORNI, G. *Invariant distributions and time averages for horocycle flows.* Duke Math. J. 119, no. 3 (2003), 465-526.

[FF2] FLAMINIO, L. & FORNI, G. *On the cohomological equation for nilflows.* Prépublication : arXiv:math.DS/0512192 v1 9 Dec 2005.

[Fo] Forni, G. *Solutions of the cohomological equation for area-preserving flows on compact surfaces of higher genus.* Annals of Math. 146, (1997), 295-344.

[GS] Ghys, E. & Sergiescu, V. *Stabilité et conjugaison difféRetiable pour certains feuilletages.* Topology 19(1980), 179-197. MT81K: 57022.

[Gh1] Ghys, E. *Notice sur mes travaux scientifiques.* ENS Lyon, U.M.R.5669 du CNRS, (2001), 1-38.

[Gh2] Ghys, E. *Codimension one Anosov flows and suspensions.* Lecture Notes 1331 (1980).

[GT] Ghys, E., Tsuboï, T. *Différentiabilité des conjugaisons entre systèmes dynamiques de dimension un.* Ann. Inst. Fourier **38** (1988), 215-244.

[Go] Godbillon, C. *Feuilletages.* Birkhauser, P. M. 98 (1989).

[GW] Greenfield, S. & Wallach, N. *Globally hypoelliptic vector fields.* Topology 12, (1973), 247-253.

[Jl] Jacques, Lafontaine. *Introduction aux variétés différentielles.* Presses Universitaires de Grenoble, (1996).

[Ma] Matsumoto, S. *Codimension one Anosov flows.* Lecture Notes Series Number 27 Global Analysis Research Center, Seoul, (1995).

[MM] Matsumoto, S. & Mitsumatsu, Y. *Leafwise cohomology and rigidity of certain Lie group actions.* Ergod. Th. & Dynam. Sys. 23, (2003), 1839-1866.

[Mi] Mieczkowski, D.J. *The cohomological equation and representation theory.* Thesis, Pennsylvania State University, (2006).

[Mo] Molino, P. *Riemannian foliations.* Birkhäuser, (1988).

[Sc] Schmidt, W. M. *Diophantine approximation.* Lecture Notes in Math. 785, (1980).

[Su] Sullivan, D. *Cycles for the dynamical study of foliated manifolds and complex manifolds.* Invent. Math. 36, (1978), 225-255.

[Ve] Verjovsky, A. *Sistemas de Anosov.* Escuela Latinoamericana de Matemáticas (XII-ELAM), Lima 28 juin - 3 juillet 1999. Monografías del Instituto de Matemática y Ciencias Afines.

Résumé

Dans ce travail, on étudie les équations cohomologiques discrète et continue dans les situations qui suivent.

1 - Pour un champ de vecteurs X qui définit un feuilletage riemannien complet sur une varité M, on résout complètement l'equation cohomologique continue.

2 - Pour un champ X sur une la variété M obtenu par suspension d'un difféomorphisme $\gamma : N \longrightarrow N$, on montre que l'équation cohomologique discrète du système dynamique discret (N, γ) est équivalente à l'équation cohomologique continue du système dynamique continu (M, X).

3 - Dans le cas où la variété M est le quotient du groupe de Lie $G = \mathbb{R}^n \rtimes_A \mathbb{R}$ par le réseau $\Gamma = \mathbb{Z}^n \rtimes_A \mathbb{Z}$ avec $A \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$ hyperbolique à valeurs propres réelles positives et X un champ induit par un élément de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ de G, on donne explicitement les solutions des deux équations en question ainsi que d'autres invariants géométriques qui leur sont associés notamment la cohomologie feuilletée du flot d'Anosov défini par A et les distrbutions invariantes.

Discipline

Mathématiques

Mots-Clés

Équations cohomologiques de flots et difféomorphismes. Distributions invariantes. Feuilletages. Cohomologie feuilletée. Flots et difféomorphismes d'Anosov.

Adresse du Laboratoire

LAMAV
Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis
Le Mont Houy
59313 Valenciennes Cedex 9