FEUILLETAGES, ACTIONS ET DYNAMIQUE
ASPECTS ANALYTIQUES ET COHOMOLOGIQUES

Résumé de l'ensemble des travaux

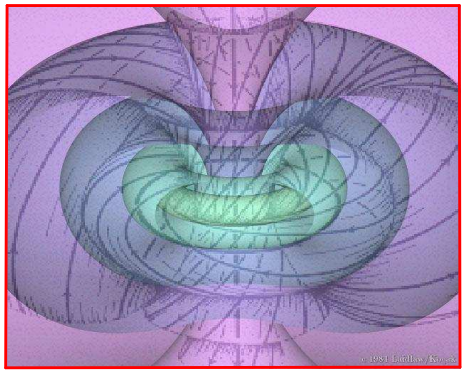
par

Aziz EL KACIMI ALAOUI

Dmaths-Céramaths
Université Polytechnique Hauts-de-France
59313 Valenciennes Cedex 9
aziz.elkacimi@uphf.fr
http://www.elkacimi.fr/

Août 2026

Ce texte est un résumé de l'ensemble de mes travaux (entrepris seul ou en collaboration). Les différentes parties qui le composent sont classées, presque toujours et quand la thématique le permet, par ordre chronologique.



La sphère $\mathbb{S}^3$

STRUCTURES GÉOMÉTRIQUES

Les variétés (différentiables et complexes) et les structures géométriques qu'elles supportent seront présentes constamment dans ce texte. Elles sont, en quelque sorte, le terrain sur lequel tout se joue. J'ai jugé utile d'en rappeler les définitions. Les feuilletages et actions de groupes ont été (et sont toujours) en majorité au centre de mes intérêts mathématiques. Je leur réserve donc la première place dans ces préliminaires.

L'espace $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire usuel $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{d} x_i y_i$ est un objet important en mathématiques. Le fait qu'il possède un système de coordonnées globales permet d'y formuler plus aisément les problèmes d'analyse et de géométrie. Les espaces topologiques M qui lui ressemblent localement sont appelés *variétés topologiques* de *dimension* n. Ils sont tels que, pour tout point $x \in M$, il existe un voisinage ouvert U et un homéomorphisme $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow U$; on dira que (U, φ) est une *carte locale* ou un *système local* de coordonnées $(x_1, \cdots, x_n) = \varphi^{-1}(x)$ sont les coordonnées du point x dans la carte (U, φ). Si (V, ψ) est une autre carte locale dans laquelle x a pour coordonnées $(x'_1, \cdots, x'_k)$, alors l'application $\psi^{-1} \circ \varphi : \varphi^{-1}(U \cap V) \longrightarrow \psi^{-1}(U \cap V)$ est un homéomorphisme et il vérifie la relation : $\psi^{-1} \circ \varphi(x_1, \cdots, x_n) = (x'_1, \cdots, x'_n)$. On dira que $\psi^{-1} \circ \varphi$ est le *changement de coordonnées* de la carte (U, φ) à la carte (V, ψ). Il existe alors un recouvrement ouvert $\mathcal{U} = \{U_i\}$ de l'espace M et une famille d'homéomorphismes $\varphi_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow U_i$. Le système $\{U_i, \varphi_i\}$ est appelé *atlas* définissant la variété M.

Soit M une variété topologique de dimension n définie par un atlas (U_i, φ_i) ; on dira que M est une *variété différentiable* si, pour toute paire (i, j) telle que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, le changement de coordonnées $\varphi_j^{-1} \circ \varphi_i$ est de classe C^∞.

Supposons n pair égal à $2m$ et identifions $\mathbb{R}^{2m}$ à $\mathbb{C}^m$ à l'aide de l'isomorphisme (d'espaces vectoriels réels) $(x_1, y_1, \cdots, x_m, y_m) \in \mathbb{R}^{2m} \longrightarrow (x_1 + iy_1, \cdots, x_m + iy_m) \in \mathbb{C}^m$. On dira que M est une *variété complexe* de dimension m si tous les changements de coordonnées $\varphi_j^{-1} \circ \varphi_i : \varphi_i^{-1}(U \cap V) \subset \mathbb{C}^n \longrightarrow \varphi_j^{-1}(U \cap V) \subset \mathbb{C}^m$ sont des biholomorphismes (*i.e.* $\varphi_j^{-1} \circ \varphi_i$ et son inverse $\varphi_i^{-1} \circ \varphi_j$ sont holomorphes). Localement, un point sera repéré par ses coordonnées complexes $(z_1, \cdots, z_m)$.

On dira que la variété M est *connexe, compacte...* si l'espace topologique sous-jacent M est connexe, compact... La notion de variété différentiable et celle de variété complexe sont centrales en géométrie différentielle et géométrie complexe.

Précisons quelques notations qui nous serviront dans toute la suite. On se donne une variété M connexe de dimension n.

• Un système de coordonnées locales au voisinage d'un point $x \in M$ sera la donnée d'un ouvert U contenant x et d'un difféomorphisme $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow U$ tel que le point x ait pour coordonnées $(x_1, \cdots, x_n) = \varphi^{-1}(x)$.

• $C^\infty(M)$ est l'algèbre des fonctions complexes de classe C^∞ sur M.

• TM est le fibré tangent à M ; pour chaque $x \in M$, sa fibre T_xM est un espace vectoriel réel de dimension n ; TM est une variété différentiable connexe de dimension $2n$ et on a une projection canonique $\pi : TM \longrightarrow M$ telle que $\pi^{-1}(x) = T_xM$.

Beaucoup de structures géométriques peuvent éventuellement être définies sur une variété différentiable. On vient d'en donner une : la structure complexe (n'importe quelle variété n'en supporte pas bien sûr). Nous en introduirons au fur et à mesure de nos besoins. Nous commencerons par la notion de *structure feuilletée.*

1. FEUILLETAGES

1.1. Premières définitions

Prenons un livre épais (comme un annuaire téléphonique par exemple). Si on oublie son contour, on peut le voir comme un ouvert de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$; c'est donc une variété connexe de dimension 3. Mais on peut aussi le voir comme la réunion disjointe de toutes les feuilles qui le composent. Si on convient qu'une feuille n'a aucune épaisseur, ce livre pourra être vu comme une variété de dimension 2 non connexe, ses composantes connexes sont précisément ses feuilles. On dira alors que notre livre est une variété de dimension 3 munie d'un feuilletage de dimension 2 (dimension des feuilles) ou de codimension 1 (la dimension complémentaire des feuilles). Un *feuilletage* $\mathcal{F}$ (de dimension 2) sur une variété M de dimension 3 est localement de ce type : autour de chaque point on peut découper un petit morceau ressemblant à notre livre ! La variété M est ainsi munie d'une deuxième topologie non connexe et dont les composantes connexes sont les *feuilles* de $\mathcal{F}$. Voici la première définition précise d'une variété feuilletée.

1.1.1. Définition. *Soit M une variété (connexe) de dimension $m+n$. Un* ***feuilletage*** *$\mathcal{F}$ de* ***codimension*** *n (ou de* ***dimension*** *m) sur M est la donnée d'un recouvrement ouvert $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ et, pour tout i, d'un difféomorphisme $\varphi_i : \mathbb{R}^{m+n} \longrightarrow U_i$ tel que, sur toute intersection non vide $U_i \cap U_j$, le difféomorphisme de changement de coordonnées :*

$$\varphi_j^{-1} \circ \varphi_i : (x, y) \in \varphi_i^{-1}(U_i \cap U_j) \longrightarrow (x', y') \in \varphi_j^{-1}(U_i \cap U_j)$$

soit de la forme $x' = \varphi_{ij}(x, y)$ et $y' = \gamma_{ij}(y)$.

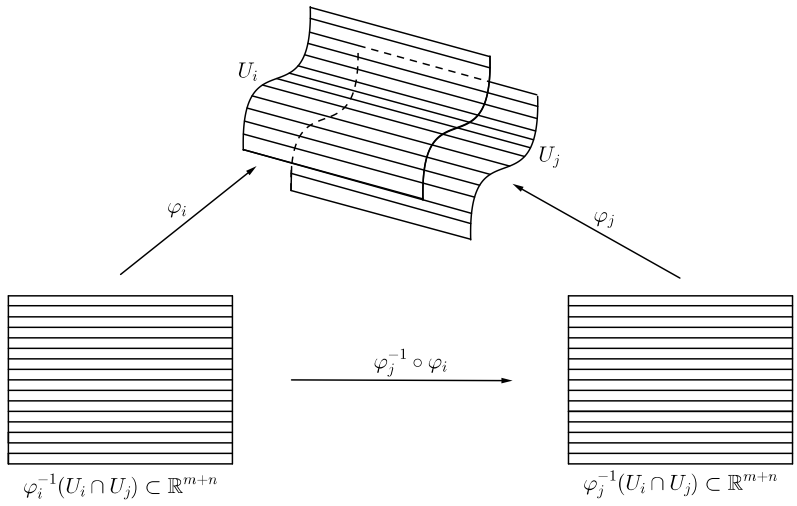


Fig.1

Dans le changement de coordonnées $(x, y) \in \varphi_i^{-1}(U_i \cap U_j) \longrightarrow (x', y') \in \varphi_j^{-1}(U_i \cap U_j)$ le fait que y' ne dépende que de y signifie que les plaques des m-plans horizontaux dans l'ouvert $\varphi_i^{-1}(U_i \cap U_j)$ sont envoyées sur les plaques des m-plans horizontaux dans l'ouvert $\varphi_j^{-1}(U_i \cap U_j)$.

La variété M est ainsi décomposée en sous-variétés connexes de dimension m. Chacune d'elles est appelée *feuille* de $\mathcal{F}$. Une partie U de M est dite *saturée* si elle est réunion de feuilles : si $x \in U$ alors la feuille passant par x est entièrement contenue dans U.

Les systèmes de coordonnées (U_i, φ_i) satisfaisant les conditions de la définiton 1.1.1 sont dits *distingués* pour le feuilletage.

Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage de codimension n sur M défini par un atals maximal $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i\in I}$ comme dans la définition 1.1.1. Soit $\pi : \mathbb{R}^{m+n} = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ la seconde projection. Alors l'application $f_i : U_i \overset{\pi\circ\varphi_i^{-1}}{\longrightarrow} \mathbb{R}^n$ est une submersion. Sur $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ on a $f_j = \gamma_{ij} \circ f_i$. Les fibres de la submersion f_i sont les $\mathcal{F}$-*plaques* de $(U_i, \mathcal{F})$. Les submersions f_i et les difféomorphismes locaux γ_{ij} de $\mathbb{R}^n$ donnent une caractérisation complète de $\mathcal{F}$.

1.1.2. Definition. *Un* ***feuilletage*** $\mathcal{F}$ *de codimension* n *sur* M *est donné par un recouvrement ouvert* $\{U_i\}_{i\in I}$ *et des submersions* $f_i : U_i \longrightarrow T$ *au-dessus d'une* n*-variété* T *et, pour* $U_i \cap U_j \neq \emptyset$*, d'un difféomorphisme* $\gamma_{ij} : f_i(U_i \cap U_j) \longrightarrow f_j(U_i \cap U_j)$ *tels que* $f_j = \gamma_{ij} \circ f_i$*. On dit que* $\{U_i, f_i, T, \gamma_{ij}\}$ *un* ***cocycle feuilleté*** *définissant* $\mathcal{F}$*.*

Le feuilletage $\mathcal{F}$ est dit *transversalement orientable* si la variété T peut être munie d'une orientation préservée par tous les difféomorphismes locaux γ_{ij}.

1.1.3. Feuilletages induits

Soient M et N deux variétés ; on suppose que M supporte un feuilletage $\mathcal{F}$ de codimension n. On dira qu'une application différentiable $f : N \longrightarrow M$ est *transverse* à $\mathcal{F}$ si, pour tout point $x \in N$, l'espace tangent T_yM à M au point $y = f(x)$ est engendré par $T_y\mathcal{F}$ et $(d_xf)(T_xN)$ (où d_xf est l'application tangente à f en x) *i.e.* $T_yM = T_y\mathcal{F} + (d_xf)(T_xN)$. De façon équivalente, si on suppose que M est de dimension $m+n$, f est transverse à $\mathcal{F}$ si, pour tout $x \in N$, il existe un système de coordonnées $(x_1, \cdots, x_m, y_1, \cdots, y_n) : \mathbb{R}^{m+n} \longrightarrow V$ autour de y tel que l'application :

$$g_U : (y_1^{-1} \circ f, \cdots, y_n^{-1} \circ f) : U = f^{-1}(V) \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

soit une submersion. La collection des submersions locales (U, g_U) définit un feuilletage $f^*(\mathcal{F})$ de codimension n sur N appelé *feuilletage induit* de $\mathcal{F}$ par f.

Si f est une submersion et $\mathcal{F}$ est le feuilletage par points, f est transverse à $\mathcal{F}$; dans ce cas les feuilles de $f^*(\mathcal{F})$ sont exactement les fibres de f.

Si $N = \widehat{M}$ est un revêtement de M et f est la projection de revêtement $f : \widehat{M} \longrightarrow M$, alors $f^*(\mathcal{F})$, noté $\widehat{\mathcal{F}}$, est de dimension égale à celle de $\mathcal{F}$; les deux feuilletages $\widehat{\mathcal{F}}$ et $\mathcal{F}$ ont les mêmes propriétés locales.

1.1.4. Morphismes de feuilletages

Soient M et M' deux variétés munies respectivement des feuilletages $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$. Une application différentiable $f : M \longrightarrow M'$ est dite *feuilletée* ou *morphisme* entre $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ si, pour toute feuille L de $\mathcal{F}$, $f(L)$ est contenue dans une feuille de $\mathcal{F}'$; on dira que f est un *isomorphisme* si, en plus, f est un difféomorphisme ; dans ce cas, la restriction de f à toute feuille $L \in \mathcal{F}$ est un difféomorphisme sur la feuille $L' = f(L) \in \mathcal{F}'$.

Supposons que f est un difféomorphisme de M. Alors, pour toute feuille $L \in \mathcal{F}$, $f(L)$ est la feuille d'un feuilletage $\mathcal{F}'$ de codimension n sur M ; on dira que $\mathcal{F}'$ est l'*image* de $\mathcal{F}$ par le difféomorphisme f et on écrit $\mathcal{F} = f^*(\mathcal{F}')$. Deux feuilletages $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ sur M sont dits C^r*-conjugués* (*topologiquement* si $r = 0$, *différentiablement* si $r = \infty$ et *analytiquement* dans le cas $r = \omega$) s'il existe un C^r-homéomorphisme $f : M \longrightarrow M$ tel que $f^*(\mathcal{F}') = \mathcal{F}$.

L'ensemble $\mathrm{Diff}^r(M, \mathcal{F})$ des C^r-difféomorphismes de M qui préservent le feuilletage $\mathcal{F}$ est un sous-groupe du groupe $\mathrm{Diff}^r(M)$ de tous les C^r-difféomorphismes de M.

1.2. Structures transverses

Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage de codimension n sur M. On note $T\mathcal{F}$ le fibré tangent à $\mathcal{F}$ et $\nu\mathcal{F}$ le quotient $TM/T\mathcal{F}$ (*fibré normal* à $\mathcal{F}$) ; $\mathfrak{X}(\mathcal{F})$ sera l'espace des sections de $T\mathcal{F}$ (les éléments de $\mathfrak{X}(\mathcal{F})$ sont les champs $X \in \mathfrak{X}(M)$ tangents à $\mathcal{F}$). Une forme différentielle $\alpha \in \Omega^r(M)$ est dite *basique* si elle satisfait les conditions $i_X\alpha = 0$ et $L_X\alpha = 0$ pour tout $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{F})$. (Ici i_X et L_X sont respectivement le produit intérieur et la dérivée de Lie dans la direction du champ X.) Pour une fonction $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$, ces conditions sont équivalentes à $X \cdot f = 0$ pour tout $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{F})$ *i.e.* f est constante sur les feuilles de $\mathcal{F}$; on note $\Omega^r(M/\mathcal{F})$ l'espace des formes basiques de degré r sur la variété feuilletée $(M, \mathcal{F})$ qui est un module sur l'algèbre $\mathfrak{B}$ des fonctions basiques. Un champ de vecteurs $Y \in \mathfrak{X}(M)$ est dit *feuilleté* si, pour tout $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{F})$, le crochet $[X, Y] \in \mathfrak{X}(\mathcal{F})$. On peut voir aisément que l'ensemble $\mathfrak{X}(M, \mathcal{F})$ des champs feuilletés est une algèbre de Lie et un $\mathfrak{B}$-module ; par définition $\mathfrak{X}(\mathcal{F})$ en est un idéal et le quotient $\mathfrak{X}(M/\mathcal{F}) = \mathfrak{X}(M, \mathcal{F})/\mathfrak{X}(\mathcal{F})$ est l'algèbre de Lie des champs *transverses* (ou *basiques*) sur $(M, \mathcal{F})$. Il a aussi une structure de $\mathfrak{B}$-module.

Soit M une variété de dimension $m + n$ munie d'un feuilletage $\mathcal{F}$ de codimension n défini par un cocycle feuilleté $\{U_i, f_i, T, \gamma_{ij}\}$ comme dans la définition 1.1.2.

1.2.1. Définition. *Une* ***structure transverse*** *à $\mathcal{F}$ est une structure géométrique sur T invariante par les difféomorphismes locaux γ_{ij}.*

C'est une notion très importante en théorie des feuilletages. Pour la rendre plus claire et plus palpable je vais en donner quelques exemples (principalement ceux sur lesquels portent les travaux dont je vais parler).

1.2.2. Feuilletages de Lie

On dira que $\mathcal{F}$ est un *G-feuilletage de Lie*, si T est un groupe de Lie G et les γ_{ij} sont des restrictions de translations à gauche sur G. Un feuilletage de ce type peut être défini par une 1-forme ω sur M à valeurs dans l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ de G telle que :

i) $\omega_x : T_xM \to \mathcal{G}$ est surjective pour tout $x \in M$;

ii) $d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega] = 0$.

Si $\mathcal{G}$ is abélienne, ω est donnée par des 1-formes scalaires $\omega_1, \ldots, \omega_n$ fermées et linéairement indépendantes en chaque point.

Dans le cas général, la structure d'un G-feuilletage de Lie sur une variété compacte M est décrite par le théorème qui suit dû à E. Fédida [Fé] :

Soit $\mathcal{F}$ un G-feuilletage de Lie sur une variété compacte M. Soient $\widetilde{M}$ le revêtement universel de M et $\widetilde{\mathcal{F}}$ le relevé de $\mathcal{F}$ à $\widetilde{M}$. Alors il existe un homomorphisme de groupes

$h : \Gamma = \pi_1(M) \longrightarrow G$ et une fibration localement triviale $\widetilde{M} \xrightarrow{D} M$ dont les fibres sont les feuilles de $\widetilde{\mathcal{F}}$ et telle que pour chaque $\gamma \in \Gamma$ le diagramme qui suit est commutatif :

$$(1) \qquad \begin{array}{ccc} \widetilde{M} & \xrightarrow{\gamma} & \widetilde{M} \\ D\downarrow & & \downarrow D \\ G & \xrightarrow{h(\gamma)} & G. \end{array}$$

La première ligne est l'action de $\gamma \in \pi_1(M)$ sur $\widetilde{M}$ et la deuxième est la translation à gauche par $h(\gamma)$.

Le sous-groupe $\Gamma = h(\pi_1(M)) \subset G$ est appelé *groupe d'holonomie* de $\mathcal{F}$ même si $\mathcal{F}$ est sans holonomie ! La fibration $D : \widetilde{M} \longrightarrow G$ est *l'application développante* de $\mathcal{F}$. Ce théorème donne un procédé de construction effectif d'un feuilletage de Lie.

1.2.3. Feuilletages transversalement parallélisables

On dira que $\mathcal{F}$ est *transversalement parallélisable* si M supporte n champs feuilletés $Y_1, \ldots, Y_n$, transverses à $\mathcal{F}$ et linéairement indépendants en chaque point. Ceci est équivalent au fait que la variété T admet un parallélisme $(Y_1, \ldots, Y_n)$ invariant par les difféomorphismes locaux γ_{ij} ou, de manière équivalente, le $\mathfrak{B}$-module $\mathfrak{X}(M/\mathcal{F})$ est libre de rang n. La structure d'un feuilletage transversalement parallélisable sur une variété compacte est donnée par le théorème qui suit dû à L. Conlon [Cl] pour $n = 2$ et à P. Molino [M1] dans le cas général.

Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage transversalement parallélisable de codimension n sur une variété compacte M. Alors :

(1) *les adhérences des feuilles sont des sous-variétés et sont les fibres d'une fibration localement triviale $\pi : M \longrightarrow W$ où W est une variété compacte,*

(2) *il existe un groupe de Lie simplement connexe G_0 tel que la restriction $\mathcal{F}_0$ de $\mathcal{F}$ à chaque adhérence de feuille F est un G_0-feuilletage de Lie,*

(3) *le cocycle de la fibration $\pi : M \longrightarrow W$ est à valeurs dans le groupe des difféomorphismes de F qui preservent le feuilletage $\mathcal{F}_0$.*

La fibration $\pi : M \longrightarrow W$ et la variété W sont appelées respectivement *fibration basique* et *variété basique* de $\mathcal{F}$. Ce théorème dit en particulier que, si les feuilles de $\mathcal{F}$ sont fermées alors le feuilletage est juste une fibration au-dessus de W. Ceci reste aussi vrai même si les feuilles ne sont plus fermées : la variété fibre au-dessus de l'espace des feuilles $M/\mathcal{F}$ qui est dans ce cas une *Q-variété* au sens de [Br].

Tout G-feuilletage de Lie est transversalement parallélisable. C'est une conséquence du fait qu'un groupe de Lie est parallélisable et que le parallélisme peut être choisi invariant par les translations à gauche.

1.2.4. Feuilletages riemanniens

Le feuilletage $\mathcal{F}$ est dit *riemannien* s'il existe sur T une métrique riemannienne pour laquelle les difféomorphismes locaux γ_{ij} sont des isométries. En utilisant les submersions

$f_i : U_i \longrightarrow T$, on peut construire sur M une métrique riemannienne s'écrivant localement sous la forme :

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^{m} \theta_i \otimes \theta_j + \sum_{k,\ell=1}^{n} g_{k\ell}(y) dy_k \otimes dy_\ell. \tag{2}$$

On dira que cette métrique est *quasi-fibrée*. De façon équivalente, $\mathcal{F}$ est riemannien, si toute géodésique orthogonale aux feuilles en un point reste orthogonale aux feuilles partout. Pour plus de détails voir le papier original [R1] de B. Reinhart qui a introduit pour la première fois la notion de feuilletage riemannien.

Soient $\mathcal{F}$ un feuilletage riemannien et $\mathrm{O}(n) \longrightarrow M^{\#} \xrightarrow{\tau} M$ le fibré principal des repères orthonormés transverses à $\mathcal{F}$. Le théorème qui suit est dû à P. Molino [M2] :

On suppose M compacte. Alors le feuilletage $\mathcal{F}$ se relève à $M^{\#}$ en un feuilletage $\mathcal{F}^{\#}$ de même dimension et tel que :

(1) *$\mathcal{F}^{\#}$ est transversalement parallélisable ;*

(2) *$\mathcal{F}^{\#}$ est invariant sous l'action du groupe $O(n)$ sur $M^{\#}$ et se projette sur $\mathcal{F}$ par l'application τ.*

La variété basique $W^{\#}$ et la fibration basique $F^{\#} \longrightarrow M^{\#} \xrightarrow{\pi^{\#}} W^{\#}$ sont appelées respectivement *variété basique* et *fibration basique* de $\mathcal{F}$.

On a les propriétés qui suivent :

– la restriction de τ à chaque feuille de $\mathcal{F}^{\#}$ est un revêtement sur la feuille de $\mathcal{F}$ sur laquelle elle se projette. Toutes les feuilles ont donc un revêtement d'holonomie commun (*cf.* [R1]),

– l'adhérence de toute feuille de $\mathcal{F}$ est une sous-variété de M et les adhérences des feuilles définissent un *feuilletage riemannien singulier* (les feuilles n'ont pas forcément la même dimension) sur M. (Pour plus de détails voir [M4].)

La propriété "$\mathcal{F}$ est riemannien" dit que l'espace des feuilles $Q = M/\mathcal{F}$ est presque une variété riemannienne même s'il n'a aucune structure différentiable !

1.2.5. $\mathcal{G}/\mathcal{H}$-feuilletages

C'est une classe de feuilletages qui possède des propriétés transverses intéressantes (voir [E27]). Soient $\mathcal{G}$ une algèbre de Lie de dimension d et $\mathcal{H}$ une sous-algèbre de $\mathcal{G}$. On fixe une base $(e_1, \ldots, e_d)$ de $\mathcal{G}$ telle que $e_{n+1}, \ldots, e_d$ engendrent $\mathcal{H}$ et on note $\theta^1, \ldots, \theta^d$ la base duale à $(e_1, \ldots, e_d)$. On a $[e_i, e_j] = \sum_k K_{ij}^k e_k$, où les *constantes de structure* K_{ij}^k vérifient les relations :

$$\begin{cases} K_{ij}^k = -K_{ji}^k \\ \sum_i \left(K_{ij}^k K_{rs}^i + K_{ir}^k K_{sj}^i + K_{is}^k K_{jr}^i \right) = 0 \text{ (identité de Jacobi)} \\ K_{ij}^k = 0 \text{ si } k \leq n \text{ et } n+1 \leq i, j \end{cases} \tag{3}$$

L'ensemble des constantes K_{ij}^k satisfaisant les deux premières conditions détermine la structure d'algèbre de Lie de $\mathcal{G}$ alors que la troisième condition dit que $\mathcal{H}$ en est une sous-algèbre

de Lie. On note G le groupe de Lie 1-connexe d'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ et H le sous-groupe connexe d'algèbre de Lie $\mathcal{H}$.

On notera θ la 1-forme différentielle sur G à valeurs dans $\mathcal{G}$ qui est l'identité sur les champs invariants à gauche sur G *i.e.* $\theta = \sum_k \theta^k \otimes e_k$. Soit $\omega = \sum_k \omega^k \otimes e_k$ une 1-forme à valeurs dans $\mathcal{G}$ sur une variété M. Un élément $g \in G$ transforme ω en une 1-forme $\mathrm{Ad}_g\omega$ à valeurs dans $\mathcal{G}$ où $\mathrm{Ad}_g\omega(X) = \mathrm{Ad}_g \cdot (\omega(X))$ pour tout champ X de M. Une fois que la base $(e_1, \ldots, e_d)$ de $\mathcal{G}$ est fixée, on peut identifier ω au n-uplet de 1-formes scalaires $(\omega^1, \ldots, \omega^d)$. En particulier $\theta = (\theta^1, \ldots, \theta^d)$.

Soit $\omega = (\omega^1, \ldots, \omega^d)$ une 1-forme à valeurs dans $\mathcal{G}$ sur une variété connexe M. Supposons que ω satisfait l'équation de Maurer-Cartan : $d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega] = 0$ i.e.

$$d\omega^k = -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{d} K_{ij}^k \omega^i \wedge \omega^j \tag{4}$$

et que les formes $\omega^1, \cdots, \omega^n$ sont linéairement indépendantes. Alors le système différentiel $\omega^1 = \cdots = \omega^n = 0$ est intégrable et définit un feuilletgae $\mathcal{F}$ de codimension n. On dira que $\mathcal{F}$ est un $\mathcal{G}/\mathcal{H}$-feuilletage défini par la 1-forme ω à valeurs dans $\mathcal{G}$.

Exemple fondamental. Prenons $M = G$. Alors $\theta = (\theta^1, \ldots, \theta^d)$ définit un $\mathcal{G}/\mathcal{H}$-feuilletage $\mathcal{F}_{G,H}$ dont les feuilles sont les classes à gauche modulo l'action de H.

Remarque. La notion de $\mathcal{G}/\mathcal{H}$-feuilletage inclut beaucoup de classes de structures géométriques :

(a) si $n = \dim M$ et H est fermé alors un $\mathcal{G}/\mathcal{H}$-feuilletage $\mathcal{F}$ définit sur M une structure d'espace localement homogène *i.e.* la variété M est localement modelée sur un espace homogène G/H, les changements de coordonnées sont induits par des translations à gauche sur G et le feuilletage est par points. L'espace homogène G/H est muni d'un $\mathcal{G}/\mathcal{H}$-feuilletage lorsque la projection $G \to G/H$ admet une section globale.

(b) Lorsque $\mathcal{H} = 0$, un $\mathcal{G}/\mathcal{H}$-feuilletage est juste un G-feuilletage de Lie. Par exemple une 1-forme fermée non singulière ω sur M définit un $\mathbb{R}$-feuilletage de Lie.

(c) Si H est fermé alors un $\mathcal{G}/\mathcal{H}$-feuilletage est transversalement modelé sur l'espace homogène G/H. Tout feuilletage transversalement homogène est localement donné par une collection de 1-formes $\omega^1, \ldots, \omega^d$ vérifiant la condition (4) (cf. [Bl]). Lorsque ces formes sont globales, elles définissent un $\mathcal{G}/\mathcal{H}$-feuilletage. C'est le cas si, par exemple $H^1(M, H) = 0$ (*cf.* [Bl]).

(d) Quand H n'est pas fermé, un $\mathcal{G}/\mathcal{H}$-feuilletage est localement transversalement homogène comme c'est défini dans [M4].

Soit $\mathcal{F}$ un $\mathcal{G}/\mathcal{H}$-feuilletage sur M défini par ω. Une application $\varphi : N \to M$ transverse à $\mathcal{F}$ induit un $\mathcal{G}/\mathcal{H}$-feuilletage $\varphi^*\mathcal{F}$ sur N défini par $\varphi^*\omega$. On dira que $\varphi^*\mathcal{F}$ est l'*image réciproque* de $\mathcal{F}$ par φ. En particulier, le revêtement universel $\widetilde{M}$ de M est muni d'un $\mathcal{G}/\mathcal{H}$-feuilletage $\widetilde{\mathcal{F}}$ défini par la 1-forme $\pi^*\omega$ où $\pi : \widetilde{M} \to M$ est la projection canonique.

La proposition qui suit dit qu'un $\mathcal{G}/\mathcal{H}$-feuilletage $\widetilde{\mathcal{F}}$ sur $\widetilde{M}$ est l'image réciproque du $\mathcal{G}/\mathcal{H}$-feuilletage $\mathcal{F}_{G,H}$ sur G qui a été considéré dans l'exemple fondamental.

Proposition [Bl]. *Soient $\mathcal{F}$ un $\mathcal{G}/\mathcal{H}$-feuilletage sur M défini par ω et $\widetilde{\mathcal{F}} = \pi^*\mathcal{F}$ son image réciproque dans le revêtement universel $\widetilde{M}$ de M. Il existe une application $\mathcal{D} : \widetilde{M} \to G$ et une représentation $\rho : \pi_1(M) \to G$ telles que :*

(i) *$\mathcal{D}$ est $\pi_1(M)$-équivariante, i.e. $\mathcal{D}(\gamma \cdot \tilde{x}) = \rho(\gamma) \cdot \mathcal{D}(\tilde{x})$ pour tout $\gamma \in \pi_1(M)$;*

(ii) *$\widetilde{\omega} := \pi^*\omega = \mathcal{D}^*\theta$, i.e. $\widetilde{\mathcal{F}} = \mathcal{D}^*\mathcal{F}_{G,H}$.*

L'application $\mathcal{D}$ est appelée *application développante* de $\mathcal{F}$ et est déterminée de façon unique modulo des translations à gauche sur le groupe G.

1.2.6. Feuilletages transversalement holomorphes

Le feuilletage $\mathcal{F}$ est dit *transversalement holomorphe* si T est une variété complexe et les γ_{ij} sont des biholomorphismes locaux. Un feuilletage holomorphe en est un cas particulier : les variété M et T sont complexes et les f_i et les γ_{ij} sont holomorphes.

Si T est kählérienne et les γ_{ij} sont des biholomorphismes qui préservent en plus la structure de Kähler sur T, on dira que $\mathcal{F}$ est *transversalement kählérien.* Par exemple, tout feuilletage riemannien transversalement orientable de codimension 2 (réelle) est transversalement kählérien.

Donnons un exemple concret d'un tel feuilletage. Soit M la sphère unité de $\mathbb{C}^{n+1}$: $M = \mathbb{S}^{2n+1} = \left\{(z_1, \ldots, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} : \sum_{k=1}^{n+1} |z_k|^2 = 1\right\}$. Soit Z le champ de vecteurs holomorphe sur $\mathbb{C}^{n+1}$ donné par : $Z = \sum_{k=1}^{n+1} a_k z_k \dfrac{\partial}{\partial z_k}$ où $a_k = \alpha_k + i\beta_k \in \mathbb{C}$. Il existe un bon choix des nombres a_k tel que les orbites de Z intersectent transversalement la sphère M ; Z induit alors un champ réel X sur M qui définit un feuilletage $\mathcal{F}$. C'est un flot transversalement holomorphe. Il est transversalement kählérien si on choisit en plus $\alpha_k = 0$ pour tout $k = 1, \ldots, n+1$.

1.3. Deux exemples

Une théorie est non vide quand elle a suffisamment d'exemples. Ce n'est pas ce qui manque pour celle des feuilletages. Nous nous limiterons cependant à deux : le feuilletage linéaire sur le tore $\mathbb{T}^2$ et le feuilletage de Reeb sur la sphère $\mathbb{S}^3$. C'est juste pour avoir une vision plus ou moins concrète de ce qu'on va trimbaler le long de ce texte.

1.3.1. Feuilletage linéaire sur le tore

Soit $\widetilde{M} = \mathbb{R}^2$ et considérons l'équation différentielle linéaire $dy - \alpha dx = 0$ où α est un nombre réel. Elle a pour solution générale $y = \alpha x + c$ avec $c \in \mathbb{R}$; cette solution est une fonction linéaire dont le graphe est une droite F_c. Lorsque c varie dans $\mathbb{R}$, on obtient une famille de droites parallèles qui remplit le plan $\widetilde{M}$ et qui y définit un feuilletage $\widetilde{\mathcal{F}}$ (ses feuilles sont les droites F_c). L'action naturelle de $\mathbb{Z}^2$ sur $\widetilde{M}$ préserve $\widetilde{\mathcal{F}}$ (*i.e.* l'image de chaque feuille $\widetilde{\mathcal{F}}$ par une translation entière est une feuille de $\widetilde{\mathcal{F}}$). Le feuilletage $\widetilde{\mathcal{F}}$ induit alors un feuilletage $\mathcal{F}$ sur le tore $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. Les feuilles de $\mathcal{F}$ sont toutes difféomorphes au cercle $\mathbb{S}^1$ si α est rationnel et à la droite réelle sinon (*cf.* (Fig.2)). En fait si α n'est pas

rationnel, toute feuille de $\mathcal{F}$ est dense ; ceci montre que même si, localement, un feuilletage est simple, sa structure globale peut être compliquée !

Comment peut-on voir cet exemple comme feuilletage de Lie via le procédé décrit en 1.2.2 ? Le tore $\mathbb{T}^2$ a pour revêtement usiversel $\widetilde{M} = \mathbb{R}^2$ et son groupe fondamental est $\Gamma = \mathbb{Z}^2$. Soit h le morphisme de Γ dans le groupe de Lie $G = \mathbb{R}$ donné par $h(m,n) = n+\alpha m$ où α un nombre réel strictement positif. Par convenance on considérera que l'action d'un élément $(m,n) = \gamma \in \Gamma$ sur $\mathbb{R}^2$ est donnée par : $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \overset{\gamma}{\longmapsto} (x-m, y+n) \in \mathbb{R}^2$. Soit $D : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la submersion définie par $D(x,y) = y - \alpha x$. Il n'est pas difficile de voir que, pour tout $\gamma \in \Gamma$, le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\gamma} & \mathbb{R}^2 \\ D \downarrow & & \downarrow D \\ \mathbb{R} & \xrightarrow{h(\gamma)} & \mathbb{R} \end{array}$$

est commutatif *i.e.* la fibration $D : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ est équivariante sous l'action de Γ sur $\mathbb{R}^2$ et induit donc un feuilletage sur $\mathbb{T}^2$ transversalement modelé sur le groupe de Lie $\mathbb{R}$ *i.e.* un $\mathbb{R}$-feuilletage de Lie.

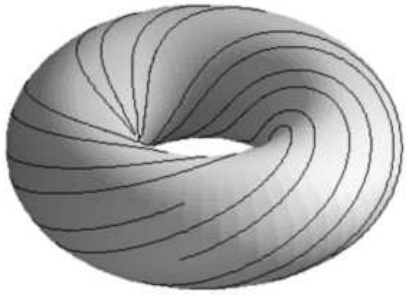


Fig.2

1.3.2. Le feuilletage de Reeb sur $\mathbb{S}^3$.

Soit M la sphère $\mathbb{S}^3 = \{(z_1,z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$. On note $\mathbb{D}$ le disque unité ouvert de $\mathbb{C}$ et $\overline{\mathbb{D}}$ son adhérence (qui est le disque unité fermé $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$. Les deux ensembles $M_+ = \left\{(z_1,z_2) \in \mathbb{S}^3 : |z_1|^2 \leq \frac{1}{2}\right\}$) et $M_- = \left\{(z_1,z_2) \in \mathbb{S}^3 : |z_2|^2 \leq \frac{1}{2}\right\}$ sont difféomorphes à $\overline{\mathbb{D}} \times \mathbb{S}^1$, ont le tore $\mathbb{T}^2$ comme bord commun :

$$\mathbb{T}^2 = \partial M_+ = \partial M_- = \left\{(z_1,z_2) \in \mathbb{S}^3 : |z_1|^2 = |z_2|^2 = \frac{1}{2}\right\}$$

et leur réunion est précisément $\mathbb{S}^3$. Il est alors clair que la sphère $\mathbb{S}^3$ peut être obtenue en recollant M_+ et M_- le long de leur bord commun par le difféomorphisme $(z_1,z_2) \in \partial M_+ \longrightarrow (z_2,z_1) \in \partial M_-$ *i.e.* on identifie (z_1,z_2) à (z_2,z_1) dans la réunion disjointe

$M_+ \coprod M_-$: on recolle deux tores solides en idenifiant un méridien du bord du premier à un parallèle du bord du second ! Soit $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f(z) = \exp\left(\frac{1}{1-|z|^2}\right).$$

Notons t la deuxième coordonnée dans $\mathbb{D} \times \mathbb{R}$. La famille de surfaces $(S_t)_{t\in\mathbb{R}}$ obtenue en translatant le graphe S de f le long de l'axe des t définit un feuilletage sur $\mathbb{D} \times \mathbb{R}$. Si on rajoute le cylindre $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$, où $\mathbb{S}^1$ est vu comme le bord de $\overline{\mathbb{D}}$, on obtient un feuilletage $\widetilde{\mathcal{F}}$ de codimension 1 sur $\overline{\mathbb{D}} \times \mathbb{R}$. Par construction, $\widetilde{\mathcal{F}}$ est invariant par les transformations $(z,t) \in \overline{\mathbb{D}} \times \mathbb{R} \longmapsto (z,t+1) \in \overline{\mathbb{D}} \times \mathbb{R}$ et induit donc un feuilletage $\mathcal{F}_0$ sur le quotient :

$$\overline{\mathbb{D}} \times \mathbb{R}/(z,t) \sim (z,t+1) \simeq \overline{\mathbb{D}} \times \mathbb{S}^1.$$

Il a le bord $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ comme feuille compacte. Toutes les autres sont difféomorphes à $\mathbb{R}^2$ (voir (Fig.3)).

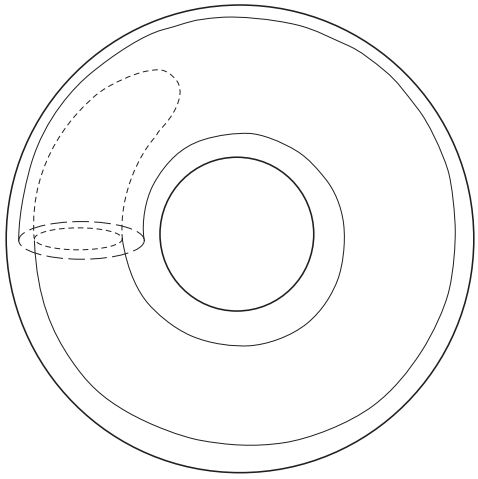


Fig.3

Comme M_+ et M_- sont difféomorphes à $\overline{\mathbb{D}} \times \mathbb{S}^1$, $\mathcal{F}_0$ définit sur M_+ et M_- respectivement deux feuilletages $\mathcal{F}_+$ et $\mathcal{F}_-$; leur recollement le long de la feuille compacte $\mathbb{T}^2$ donne un feuilletage $\mathcal{F}$ sur $\mathbb{S}^3$ appelé *feuilletage de Reeb*. Toutes les feuilles sont difféomorphes au plan $\mathbb{R}^2$ à l'exception de celle qui provient des bords de M_+ et M_- qui est difféomorphe au tore $\mathbb{T}^2$.

Les deux feuilletages qu'on vient de donner sont à la fois très simples et non triviaux. Le premier, comme on l'a vu, se décrit très bien et est d'une richesse immense ! Il sert souvent de test : quand un feuilleteur dit qu'il vient de démontrer un résultat sur les feuilletages, on lui demande d'expliquer ce qui se passe pour le feuilletage linéaire du tore $\mathbb{T}^2$. En quelque sorte, c'est la tête à claques de la théorie ! Le deuxième se construit par chirurgie et ne se voit concrètement que sur les deux morceaux qui constituent séparément la sphère $\mathbb{S}^3$. Sa découverte par G. Reeb a donné un véritable coup de fouet à la théorie. On pourrait dire qu'il est le premier exemple qui a montré qu'elle est véritablement non vide.

2. ACTIONS DE GROUPES

2.1. Définitions et généralités

Dans cette section, nous présenterons de manière brève la notion d'action de groupes et nous l'utiliserons pour construire des exemples divers de variétés différentiables ou analytiques complexes.

2.1.1. La topologie quotient

Soit X un espace topologique muni d'une relation d'équivalence $\mathcal{R}$. Pour tout $x \in X$, on notera $\mathcal{O}_x$ sa classe d'équivalence. Si A est une partie de X, $\mathrm{Sat}(A)$ sera son *saturé i.e.* $\mathrm{Sat}(A) = \bigcup_{x \in A} \mathcal{O}_x$. On dira que $\mathcal{R}$ est *ouverte* si, pour tout ouvert A de X, $\mathrm{Sat}(A)$ est un ouvert de X. Soient $\mathcal{R}$ une telle relation d'équivalence, $X = M/\mathcal{R}$ le quotient et notons $\pi : M \longrightarrow X$ la projection canonique. On munit X de la *topologie quotient* : U est un ouvert de X si, et seulement si, $\pi^{-1}(U)$ est un ouvert de M ; c'est la *plus fine des topologies* rendant continue l'application π.

Un *groupe topologique* est un groupe Γ muni d'une topologie pour laquelle les applications $(\gamma_1, \gamma_2) \in \Gamma \times \Gamma \longrightarrow \gamma_1\gamma_2 \in \Gamma$ et $\gamma \in \Gamma \longrightarrow \gamma^{-1} \in \Gamma$ sont continues.

Soient Γ un groupe, M une variété et $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\} \cup \{\omega\}$. On notera $\mathrm{Diff}^r(M)$ le groupe des homéomorphismes de M de classe C^r *i.e.* un élément $h \in \mathrm{Diff}^r(M)$ est un homémorphisme de M tel que h et h^{-1} soient de classe C^r (analytiques pour $r = \omega$). Pour $r = 0$ on posera $\mathrm{Diff}^0(M) = \mathrm{Homéo}(M)$; bien sûr on a $\mathrm{Diff}^r(M) \subset \mathrm{Homéo}(M)$ pour tout $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\} \cup \{\omega\}$.

2.1.2. Définition. *On appelle* **action** *de classe C^r de Γ sur M une application continue $\Phi : \Gamma \times M \longrightarrow M$ telle que*

i) $\Phi(e, x) = x$ pour tout $x \in M$, e étant l'élément neutre de Γ ;

ii) $\Phi(\gamma\gamma', x) = \Phi(\gamma, \Phi(\gamma', x))$ pour tous $\gamma, \gamma' \in \Gamma$ et tout point $x \in M$;

iii) pour tout $\gamma \in \Gamma$, l'application partielle $\Phi(\gamma, \cdot) : x \in M \longrightarrow \Phi(\gamma, x) \in M$ est un élément de $\mathrm{Diff}^r(M)$.

Une action Φ de classe C^r de Γ sur M définit une représentation de Γ dans le groupe $\mathrm{Diff}^r(M)$ *i.e.* un morphisme de groupes $\rho : \gamma \in \Gamma \longmapsto \Phi(\gamma, \cdot) \in \mathrm{Diff}^r(M)$. Tout élément $\gamma \in \Gamma$ sera confondu avec $\rho(\gamma)$ et, pour tout point $x \in M$, $\rho(\gamma)(x) = \Phi(\gamma, x)$ sera noté simplement γx. L'ensemble $\mathcal{O}_x = \{\gamma x \ : \ \gamma \in \Gamma\}$ est appelé *orbite* de x. Elle est quelquefois notée $G(x)$.

i) On dira que $x \in M$ est un *point fixe* de Φ si $\gamma x = x$ pour tout $\gamma \in \Gamma$. L'ensemble $\mathrm{Fix}(\Phi)$ des points fixes de Φ est un fermé de M.

ii) Pour tout $x \in M$, posons $\Gamma_x = \{\gamma \in \Gamma \ : \ \gamma x = x\}$; alors Γ_x est un sous-groupe fermé de Γ appelé *groupe d'isotropie* de x.

iii) On dira que l'action Φ est *libre* si, pour tout $x \in M$, $\Gamma_x = \{e\}$.

iv) Une partie M_0 de M est dite *invariante* par Φ si, pour tout $x \in M_0$, l'orbite $\mathcal{O}_x$ est entièrement contenue dans M_0. On dira que Φ est *transitive* s'il existe x tel que l'orbite $\mathcal{O}_x$ soit égale à M. (Ceci sera donc vrai pour tout $x \in M$.)

Toute action Φ de Γ sur M définit une *relation d'équivalence* $\mathcal{R}$:

$$x \,\mathcal{R}\, y \Longleftrightarrow \text{il existe } \gamma \in \Gamma \text{ tel que } y = \gamma x.$$

Cette relation d'équivalence est ouverte car, pour tout ouvert U de M, son saturé s'écrit

$$\mathrm{Sat}(U) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma U$$

qui est donc un ouvert car, pour tout γ, γU est ouvert (γ étant un difféomorphisme). On munit $X_\Phi = M/\Phi = M/\mathcal{R}$ de la topologie quotient. On dira que l'action $\Phi : \Gamma \times M \longrightarrow M$ est :

v) *totalement discontinue* si, tout point $x \in M$ admet un voisinage ouvert U tel que, pour tous $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ distincts, on ait $\gamma_1 U \cap \gamma_2 U = \emptyset$;

vi) *séparante* si tous points $x, y \in M$ non équivalents admettent des voisinages ouverts respectifs U et V tels que, pour tous $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$, on ait $\gamma_1 U \cap \gamma_2 V = \emptyset$;

vii) *propre* si, pour tout compact $K \subset M$, l'ensemble $\{\gamma \in \Gamma : \gamma K \cap K \neq \emptyset\}$ est relativement compact (*i.e.* son adhérence est compacte) dans Γ (fini si Γ est discret).

Bien sûr, si Γ est fini et agit librement, alors il agit de façon séparante et totalement discontinue.

On dira que deux actions Φ_1 et Φ_2 définies respectivement sur les variétés M_1 et M_2 sont C^s-*conjuguées*, s'il existe un homéomorphisme $h : M_1 \longrightarrow M_2$, de classe C^s tel que, pour tout $\gamma \in \Gamma$, le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} M_1 & \overset{\Phi_1(\gamma,\cdot)}{\longrightarrow} & M_1 \\ h \downarrow & & \downarrow h \\ M_2 & \overset{\Phi_2(\gamma,\cdot)}{\longrightarrow} & M_2. \end{array} \tag{5}$$

Dans toute la suite de cette section Γ sera un groupe topologique dénombrable et discret. Dans ce cas, si Γ agit librement et proprement, il agit de façon séparante et totalement discontinue. On conviendra aussi que le mot "C^k-homéomorphisme" signifiera homéomorphisme pour $k = 0$, difféomorphisme C^k si $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$ et difféomorphisme analytique si $k = \omega$.

2.1.3. Proposition. *Soient M une variété de classe C^r ($r \in \mathbb{N} \cup \{\infty, \omega\}$) de dimension n et Φ une action libre et propre de classe C^r de Γ sur M. Alors le quotient $X_\Phi = M/\Phi$ est une variété de classe C^r de dimension n et la projection canonique $\pi : M \longrightarrow X$ est un difféomorphisme local C^r i.e. tout point $x \in M$ admet un vosinage ouvert U tel que la restriction $\pi : U \longrightarrow \pi(U)$ soit un difféomorphisme de classe C^r. Si Ψ est une action C^s-conjuguée à Φ, les variétés X_Φ et X_Ψ sont C^s-homéomorphes.*

Supposons M complexe ; on dira que Γ *agit holomorphiquement* sur M (ou que l'action de Γ est *holomorphe*) si, pour tout $\gamma \in \Gamma$, l'homéomorphisme $\gamma : x \in M \longmapsto \gamma x \in M$ est un *biholomorphisme* (*i.e.* γ est bijectif et γ et γ^{-1} sont holomorphes). La même définition de la conjugaison de deux actions se transpose au cas des variétés complexes :

on demande à h dans le diagramme $(*)$ d'être biholomorphe et on dira que les actions sont *holomorphiquement conjuguées.* On a une version complexe de la proposition 2.1.3.

2.1.4. Proposition. *Soient M une variété complexe de dimension n et Φ une action holomorphe, libre et propre de Γ sur M. Alors le quotient $X_\Phi = M/\Phi$ est une variété complexe de dimension n et la projection canonique $\pi : M \longrightarrow X_\Phi$ est un biholomorphisme local i.e. tout point $x \in M$ admet un vosinage ouvert U tel que la restriction $\pi : U \longrightarrow \pi(U)$ soit un biholomorphisme. Si Ψ est une action holomorphiquement conjuguée à Φ, les variétés X_Φ et X_Ψ sont holomorphiquement équivalentes.*

Il est souvent utile de savoir s'il existe une partie de M (géométriquement intérssante) qui contient le moins possible d'éléments dans chaque orbite. Ceci nous amène à la définition qui suit.

2.1.5. Définition. *Soit Φ une action de classe C^r propre et discontinue de Γ sur une variété M. On appelle* ***domaine fondamental*** *de cette action toute partie fermée Δ de M telle que* :

i) $\bigcup_{\gamma\in\Gamma} \gamma(\Delta) = M$,

ii) $int(\Delta) \cap \gamma(int(\gamma\Delta)) = \emptyset$ *pour tout* $\gamma \neq$ *identité.*

L'ensemble $\partial\Delta = \Delta \setminus int(\Delta)$ est le *bord* du domaine fondamental ; il est de mesure nulle (pour la mesure canonique de M : celle donnée par la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^n$ à l'aide des cartes locales). La variété quotient $X = M/\Gamma$ est obtenue à partir de Δ en identifiant les points de $\partial\Delta$ qui sont Γ-équivalents.

Toute action de classe C^r propre et discontinue de Γ sur une variété différentiable M admet un domaine fondamental. Ce domaine est compact si, et seulement si, le quotient $X = M/\Gamma$ l'est.

Les quotients par des actions de groupes fournissent beaucoup d'exemples de variétés différentiables et analytiques complexes. Nous allons en donner quelques-uns.

2.2. Exemples

2.2.1. Soient $M = \mathbb{R}^n$, $\Gamma = \mathbb{Z}^n$ et $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n)$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$ dont les composantes sont toutes non nulles. On définit une action $\Phi : \Gamma \times M \longrightarrow M$ par $\Phi(q, x) = x + \tau q$ où $x = (x_1, \ldots x_n) \in \mathbb{R}^n$, $q = (q_1, \ldots, q_n) \in \mathbb{Z}^n$ et $q\tau = (q_1\tau_1, \ldots, q_n\tau_n)$. Alors Φ est une action analytique, libre et propre ; le quotient M/Γ est une variété analytique réelle de dimension n. La structure différentiable sur M/Γ ne dépend pas du τ choisi. Cette variété est appelée *n-tore* et est notée $\mathbb{T}^n$. Pour $n = 2$, $\mathbb{T}^2$ est obtenu en identifiant, deux à deux, les côtés opposés d'un rectangle en respectant l'orientation.

2.2.2. Soient $M = \mathbb{C}^n$ et $\Gamma = \mathbb{Z}^{2n}$, $\tau = (\tau_1, \tau'_1 \ldots, \tau_n, \tau'_n)$ un vecteur de $\mathbb{R}^{2n}$ dont les composantes sont toutes non nulles. On définit une action $\Gamma\times M \xrightarrow{\Phi} M$ par $\Phi(q, z) = z+\tau q$ où $z = (z_1, \ldots z_n) \in \mathbb{C}^n$, $q = (q_1, {q'}_1 \cdots, q_n, {q'}_n) \in \mathbb{Z}^{2n}$ et :

$$q\tau = (q_1\tau_1 + i{q'}_1{\tau'}_1, \cdots, q_n\tau_n + i{q'}_n{\tau'}_n).$$

Alors Φ est une action holomorphe, libre et propre ; le quotient M/Γ est une variété complexe de dimension n appelée *n-tore complexe* et est notée $\mathbb{T}^n_\tau$. Contrairement au cas réel, sa structure complexe dépend du choix de $\tau \in \mathbb{R}^{2n}$. Par exemple, supposons $n = 1$. Alors se donner $\tau \in \mathbb{R}^2$ revient à se donner $\tau = (1, \omega) \in \mathbb{H}$ où $\mathbb{H}$ est le demi-plan supérieur $\{x + iy \in \mathbb{C} : y > 0\}$. Les tores $\mathbb{T}^2_\tau$ et $\mathbb{T}^2_\sigma$ sont équivalents holomorphiquement (*i.e.* il existe un biholomorphisme $\mathbb{T}^2_\tau \longrightarrow \mathbb{T}^2_\sigma$) si, et seulement si, il existe une matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ telle que $\sigma = \frac{a\tau+b}{c\tau+d}$. Sur le tore réel $\mathbb{T}^2$, il y a donc une infinité de structures complexes ; chacune est codée par $\tau \in \mathbb{H}$. Les classes d'équivalence de structures complexes sur $\mathbb{T}^2$ correspondent bijectivement aux points du quotient $\mathbb{H}/\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ appelé *orbifold modulaire.*

2.2.3. Soient M la sphère $\mathbb{S}^n$, ensemble des vecteurs de l'espace $\mathbb{R}^{n+1}$ vérifiant la relation $x_1^2 + \ldots + x_{n+1}^2 = 1$ et Γ le groupe multiplicatif $\{1, -1\}$ (qu'on peut aussi identifier au groupe additif $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$) ; Γ agit sur $\mathbb{S}^n$ de la façon suivante :

$$\Phi : (\gamma, x) \in \Gamma \times \mathbb{S}^n \longmapsto \gamma x \in \mathbb{S}^n$$

où $\gamma x = (\gamma x_1, \cdots, \gamma x_{n+1})$. Cette action Φ est libre et le quotient $\mathbb{S}^n/\Gamma$ est une variété analytique réelle de dimension n ; c'est l'espace projectif $P^n(\mathbb{R})$.

2.2.4. Soient $M = \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, $\Gamma = \mathbb{Z}$ et $0 < a < 1$. On définit une action de Γ sur M de la façon suivante :

$$\Phi : (q, z) \in \Gamma \times M \longmapsto a^q z \in M.$$

Alors Φ est une action holomorphe, libre et propre. Le quotient M/Γ est une variété analytique complexe de dimension n appelée *surface de Hopf* ; elle est difféomorphe à $\mathbb{S}^{2n-1} \times \mathbb{S}^1$.

RÉSUMÉ DE L'ENSEMBLE DES TRAVAUX

3. FEUILLETAGES ET ACTIONS DE GROUPES

La rigidité d'un feuilletage dépend à la fois de la géométrie des feuilles, de la structure transverse et de la topologie de la variété ambiante. Deux points de vue sont développés dans ce texte.

Un point de vue tangent-transverse consistant en l'étude de diverses cohomologies de la variété feuilletée à valeurs dans des faisceaux naturellement définis sur l'espace transverse et leurs liens à certaines propriétés géométriques du feuilletage.

Un point de vue purement transverse et qui est assez important. En effet, un feuilletage $\mathcal{F}$ sur une variété M est la réalisation géométrique d'un système différentiel complètement intégrable. À un instant donné, on passe d'une feuille à une autre par un changement de condition initiale. On peut donc interpréter l'espace des feuilles $B = M/\mathcal{F}$ comme un "espace de paramètres" des solutions de ce système différentiel. Depuis le début de la théorie des feuilletages la question qui suit se pose explicitement ou implicitement :

Question. *Dans quelle mesure l'espace B ressemble-t-il à une bonne variété ?*

Des exemples simples montrent qu'en général B n'est pas une variété. On peut cependant y définir la notion de différentiabilité, de fibré, de section, de métrique riemannienne, d'opérateur différentiel *etc.* Ces objets correspondent à leurs analogues sur M invariants le long des feuilles. Une grande partie de ce texte a pour but de montrer que, si M est compacte et si $\mathcal{F}$ a une certaine rigidité, ces objets géométriques s'apparentent fortement à ceux d'une bonne variété compacte.

Les structures considérées seront de classe C^∞. Soit M une variété compacte munie d'un feuilletage $\mathcal{F}$ de codimension n (réelle ou complexe suivant le cas). On supposera, pour simplifier que $\mathcal{F}$ est transversalement orientable (c'est le cas par exemple si $\mathcal{F}$ est transversalement parallélisable (T.P. en abrégé) ou transversalement holomorphe) sinon on passe à un revêtement à deux feuillets.

3.1. Suite spectrale d'un feuilletage

Une forme différentielle α sur M est dite *basique* si elle vérifie $i_X\alpha = 0$ et $L_X\alpha = 0$ pour tout champ de vecteurs X tangent à $\mathcal{F}$. Localement α est la relevée d'une forme différentielle sur la variété des plaques. On peut donc l'interpréter comme une "forme différentielle sur l'espace B". Le faisceau Φ^p des germes de p-formes basiques n'est pas fin et permet de définir une théorie de cohomologie $H^*(M, \Phi^p)$, en général non triviale, qu'on appelle *cohomologie bigraduée* de la variété feuilletée $(M, \mathcal{F})$. C'est en fait le terme E_1^{p*} de la suite spectrale (E_r) associée à la résolution de de Rham transverse :

$$0 \to \mathbb{R} \to \Phi^\circ \xrightarrow{d} \Phi^1 \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \Phi^n \to 0 \tag{6}$$

du faisceau constant $\mathbb{R}$ sur M. C'est l'analogue pour $\mathcal{F}$ de la version différentiable de la suite de Leray-Serre d'une fibration localement triviale. La cohomologie bigraduée est

apparue pour la première fois dans les travaux de B. Reinhart [R2]. Depuis lors, divers auteurs l'ont étudiée. I. V aisman [V1] a donné une résolution fine du faisceau Φ^p en termes de formes différentielles le long des feuilles. Dans sa thèse [S1], K.S. Sarkaria a relié cette cohomologie aux classes caractéristiques des fibrés en droites complexes. Dans les travaux de K. Kodaira et D.C. Spencer [KS1], on peut trouver des applications aux déformations des feuilletages holomorphes ainsi que dans les travaux de R.S. Hamilton [Hm], T. Duchamp et M. Kalka [DK]. Certains résultats ont été obtenus aussi par C. Roger [Ro] et M.A. Mostow [Mw]. Le même type de cohomologie a été utilisé par P. Molino [M3] pour lire les obstructions à l'existence de connexions basiques. Jusqu'à récemment on ne disposait d'aucun calcul à part celui des feuilletages linéaires du tore $\mathbb{T}^2$ qui a été fait partiellement par B. Reinhart [R2]. Les méthodes de calcul reposent sur la notion de "petit dénominateur" qui remonte déjà à certains travaux de H. Poincaré.

Mon travail a consisté à rendre un peu plus concrète cette cohomologie restée depuis un peu mystérieuse faute d'exemples. Dans un premier temps, il a fallu dégager les différentes propriétés et voir quelles méthodes de la situation classique restent valables. J'ai montré que le terme E_1^{p*} est *invariant par homotopie intégrable i.e.* une homotopie qui préserve chaque feuille individuellement. Par le biais d'une partition de l'unité sur M, nous avons établi [E3] un principe généralisé de Mayer-Vietoris et donc, comme dans le cas classique, une autre suite spectrale de type Čech-de Rham convergeant vers $H^*(M, \Phi^p)$. En particulier, nous avons montré, à l'aide de cette dernière suite spectrale le :

3.1.1. Théorème. *Si $\mathcal{F}$ est transverse à une fibration $F \to M \to W$ alors $H^*(M, \Phi^p) = H^*(W, \mathcal{A}^p)$ où $\mathcal{A}^p$ est le faisceau localement constant sur W de fibre l'espace de Fréchet $A^p(F)$ des p-formes différentielles sur F.*

Ceci qui nous a permis de donner des calculs explicites pour beaucoup d'exemples de feuilletages. Dans [E2] j'ai donné une application géométrique de cette cohomologie :

3.1.2. Théorème. *Si le feuilletage $\mathcal{F}$ admet une mesure transverse invariante, l'espace vectoriel $H^{\dim \mathcal{F}}(M, \Phi^0)$ est non réduit à $\{0\}$.*

D'autres résultats sur cette même cohomologie apparaîtront dans le courant de ce texte en rapport avec l'étude des *équations cohomologiques* associées à des flots ou des difféomorphismes.

Lorsque la structure transverse est un peu moins ordinaire, par exemple si elle est complexe, on peut utiliser le faisceau des germes de p-formes holomorphes pour définir une autre cohomologie généralisant la cohomologie de Dolbeault classique des variétés complexes comme on va le voir dans ce qui suit.

3.2. Dualité de Serre feuilletée

On suppose $\mathcal{F}$ transversalement holomorphe. Une forme différentielle sur M est dite *basique holomorphe* si elle est basique et si sa restriction à toute transversale est une forme holomorphe. Sur un ouvert distingué une telle forme est l'image réciproque d'une forme holomorphe sur un ouvert de $\mathbb{C}^n$. Pas plus que le faisceau Φ^p le faisceau $\Omega^p_{\mathcal{F}}$ des p-formes différentielles basiques holomorphes n'est fin. La cohomologie de M à valeurs dans $\Omega^p_{\mathcal{F}}$ sera appelée *la cohomologie mixte* de la variété feuilletée $(M, \mathcal{F})$. Cette appellation est bien

justifiée car d'une part une variété supportant un feuilletage transversalement holomorphe est une variété mixte et d'autre part, si $\mathcal{F}$ admet un feuilletage transverse (dont les feuilles seront des variétés analytiques complexes), $H^*(M, \Omega^p_{\mathcal{F}})$ se calcule à l'aide d'un complexe mixte de de Rham-Dolbeault. L'avantage du faisceau $\Omega^p_{\mathcal{F}}$ est qu'il admet, contrairement à Φ^p, une résolution elliptique permettant de montrer que les espaces vectoriels $H^q(M, (\Omega^p_{\mathcal{F}})$ sont de dimension finie (dans le cas où M est compacte). Ceci a été remarqué par I. Vaisman [V2] mais une démonstration correcte de ce fait n'a été donnée que récemment par T. Duchamp et M. Kalka [DK] et X. Gomez-Mont [GM].

De manière générale, soit E un fibré vectoriel complexe *feuilleté holomorphe i.e.* les fonctions de transition sont constantes sur les feuilles et holomorphes (sur la transversale). Dans [E8] je montre que $H^*(M, \Omega^p_{\mathcal{F}}(E))$ est de dimension finie où $\Omega^p_{\mathcal{F}}(E)$ est le faisceau des p-formes basiques holomorphes à valeurs dans E. Cette démonstration reste vraie si on remplace $\Omega^p_{\mathcal{F}}(E)$ par n'importe quel $\mathcal{O}$-faisceau localement libre et cohérent où $\mathcal{O} = \Omega^0_{\mathcal{F}}$. Si E est le fibré normal holomorphe, l'espace $H^1(M, \Omega^0_{\mathcal{F}}(E))$ paramètre les classes d'équivalence des déformations infinitésimales de $\mathcal{F}$. Je démontre par ailleurs l'analogue de la dualité de Serre à savoir que :

3.2.1. Théorème. *Pour tout $p = 0, \cdots, n$ et pour tout $q = 0, \cdots, n + \dim \mathcal{F}$, l'espace $H^q(M, \Omega^p_{\mathcal{F}}(E))$ est canoniquement isomorphe à $H^{n+dim\mathcal{F}-q}(M, \Omega^{n-p}_{\mathcal{F}}(E^*))$ où E^* est le dual de E.*

J'ai d'autre part donné quelques calculs explicites de cette cohomologie. On peut noter enfin que la suite :

$$0 \to \mathbb{C} \longrightarrow \Omega^0_{\mathcal{F}} \xrightarrow{d} \Omega^1_{\mathcal{F}} \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \Omega^{n-1}_{\mathcal{F}} \xrightarrow{d} \Omega^n_{\mathcal{F}} \longrightarrow 0$$

est une résolution du faisceau constant $\mathbb{C}$. D'où une suite spectrale $K_1^{pq} = H^q(M, \Omega^p_{\mathcal{F}})$ qui converge vers la cohomologie de de Rham à coefficients complexes de la variété M. Par analogie au cas classique, on l'appellera la *suite spectrale de Leray-Serre-Frölicher* de la variété feuilletée $(M, \mathcal{F})$. Son intérêt est que, pour $n = 1$, le terme $K_2^{1,1}$ "contient" l'espace vectoriel $H^2(M/\mathcal{F})$ de cohomologie basique de $\mathcal{F}$ (la définition est dans les lignes qui suivent). Ce qui nous a permis de démontrer dans [E8] le :

3.2.2. Théorème. *Supposons $n = 1$. Alors les espaces vectoriels de cohomologie basique $H^*(M/\mathcal{F})$ sont de dimension finie.*

Ce n'est pas toujours le cas si la codimension de $\mathcal{F}$ est strictement supérieure à 1 (codimension complexe ou réelle bien entendu suivant le cas).

Chacune des cohomologies $H^*(M, \Phi^p)$ et $H^*(M, \Omega^p_{\mathcal{F}})$ dépend de la topologie des feuilles pour $* \geq 1$ et ne peut en aucun cas être considérée comme cohomologie de l'espace transverse à $\mathcal{F}$. Pour ce, on considère l'espace $\Omega^p(M/\mathcal{F}) = H^0(M, \Phi^p)$ des sections globales du faisceau Φ^p; ses éléments sont les p-formes différentielles basiques sur M. On obtient ainsi un complexe différentiel $(\Omega^*(M/\mathcal{F}), d)$ dont l'homologie $H^*(M/\mathcal{F})$ est appelée *cohomologie basique* de $\mathcal{F}$. On peut l'envisager comme cohomologie de de Rham de la structure transverse, voire de l'espace des feuilles de $\mathcal{F}$. Ainsi lorsque $\mathcal{F}$ provient d'une fibration, $H^*(M/\mathcal{F})$ s'identifie à la cohomologie de de Rham de l'espace de base de la fibration.

Question naturelle : *que garde-t-elle de la cohomologie de de Rham d'une variété compacte* ? Presque rien si le feuilletage est quelconque. On peut par exemple se demander si les espaces vectoriels $H^p(M/\mathcal{F})$ sont de dimension finie. Ceci est immédiat pour $H^0(M/\mathcal{F})$ et $H^1(M/\mathcal{F})$. Mais en général il n'en est rien pour $H^p(M/\mathcal{F})$ avec $p \geq 2$ comme le montrent les exemples de G.W. Schwarz [Sc] et récemment ceux de K.S. Sarkaria [S2] et E. Ghys [G1]. Ces derniers ont l'avantage d'être analytiques. En plus une "complexification" de l'exemple de E. Ghys fournit un exemple de feuilletage transversalement holomorphe de codimension complexe pour lequel la cohomologie basique est de dimension infinie. Ce qui ne saurait se produire ni pour les feuilletages transversalement holomorphes de codimension 1 comme je viens de le signaler plus haut ni pour les feuilletages riemanniens auxquels je consacre le paragraphe qui suit.

3.3. Cohomologie basique

Si $\mathcal{F}$ est riemannien *i.e.* le fibré normal supporte une métrique riemannienne invariante par le pseudo-groupe d'holonomie, B. Reinhart affirme dans [R3] que la cohomologie basique de $\mathcal{F}$ est de dimension finie et vérifie la dualité de Poincaré. Malheureusement la seconde assertion a été mise en défaut par suite d'un contre-exemple de Y. Carrière [Ca]. A priori, l'erreur détectée compromettait en même temps l'assertion de finitude. La question était devenue désormais ouverte. Ce sont F. Kamber et P. Tondeur [KT1] qui ont montré, peu de temps après, que les résultats de B. Reinhart restent vrais pourvu que l'on se restreigne aux feuilletages riemanniens minimalisables *i.e.* admettant une métrique riemannienne quasi-fibrée pour laquelle les feuilles sont des sous-variétés minimales. (Beaucoup plus tard j'avais examiné de près la démonstration de B. Reinhart et constaté qu'elle restait totalement correcte en rajoutant l'hypothèse de minimalité des feuilles.) Nous avons alors abordé la question dans toute sa généralité pour un feuilletage riemannien $\mathcal{F}$. Le comportement qualitatif d'un tel feuilletage est décrit par deux théorèmes dûs à P. Molino [M2]. Ces deux théorèmes nous ont permis de construire deux suites spectrales [E4] permettant de calculer effectivement cette cohomologie et surtout d'établir le :

3.3.1. Théorème. *Soit M une variété compacte munie d'un feuilletage riemannien $\mathcal{F}$. alors la cohomologie basique $H^*(M/\mathcal{F})$ est cde dimension finie.*

En réalité, pour un feuilletage T.P. $(\Omega^*(M/\mathcal{F}), d)$ s'identifie à un complexe elliptique au-dessus de la variété basique de $\mathcal{F}$ (*i.e.* l'espace des adhérences des feuilles). A peu de choses près ceci reste vrai pour $\mathcal{F}$ riemannien en général. Notre résultat essentiel découle de cette observation :

3.3.2. Théorème (*cf.* [E5] ou [E6]). *Le complexe différentiel $(\Omega^*(M/\mathcal{F}), d)$ admet une décomposition de Hodge.*

Comme conséquence on retrouve le théorème de finitude pour $H^*(M/\mathcal{F})$ (théorème 3.3.1). Il en résulte, d'autre part, que *la cohomologie basique de $\mathcal{F}$ vérifie la dualité de Poincaré si, et seulement si, $\mathcal{F}$ est homologiquement orientable i.e. $H^n(M/\mathcal{F})$ est non nul.* La dualité de Poincaré a été obtenue indépendamment par A. Haefliger (communication privée) et V. Sergiescu [Se] par des techniques homologiques.

Ces premiers résultats montrent à quel point la cohomologie de de Rham de l'espace des feuilles B est proche de celle d'une variété riemannienne compacte. Ceci rentre, en fait, dans le cadre plus général de la théorie des opérateurs transversalement elliptiques que je vais esquisser.

3.4. Opérateurs transversalement elliptiques

Soit $E \to M$ un fibré vectoriel complexe de rang N'. On dira que E est un *$\mathcal{F}$-fibré* s'il est muni d'une connexion basique ∇. Une section α de E est dite *basique* si elle vérifie $\nabla_X \alpha = 0$ pour tout champ de vecteurs X tangent à $\mathcal{F}$. C'est la généralisation naturelle de la notion de forme différentielle basique. L'ensemble $C^\infty(E/\mathcal{F})$ des sections basiques est un module sur l'anneau $\mathfrak{B} = A(M/\mathcal{F})$ des fonctions basiques sur M. On note $\widetilde{E}$ le préfaisceau des sections basiques de E. Soient E et F deux $\mathcal{F}$-fibrés respectivement de rangs N' et N''. Un *opérateur différentiel basique* d'ordre m de E vers F est un morphisme de préfaisceaux $D : \widetilde{E} \to \widetilde{F}$ tel que, pour tout ouvert V distingué pour $\mathcal{F}$ et trivialisant E et F, D s'écrive par rapport à un système de coordonnées locales (x, y) adaptées à $\mathcal{F}$ (*i.e.* $\mathcal{F}$ est défini sur V par $dy = 0$) :

$$D = \sum_{s=0}^{m} P_s \left(y, \frac{\partial}{\partial y_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial y_n} \right) \tag{7}$$

où $P_s = (P_s^{k\ell})$ est une matrice $N' \times N''$ telle que $P_s^{k\ell}$ est un polynôme homogène de degré s en $\frac{\partial}{\partial y_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial y_n}$ à coefficients des fonctions basiques. Soient $z \in M, \xi \in T_z^* M$ un covecteur basique (on dira aussi transverse à $\mathcal{F}$) et g une fonction basique définie sur V telle que $g(z) = 0$ et $dg_z = \xi$. Le *symbole principal* de D en (z, ξ) est l'application linéaire $\sigma(D)(z, \xi) : E_z \to F_z$ définie par :

$$\sigma(D)(z, \xi)(\eta) = \frac{1}{m!} D(g^m \alpha)(z) \tag{8}$$

où α est une section basique de E au-dessus de V vérifiant $\alpha(z) = \eta$. Formellement $\sigma(D)(z, \xi)$ s'obtient en substituant à $\frac{\partial}{\partial y_k}$ dans P_s la composante ξ_k de $\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_n)$. On dira que D est *transversalement elliptique* si $\sigma(D)(z, \xi)$ est un isomorphisme pour tout $z \in M$ et tout covecteur basique ξ non nul ; dans ce cas $N' = N$". Notons T' le fibré T^*M privé de la section nulle et $\widehat{E}$ et $\widehat{F}$ les fibrés images réciproques respectivement de E et F par la projection canonique $T' \to M$. Ce sont des $\mathcal{F}$-fibrés au-dessus de T' et le symbole principal de D est alors un morphisme de fibrés feuilletés $\sigma(D) : \widehat{E} \to \widehat{F}$. C'est un isomorphisme si, et seulement si, D est transversalement elliptique. La notion d'ellipticité transverse a été utilisée de manière implicite par B. Reinhart [R2]. Elle se trouve aussi dans les travaux de M.F. Atiyah [At], A. Connes [Co] et C. Lazarov [La]. Supposons maintenant que E et F sont munis chacun d'une métrique hermitienne parallèle le long des feuilles pour la connexion canonique ∇^S définie par ∇ sur le fibré S^2E^* des 2-formes hermitiennes associé à E. Dans ce cas on dira que E et F sont des *$\mathcal{F}$-fibrés hermitiens*. Si $E = F$ et $m = 2m'$ pair, on définit une forme quadratique en chaque point (z, ξ) :

$$A_D(z, \xi, \eta) = (-1)^{m'} h(\sigma(D)(z, \xi)(\eta), \eta). \tag{9}$$

L'opérateur D est dit *transversalement fortement elliptique* si cette forme quadratique est définie positive en tout point z de M et tout covecteur basique ξ non nul. Les métriques hermitiennes sur E permettent de définir des produits scalaires $\langle\ ,\ \rangle_E$ et $\langle\ ,\ \rangle_F$ respectivement sur $C^\infty(E/\mathcal{F})$ et $C^\infty(E/\mathcal{F})$ les munissant ainsi de structures préhilbertiennes pour lesquelles l'adjoint formel D^* de D est un opérateur différentiel basique. Je démontre alors le :

3.4.1. Théorème (cf. [E9]). *Soit D un opérateur différentiel transversalement elliptique agissant sur les sections basique d'un $\mathcal{F}$-fibré hermitien E vers celles d'un autre $\mathcal{F}$-fibré hermitien E au-dessus de M. L'espace vectoriel $\mathcal{H}(E/\mathcal{F}) = \ker D$ est de dimension finie et on a une décomposition orthogonale* :

$$C^\infty(E/\mathcal{F}) = \mathcal{H}(E/\mathcal{F}) \oplus \mathrm{Im} D^*. \tag{10}$$

Supposons $E = F$ et D auto-adjoint. Une conséquence immédiate de cette décomposition est que l'équation $D\alpha = \beta$ dans $C^\infty(E/\mathcal{F})$ a une solution (et dans ce cas, l'espace des solutions est de dimension finie) si, et seulement si, β est orthogonale à $\mathcal{H}(E/\mathcal{F})$. On peut voir facilement qu'on peut toujours se ramener au cas où D est fortement transversalement elliptique.

La démonstration se fait en trois étapes. Il suffit de la faire pour $E = F$ et D transversalement fortement elliptique, le cas général s'en déduit facilement.

Première : D'abord, si $\mathcal{F}$ est de Lie à feuilles denses, l'espace vectoriel $C^\infty(E/\mathcal{F})$ est de dimension finie. La décomposition de Hodge est donc un problème d'algèbre linéaire.

Deuxième : Pour un feuilletage T.P., on utilise le théorème de Molino. Soit u un point de la variété basique W de $\mathcal{F}$ et notons F_u la fibre au-dessus de u de la fibration basique $\pi : M \to W$ associée à $\mathcal{F}$ et E_u la restriction de E à F_u. Le feuilletage $\mathcal{F}_u$ induit par $\mathcal{F}$ sur F_u est de Lie à feuilles denses ; l'espace vectoriel $C^\infty(E_u/\mathcal{F}_u)$ est donc de dimension finie. Le parallélisme transverse à $\mathcal{F}$ et la structure de $\mathcal{F}$-fibré sur E permettent de montrer que cette dimension ne dépend pas de u. On construit alors un fibré $\overline{E}$ au-dessus de W dont l'espace des sections $C^\infty_U(\overline{E})$ au-dessus de tout ouvert U s'identifie, par un isomorphisme naturel φ, à l'espace $C^\infty_V(E/\mathcal{F})$ des sections basiques de E au-dessus de $V = \pi^{-1}(U)$. D'autre part h induit une métrique hermitienne $\overline{h}$ sur $\overline{E}$ qui permet de munir $C^\infty(\overline{E})$ d'un produit scalaire de telle sorte que $\varphi : C^\infty(E/\mathcal{F}) \to C^\infty(\overline{E})$ est une isométrie. Enfin, l'opérateur D induit sur W un opérateur différentiel $\overline{D}$ d'ordre $2m'$ fortement elliptique agissant sur les sections de $\overline{E}$ et faisant commuter le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} C^\infty(E/\mathcal{F}) & \xrightarrow{D} & C^\infty(E/\mathcal{F}) \\ \varphi\downarrow & & \downarrow\varphi \\ C^\infty(\overline{E}) & \xrightarrow{\overline{D}} & C^\infty(\overline{E}) \end{array}$$

La décomposition de Hodge pour D se ramène alors à celle de $\overline{D}$ sur W qui s'obtient en appliquant la théorie classique bien connue [We].

Troisième : Enfin, pour le cas général, on considère le fibré principal :

$$G = \mathrm{SO}(n) \to M^\# \xrightarrow{\rho} M$$

des repères orthonormés directs transverses à $\mathcal{F}$. La variété $M^\#$ est munie d'un feuilletage T.P. $\mathcal{F}^\#$, de même dimension que $\mathcal{F}$ et invariant par l'action de G. On note $E^\# = \rho^\# E$ l'image réciproque par la projection ρ du fibré E qu'on munit de la connexion $\nabla^\#$ et de la métrique $h^\#$ relevées respectivement de ∇ et de h. On vérifie facilement que $E^\#$ est un $\mathcal{F}^\#$-fibré hermitien muni d'une action du groupe G. L'espace $C^\infty(E/\mathcal{F})$ des sections basiques de E s'identifie naturellement à l'espace $C^\infty_G(E^\#/\mathcal{F}^\#)$ des sections basiques de $E^\#$ invariantes par G. D'autre part, la connexion de Levi-Civita du fibré principal (des repères orthonormés directs transverses) $G \to M^\# \to M$ permet de relever l'opérateur D en un opérateur différentiel $D^\#$ basique, d'ordre $2m'$, agissant sur toutes les sections basiques de $E^\#$. Finalement, on note Q l'opérateur de Casimir le long des fibres de $M^\# \stackrel{\rho}{\to} M$, $Q' = (-1)^{m'}Q$ et on pose $D' = D^\# + Q'$. L'opérateur différentiel D' ainsi défini est basique, d'ordre $2m'$, fortement transversalement elliptique et commute à l'action de G. En plus sa restriction à $C^\infty_G(E^\#/\mathcal{F}^\#) = C^\infty(E/\mathcal{F})$ coïncide avec D. D'après la deuxième étape, l'espace vectoriel $\mathcal{H}(E^\#/\mathcal{F}^\#)$ est de dimension finie et on a une décomposition orthogonale:

$$C^\infty(E^\#/\mathcal{F}^\#) = \mathcal{H}(E^\#/\mathcal{F}^\#) \oplus ImD'^*.$$

Comme $\mathcal{H}_G(E^\#/\mathcal{F}^\#) = \mathcal{H}(E/\mathcal{F})$ et D' commute à G, en se restreignant à $C^\infty_G(E^\#/\mathcal{F}^\#)$ on obtient le résultat cherché. □

Ce theorème dit en particulier que l'opérateur D est de Fredholm et donc il a un indice (basique) :

$$\text{ind}_{\mathcal{F}}(D) = (\dim \text{Ker}D - \dim \text{Ker}D^*) \in \mathbb{Z}. \tag{11}$$

3.4.2 Problème. *Calculer cet indice en termes d'invariants transverses de $\mathcal{F}$. Plus précisément, y a-t-il un théorème de l'indice type celui d'Atiyah-Singer pour un opérateur transversalement sur un feuilletage riemannien d'une variété compacte ?*

Très récemment, A. Gorokhovsky et J. Lott [GL] viennent d'obtenir une formule de l'indice pour l'opérateur de Dirac basique dans le cas où le feuilletage de Lie, restriction de $\mathcal{F}^\#$ à une adhérence de feuille, est abélien.

Comme applications du théorème 3.4.1, outre la décomposition de Hodge pour le complexe de de Rham basique obtenue dans [E6], je démontre un théorème de Hodge-Kodaira pour le complexe de Dolbeault basique dans le cas où $\mathcal{F}$ est hermitien (*i.e.* est riemannien et transversalement holomorphe). D'où l'on déduit le :

3.4.3. Théorème. *La cohomologie de Dolbeault basique est de dimension finie ; elle vérifie la dualité de Serre si et seulement si $\mathcal{F}$ est homologiquement orientable. Si on raffine la structure transverse en supposant en plus que $\mathcal{F}$ est transversalement kählérien, les belles propriétés cohomologiques (structures de Hodge, théorèmes de Lefschetz etc.) des variétés kählériennes compactes se transposent entièrement à l'espace $B = M/\mathcal{F}$.*

En fait, ce théorème de décomposition s'applique à n'importe quel complexe basique transversalement elliptique sur un feuilletage riemannien sur une variété compacte.

Signalons que cette théorie peut être écrite directement sur les pseudo-groupes d'isométries à génération compacte [H3] qui est a priori un cadre plus général !

(Au mois de novembre 2009, j'ai eu l'occasion de discuter là-dessus avec Claire Voisin qui est à l'heure actuelle parmi les plus grands spécialistes de la théorie de Hodge. Je lui ai communiqué le papier [E9] ; elle m'a écrit ceci "J'ignorais qu'on pouvait aller aussi loin dans l'étude topologique de l'espace des feuilles et cela m'intéresse beaucoup.")

Les méthodes utilisées dans ce qui précède permettent d'établir sur l'espace des feuilles d'un feuilletage riemannien sur une variété compacte beaucoup de théorèmes de l'Analyse classique dont certains d'entre eux ont été à peine abordés dans le cas particulier d'une surface de Sataké. Décrivons en quelques-uns.

3.5. Stabilité du caractère kählérien transverse

3.5.1. Ingrédients. Une V-variété (ou variété de Sataké ou orbifold) est un espace topologique localement homéomorphe au quotient d'une boule euclidienne par un groupe fini. Ainsi, toute structure géométrique (riemannienne, complexe, kählérienne...) sur cette boule induit une structure du même type sur la V-variété.

Soit B une V-variété complexe compacte. On appelle *déformation* de B une submersion $\mathcal{B} \xrightarrow{\pi} T$ où $\mathcal{B}$ est une V-variété et T un voisinage ouvert de 0 dans $\mathbb{R}^k$ telle que, pour tout $t \in T$, $\pi^{-1}(t) = B_t$ est une V-variété complexe compacte avec $B_0 = B$. On démontre alors le :

3.5.2. Théorème 5 [E10]. *Si B est kählérienne alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $t \in T$,$|t| < \varepsilon$, B_t admet une structure kählérienne.*

Ce résultat est une généralisation d'un théorème de K. Kodaira et D. C Spencer [KS2]. La démonstration que j'en donne est d'ailleurs une adaptation de leur démarche utilisant les résultats que j'ai obtenus sur les opérateurs fortement transversalement elliptiques via les remarques qui suivent : *toute V-variété complexe compacte B est l'espace des feuilles d'un feuilletage $\mathcal{F}$ hermitien à feuilles compactes et à feuille générique* 1*-connexe et toute déformation de B est équivalente à une déformation de $\mathcal{F}$.*

3.6. Version basique du théorème de Calabi-Yau

Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage transversalement kählérien de codimension n sur une variété compacte connexe et orientable M.

On note g la métrique hermitienne transverse et ω la forme de Kähler du feuilletage. Si $g = \sum_{k,\ell} g_{k\bar{\ell}} dz_k d\overline{z}_\ell$ alors $\omega = i \sum_{k,\ell} g_{k\bar{\ell}} dz_k \wedge d\overline{z}_\ell$. Soient ∇ la connexion de Levi-Civita associée et $\mathcal{R}$ sa courbure. Le tenseur de courbure ρ de Ricci de ∇ est la trace de l'application $Z \to \mathcal{R}(\mathcal{X}, \mathcal{Z})\mathcal{Y}$ où X, Y et Z sont des champs normaux à $\mathcal{F}$. La forme de Ricci est la 2-forme basique définie par $\gamma(X, Y) = \rho(X, JY)$ où J est l'automorphisme associé à la structure complexe transverse. On a $\gamma = -i\partial\overline{\partial} \log(\det(g_{k\bar{\ell}}))$. D'autre part, la première classe de Chern du fibré normal à $\mathcal{F}$ définit une classe basique $c_1(M/\mathcal{F})$ qui est telle que $[\gamma]_b = 2\pi c_1(M/\mathcal{F})$ dans $H^2(M/\mathcal{F})$. Je démontre alors le théorème suivant qui est une version basique de la conjecture de Calabi [Cb] et qui est obtenue par transcription de la démonstration de S.T. Yau [6] détaillée dans le "séminaire Palaiseau ; Astéristique $n°58$".

3.6.1. Théorème [E9]. *Soient $c \in H^2(M/\mathcal{F})$ contenant au moins une forme de Kähler basique et γ une 2-forme basique vérifiant $[\gamma]_b = 2\pi c_1(M/\mathcal{F})$. Alors il existe une unique forme de Kälher basique dont la métrique hermitienne associée a γ comme forme de courbure basique de Ricci.*

Si $\mathcal{F}$ est à feuilles compactes, on obtient un théorème de Calabi-Yau sur $B = M/\mathcal{F}$ et donc sur toute variété compacte kählérienne de Sataké. A notre connaissance ce résultat ne figure pas dans la littérature.

Les méthodes que nous utilisons pour donner la preuve de ce théorème permettent de montrer aussi la conjecture de Calabi sur l'existence de métriques de Kähler-Einstein à courbure de Ricci négative sur l'espace transverse à un feuilletage transversalement kählérien et donc sur une variété kählérienne de Sataké. Ce résultat a d'ailleurs été obtenu par R. Kobayashi [Ko] dans le cas particulier des surfaces de Sataké.

3.6.2. Théorème [E9]. *Si $c_1(M/\mathcal{F}) = 0$, alors dans toute classe de cohomologie basique de $H^2(M/\mathcal{F})$ contenant au moins une forme de Kähler basique, il existe une et une seule forme de Kähler basique pour laquelle la métrtique transverse associée a une courbure basique de Ricci identiquement nulle.*

Dans le cas où le fibré orthogonal est intégrable, les feuilles du feuilletage obtenu sont des variétés kählériennes. La courbure basique de Ricci n'est rien d'autre que la courbure de Ricci des feuilles de ce feuilletage. Dans cette situation, on peut donc interpréter le théorème comme une version paramétrée (éventuellement d'une variété non compacte mais immergée dans une variété compacte) du théorème classique de Calabi-Yau.

3.7. Equation de la chaleur sur l'espace des feuilles $B = M/\mathcal{F}$

3.7.1. Ingrédients. On a vu tout le long des paragraphes qui précèdent que l'espace des feuilles d'un feuilletage riemannien (ou hermitien) est presque une "variété compacte". Une question naturelle qu'on pourrait encore se poser serait alors la suivante :

Etant donnée une fonction basique u_0 continue sur M, existe-t-il une fonction basique u continue sur $M \times \mathbb{R}^+$ et de classe C^2 sur $M \times \mathbb{R}^+_*$ telle que :

$$\begin{cases} \Delta u = \dfrac{\partial u}{\partial t} \\ u(y,0) = u_0(y) \end{cases} \tag{12}$$

où Δ est le laplacien basique ? On peut interpréter l'équation (12) comme décrivant la diffusion de la chaleur sur l'espace B (ou l'espace $\overline{B}$ des adhérences des feuilles). Ce problème n'a évidemment d'intérêt que si B n'a pas une "topologie trop mauvaise" en tant qu'espace quotient en ce sens qu'il a "suffisamment de fonctions basiques". Dans ce cas, on démontre, en utilisant les mêmes techniques que précédemment, le :

3.7.2. Théorème 8 [E7]. *Le problème* (12) *admet une solution unique.*

Idée de la démonstration

Les fonctions basiques sur M s'identifient aux fonctions basiques G-invariantes sur le fibré principal $G = \mathrm{O}(n) \to M^\# \to M$ des repères orthonormés directs transverses à

$\mathcal{F}$ invariants par G. On relève l'opérateur Δ en un opérateur basique $\Delta^{\#}$ sur $M^{\#}$. En posant $L = \Delta^{\#} + Q'$ où Q' est l'opérateur défini en 3.4.1, on transforme le problème (12) en un problème strictement parabolique sur la variété basique W (variété des adhérences des feuilles du relevé $\mathcal{F}^{\#}$ à $M^{\#}$ qui est un feuilletage T.P) :

$$\begin{cases} \overline{L}\overline{u} = \dfrac{\partial \overline{u}}{\partial t} \\ \overline{u}(\cdot, 0) = \overline{u}_0 \end{cases} \tag{13}$$

où $\overline{u}$ et $\overline{u}_0$ sont les fonctions induites par u et u_0 respectivement sur $W \times \mathbb{R}_+$ et W. On sait que (13) admet une solution unique (cf. [BGM]) qui sera nécessairement G-invariante car sinon on pose :

$$\overline{u}(y,t) = \int_G \overline{u}(gy,t)d\mu(g)$$

où μ est la mesure de Haar normalisée sur G. On obtient ainsi une fonction sur M basique qui sera la solution du problème (12).

Conclusion préliminaire

L'ensemble du travail obtenu dans les sous-sections 3.3, 3.4, 3.5, 3.6 et 3.7 constitue une réponse plus ou moins partielle à la question posée au début de la section 3 : l'espace des feuilles d'un feuilletage riemannien sur une variété compacte est une "variété compacte" du point de vue de l'analyse globale.

3.7bis. Applications harmoniques feuilletées

Une application entre variétés riemanniennes est dite *harmonique* si la divergence de sa différentielle est nulle. Ces applications sont des *extrêmales* d'une fonctionnelle appelée *fonctionnelle d'énergie*. Nous n'allons pas rappeler ce que cela signifie de façon précise dans le cas classique mais passer directement à la situation feuilletée.

Soient M et N deux variétés riemanniennes. On supposera que M est munie d'un feuilletage riemannien $\mathcal{F}$ de codimension n (transversalement orientable pour simplifier) et que N et munie du feuilletage par points. Soit $\varphi : M \longrightarrow N$ une application (différentiable). Dire que φ est *feuilletée*, c'est dire exactement qu'elle préserve les feuilletages ; mais comme N est feuilletée par points, cela revient simplement à dire que φ est constante sur les feuilles de $\mathcal{F}$. Elle définit donc une application $\overline{\varphi} : W \longrightarrow N$ où W est la variété basique de $\mathcal{F}$; en plus $\overline{\varphi}$ est équivariante par rapport à l'action du groupe $G = \mathrm{SO}(n)$ sur W (*cf.* section 3.4).

Nous dirons que $\varphi : M \longrightarrow N$ est *transversalement harmonique* si l'application $\overline{\varphi} : W \longrightarrow N$ est une extrêmale de l'énergie sur W:

$$E(\overline{\varphi}) = \frac{1}{2}\int_W ||d\overline{\varphi}||dw$$

pour toutes les variations G-équivariantes (de $\overline{\varphi}$).

Question : *Dans quelles conditions une application feuilletée $\varphi : M \longrightarrow N$ est-elle homotope à une application feuilletée transversalement harmonique $\varphi_0 : M \longrightarrow N$?*

Nous avons obtenu le résulta qui suit.

Théorème [21]. *Soient M une variété compacte munie d'un feuilletage $\mathcal{F}$ riemannien transversalement orientable de codimension plus grande que 2 et N une variété riemannienne orientable munie du feuilletage par point. Si $\varphi : M \longrightarrow N$ est une application feuilletée et si la courbure sectionnelle de N est strictement négative en tout point, alors il existe une application harmonique feuilletée $\varphi_0 : M \longrightarrow N$ homotope à φ.*

3.8. Déformations de certains types de feuilletages

Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage sur une variété compacte M. Une *déformation* de $\mathcal{F}$ paramétrée par un germe $(T, 0)$ d'espace analytique T est une famille différentiable $(\mathcal{F}_t)$ de feuilletages telle que $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}$. Deux déformations $(\mathcal{F}_t)$ et $(\mathcal{F}'_t)$ paramétrées par le même espace analytique T sont dites *équivalentes* s'il existe une famille différentiable h_t de difféomorphismes de M telle que $\mathcal{F}'_t = h_t^*(\mathcal{F}_t)$. Le point de départ de la théorie de la déformation était l'étude des variations des structures complexes sur les variétés complexes compactes qui a été initiée et développée par K. Kodaira et D.C. Spencer [KS2] et menée à terme par K. Kuranishi [Ku] qui a démontré l'existence d'un espace versel. Il est alors apparu naturel d'étudier des structures beaucoup plus générales que celle de variété ; par exemple celle de feuilletage. Le cas d'un feuilletage holomorphe a été traité par K. Kodaira et D.C. Spencer [KS1]. Plus tard T. Duchamp et M. Kalka [DK] ont abordé les feuilletages transversalement holomorphes (sur des variétés non nécessairement complexes). Leur démarche utilise l'existence d'un feuilletage transverse. Cette hypothèse est un peu artificielle. Ce sont J. Girbau, A. Haefliger et D. Sundararaman [GHS] qui ont complètement élucidé le cas général. Les déformations des feuilletages réels se trouvent dans les travaux de R. Hamilton [Hm], mais dans ce cas la théorie est de loin moins riche que celle du cas complexe.

Nous avons regardé trois situations :

(i) Déformations des feuilletages transversalement holomorphes à *type différentiable fixé*.
(ii) Stabilité du caractère kählérien transverse par déformation à type différentiable fixé.
(iii) Déformations des feuilletages *transverslament homogènes*.

On garde le type différentiable de $\mathcal{F}$ et on ne déforme que la structure complexe transverse τ. La notation $(\mathcal{F}, \tau)$ désigne le feuilletage avec sa structure complexe transverse. Les classes d'équivalence de déformations infinitésimales (*i.e.* de la structure presque complexe sur le fibré normal) sont alors paramétrées par l'espace de cohomologie basique de Dolbeault $H^1(A_b^*, \overline{\partial})$ à valeurs dans le fibré holomorphe normal à $\mathcal{F}$. Cet espace est de dimension finie mais le complexe basique de Dolbeault $0 \to A_b^0 \stackrel{\overline{\partial}}{\to} A_b^1 \to \cdots \stackrel{\overline{\partial}}{\to} A_b^n \to 0$ n'est pas elliptique ; il est seulement transversalement elliptique. Si $\mathcal{F}$ est hermitien, on utilise la théorie de Hodge basique pour ce type de complexe comme nous venons de le voir précédemment. On établit alors dans ce cas une version *faible de versalité* pour les déformations à type différentiable fixé :

3.8.1. Théorème. [E15] *Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage hermitien sur une variété compacte M. Alors il existe une déformation à type différentiable fixé $(\mathcal{F}^s, \tau^s)$ paramétrée par un germe d'espace analytique $(S, 0)$ avec la propriété de versalité faible suivante : si $(\mathcal{F}', \tau')$ est proche de $(\mathcal{F}, \tau)$ et $\mathcal{F}'$ est différentiablement conjugué à $\mathcal{F}$ alors il existe $h \in \mathrm{Diff}(M)$ proche de l'identité et $s \in S$ tels que $\mathcal{F}' = h^*\mathcal{F}^s$. De plus, il existe un voisinage U de 0 dans $H^1(A_b^*, \overline{\partial})$ et une application analytique $\beta : U \longrightarrow H^2(A_b^*, \overline{\partial})$, avec un jet d'ordre 1 nul en 0, tels que $(S, 0)$ est le germe en 0 de $\beta^{-1}(0)$.*

Une étude particulière est faite pour les feuilletages de codimension 1 ayant une connexion transverse projetable et les feuilletages de Lie qui possèdent une structure transverse holomorphe. Pour ces derniers, cela revient à étudier les déformations des structures complexes sur un groupe de Lie (réel) équivariantes par un sous-groupe cocompact. Dans les deux types de feuilletages qu'on vient de signaler on a, en fait, un espace versel au sens fort [E15].

Lorsque le feuilletage $\mathcal{F}$ est en plus transversalement kählérien, on peut se demander si ce caractère se conserve par déformation (dans l'espace des feuilletages transversalement holomorphes) à type différentiable fixé. C'est effectivement le cas comme le dit clairement le théorème qui suit.

3.8.2. Théorème (*cf.* [E23]). *Soient $\mathcal{F}$ un feuilletage homologiquement orientable sur une variété compacte M et $\mathcal{F}_t$ une déformation de $\mathcal{F}$ à type différentiable fixé paramétrée par un voisinage T de 0 dans $\mathbb{R}^d$ par des feuilletages transversalement holomorphes. Supposons que la métrique hermitienne transverse σ de $\mathcal{F} = F_0$ est kählérienne. Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $t \in T$, $|t| < \varepsilon$, le feuilletage $\mathcal{F}_t$ possède une métrique kählérienne transverse σ_t telle que $\sigma_0 = \sigma$ et dépendant différentiablement de t pour $|t| < \varepsilon$.*

L'hypothèse "à type différentiable fixé" est substantielle. Nous verrons dans la section 3.10 un exemple de feuilletage transversalement kählérien qui se déforme en feuilletages transversalement holomorphes mais sans aucune structure kählérienne transverse.

3.8.3. Feuilletages transversalement homogènes. On dira que le feuilletage $\mathcal{F}$ est *transversalement homogène* s'il est modelé transversalement sur un espace homogène G/K avec des changements de cartes qui sont des translations à gauche sur G/K. Un tel feuilletage est *transversalement analytique*. Les déformations infinitésimales de $\mathcal{F}$ se lisent sur le premier groupe de cohomologie de la variété à valeurs dans le faisceau $\theta_{\mathcal{F}}$ des germes de champs basiques qui préservent la structure homogène transverse. En s'inspirant de la démarche de P. Griffiths [Gr] nous donnons dans [E12] une résolution fine et elliptique du faisceau $\theta_{\mathcal{F}}$. Cette résolution elliptique et l'analyticité réelle transverse de $\mathcal{F}$ nous permettent alors de démontrer l'existence d'un espace versel des déformations (localement triviales) de $\mathcal{F}$.

3.9. G-feuilletages de type fini

Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage de codimension n sur une variété M. À $\mathcal{F}$ est associé naturellement un pseudo-groupe de difféomorphismes locaux de $\mathbb{R}^n$ appelé *pseudo-groupe d'holonomie* de $\mathcal{F}$. Depuis fort longtemps on a réalisé à quel point il est essentiel pour l'étude de $\mathcal{F}$. Du point de vue de la géométrie différentielle, cette étude se ramène à celle d'une G-structure

transverse feuilletée où G est un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$. On dira que $\mathcal{F}$ est un *G-feuilletage* si le fibré principal des repères transverses à $\mathcal{F}$ admet une réduction feuilletée à un G-fibré feuilleté $M_0 \to M$. Une catégorie importante est celle des $\mathrm{O}(n)$-feuilletages ou feuilletages riemanniens.

La variété M_0 est munie d'un feuilletage $\mathcal{F}_0$ de même dimension que $\mathcal{F}$, invariant par l'action de G et se projetant sur $\mathcal{F}$. Soit $\mathcal{G}$ l'algèbre de Lie de G. On notera $\mathcal{G}^1$ la *première prolongation* de $\mathcal{G}$, *i.e.* $\mathcal{G}^1$ est le sous-espace de $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n,\mathcal{G})$ dont les éléments S vérifient $S(u)v = S(v)u$ pour tous $u,v \in \mathbb{R}^n$ (cette écriture a un sens car $\mathcal{G}$ agit sur $\mathbb{R}^n$). Les éléments de $\mathcal{G}^1$ peuvent être considérés comme des endomorphismes de $\mathbb{R}^n \oplus \mathcal{G}$ via l'identification $S \in \mathcal{G}^1 \to \begin{pmatrix} 0 & S \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{End}(\mathcal{G} \oplus \mathbb{R}^n)$ qui permet de munir $\mathcal{G}^1$ d'une structure d'algèbre de Lie abélienne. De cette façon on construit une suite d'algèbres de Lie $(\mathcal{G}^k)_{k\geq 1}$ telles que $\mathcal{G}^k$ est la 1ère prolongation de $\mathcal{G}^{k-1}$(on convient que $\mathcal{G}^0$ est $\mathcal{G}$). On dira que l'algèbre $\mathcal{G}$ (où que le groupe G) est *de type fini* s'il existe un entier q tel que $\mathcal{G}^{q-1} \neq 0$ et $\mathcal{G}^k = 0$ pour tout $k \geq q$. On dira que G est d'ordre q. Pour plus de détails voir [St].

On dira qu'un G-feuilletage $\mathcal{F}$ est de *type fini* d'ordre q si le groupe G est de type fini d'ordre q. Un feuilletage transversalement parallélisable (T.P. en abrégé) est un $\{e\}$-feuilletage de type fini d'ordre 0. Un feuilletage riemannien est un $\mathrm{O}(n)$-feuilletage de type fini d'ordre 1.Un feuilletage pseudo-riemannien est un feuilletage qui admet une métrique pseudo-riemannienne transverse. C'est un $\mathrm{O}(r,s)$-feuilletage de type fini d'ordre 1. Par exemple, les feuilletages dont la structure transverse est modelée sur un espace homogène L/K, où L est semi-simple et non compact, sont de ce type. Cela vient du fait que sur tout groupe de Lie semi-simple la forme de Killing définit une pseudo-métrique biinvariante. La catégorie des feuilletages pseudo-riemanniens contient strictement celle des feuilletages riemanniens comme le montre l'exemple de feuilletage transversalement homogène qui suit. Soit $L = \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$; ce groupe admet un sous-groupe discret uniforme K. D'autre part, d'après un théorème de A. Borel [Bo], il existe une variété compacte B et une représentation $\pi_1(B) \longrightarrow L \subset \mathrm{Diff}(L/K)$ à image dense. La suspension de cette représentation définit un feuilletage transversalement homogène modelé sur L/K sur une variété compacte M. Il est donc pseudo-riemannien mais il ne peut pas admettre de métrique riemannienne transverse. En effet, si une telle métrique existait elle induirait une métrique riemannienne sur le groupe $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ invariante à gauche par $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ et à droite par K. Un argument de moyennisation semblable à celui de [E16] montre que $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ en admettrait une biinvariante. Ce qui n'est pas le cas. Un feuilletage transversalement conforme est un $\mathrm{CO}(n)$-feuilletage. Si $n \geq 3$, alors il est de type fini ; son ordre est égal à 2.

Tout espace homogène L/K est muni d'une G-structure canonique où $G = K/K^1$ avec $K^1 = \ker\{Ad_\# : K \to \mathrm{Aut}(\mathcal{L}/\mathcal{K})\}$ où $\mathcal{L}$ et $\mathcal{K}$ sont les algèbres de Lie respectives de L et K et $\mathrm{Ad}_\#$ est la représentation induite sur K par la représentation adjointe de L. Cette structure est de type fini [Gr]. Tout feuilletage transversalement homogène modelé sur L/K est donc un G-feuilletage de type fini. On démontre alors le

3.9.1. Théorème 10 [E13]. *Soit un G-feuilletage de type fini d'ordre q sur une variété*

M. Il existe une suite de fibrés principaux :

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & \{0\} & & G^{q-1} & & G^{q-2} & & G^1 & & G^0 = M_0 & \\
(14) & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 & M_q & = & M_{q-1} & \longrightarrow & M_{q-2} & \ldots & M_1 & \longrightarrow & M_0 & \longrightarrow M
\end{array}
$$

tels que pour tout $k = 0, 1, \cdots, q-1$, M_k est muni d'un feuilletage $\mathcal{F}_k$ invariant par G^k, se projetant sur $\mathcal{F}_{k-1}$ et de même dimension que $\mathcal{F}$; en plus $\mathcal{F}_{q-1}$ est transversalement parallélisable. Ici G^k désigne le groupe de Lie 1-connexe d'algèbre de Lie $\mathcal{G}^k$.

Ce résulta a été établi indépendamment par R. Wolak [Wo].

Suivant P. Molino [M1], on dira qu'un feuilletage $\mathcal{F}$ sur une variété M est *transversalement complet* si, pour tout point $x \in M$ et tout vecteur $e \in T_xM$, il existe un champ feuilleté complet X sur M tel que $X_x = e$. Un G-feuilletage $\mathcal{F}$ de type fini d'ordre q sur M est *complet* si le feuilletage transversalement parallélisable $\mathcal{F}_{q-1}$ est transversalement complet.

Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage sur une variété M munie d'une métrique pseudo-riemannienne complète et bundle-like pour $\mathcal{F}$. Alors $\mathcal{F}$ est un feuilletage pseudo-riemannien complet.

Revêtement d'holonomie commun pour $\mathcal{F}$ complet

Les feuilles de $\mathcal{F}_{q-1}$ sont les revêtements d'holonomie des feuilles de $\mathcal{F}$. Comme le feuilletage $\mathcal{F}_{q-1}$ est transversalement complet son groupe d'automorphismes agit transitivement sur M_{q-1}. Il en résulte que ses feuilles sont difféomorphes. Le feuilletage $\mathcal{F}$ est donc homotopiquement équivalent à une fibration de base l'espace classifiant de $\mathcal{F}$ et de fibre la feuille générique (cf. [H1]).

Fibration basique

D'après la théorie de Molino [M2] les adhérences des feuilles de $\mathcal{F}_{q-1}$ sont les fibres d'une fibration localement triviale $\overline{\mathcal{F}}_{q-1} : F \to M_{q-1} \to W$ qu'on appellera *fibration basique* de $\mathcal{F}$. En plus le feuilletage $\mathcal{F}^0_{q-1}$ induit sur la fibre F par $\mathcal{F}_{q-1}$ est un feuilletage de Lie à feuilles denses. Le cocycle de la fibration basique $\pi : M_{q-1} \to W$ est à valeurs dans le groupe $\mathrm{Diff}(F, \mathcal{F}^0_{q-1})$ des difféomorphismes de F qui préservent $\mathcal{F}^0_{q-1}$.

Pour terminer, notons A le groupe des automorphismes du G-feuilletage $\mathcal{F}$ et B le sous-groupe distingué formé des éléments qui fixent chaque feuille de $\mathcal{F}$ individuellement. On munit A de la topologie compacte ouverte. Pour cette topologie B est fermé si, et seulement si, toutes les feuilles de $\mathcal{F}$ sont fermées. On désignera par $\overline{B}$ l'adhérence de B dans A et H la composante connexe par arcs de $A/\overline{B}$. En appliquant les résultats de Yamabe [Ym] on montre alors le théorème :

3.9.2. Théorème. *Le groupe H admet une structure de groupe de Lie connexe.*

3.10. Structures géométriques invariantes et feuilletages

Etant donnée une variété M il est toujours intéressant de savoir quel type de structures géométriques elle peut supporter. L'existence de ces structures et la compatibilité entre elles dépendent de beaucoup de conditions qui peuvent être la dimension de M, sa topologie

etc. : M ne peut être complexe que si sa dimension est paire, des conditions nécessaires de kählérieneté pour M compacte se lisent sur les groupes de cohomologie *etc.* Si M est un espace homogène G/K, on peut encore se poser la question de savoir si ces différentes structures (lorsq'elles existent) sont invariantes par les translations à gauche sur G/K. Là encore on se heurte à des obstructions qui, cette fois-ci, incluent en plus les propriétés algébriques du groupe G. Un résultat ancien de Wang [Wa] affirme par exemple que si G est complexe, K discret uniforme alors l'espace homogène G/K est kählérien si, et seulement si, il est abélien. Dans un récent travail Benson et Gordon [BG] ont obtenu le même résultat avec l'hypothèse G nilpotent mais toutefois sans supposer que G est un groupe complexe.

Souvent une structure géométrique sur un espace homogène G/K (et de manière générale sur une variété M) est une section d'un certain fibré vectoriel au-dessus de cet espace à laquelle on demande d'être invariante sous l'action de G. Une manière standard pour en construire une est de partir d'une section quelconque et d'en avoir une autre G-invariante par moyennisation. C'est du moins ce que l'on fait habituellement si le groupe G est compact. Ce procédé reste encore valable, sous certaines hypothèses, quand G ne l'est plus.

Soient G un groupe de Lie (connexe) et K un sous-groupe tel que l'espace homogène G/K soit compact. L'hypothèse de compacité est raisonnable. De tels espaces homogènes apparaissent naturellement comme espaces des adhérences de feuilles de G-feuilletages de Lie sur des variétés compactes. Cela justifie un deuxième aspect de ce travail ; nous allons voir comment la considération de W (vérifiant une hypothèse supplémentaire) permet de relier certains invariants de tels feuilletages à ceux de l'algèbre de Lie du groupe G. Supposons que G agit sur un fibré vectoriel E au-dessus d'une variété M; cette action induit une action naturelle de G sur l'espace $F = C^\infty(E)$ des sections de E. Notons F_K et F_G les sous-espaces de F formés des sections de E qui sont respectivement K-invariantes et G-invariantes. On montre alors le :

3.10.1. Théorème [E16]. *Si l'espace homogène $W = G/K$ est compact et moyennable, il existe une application de moyennisation positive $m : F_K \to F_G$ telle que :*

i) $m(\alpha) = \alpha$ pour tout élément $\alpha \in F_G$;

ii) si A est un ouvert convexe de F tel que pour tout $\alpha \in F_K$, l'orbite $G.\alpha$ reste dans A, alors $m(\alpha) \in F_G \cap A$.

3.10.2. Conséquences importantes

i) Si M est complexe (munie d'une action de G) et si elle admet une structure kählérienne ou symplectique K-invariante, alors elle en admet une G-invariante.

ii) Si M est égale à G et l'action est par translations à gauche, alors les groupes G qui supportent de telles structures doivent avoir en plus certaines propriétés algébriques : si G est unimodulaire, il est nécessairement résoluble dans le cas symplectique, métabélien dans le cas kählérien et, dans cette situation, abélien s'il est au départ nilpotent.

iii) Si G est un groupe complexe admettant une structure kählérienne K-invariante alors il est nécessairement abélien ; ceci est une généralisation du théorème de Wang signalé

ci-dessus. Son intérêt immédiat est qu'elle permet de montrer l'instabilité du caractère kählérien transverse des feuilletages montrant ainsi que le résultat de K. Kodaira et D.C Spencer [KS3] (qui est encore vrai pour les V-variétés [E10]) ne se généralise pas à un feuilletage transversalement kählérien quelconque comme on peut le voir par l'exemple qui suit.

Soit $\mathcal{H}$ l'algèbre de Lie complexe engendrée par X, Y, Z et U vérifiant les conditions de crochet :

$$\begin{cases} [X,Y] = Z \\ Z \text{ et } U \text{ dans le centre de } \mathcal{H} \end{cases}$$

Soit H le groupe de Lie complexe et simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathcal{H}$. Ce groupe est nilpotent et les constantes de structure de son algèbre de Lie sont rationnelles ; il admet donc un sous-groupe discret cocompact Σ *i.e.* le quotient $M = \Sigma\backslash$ est une variété compacte.

Pout tout $t \in \mathbb{C}$, soit $\widetilde{\mathcal{F}}_t$ le feuilletage sur H associé au sous-groupe complexe K_t à un paramètre engendré par $Z + tU$. Ce feuilletage est invariant par l'action (à gauche) de Σ sur H et définit donc un feuilletage $\mathcal{F}_t$ sur M. En fait, on obtient une famille $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{C}}$ de feuilletages hermitiens tels que $\mathcal{F}_0$ est de Lie modelé sur $H/K_0 = \mathbb{C}^3$ et, pour tout $t \in \mathbb{C}^*$, $\mathcal{F}_t$ est modelé sur $H/K_t = N_{\mathbb{C}}$ qui est le groupe de Heisenberg complexe de dimension 3 ; il est nilpotent et donc moyennable. Nous avons donc une famille $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{C}}$ de feuilletages hermitiens tels que $\mathcal{F}_0$ est transversalement kählérien et, pour tout $t \in \mathbb{C}^*$, $\mathcal{F}_t$ n'admet aucune structure kählérienne transverse. Le caractère kählérien peut donc être instable si on ne fixe pas le type différentiable !

La deuxième partie est axée sur les liens qui existent entre la cohomologie $H^*(\mathcal{G})$ de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ du groupe G et celle $H^*_K(G)$ des formes sur G invariantes par K. Si G se réalise comme structure transverse d'un feuilletage de Lie (sur une variété compacte) ayant K comme adhérence de son groupe d'holonomie, $H^*_K(G)$ n'est rien d'autre que la cohomologie basique de ce feuilletage. On démontre le :

3.10.3. Théorème. *Si $W = G/K$ est compact et moyennable, on a une injection naturelle $i^* : H^*(\mathcal{G}) \hookrightarrow H^*_K(G)$.*

Une première application est l'obtention de critères de moyennabilité ou de non moyennabilité de W. Sans l'hypotèse de moyennabilité de W l'application i^* n'est pas en général injective même si la paire (G,K) provient d'un G-feuilletage de Lie ; nous avons construit un contre exemple à cet effet.

Beaucoup de problèmes sur les actions de groupes et les feuilletages m'ont amené à étudier les :

3.11. Courants invariants

Soit G un groupe opérant via une représentation $\rho : G \longrightarrow \mathrm{Diff}(M)$ sur une variété M. On obtient de manière naturelle une action de G sur l'espace de Fréchet $\mathcal{D}^*(M)$ des formes différentielles à support compact. Un courant $T \in \mathcal{D}^*(M)'$ est dit *invariant* (par G) si, pour tout $g \in G$ et toute forme $\phi \in \mathcal{D}^*(M)$ on a $\langle T, g\phi\rangle = \langle T, \phi\rangle$. En particulier, si T est

une distribution, dire qu'elle est invariante, c'est dire qu'elle vérifie $\langle T, \phi \circ g \rangle = \langle T, \phi \rangle$. Un problème se pose alors : *calculer l'espace $\mathcal{D}^*_G(M)'$ des courants invariants sur M par G.*

La relation $\langle T, g\phi \rangle = \langle T, \phi \rangle$ montre de manière évidente qu'un courant invariant T est nul sur le sous-espace B^* engendré par les éléments de la forme $\phi - g\phi$ et, par continuité, sur son adhérence $\overline{B^*}$. Donc $\mathcal{D}^*_G(M)'$ s'identifie naturellement au dual topologique du quotient $\mathcal{D}^*(M)/\overline{B^*}$. On voit donc apparaître l'importance de l'espace B^*. C'est généralement son adhérence qui est plus facile à caractériser ; la question de savoir s'il est fermé ou non n'est pas du tout évidente et présente beaucoup d'interêt en elle même. On peut remarquer que si ρ_1 et ρ_2 sont deux représentations équivalentes du groupe G dans $\mathrm{Diff}(M)$ (i.e il existe un difféomorphisme h de M tel que pour tout $g \in G$ on a $\rho_1(g) = h.\rho_2(g).h^{-1}$) alors les espaces B^*_1 et B^*_2 correspondants sont isomorphes en tant qu'espaces vectoriels topologiques via l'application qui à $\phi \in B^*_1$ associe $h\phi \in B^*_2$. On pourra donc se donner la liberté de choisir dans la classe d'équivalence la représentation qui permet de calculer (à isomorphisme près) le plus simplement possible l'espace B^*.

Des exemples de calcul de courants invariants sur le cercle $\mathbb{S}^1$ par des groupes discrets ont été étudiés par A. Haefliger et B. Li [HL] ; les auteurs déterminent explicitement les espaces $\mathcal{D}^*_G(\mathbb{S}^1)'$ dans le cas où G est un groupe de difféomorphismes du cercle $\mathbb{S}^1$ les éléments d'un certain groupe fuchsien. Ils y déterminent aussi la fermeture des espaces B^* pour certains difféomorphismes hyperboliques.

Supposons maintenant que G est un groupe de Lie connexe (et simplement connexe). Une action (différentiable) de G sur M est une application de classe C^∞, $\Phi : G \times M \longrightarrow M$ qui vérifie :

i) $\Phi(g_2, \Phi(g_1, x)) = \Phi(g_2 g_1, x)$;

ii) $\Phi(e, x) = x$ où e est l'élément neutre de G.

À un champ fondamental Z de Φ est associée sa dérivée de Lie $\mathcal{D}^*(M) \xrightarrow{L_Z} \mathcal{D}^*(M)$. Comme dans le cas discret on notera B^* le sous-espace engendré par les images des opérateurs L_Z. Un élément de B^* sera appelé *forme divergence*. L'orthogonal $\mathcal{D}^*_G(M)'$ est l'espace des *courants invariants par le groupe de Lie G*.

Les distributions invariantes par un groupe de Lie connexe (et de manière générale par une algèbre de Lie de champs de vecteurs) sont apparues dans plusieurs travaux. Les premiers remontent à 1954 initiés par P. Methée [Me], G. de Rham [Rh] ; quelques années plus tard par A. Tengstrand [Te], C. Herz [Hz]. Plus récemment par B. Ziemian [Zi] et R. Barra [Ba]. Ces travaux ne traitent que le cas des distributions et presque tout le temps les orbites du groupe sont fermées. Ma motivation était alors de regarder quelques situations qui sortent de ce cadre.

Soit $G = GA$ le groupe des transformations affines (qui préservent l'orientation) de la droite réelle. Supposons que G agit de façon localement libre sur une 3-variété compacte M à groupe fondamental résoluble. D'après un théorème de E. Ghys [G2], M est difféomorphe à un espace homogène du groupe G_3 ensemble des triplets $(x, y, t) \in \mathbb{R}^3$ muni de la loi de composition $(x, y, t).(x', y', t') = (A^t(x', y') + (x, y), t + t')$ où A est une matrice de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ de trace strictement supérieure à 2. Ce groupe contient le groupe affine GA

comme sous-groupe et l'action Φ de GA sur M est C^∞-conjuguée à l'action induite sur G_3/Γ où $\Gamma = \{(m,n,p) \in G_3 : m,n,p \in \mathbb{Z}\}$ par l'action naturelle de GA sur G_3. La variété $G_3/\Gamma = \mathbb{T}^3_A$ est un fibré en tores $\mathbb{T}^2$ sur le cercle $\mathbb{S}^1$ dont la monodromie est donnée par la matrice A. Mes calculs se ramènent alors à cette situation et donnent le

3.11.1. Théorème [E18]. *On a $\mathcal{D}^0_{GA}(M)' = \mathbb{C}\cdot\alpha\wedge\beta\wedge\theta$, $\mathcal{D}^1_{GA}(M)' = 0$, $\mathcal{D}^2_{GA}(M)' = \mathbb{C}\cdot\theta$ et $\mathcal{D}^3_{GA}(M)' = \mathbb{C}\cdot 1$ où α, β et θ sont les 1-formes duales respectivement aux champs invariants (sur G_3), ξ, ζ et τ. L'action de GA étant engendrée par ξ et τ.*

Les champs ξ, ζ et τ sont $\xi = X_1$, $\zeta = X_2$ et $\tau = Y$ où X_1, X_2 et Y sont les champs (cas $n = 2$) du deuxième exemple de la sous-section 3.17.

Regardons la situation particulière où Γ est un groupe discret qui agit de manière libre, propre et discontinue sur une variété M. Soient $X = M/\Gamma$ et $M \xrightarrow{\pi} X$ la projection canonique. L'application $\mathcal{D}^*(M) \xrightarrow{\pi^!} \mathcal{D}^*(X)$ définie par :

$$\pi_!(\omega) = \sum_{\gamma\in\Gamma} \gamma^*\omega$$

est linéaire, continue et surjective. On démontre alors que *la transposée* $\mathcal{D}^*(X)' \xrightarrow{\pi_!} \mathcal{D}^*(M)$ *est un isomorphisme sur* $\mathcal{D}^*_\Gamma(M)'$. On en déduit que la suite :

$$0 \longrightarrow \overline{B^*} \longrightarrow \mathcal{D}^*(M) \xrightarrow{\pi_!} \mathcal{D}^*(X) \longrightarrow 0$$

est exacte. On démontre d'autre part que *si* Γ *est le groupe libre à* n *générateurs alors* $\overline{B^*} = B^*$. *En particulier si* $n = 1$, *le premier groupe de cohomologie* $H^1(\Gamma, \mathcal{D}^*(M))$ *de* Γ *à valeurs dans le* Γ*-module* $\mathcal{D}^*(M)$ *s'identifie à l'espace* $\mathcal{D}^*(X)$.

Soient maintenant $\mathbb{S}^n$ et $\mathbb{D}^{n+1}$ respectivement la n-sphère unité et le disque unité dans l'espace $\mathbb{R}^{n+1}$: $\mathbb{S}^n = \left\{x \in \mathbb{R}^{n+1} : |x| = 1\right\}$ et $\mathbb{D}^{n+1} = \left\{x \in \mathbb{R}^{n+1} \ : |x| < 1\right\}$. On note :

$$dm^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n+1} dx_i^2}{\left(1 - |x|^2\right)^2}$$

la métrique de Lobatchevski sur $\mathbb{D}^{n+1}$; $\mathrm{Iso}^+(\mathbb{D}^{n+1})$ et $\mathrm{Conf}^+(\mathbb{S}^n)$ seront respectivement le groupe des isométries de $\mathbb{D}^{n+1}$ qui préservent l'oreintation et le groupe des transformations conformes de $\mathbb{S}^n$. Il est bien connu que : $\mathrm{Conf}^+(\mathbb{S}^n) = \mathrm{Iso}^+(\mathbb{D}^{n+1}) = \mathrm{SO}(n+1,1)_0$ (composante connexe de l'identité du groupe de Lorentz $\mathrm{SO}(n+1,1)$). Si Γ est un sous-groupe discret de $\mathrm{Conf}^+(\mathbb{S}^n)$ (on dira que Γ est un *groupe kleinéen*) l'ensemble $\Lambda_\Gamma = \overline{\Gamma\cdot a} \cap \mathbb{S}^n$ est indépendant du choix du point $a \in \mathbb{D}^{n+1}$. On l'appelle *ensemble limite* de Γ ; son complementaire $D_\Gamma = \mathbb{S}^n \setminus \Lambda_\Gamma$ est appelé *domaine de discontinuité* of Γ. Pour $z \in \mathbb{D}^{n+1}$ fixé et $s > 0$, la somme :

$$\Phi_s(z) = \sum_{\gamma\in\Gamma} |\gamma'(z)|^s$$

(où γ' est la dérivée de γ) est appelée *série absolue de Poincaré* de Γ. Si elle converge en un point $z \in \mathbb{D}^{n+1}$, elle converge uniformément sur tout compact. Le nombre :

$$\delta(\Gamma) = \inf\left\{s > 0 : \Phi_s(z) \text{ converge pour } z \in \mathbb{D}^{n+1}\right\} \tag{15}$$

est appelé *exposant critique* de Γ. On a une suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathcal{D}^*_\Gamma(\mathbb{S}^n, \Lambda_\Gamma)' \longrightarrow \mathcal{D}^*_\Gamma(\mathbb{S}^n)' \xrightarrow{L_*} \mathcal{D}^*_\Gamma(D_\Gamma)' \tag{16}$$

où $\mathcal{D}^*_\Gamma(\mathbb{S}^n, \Lambda_\Gamma)'$ est l'espace des courants Γ-invariants sur $\mathbb{S}^n$ à support dans Λ_Γ et L_* l'application de localisation. On démontre alors le :

3.11.2. Théorème [E22]. *Si le quotient D_Γ/Γ est compact et si $* > \delta$, alors L_* est surjective.*

Ce théorème dit donc que la suite $0 \longrightarrow \mathcal{D}^*_\Gamma(\mathbb{S}^n, \Lambda_\Gamma)' \longrightarrow \mathcal{D}^*_\Gamma(\mathbb{S}^n)' \xrightarrow{L_*} \mathcal{D}^*_\Gamma(D_\Gamma)' \longrightarrow 0$ est exacte. Dans certaines situations, la localisation L_* admet une section et donc $\mathcal{D}^*_\Gamma(\mathbb{S}^n)'$ est somme directe de $\mathcal{D}^*_\Gamma(\mathbb{S}^n, \Lambda_\Gamma)'$ et de $\mathcal{D}^*_\Gamma(D_\Gamma)'$.

Un autre résultat plus précis pour le cas $* = 0$ et Γ *élémentaire* engendré par une transformation *loxodromique* γ donne exactement l'espace $\mathcal{D}^*_\Gamma(\mathbb{S}^n)$ (cf. [E22]).

En collaboration avec A. Abouqateb nous nous sommes intéressés à d'autres aspects des courants invariants et à leur généralisation aux sections invariantes d'un fibré vectoriel. Décrivons un peu en quoi cela consiste.

Soit G un groupe topologique compact et μ la mesure de Haar normailsée sur G. Soit E un espace vectoriel topologique localement convexe séparé (EVTLCS en abrégé) séquentiellement complet. L'espace des fonctionnelles sur E muni de la topologie usuelle forte (resp. faible) sera appelé *dual fort* (resp. *dual faible*) de E ; dans ces deux cas on désignera par $E^{'}$ ce dual topologique.

On se donne une action linéaire continue $(g, x) \in G \times E \longrightarrow gx \in E$. Un élément $x \in E$ est dit *invariant* si $gx = x$ pour tout $g \in G$. On note E_G le sous-espace (fermé) des éléments invariants. De même, on dira qu'une fonctionnelle $T \in E^{'}$ est *invariante* si $\langle T, gx\rangle = \langle T, x\rangle$ pour tout $x \in E$ et tout $g \in G$. L'espace vectoriel de telles fonctionnelles sera noté $(E^{'})_G$, c'est un sous-espace fermé du dual $E^{'}$.

Pour tout $x \in E$, l'application $\varphi : g \in G \longrightarrow gx \in E$ est continue ; son intégrale $\int_G \varphi(g)d\mu(g)$ est un élément de E qu'on notera $m(x)$. On vérifie facilement que $m(x) \in E_G$. On obtient ainsi une application linéaire $\overline{m} : E \longrightarrow E_G$ avec $\overline{m}(x) = m(x)$. (Elle est notée m quand elle est considérée à valeurs dans E ; cette distinction est utile quand on passe aux transposées.) Les applications m et $\overline{m}$ sont continues (ceci découle de l'équicontinuité de la famille des applications $x \in E \to gx \in E$ indexée par $g \in G$ due à la compacité du groupe et de la continuité de l'action de G sur E). De plus, pour tout $x \in E_G$, on a $m(x) = \overline{m}(x) = x$, *i.e.* l'application $\overline{m}$ est une rétraction de E sur le sous-espace E_G.

Lorsqu'on munit le dual de E de l'une des deux topologies usuelles faible ou forte, l'application transposée de m : $m^t : E^{'} \longrightarrow E^{'}$ est continue et a pour image $(E^{'})_G$ car m

est constante sur les orbites de l'action de G sur E (ceci est dû à l'invariance à droite de μ). Par le même argument, on montre que, pour tout $S \in (E_G)^{'}$, $\overline{m}^t(S)$ est une fonctionnelle invariante. De plus, pour tout $T \in (E^{'})_G$, on a l'égalité : $m^t(T) = T$, *i.e.* la transposée de m permet de définir une rétraction de $E^{'}$ sur le sous-espace des fonctionnelles invariantes $(E^{'})_G$.

3.11.3. Théorème [E26]. *Soit $j : E_G \longrightarrow E$ l'injection canonique et $j^t : E^{'} \longrightarrow (E_G)^{'}$ sa transposée. Alors la restriction de j^t à $(E^{'})_G$ muni de la topologie induite faible (resp. forte), est un isomorphisme canonique sur le dual faible (resp. fort) $(E_G)^{'}$ de E_G.*

Une application immédiate et intéressante de ce théorème s'obtient lorsque E est un espace de sections d'un G-fibré vectoriel. Ce cas contient bien entendu celui des courants.

Soit maintenant $\mathcal{F}$ un feuilletage de dimension m sur une variété M de dimension $N = m + n$. Soit X un champ de vecteurs sur M. Le produit intérieur d'un r-courant T par X est le $(r-1)$-courant $i_X T$ défini par $\langle i_X T, \alpha\rangle = (-1)^r \langle T, i_X \alpha\rangle$ pour toute forme α de degré $N - r + 1$ à support compact. De même la dérivée de Lie de T le long de X est le r-courant $L_X T$ défini par $\langle L_X T, \alpha\rangle = (-1)^r \langle T, L_X \alpha\rangle$. On a alors le théorème qui suit.

3.11.4. Théorème [E26]. *Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage de codimension n défini par une action localement libre d'un groupe de Lie connexe compact G sur une variété M. Alors l'espace $\mathcal{C}^r_{\mathcal{F}}(M)$ des r-courants basiques est le dual topologique de l'espace des $(n-r)$-formes basiques à support compact muni de la C^∞-topologie de Schwartz.*

Dans une deuxième partie du même papier [E26] nous avons enlevé l'hypothèse "G compact" et nous nous sommes intéressés à des courants sur des espaces homogènes H/Γ (où Γ est un réseau) invariants sous une action d'un sous-groupe G de H. Je me contenterai ici de décrire simplement le cas de de l'exemple qui suit.

On considère le demi-plan de Poincaré $\mathbb{H} = \{x + iy \in \mathbb{C} : y > 0\}$ muni de sa métrique hyperbolique $ds^2 = \frac{dx^2+dy^2}{y^2}$. Le groupe des isométries de $\mathbb{H}$ s'identifie au groupe quotient $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ =$\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\{\mathrm{I}, -\mathrm{I}\}$. L'opération de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ est induite par celle de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ définie comme suit :

$$\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, z\right) \longmapsto \frac{az+b}{cz+d}.$$

Elle permet aussi de décrire l'action projective de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ sur le cercle $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ qui, avec l'action de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ sur $\mathbb{H}$ donne une action de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ sur le produit $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{H}$. En plus on a un difféomorphisme $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$-équivariant :

$$\Phi : A \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) \longrightarrow (A(\infty), A(i)) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{H}.$$

Soit maintenant Γ un sous-groupe discret de H =$\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$. On dira que Γ est de *covolume fini* si le volume de H/Γ est fini ; on dira que Γ est *cocompact* si H/Γ est compact. Bien sûr, si Γ est cocompact, il est de covolume fini. Si Γ est de covolume fini sans être compact, il a des cusps (*cf.* [Fr]) en nombre fini qu'on notera k ; par exemple Γ =$\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$ a un seul cusp correspondant à la pointe de la surface modulaire $\mathbb{H}/\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$. Si Σ est une surface de Riemann compacte de courbure constante égale à -1, son groupe fondamental

se plonge dans H en un sous-groupe discret cocompact Γ de sorte que le fibré unitaire tangent $S\Sigma$ à Σ s'identifie à H/Γ. Notons G le groupe des transformations affines de la droite réelle préservant l'orientation, considéré comme sous-groupe de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$. Alors l'action à droite de G sur H définit un feuilletage de codimension 1 sur H/Γ usuellement appelé *feuilletage stable*. On a :

$$\mathcal{C}^r_{\mathcal{F}}(H/\Gamma) \simeq \mathcal{C}^r_{\Gamma}(H/\mathcal{F}).$$

Supposons maintenant que Γ est cocompact ; alors le difféomorphisme Φ induit un difféomorphisme $\overline{\Phi} : H/\mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{S}^1$, Γ-équivariant ($\mathbb{S}^1$ est muni de l'action projective induite par Γ). Le quotient $\Gamma \setminus \mathbb{H}$ est difféomorphe à une surface compacte avec points coniques (*i.e.* orbifold) puisque l'action de Γ sur $\mathbb{H}$ n'est pas forcément libre ; soit g son genre.

3.11.5. Théorème [E26]. *Soient Γ un sous-groupe discret cocompact de H et $\mathcal{F}$ le feuilletage défini sur $V = H/\Gamma$ par l'action homogène de G. Alors $\mathcal{C}^1_{\mathcal{F}}(V) \simeq \mathcal{C}^1_{\Gamma}(\mathbb{S}^1)$ et $\mathcal{C}^0_{\mathcal{F}}(V) \simeq \mathcal{C}^0_{\Gamma}(\mathbb{S}^1)$.*

En collaboration avec M. Nicolau nous sommes revenus sur un autre aspect des cohomologies associées aux feuilletages plus précisément sur :

3.12. Invariance topologique de la cohomologie basique

Soient $(M,\mathcal{F})$ et $(M',\mathcal{F}')$ deux variétés feuilletées et $h : M \longrightarrow M'$ un homéomorphisme envoyant les feuilles de $\mathcal{F}$ sur les feuilles de $\mathcal{F}'$. *Les algèbres de cohomologie basique $H^*(M/\mathcal{F})$ et $H^*(M'/\mathcal{F}')$ sont-elles isomorphes ?* De manière générale **non** !

3.12.1. Contre exemple. Soit $h : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$ un difféomorphisme du cercle C^0-conjugué à une rotation R_α et non C^1-conjugué à R_α [Ar]. Alors la suspension des difféomorphismes h et R_α donne deux feuilletages $\mathcal{F}_h$ et $\mathcal{F}_\alpha$ sur le tore $\mathbb{T}^2$ tels que $H^1(\mathbb{T}^2/\mathcal{F}_h) = 0$ et $H^1(\mathbb{T}^2/\mathcal{F}_\alpha) = \mathbb{R}$.

Mais si l'on se restreint aux feuilletages riemanniens complets (*i.e.* il existe sur la variété une métrique quasi-fibrée) la réponse est positive (*cf.* [E17]).

3.12.2. Théorème. *L'homéomorphisme feuilleté h induit un isomorphisme d'algèbres $H^*(M'/\mathcal{F}') \xrightarrow{h^*} H^*(M/\mathcal{F})$.*

Pour démontrer ce théorème on utilise de façon substantielle la structure des feuilletages riemanniens complets :

- Les adhérences des feuilles sont des sous-variétés de M et "fibrent" M au-dessus d'un espace topologique X stratifié en sous-variétés.

- Le feuilletage induit sur chaque adhérence est riemannien et localement transversalement homogène (la strucutre transverse est localement modelée sur un espace homogène H/K).

On procède alors en trois étapes :

Première : On montre que X possède un bon recouvrement localement fini $\mathcal{U}$.

Deuxième : Si L est une adhérence de feuille de $\mathcal{F}$ dans M alors $L' = h(L)$ est une adhérence de feuille de $\mathcal{F}'$ dans M' et la restriction de $h : L \longrightarrow L'$ est un homéomorphisme

préservant les feuilletages ; h induit un homéomorphisme $\overline{h} : H/K \longrightarrow H'/K'$ "commutant à des ensembles denses de translations" respectivement dans les goupes des homéomorphismes de H/K et H'/K'. Il est donc analytique; d'où un isomorphisme d'algèbres $H^*(L'/\mathcal{F}') \longrightarrow H^*(L/\mathcal{F})$.

Troisième : On construit une suite spectrale qui converge vers la cohomologie basique $H^*(M/\mathcal{F})$ et de terme :

$$E_1^{pq} = C^p(\mathcal{U}, \mathcal{H}_b^q)$$

où $\mathcal{H}_b^q$ est le préfaiseau sur X défini pour tout ouvert U par $\mathcal{H}_b^q(U) = H^q(\pi^{-1}(U)/\mathcal{F})$. On montre alors que les préfaisceaux $\mathcal{H}_b^q$ et $\mathcal{H}'^q_b$ respectivement sur X et X' (qui sont isomorphes en tant qu'espaces stratifiés) sont isomorphes. Ce qui permet d'établir un isomorphisme naturel au niveau des suites spectrales E'_r et E_r associées à $\mathcal{F}'$ et $\mathcal{F}$ et donc au niveau des algèbres de cohomologie basique $h^* : H^*(M'/\mathcal{F}') \longrightarrow H^*(M/\mathcal{F})$. Ce qui termine la démonstration.

Suite à des discussions que j'ai eues avec certains collègues, je me suis intéressé à certains opérateurs sur les espaces de Fréchet et plus précisément à :

3.13. Instabilité du caractère Fredholm et semi-Fredholm

Soient E un espace vectoriel topologique et $L_b(E)$ l'ensemble des opérateurs bornés sur E. Il est bien connu que si E est un espace de Banach, l'ensemble $\mathrm{GL}(E)$ des éléments inversibles de $L_b(E)$ est un ouvert (pour la topologie de la norme). Un opérateur $T : E \longrightarrow E$ (non nécessairement borné) est dit de *Fredholm* si ImT est fermée et son noyau et conoyau sont de dimension finie ; ce qui revient encore à dire que T est inversible à un opérateur compact près. Par exemple un opérateur différentiel elliptique sur une variété compacte est de ce type. Les opérateurs compacts forment un idéal bilatère fermé $\mathcal{K}$ de $L_b(E)$; le quotient $L_b(E)/\mathcal{K}$ est l'algèbre de Calkin de E et l'ensemble $\mathcal{F}(E)$ des opérateurs de Fredholm sur E est donc l'image réciproque de l'ensemble des éléments inversibles de $L_b(E)/\mathcal{K}$ par la projection canonique (continue) $L_b(E) \longrightarrow L_b(E)/\mathcal{K}$; c'est donc un ouvert de $L_b(E)$. Dans [Ho] , il est démontré que si E est est séparé localement convexe alors il est normable si $\mathcal{F}(E)$ est ouvert (dans $L_b(E)$ muni de la topologie de la convergence uniforme sur les bornés de E) ; cela signifie que si par exemple E est un espace de Fréchet (non normable) il existe un élément $T \in \mathcal{F}(E)$ qu'on peut approcher aussi près qu'on veut par des éléments qui ne sont pas dans $\mathcal{F}(E)$. Nous dirons que T est *instable* dans $\mathcal{F}(E)$. La recherche de tels opérateurs n'est pas évidente : l'objet de ce qui suit est de donner des exemples explicites pour une topologie sur $L_b(E)$ un peu plus faible que celle considérée dans [Ho].

3.13.1. Différentes normes

Soit E un espace de Fréchet dont la topologie est définie par une famille dénombrable de normes $\mathcal{N} = (||\quad||_n)_{n\geq 0}$. On dira qu'un opérateur $T : E \longrightarrow E$ est *borné* si pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un nombre réel $\alpha_n > 0$ tel que $||Tx||_n \leq \alpha_n ||x||_n$. Sur l'espace $L_b(E)$ des opérateurs bornés sur E on définit une distance en posant :

$$\delta_{\mathcal{N}}(T, S) = \sum_{n=0}^{\infty} 1/2^n \inf\left(|||T - S|||_n, 1\right)$$

où $|||T|||_n = \sup_{||x||_n \leq 1} ||Tx||_n$. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\alpha_n = \alpha$ (*i.e* les α_n sont indépendants de n) on dira que T est *uniformément borné*. L'ensemble $L_{ub}(E)$ des opérateurs uniformément bornés est un sous-espace de $L_b(E)$ sur lequel on peut définir une norme en posant $|||T|||_{\mathcal{N}} = \sup_n |||T|||_n$. La topologie définie par cette norme est équivalente à celle induite par la topologie de $\delta_{\mathcal{N}}$ sur $L_b(E)$.

Supposons que pour tout $r \in \mathbb{N}$ on ait $||\ \ ||_r \leq ||\ \ ||_{r+1}$. Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, la boule unité B_{r+k} pour $||\ \ ||_{r+k}$ est contenue dans la boule unité B_r pour $||\ \ ||_r$. On fixe $k \in \mathbb{N}$ et on pose :

$$L_b(E,k) = \left\{ T \in L(E) \ : \ \forall r \in \mathbb{N}, \quad \sup_{f \in B_{r+k}} ||T(f)||_r < +\infty \right\}.$$

Pour chaque $k \in \mathbb{N}$ on a donc une famille de normes $\left(|||\ \ |||_r^k\right)_{r \geq 0}$ sur $L_b(E,k)$ définies par $|||T|||_r^k = \sup_{||f||_{r+k} \leq 1} ||T(f)||_r$. On observe que $|||\ \ |||_r^0 = |||\ \ |||_r$. Un élément T de $L_b(E,k)$ sera appelé opérateur *k-borné* sur E. Si en plus $\sup_{r \geq 0} |||T|||_r^k < +\infty$, on dira que T est *uniformément k-borné*. L'ensemble des opérateurs uniformément k-bornés sur E sera noté $L_{ub}(E,k)$.

Bien sûr, on peut définir une distance $\delta_{\mathcal{N}}^k$ sur $L_b(E,k)$ invariante par translation en posant :

$$\delta_{\mathcal{N}}^k(T,S) = \sum_{r=0}^{+\infty} 1/2^r \min\left(|||T-S|||_r^k, 1\right)$$

et une norme $|||\ \ |||_{\mathcal{N}}^k$ sur $L_{ub}(E,k)$ $|||T|||_{\mathcal{N}}^k = \sup_{r \geq 0} |||T|||_r^k$ dont la topologie associée coïncide avec celle induite par $\delta_{\mathcal{N}}^k$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a des inclusions (strictes) continues :

$$L_{ub}(E) \subset L_{ub}(E,k) \subset L_{ub}(E,k+1) \quad \text{et} \quad L_b(E) \subset L_b(E,k) \subset L_b(E,k+1).$$

Bien entendu, les normes et les métriques qu'on vient de définir sur ces sous-espace de $L(E)$ dépendent du choix de la famille croissante de normes $\mathcal{N} = (||\ \ ||_r)_{r \in \mathbb{N}}$ sur E.

3.13.2. L'exemple instable

On pose $E = C^\infty(\mathbb{S}^1)$ fonctions de classe C^∞ sur le cercle $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Une fonction $f \in E$ est entièrement définie par ses coefficients de Fourier $(f_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ qui satisfont à la propriété $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |n|^{2r} |f_n|^2 < +\infty$ pour tout $r \in \mathbb{N}$. La famille dénombrable $(||\ \ ||_r)_{r \in \mathbb{N}}$ de normes $||f||_r = |f_0|^2 + \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} |n|^{2r} |f_n|^2$ définit la topologie d'espace de Fréchet de E.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors l'opérateur $T_\alpha : E \longrightarrow E$ défini par :

$$(Tf)_n = (1 - e^{in\alpha}) f_n \ \text{ pour } \ n \in \mathbb{Z}$$

est uniformément borné de norme $|||T_\alpha||| = 2$.

i) Si $\alpha \in \mathbb{Q}$ alors $\ker T_\alpha$ et $\mathrm{coker} T_\alpha$ sont isomorphes à $C^\infty(\mathbb{S}^1)$; donc T_α n'est pas semi-Fredholm ;

ii) si $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, deux cas se présentent :

- α est *diophantien*. Alors $\ker T_\alpha = \mathrm{coker} T_\alpha = \mathbb{R}$ *i.e.* T_α est de Fredholm ;

- α est de *Liouville*. Alors $\ker T_\alpha = \mathbb{R}$ et le conoyau de T_α est de dimension infinie non séparé.

L'application $\sigma : \mathbb{S}^1 \longrightarrow (L_{ub}(E), ||| \quad |||_1)$ qui à α associe T_α est continue, injective et définit un "cercle d'opérateurs" uniformément bornés passant par des opérateurs de Fredholm (ceux qui correspondent à α diophantien) et dans lequel il existe une partie dense d'opérateurs non semi-Fredholm (ceux qui correspondent à α rationnel). Ce qui montre l'instabilité du caractère Fredholm et semi-Fredholm sur E même si on perturbe au sens d'une topologie assez forte en l'occurrence celle associée à la norme $||| \quad |||_1$ sur $L_b(E)$.

3.14. Une classe de feuilletages C^∞-stables

Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage de codimension q sur une variété compacte M. Le groupe $\mathrm{Diff}(M)$ des difféomorphismes de classe C^∞ de M agit sur l'espace des feuilletages $\mathcal{F}ol_q(M)$ sur M. On dira que $\mathcal{F}$ est *différentiablement stable* si tout feuilletage $\mathcal{F}' \in \mathcal{F}ol_q(M)$, C^∞-proche de $\mathcal{F}$ est C^∞-conjugué à $\mathcal{F}$ par un difféomorphisme $f \in \mathrm{Diff}(M)$ proche de l'identité (au sens de la topologie C^∞).

La théorie des déformations des feuilletages reste grandement ouverte. Un de ses points essentiels était la recherche de feuilletages stables autres que les fibrations de Seifert généralisées qui ont été étudiées par R. Langevin et H. Rosenberg dans [LR]. Le premier exemple de feuilletage C^∞-stable sans feuille compacte a été donné par E. Ghys et V. Sergiescu [GS]; cet exemple est de codimension 1 sur une variété de dimension 3. Dans [Ha], R. Hamilton a donné une condition suffisante de C^∞-stabilité. Nous avons alors construit une classe de feuilletages (en dimension et codimension quelconques) dont nous avons démontré la C^∞-stablilité à l'aide du critère de R. Hamilton (*cf.* [E20]).

3.14.1. L'exemple

Soit A une matrice de $\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$ ayant n valeurs propres $\mu_1, \ldots, \mu_p, \lambda_1, \ldots, \lambda_q$ telles que $\mu_j, \lambda_k, \mu_j/\lambda_k$ soient différentes de 1 pour $j = 1, \ldots, p$ et $k = 1, \ldots, q$. De telles matrices existent ; il suffit de prendre par exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 3 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & d_n \end{pmatrix}$$

avec $d_1 = 1$ et $d_{i+1} = 1 + d_1 d_2 \cdots d_i$ pour $i = 1, \cdots, n-1$. On peut voir A comme un difféomorphisme du tore $\mathbb{T}^n$. Soient $X_1, \ldots, X_p$ et $Y_1, \ldots Y_q$ les champs de vecteurs

linéaires sur $\mathbb{T}^n$ définis par :

$$A_*X_j = \mu_j X_j, \quad A_*Y_k = \lambda_k Y_k \quad pour \quad j = 1, \ldots, p \quad et \quad k = 1, \ldots, q$$

Soit $\mathcal{F}_0$ le feuilletage sur $\mathbb{T}^n$ engendré par les champs $X_1, \ldots, X_p$. Le produit de $\mathcal{F}_0$ par $\mathbb{R}$ donne un feuilletage de codimension q sur $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}$ invariant par le difféomorphisme :

$$\phi : (z, t) \in \mathbb{T}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow (A(z), t + 1) \in \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}.$$

Il induit donc un feuilletage $\mathcal{F}$ de codimension q sur la variété quotient qu'on appelle *tore hyperbolique* de dimension $n + 1$: $\mathbb{T}^{n+1}_A = \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}/(z, t) \sim (A(z), t + 1)$. Notre résultat principal est alors le suivant :

3.14.2. Théorème [E19]. *Le feuilletage $\mathcal{F}$ ainsi construit est C^∞-stable.*

Dans la suite, on considérera des feuilletages ayant une structure complexe soit transversalement soit supportée par les feuilles. Dans les deux situations, elle permet de définir des cohomologies généralisant celle de Dolbeault des variétés analytiques complexes et les problèmes qui lui sont liés.

3.15. Problème de Cousin basique

Rappelons qu'un feuilletage $\mathcal{F}$ de codimension n *transversalement holomorphe* sur une variété M est donné par un recouvrement ouvert $\{V_i\}_{i\in I}$ et, pour chaque $i \in I$, un difféomorphisme $\mathcal{O}_i \times \Omega_i \xrightarrow{\varphi_i} V_i$ (où Ω_i est un ouvert de $\mathbb{C}^n$ et $\mathcal{O}_i$ un ouvert de $\mathbb{R}^m$) tel que, sur tout $V_i \cap V_j \neq \emptyset$, le changement de coordonnées $\varphi_j^{-1} \circ \varphi_i(x, z) = (x', z')$ soit de la forme $z' = \gamma_{ij}(z)$ et $x' = \varphi_{ij}(x, z)$ avec γ_{ij} holomorphe. A la variété feuilletée $(M, \mathcal{F})$ est associé le faisceau $\mathcal{O}_\mathcal{F}$ des germes de *fonctions basiques holomorphes* ; il est pour l'espace des feuilles ce qu'est le faisceau $\mathcal{O}$ des germes de fonctions holomorphes pour une variété complexe. Le *problème additif de Cousin basique* relativement à un recouvrement ouvert $\mathcal{U} = \{U_i\}$ se formule de la façon suivante : sur chaque U_{ij} on se donne une fonction basique holomorphe f_{ij} telle que $f_{ij} + f_{ji} = 0$ et $f_{jk} - f_{ik} + f_{ij} = 0$ sur U_{ijk}. Sur chaque U_i, on cherche une fonction basique holomorphe f_i telle que, sur U_{ij} on ait $f_{ij} = f_j - f_i$. La famille $\{f_{ij}\}$ définit un 1-cocycle sur $\mathcal{U}$ à valeurs dans $\mathcal{O}_\mathcal{F}$. Le problème a une solution si ce cocycle est un cobord *i.e.* si sa classe de cohomologie dans $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_\mathcal{F})$ est nulle. Par suite, le problème additif de Cousin basique pour $\mathcal{U}$ a une solution pour tout 1-cocycle $\{f_{ij}\}$ si, et seulement si, $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_\mathcal{F}) = 0$. L'espace vectoriel $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_\mathcal{F})$ contient donc exactement les obstructions à la résolution d'un tel problème.

3.15.1. Résultats obtenus

Ils figurent dans l'article [E32] et constituent majoritairement un travail en collaboration avec mon étudiant T. Sohou.

- Une résolution fine et elliptique en termes de formes différentielles du faisceau (plus général) $\mathcal{O}^p_\mathcal{F}$ des germes de formes basiques holomorphes.

- Quelques méthodes générales de calcul, qu'on applique aux revêtements feuilletés et à divers exemples de feuilletages obtenus par suspension d'un groupe Γ de biholomorphismes d'une variété complexe F.

- Dans le cas d'une suspension d'un groupe Γ, on montre que le calcul de $H^*(M, \mathcal{O}^p_{\mathcal{F}})$ se ramène souvent à celui de la cohomologie du groupe discret Γ à valeurs dans le Γ-module $\mathcal{O}^p(F)$ des formes holomorphes sur F. Des calculs explicites de $H^1(\Gamma, \mathcal{O})$ ont été faits et en particulier lorsque $\Gamma = \mathbb{Z}$ et de façon plus complète, lorsque $F = \mathbb{C}^2$ et Γ engendré par un élément de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$.

3.15.2. Un feuilletage de Cousin

On dira qu'un feuilletage transversalemnt holomorphe $(M, \mathcal{F})$ est un *feuilletage de Cousin* si $H^1(M, \mathcal{O}_{\mathcal{F}}) = 0$. La question de savoir s'il en existe est naturellement importante. Ceci se produit pour un feuilletage riemannien dont les feuilles sont compactes et à groupe fondamental fini et tel que le quotient soit une orbifold complexe à premier groupe de cohomologie de Dolbeault nul. Mais y en a-t-il d'autres ? En voici un avec une dynamique un peu plus compliquée.

On note $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ le groupe des matrices $n \times n$ de déterminant 1. C'est une forme réelle du groupe $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$ (matrices $n \times n$ complexes de déterminant égal à 1) ; celui-ci agit par transformations projectives sur $P^{n-1}(\mathbb{C})$ (espace projectif complexe de dimension $n-1$). Donc tout sous-groupe de $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$ agit de façon similaire sur $P^{n-1}(\mathbb{C})$.

La construction du groupe Γ suivant et ses propriétés se trouvent dans [Mi]. Dans le demi-plan de Lobachevsky $\mathbb{H} = \{z = x + iy : y > 0\}$ muni de la *métrique de Poincaré* $\frac{dx^2+dy^2}{y^2}$ on prend un triangle géodésique $T(p, q, r)$ d'angles $\frac{\pi}{p}$, $\frac{\pi}{q}$ et $\frac{\pi}{r}$ avec $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r} < 1$. On note σ_1, σ_2 et σ_3 les réflexions respectives par rapport aux trois côtés ; celles-ci engendrent un groupe d'isométries Σ^* ; les éléments qui préservent l'orientation forment un sous-groupe Σ de Σ^* d'indice 2 qu'on appelle *groupe du triangle* $T(p, q, r)$. C'est un sous-groupe de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ et son image réciproque Γ par le morphisme projection $\widetilde{\mathrm{SL}}(2, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ ($\widetilde{\mathrm{SL}}(2, \mathbb{R})$ étant le revêtement universel de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$) est une extension centrale :

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \Gamma \longrightarrow \Sigma \longrightarrow 1.$$

Le groupe Γ admet comme présentation :

$$\Gamma = \langle \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \mid \gamma_1^p = \gamma_2^q = \gamma_3^r = \gamma_1\gamma_2\gamma_3 \rangle.$$

Le quotient $B = \widetilde{\mathrm{SL}}(2, \mathbb{R})/\Gamma$ est une variété compacte de dimension 3. Si les entiers p, q et r sont premiers entre eux deux à deux, la cohomologie (à coefficients dans $\mathbb{Z}$) de B est celle de la sphère $\mathbb{S}^3$; en particulier $H^1(B, \mathbb{C}) = H^1(\mathbb{S}^3, \mathbb{C}) = 0$. En tant que sous-groupe de $\widetilde{\mathrm{SL}}(2, \mathbb{R})$, Γ agit sur l'espace projectif $P^1(\mathbb{C})$. On obtient donc une représentation (non injective) $\rho : \pi_1(B) = \Gamma \longrightarrow \mathrm{Aut}(P^1(\mathbb{C}))$. La suspension d'une telle représentation donne un feuilletage transversalement holomorphe $\mathcal{F}$ de codimension 1 sur la variété différentiable M de dimension 5, quotient de $\widetilde{M} = P^1(\mathbb{C}) \times \widetilde{\mathrm{SL}}(2, \mathbb{R})$ par la relation d'équivalence identifiant (z, x) à $(\rho(\gamma)(z), \gamma x)$ avec $\gamma \in \Gamma$ (Γ agissant sur $\widetilde{\mathrm{SL}}(2, \mathbb{R})$ par translations à gauche). Les feuilles de $\mathcal{F}$ sont des espaces homogènes de $\widetilde{\mathrm{SL}}(2, \mathbb{R})$ par des sous-groupes discrets. On a alors montré (par des arguments de suites spectrales) qu'on a $H^1(M, \mathcal{O}_{\mathcal{F}}) = 0$ *i.e.* le feuilletage en question est de Cousin.

3.16. Deformations des $\mathcal{G}/\mathcal{H}$-feuilletages

On se donne une variété compacte M, un groupe de Lie G de dimension d et un sous-groupe H de dimension $d-n$. Soit ω une 1-forme sur M à valeurs dans l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ de G définissant un $\mathcal{G}/\mathcal{H}$-feuilletage $\mathcal{F}$ sur M (*cf.* la sous-section 1.2.5 pour les définitions). Soit $(T,0)$ un germe en 0 dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^\ell$.

3.16.1. Definition. *Une famille de déformations $\mathcal{F}_t$ du $\mathcal{G}/\mathcal{H}$-feuilletage $\mathcal{F}$ paramétrée par $(T,0)$ est donnée par une collection de 1-formes $\omega_t^1,\ldots,\omega_t^m$ sur M, dépendant différentiablement de $t\in T$, un ensemble de fonctions différentiables $K_{ij}^k(t)$ telles que les conditions* (3) *et* (4) *soient satisfaites pour $t\in T$. Donc, pour tout $t\in T$, les constantes $K_{ij}^k(t)$ définissent une algèbre de Lie $\mathcal{G}_t$ et une sous-algèbre $\mathcal{H}_t$ et les 1-formes $\omega_t=(\omega_t^1,\ldots,\omega_t^m)$ définissent un $\mathcal{G}_t/\mathcal{H}_t$-feuilletage $\mathcal{F}_t$ sur M. De plus $\omega_0=\omega$.*

Une famile de deformations de $\mathcal{F}$, paramétrée par $(T,0)$ est dite *triviale* si elle est équivalente à une famille constante *i.e.*, pour tout $t\in T$, le $\mathcal{G}_t/\mathcal{H}_t$-feuilletage $\mathcal{F}_t$ est isomorphe au $\mathcal{G}/\mathcal{H}$-feuilletage $\mathcal{F}$. Nous allons esquisser rapidement la manière dont ces feuilletages se déforment et décrire leurs déformations.

Le $\mathcal{G}/\mathcal{H}$-feuilletage $\mathcal{F}$ défini par ω peut être perturbé en prenant une nouvelle famille de 1-formes $\omega'^k=\omega^k+\sigma^k$ et un nouvel ensemble de constantes $K'^k_{ij}=K^k_{ij}+C^k_{ij}$ de telle sorte que les conditions (3) et (4) soient remplies. Le nouveau $\mathcal{G}/\mathcal{H}$-feuilletage proche de $\mathcal{F}$ est alors spécifié par un couple (σ,ψ) où :

(a) $\sigma=(\sigma^1,\ldots,\sigma^m)$ est un m-uplet de 1-formes différentielles sur M proches de 0 et

(b) $\psi\in\bigwedge^2\mathcal{G}^*\otimes\mathcal{G}$ est une 2-forme sur G à valeurs dans $\mathcal{G}$ proche de 0 :

$$\psi=-\frac{1}{2}\sum_{i,j,k}C_{ij}^k\,\theta^i\wedge\theta^j\otimes e_k,$$

de telle façon que les conditions suivantes d'intégrabilité :

$$d(\omega^k+\sigma^k)+\frac{1}{2}\sum_{i,j}(K_{ij}^k+C_{ij}^k)\,(\omega^i+\sigma^i)\wedge(\omega^j+\sigma^j)=0 \tag{17}$$

et

$$\sum_i(K'^k_{ij}K'^i_{ij}+K'^k_{ij}K'^i_{ij}+K'^k_{ij}K'^i_{ij})=0 \tag{18}$$

où $K'^k_{ij}=K^k_{ij}+C^k_{ij}$, soient satisfafaites. De plus, comme on veut que l'ensemble des constantes K'^k_{ij} définisse une nouvelle algèbre de Lie $\mathcal{G}'$ et une sous-algèbre de Lie $\mathcal{H}'$, les q premières composantes $\psi^1,\ldots,\psi^q$ de ψ doivent appartenir à l'idéal de $\bigwedge^*\mathcal{G}^*$ engendré par $\theta^1,\ldots,\theta^q$. Soit Ω^r l'espace des formes différentielles sur M de degré r. On note $\mathcal{R}=(\mathcal{R}^1,\ldots,\mathcal{R}^m)$ l'application linéaire de $\bigwedge^r\mathcal{G}^*\otimes\mathcal{G}$ dans $(\Omega^r)^m$ donnée par :

$$\mathcal{R}^k(\theta^J\otimes e_i)=\delta_i^k\omega^J \tag{19}$$

où $J = (j_1, \ldots, j_r)$ et $\theta^J = \theta^{j_1} \wedge \ldots \wedge \theta^{j_r}$.

Étant donné $\sigma = (\sigma^1, \ldots, \sigma^m) \in (\Omega^r)^m$ on note $\widehat{d}_M\sigma$ l'élément de $(\Omega^{r+1})^m$ dont les composantes sont :

$$(\hat{d}_M\sigma)^k = d\sigma^k + \sum_{i,j} K_{ij}^k\, \omega^i \wedge \sigma^j. \tag{20}$$

De façon similaire, soit $\widehat{d}_{\mathcal{G}} : \bigwedge^r \mathcal{G}^* \otimes \mathcal{G} \to \bigwedge^{r+1} \mathcal{G}^* \otimes \mathcal{G}$ l'opérateur agissant sur un élément $\psi \in \bigwedge^r \mathcal{G}^* \otimes \mathcal{G}$ par :

$$\widehat{d}_{\mathcal{G}}\psi = \sum_k \left(d\psi^k + \sum_{i,j} K_{ij}^k \theta^i \wedge \psi^j \right) \otimes e_k \tag{21}$$

où d est l'opérateur de dérivation extérieure sur le groupe de Lie G. Notons que les deux opérateurs $\widehat{d}_M$ et $\widehat{d}_{\mathcal{G}}$ sont formellement les mêmes.

Les linéarisations des équations (17) et (18) par rapport aux variables σ^k and C_{ij}^k sont respectivement :

$$\begin{cases} d\sigma^k + \sum_{i,j} K_{ij}^k \omega^i \wedge \sigma^j + \frac{1}{2} \sum_{i,j} C_{ij}^k \omega^i \wedge \omega^j = (\widehat{d}_M\sigma)^k - \mathcal{R}^k(\psi) = 0, \\ \sum_i (K_{ij}^k C_{rs}^i + C_{ij}^k K_{rs}^i + K_{ir}^k C_{sj}^i + C_{ir}^k K_{sj}^i + K_{is}^k C_{jr}^i + C_{is}^k K_{jr}^i) = 0. \end{cases} \tag{22}$$

La deuxième équation peut être écrite en termes de forme vectorielle ψ comme :

$$\sum_k \left(d\psi^k + \sum_{i,j} K_{ij}^k \theta^i \wedge \psi^j \right) \otimes e_k = \widehat{d}_{\mathcal{G}}\psi = 0. \tag{23}$$

Soit V^r l'espace des éléments $\xi \in \bigwedge^r \mathcal{G}^* \otimes \mathcal{G}$ dont les q composantes $\xi^1, \ldots, \xi^q$ appartiennent à l'idéal $\bigwedge^* \mathcal{G}^*$ engendré par $\theta^1, \ldots, \theta^q$. Lorsque $r = 0$, ceci signifie que $V^0 = \mathcal{H}$. Pour $r \in \mathbb{N}$ on pose :

$$\mathcal{A}^r = (\Omega^r)^m \oplus V^{r+1}.$$

Noter qu'un couple (σ, ψ) définissant une perturbation de $\mathcal{F}$ est un élément de $\mathcal{A}^1$ et les équations d'intégrabilité (17) et (18) et leurs linéarisations respectives (22) and (23) sont des identités dans $\mathcal{A}^2$. En fait, si on définit $D : \mathcal{A}^r \to \mathcal{A}^{r+1}$ par :

$$D(\sigma, \psi) = (\widehat{d}_M\sigma - \mathcal{R}\psi, -\widehat{d}_{\mathcal{G}}\psi)$$

les équations linéarisées (22) et (23) peuvent s'écrire :

$$D(\sigma, \psi) = 0$$

et les équations complètes d'intégrabilité (17) et (18) sont de la forme :

$$D(\sigma, \psi) + P(\sigma, \psi) = 0 \tag{24}$$

où $P(\sigma,\psi)$ est une somme de termes quadratiques et cubiques. Un calcul utilisant l'identité de Jacobi montre que $D^2=0$. On obtient donc un complexe différentiel $\mathcal{A}$:

$$0 \longrightarrow \mathcal{A}^0 \xrightarrow{D} \mathcal{A}^1 \xrightarrow{D} \mathcal{A}^2 \longrightarrow \dots \tag{25}$$

dont on notera $H^*(\mathcal{A})$ la cohomologie.

Notons maintenant Ξ l'espace des éléments intégrables de $\mathcal{A}^1$, c'est-à-dire l'espace des couples (σ,ψ) dans $\mathcal{A}^1$ qui vérifient les équations (5) et (6). Une famille $\mathcal{F}_t$ de deformations de $\mathcal{F}$ paramétrée par $(T,0)$ est donnée par une famille de couples (ω_t,η_t) où :

$$\eta_t = -\frac{1}{2}\sum_{i,j,k} K_{ij}^k(t)\theta^i\wedge\theta^j\otimes e_k.$$

Si on pose $K_{ij}^k(t)=K_{ij}^k+C_{ij}^k(t)$, $\eta=-\frac{1}{2}\sum_{i,j,k}K_{ij}^k\,\theta^i\wedge\theta^j\otimes e_k$ et :

$$\psi_t = -\frac{1}{2}\sum_{i,j,k} C_{ij}^k(t)\theta^i\wedge\theta^j\otimes e_k$$

alors $(\omega_t,\eta_t)=(\omega,\eta)+(\sigma_t,\psi_t)$ et la famille $\mathcal{F}_t$ peuvent être vus comme une application différentiable de T dans $\mathcal{A}^1$, envoyant t dans $(\sigma_t,\psi_t)\in\mathcal{A}^1$ et dont l'image est contenue dans Ξ.

En particulier, si la famille de déformations est paramétrée par un intervalle de $\mathbb{R}$, l'application $t\mapsto(\sigma_t,\psi_t)$ est alors une courbe différentiable dans Ξ passant par l'origine. Le vecteur tangent à cette courbe $\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(\sigma_t,\psi_t)$ vérifie l'équation $D(\sigma,\psi)=0$. C'est un cocycle et définit donc une classe de cohomologie dans $H^1(\mathcal{A})$ appelée *déformation infinitésimale* de la famille $\mathcal{F}_t$.

Plus généralement, lorsque T est lisse, il existe une application $\varrho : T_0T\longrightarrow H^1(\mathcal{A})$ qui envoie un vecteur $v\in T_0T$ dans la classe de cohomologie définie par la dérivée de (σ_t,ψ_t) à l'origine dans la direction de v. On dira que ϱ es l'*application de Kodaira-Spencer* associée à la famille.

On fixe une métrique riemannienne sur la variété M et des produits scalaires sur les sous-espaces vectoriels V^k de $\bigwedge^k\mathcal{G}^*$ définis précédemment. Ils induisent des produits scalaires sur les espaces $\mathcal{A}^i=(\Omega^i)^m\oplus V^{i+1}$ qui permettent de définir l'adjoint D^* de D. On pose $\Delta=DD^*+D^*D$. Le théorème qui suit dit que le complexe différentiel $\mathcal{A}$ satisfait à une version twistée du théorème de Hodge ; celui-ci est un ingrédient essentiel dans la preuve du théorème d'existence de l'espace versel pour les $\mathcal{G}/\mathcal{H}$-feuilletages. Notons $\mathbb{H}^i$ le noyau de $\Delta:\mathcal{A}^i\to\mathcal{A}^i$.

3.16.2. Théorème. *Pour tout i, l'espace vectoriel $\mathbb{H}^i$ est de dimension finie et on a une décomposition orthogonale $\mathcal{A}^i=\mathbb{H}^i\oplus\Delta(\mathcal{A}^i)=\mathbb{H}^i\oplus\mathrm{Im}D\oplus\mathrm{Im}D^*$. De plus $H^i(\mathcal{A})$ est isomorphe à $\mathbb{H}^i$ (qui est donc de dimension finie).*

Soit $\mathcal{F}$ un $\mathcal{G}/\mathcal{H}$-feuilletage sur une variété compacte M défini par une 1-forme ω à valeurs dans $\mathcal{G}$.

3.16.3. Definition. *Une famille de déformations $\mathcal{F}_s$ paramétrée par un germe en 0 d'espace analytique lisse $(S,0)$ est dite* **verselle** *si, pour toute autre déformation $\mathcal{F}_t$ paramétrée par $(T,0)$, il existe une application différentiable $\varphi:(T,0)\to(S,0)$ telle que les déformations $\mathcal{F}_t$ et $\mathcal{F}_{\varphi(t)}$ soient équivalentes. En plus, la différentielle $d_0\varphi$ de φ en 0 est unique. Cette application φ (qui n'a pas besoin d'être unique) est dite* **verselle**.

Si une famille de déformations $\mathcal{F}_t$ de $\mathcal{F}$ paramétrée par un espace lisse $(T,0)$ vérifie cette même propriété de versalité, il existe une application verselle $(T,0)\stackrel{\varphi}{\to}(S,0)$ qui soit un isomorphisme. Ceci signifie que l'espace $(S,0)$, dit *espace versel* des déformations de $\mathcal{F}$, est unique à isomorphisme près. On a le :

3.16.4. Théorème. *Soit $\mathcal{F}$ un $\mathcal{G}/\mathcal{H}$-feuilletage sur une variété compacte M défini par une 1-forme ω à valeurs dans $\mathcal{G}$. Soit $\mathcal{A}$ le complexe différentiel associé à ω défini précédemment.*

(i) *Si $H^1(\mathcal{A})=0$ alors toute famille de déformations de $\mathcal{F}$ est triviale.*

(ii) *Supposons $H^2(\mathcal{A})=0$. Il existe alors une famille verselle $\mathcal{F}_s$ de déformations de $\mathcal{F}$ paramétrée par le germe $(H^1(\mathcal{A}),0)$ de $H^1(\mathcal{A})$ à l'origine. Soit $\mathcal{F}'_t$ une famille de déformations de $\mathcal{F}$ paramétrée par un espace lisse $(T,0)$. La différentielle $d_0\varphi$ de φ en 0 de toute application verselle $\varphi:(T,0)\to(H^1(\mathcal{A}),0)$ coïncide avec l'application de Kodaira-Spencer $\varrho:T_0T\to H^1(\mathcal{A})$ de la famille $\mathcal{F}_t$.*

(iii) *Soit $\mathcal{F}_t$ une famille de déformations de $\mathcal{F}$ paramétrée par un espace lisse $(T,0)$. Si l'application de Kodaira-Spencer $\varrho:T_0T\to H^1(\mathcal{A})$ de $\mathcal{F}_t$ est un isomorphisme alors la famille $\mathcal{F}_t$ est verselle.*

Soient r suffisamment grand et $\mathcal{A}^i_r$ l'espace de Sobolev r-complété de $\mathcal{A}^i$ pour la norme $||\ ||_r$. L'ensemble $\Sigma=\{\tau\in\mathcal{A}^1_r : D^*\tau=0 \text{ et } D^*(D\tau+P\tau)=0\}$ est, dans un voisinage de l'origine, une sous-variété analytique de $\mathcal{A}^1_r$ de dimension finie dont l'espace tangent en 0 est $\mathbb{H}^1\cong H^1(\mathcal{A})$. On peut alors voir facilement que la recherche des solutions de l'équation $D^*(D\tau+P\tau)+D\,D^*\tau=0$ se ramène à résoudre une équation elliptique et donc les éléments de Σ sont différentiables.

3.16.5. Théorème. *Soit $\mathcal{F}$ un $\mathcal{G}$-feuilletage de Lie sur une variété compacte M défini par une 1-forme ω à valeurs dans $\mathcal{G}$. Soit $(S,0)$ le germe en 0 de l'espace analytique :*

$$S=\Sigma\cap\Xi=\{\tau\in\mathcal{A}^1_r : D^*\tau=0 \ et\ \ D\tau+P\tau=0\}.$$

Les éléments de S sont différentiables et déterminent une famille de feuilletages de Lie $\mathcal{F}_s$. Cette famille est **faiblement verselle** *dans le sens suivant.*

Soit (σ,ψ) un élément intégrable de $\mathcal{A}^1$ i.e. vérifiant $D(\sigma,\psi)+P(\sigma,\psi)=0$. Alors il définit un feuilletage de Lie $\mathcal{F}'$ sur M. Si la norme de Sobolev $||(\sigma,\psi)||_r$ est suffisamment petite, $\mathcal{F}'$ est isomorphe à $\mathcal{F}_s$ pour un certain $s\in S$. Dans le cas où l'espace analytique S est lisse, la famille $\mathcal{F}_s$ est verselle.

3.16.6. Un autre aspect des déformations des feuilletages a été abordé dans [E47]. Nous ne donnerons pas de détails, nous nous contenterons simplement du petit mot qui suit donné en résumé du contenu du papier en question.

Un feuilletage $(M,\mathcal{F})$ est *développable* si son relevé $(\widehat{M},\widehat{\mathcal{F}})$ à un certain revêtement $\pi:\widehat{M}\longrightarrow M$ associé à un sous-groupe $\Gamma\subset\pi_1(M)$ est une fibration localement triviale $D:\widehat{M}\longrightarrow W$ sur laquelle Γ agit par automorphismes $\widehat{\mathcal{F}}$ (et donc sur la base W). Soient $E\longrightarrow M$ un fibré vectoriel feuilleté et $\widehat{E}\longrightarrow\widehat{M}$ son relèvement à $\widehat{M}$ par π. On suppose que $\widehat{E}=D^*(\overline{E})$ où $\overline{E}$ est un fibré vectoriel sur W sur lequel Γ agit. On montre :

i) Si la fibree $\widehat{L}$ de $\widehat{\mathcal{F}}$ a une cohomologie (de de Rham) triviale – c'est le cas par exemple si $\widehat{L}$ est contractile – la cohomologie feuilletée $H^*_{\mathcal{F}}(M,E)$ de $(M,\mathcal{F})$ à valeurs dans E est isomorphe à la cohomologie $H^*(\Gamma,C^\infty(\overline{E}))$ du groupe discret Γ à valeurs dans l'espace $C^\infty(\overline{E})$ des sections C^∞ de $\overline{E}$.

ii) Si $H^1(\widehat{L})=0$, alors l'espace $H^*_{\mathcal{F}}(M,\mathcal{V})$ (où $\mathcal{V}=TM/T\mathcal{F}$ est le fibré normal de $\mathcal{F}$) des déformations infinitésimales de $(M,\mathcal{F})$ s'identifie naturellement à $H^1(\Gamma,\mathfrak{X}(W))$ où $\mathfrak{X}(W)$ est le Γ-module des champs de vecteurs C^∞ sur la variété W. Beaucoup d'exemples de calcul ont été donnés.

3.17. Le $\overline{\partial}$ le long des feuilles

Un *feuilletage complexe* $\mathcal{F}$ de dimension m sur une variété M est donné par un recouvrement ouvert $\{U_i\}_{i\in I}$ et des difféomorphismes $\Omega_i\times\mathcal{O}_i\xrightarrow{\varphi_i}U_i$ (où Ω_i est un ouvert de $\mathbb{C}^m$ et $\mathcal{O}_i$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$) tels que, pour tout $U_i\cap U_j\neq\emptyset$, le changement de coordonnées $\varphi_j^{-1}\circ\varphi_i(z,t)=(z',t')$ soit de la forme $z'=\gamma_{ij}(z)$ et $t'=\varphi_{ij}(z,t)$ avec φ_{ij} holomorphe en z pour t fixé. Chaque feuille possède une structure complexe qui varie localement de façon différentiable par rapport au paramètre transverse. Ceci permet de définir la notion de forme différentielle feuilletée (*i.e.* le long des feuilles) de type (p,q) ($r=p+q$ étant le degré total). De telles formes constituent un espace vectoriel $A^{p,q}(M,\mathcal{F})$ et, de façon analogue au cas classique, on a un opérateur de Cauchy-Riemann le long des feuilles $\overline{\partial}_{\mathcal{F}}:A^{p,q}(M,\mathcal{F})\longrightarrow A^{p,q+1}(M,\mathcal{F})$; celui-ci vérifie $\overline{\partial}^2_{\mathcal{F}}=0$. On peut donc définir la cohomologie de Dolbeault le long des feuilles $H^{p,q}(M,\mathcal{F})$. La nullité de cet espace est équivalente à l'existence d'une solution $\alpha\in A^{p,q-1}(M,\mathcal{F})$ de l'équation $\overline{\partial}_{\mathcal{F}}\alpha=\beta$ pour toute forme $\beta\in A^{p,q}(M,\mathcal{F})$ telle que $\overline{\partial}_{\mathcal{F}}\beta=0$. C'est le *problème du $\overline{\partial}$ le long des feuilles*. Il peut être interprété comme une version paramétrée (par l'espace des feuilles $M/\mathcal{F}$) du problème du $\overline{\partial}$ usuel. De façon similaire au cas classique, la cohomologie de Dolbeault feuilletée $H^{0,*}_{\mathcal{F}}(M)$ apparaît comme obstruction à la résolution de ce problème. Dans les diverses tentatives pour résoudre le $\overline{\partial}_{\mathcal{F}}$ ou, de manière équivalente, pour calculer les espaces vectoriels $H^{0,*}_{\mathcal{F}}(M)$, une difficulté majeure apparaît souvent : la régularité des solutions (quand elles existent) n'est pas a priori acquise ; ceci est dû au fait, qu'en général, l'opérateur $\overline{\partial}_{\mathcal{F}}$ n'est pas elliptique (il l'est seulement le long des feuilles) contrairement au cas classique. Ce qui rend le problème hautement non trivail. On peut toutefois citer des avancées dans cette direction qu'on peut trouver dans [DO], [GT] et [Sℓ]. Décrivons un peu ce que nous avons obtenu autour de cette question.

Dans [E36] nous nous sommes intéressés au calcul de la cohomologie de Dolbeault de deux feuilletages complexes. Ils ne sont que deux, mais ils sont extrêmement riches et leurs structures sont assez diversifiées. Le premier a une structure conforme tangentiellement et transversalement et n'est pas riemannien. Le deuxième a une dynamique compliquée et la

croissance de ses feuilles (il y a des cyclindres et des plans) est exponentielle et est C^∞-stable (*cf.* [E19]) ! Nous avons aussi décrit beaucoup d'objets géométriques qui leur sont rattachés tels que les 1-formes $\mathcal{F}$-holomorphes ou encore les fonctionnelles $\mathcal{F}$-analytiques invariantes *etc.*

Il serait très difficile de décrire explicitement les résutats obtenus pour ces deux exemples tellement cela nécessite l'introduction d'ingrédients techniques ! Nous allons toutefois en donner une description minimale.

Le premier. On note $\widetilde{M}$ la variété $(\mathbb{C}^2 \times \mathbb{R}) \setminus \{0\}$ munie du feuilletage complexe $\widetilde{\mathcal{F}}$ de dimension 2 défini par l'équation $dt = 0$ ((z_1, z_2, t) désignent les coordonnées sur $\widetilde{M}$). Ce feuilletage est invariant par le difféomorphisme $\gamma : (z_1, z_2, t) \in \widetilde{M} \longmapsto (\lambda z_1, \lambda z_2, \lambda t) \in \widetilde{M}$ (où $\lambda \in]0, 1[$) et induit donc un feuilletage complexe $\mathcal{F}$ de dimension 2 sur la variété quotient $M = \widetilde{M}/\Gamma$ où Γ est le groupe des automorphismes de $\widetilde{\mathcal{F}}$ engendré par γ.

• Soit Θ^* l'espace des fonctions C^∞ et $\mathcal{F}$-holomorphes sur l'ouvert $U_{012} = \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^* \times \mathbb{R}^*$ et qui s'écrivent $f(z_1, z_2, t) = \displaystyle\sum_{m_1, m_2 \in \mathbb{N}^*} \frac{\gamma_{m_1 m_2}(t)}{z_1^{m_1} z_2^{m_2}}$ où $\gamma_{m_1 m_2} \in C^\infty(\mathbb{R}^*)$ avec les conditions de convergence C^∞ habituelles. Il contient l'espace Θ des fonctions C^∞ et $\mathcal{F}$-holomorphes sur l'ouvert $U_{012} = \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^* \times \mathbb{R}$ et qui s'écrivent sous la même forme mais cette fois-ci $\gamma_{m_1 m_2} \in C^\infty(\mathbb{R})$ (avec aussi les conditions de convergence C^∞ habituelles). On a montré que :

i) $H^{0,1}_{\widetilde{\mathcal{F}}}(\widetilde{M}) = \left\{ \displaystyle\sum_{\substack{m_1 \in \mathbb{N}^* \\ m_2 \in \mathbb{N}^*}} \frac{\gamma_{m_1 m_2}(t)}{z_1^{m_1} z_2^{m_2}} \right\}$ (séries C^∞-convergentes).

ii) $H^2(\widetilde{M}, \mathcal{H}_{\widetilde{\mathcal{F}}}) = \Theta^*/\Theta$. □

Considférons le difféomorphisme $\sigma : t \longmapsto \lambda t \in \mathbb{R}$; il définit une action de $\mathbb{Z}$ sur l'espace de Fréchet $C^\infty(\mathbb{R})$. Celle-ci induit une action de $\mathbb{Z}$ sur l'espace :

$$H^{0,1}_{\widetilde{\mathcal{F}}}(\widetilde{M}) = \left\{ \sum_{\substack{m_1 \in \mathbb{N}^* \\ m_2 \in \mathbb{N}^*}} \frac{\gamma_{m_1 m_2}(t)}{z_1^{m_1} z_2^{m_2}} \right\}$$

donnée par $\sigma(f)(z_1, z_2, t) = \displaystyle\sum_{\substack{m_1 \in \mathbb{N}^* \\ m_2 \in \mathbb{N}^*}} \frac{\gamma_{m_1 m_2}(\lambda t)}{\lambda^{m_1+m_2} z_1^{m_1} z_2^{m_2}}$ et qui fait donc de l'espace $H^{0,1}_{\widetilde{\mathcal{F}}}(\widetilde{M})$ un $\mathbb{Z}$-module qu'on notera L.

Posons $\Delta = H^2(\widetilde{M}, \mathcal{H}_{\widetilde{\mathcal{F}}}) = \Theta^*/\Theta$. On a une action de $\mathbb{Z}$ sur Δ induite par l'automorphisme du feuilletage $\widetilde{\mathcal{F}}$: $\gamma : (z_1, z_2, t) \in \widetilde{M} \longmapsto (\lambda z_1, \lambda z_2, \lambda t) \in \widetilde{M}$ et ses restrictions aux divers ouverts invariants :

$$[f] = \left[\sum_{m_1, m_2 \in \mathbb{N}^*} \frac{\gamma_{m_1 m_2}(t)}{z_1^{m_1} z_2^{m_2}} \right] \longmapsto \gamma[f] = \left[\sum_{m_1, m_2 \in \mathbb{N}^*} \frac{\gamma_{m_1 m_2}(\lambda t)}{\lambda^{m_1+m_2} z_1^{m_1} z_2^{m_2}} \right]$$

où, pour $f \in \Theta^*$, $[f]$ désigne sa classe d'équivalence dans Δ. On notera Δ^γ le sous-espace de Δ dont les éléments sont les γ-invariants. Bien entendu, un élément de Δ^γ est représenté par une fonction $f(z_1, z_2, t) = \sum_{m_1, m_2 \in \mathbb{N}^*} \frac{\gamma_{m_1 m_2}(t)}{z_1^{m_1} z_2^{m_2}}$ avec $\gamma_{m_1 m_2} \in C^\infty(\mathbb{R}^*)$ telle que $\gamma f - f$ représente la classe nulle dans Δ *i.e.*, pour tout $(m_1, m_2) \in {\mathbb{N}^*}^2$, la fonction $\widetilde{\gamma}_{m_1 m_2}(t) = \frac{\gamma_{m_1 m_2}(t)}{\lambda^{m_1+m_2}} - \gamma_{m_1 m_2}(t)$ est dans l'image de la restriction $\rho : C^\infty(\mathbb{R}^*) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{R})$.

3.17.1. Théorème. *On a :*

$$H_{\mathcal{F}}^{0,*}(M) = \begin{cases} \mathbb{C} & si * = 0 \\ \mathbb{C} \oplus \left\{ \sum_{\substack{m_1 \in \mathbb{N}^* \\ m_2 \in \mathbb{N}^*}} c_{m_1 m_2} \frac{t^{m_1+m_2}}{z_1^{m_1} z_2^{m_2}} \right\} & si * = 1 \\ H^1(\mathbb{Z}, L) \oplus \Delta^\gamma & si * = 2 \\ 0 & si * \geq 3 \end{cases}$$

où, pour tout $(m_1, m_2) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, les $c_{m_1 m_2}$ sont des constantes complexes telles que la série $\sum_{\substack{m_1 \in \mathbb{N}^* \\ m_2 \in \mathbb{N}^*}} c_{m_1 m_2} \frac{t^{m_1+m_2}}{z_1^{m_1} z_2^{m_2}}$ converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^* \times \mathbb{R}$.

Le deuxième. Soit $A \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$ une matrice diagonalisable ayant toutes ses valeurs propres $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ réelles positives et différentes de 1 (on dit que A est *hyperbolique*). On a une action du groupe $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^n$: $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longmapsto A^t x \in \mathbb{R}^n$ qui permet de construire un groupe de Lie résoluble $G = \mathbb{R}^n \rtimes_A \mathbb{R}$ ayant $\Gamma = \mathbb{Z}^n \rtimes_A \mathbb{Z}$ comme réseau cocompact. Le quotient G/Γ est le tore hyperbolique $\mathbb{T}_A^{n+1}$. Soit v un vecteur propre de A associé à une valeur propre $\lambda \in]0, 1[$. Les champs de vecteurs $X = \lambda^t v$ et $Y = \frac{\partial}{\partial t}$ sont linéairement indépendants et induisent des champs sur la variété $\mathbb{T}_A^{n+1}$ sur laquelle ils définissent un feuilletage $\mathcal{F}$ de dimension 2 réelle. Ce feuilletage est muni d'une structure complexe définie à l'aide de la structure presque complexe intégrable $J_{\mathcal{F}}(X) = Y$ et $J_{\mathcal{F}}(Y) = -X$.

On note $v_1, \cdots, v_n$ des vecteurs propres unitaires associés respectivement aux valeurs propres $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ de la matrice A. (Les composantes de v_i seront notées $(\kappa_1^i, \cdots, \kappa_n^i)$.) Les champs de vecteurs $Y = \frac{\partial}{\partial t}$ et $X_i = \lambda_i^t v_i = \lambda_i^t \left(\kappa_1^i \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + \kappa_n^i \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$ avec $i = 1, \cdots, n$ induisent des champs sur $\mathbb{T}_A^{n+1}$.

Le fibré tangent $\mathcal{F}$-holomorphe $T^{10}\mathcal{F}$ et le fibré tangent $\mathcal{F}$-antiholomorphe $T^{01}\mathcal{F}$ sont respectivement engendrés par les champs $Z = \frac{1}{2}(X - iY)$ et $\overline{Z} = \frac{1}{2}(X + iY)$ qui sont donnés exactement par les formules :

$$Z = \frac{1}{2} \left[\lambda^t \left(\kappa_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + \kappa_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right) - i \frac{\partial}{\partial t} \right], \quad \overline{Z} = \frac{1}{2} \left[\lambda^t \left(\kappa_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + \kappa_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right) + i \frac{\partial}{\partial t} \right]$$

Ces champs forment une base $(Z, \overline{Z})$ du complexifié $T\mathcal{F} \otimes \mathbb{C}$ du fibré tangent au feuilletage; $(Z, \overline{Z})$ admet pour base duale $(\omega, \overline{\omega})$ où ω et $\overline{\omega}$ sont les 1-formes feuilletées respectivement de type $(1, 0)$ et de type $(0, 1)$ données par :

$$\omega = \lambda^{-t}(\kappa_1 dx_1 + \cdots + \kappa_n dx_n) + i dt \quad \text{et} \quad \overline{\omega} = \lambda^{-t}(\kappa_1 dx_1 + \cdots + \kappa_n dx_n) - i dt.$$

La $(1,0)$-forme ω vérifie $\overline{\partial}_{\mathcal{F}}\omega = \nu\omega \wedge dt$ et n'est donc pas $\mathcal{F}$-holomorphe. Il n'y a en fait aucune 1-forme $\mathcal{F}$-holomorphe sur $(\mathbb{T}^{n+1}_A, \mathcal{F})$. Le complexe de Dolbeault feuilleté s'écrit $0 \longrightarrow \Omega^{0,0}_{\mathcal{F}}(\mathbb{T}^{n+1}_A) \xrightarrow{\overline{\partial}_{\mathcal{F}}} \Omega^{0,1}_{\mathcal{F}}(\mathbb{T}^{n+1}_A) \longrightarrow 0$. De façon plus précise :

$$\Omega^{0,*}_{\mathcal{F}}(\mathbb{T}^{n+1}_A) = \begin{cases} C^\infty(\mathbb{T}^{n+1}_A) & \text{si } * = 0 \\ C^\infty(\mathbb{T}^{n+1}_A) \otimes \overline{\omega} & \text{si } * = 1 \end{cases}$$

et l'opérateur $\overline{\partial}_{\mathcal{F}}$ est défini par $\overline{\partial}_{\mathcal{F}} f = \frac{1}{2}\left[\lambda^t\left(\kappa_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + \kappa_n \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) + i\frac{\partial f}{\partial t}\right] \otimes \overline{\omega}$.

Une fonction sur $\mathbb{T}^{n+1}_A$ est une fonction sur $G = \mathbb{R}^n \rtimes_A \mathbb{R}$ invariante par $\Gamma = \mathbb{Z}^n \rtimes \mathbb{Z}$; elle s'identifie à une fonction n-périodique, de période 1 en $x_1, \cdots, x_n$ invariante par $\sigma : (x,t) \in \mathbb{T}^n \times \mathbb{R} \longmapsto (Ax, t+1) \in \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}$ *i.e.* $f(Ax, t+1) = f(x,t)$ pour tout $(x,t) \in \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}$. Si une telle fonction f est *intégrable*, elle admet un développement de Fourier $\sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^n} f_{\mathbf{m}}(t) e^{2i\pi\langle \mathbf{m}, x\rangle}$ où les $f_{\mathbf{m}}$ sont ses coefficients de Fourier donnés par les formules intégrales $f_{\mathbf{m}}(t) = \int_{\mathbb{T}^n} f(x,t) e^{-2i\pi\langle \mathbf{m}, x\rangle} dx$. La condition d'invariance sur la fonction f se traduit au niveau des $f_{\mathbf{m}}$ par la relation :

$$\text{(CI)} \qquad f_{\mathbf{m}}(t+1) = f_{B\mathbf{m}}(t)$$

où B est la matrice transposée de A.

Rappelons qu'on a une partition $\mathbb{Z}^n = \{\mathbf{0}\} \cup \bigcup_{\mathbf{m}\in\Lambda_*} \{B^j\mathbf{m} : j \in \mathbb{Z}\}$ où $\Lambda_* = \Lambda \setminus \{\mathbf{0}\}$ qui est la partie de $\mathbb{Z}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ constituée par un et un seul élément de chaque orbite de B agissant sur $\mathbb{Z}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$. Pour tout $\mathbf{m} \in \Lambda$, on note $H_{\mathbf{m}}$ le sous-espace de $\mathcal{H}_{\widehat{\mathcal{F}}}(\widehat{M})$:

$$H_{\mathbf{m}} = \left\{ h(x,t) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} h_{B^j\mathbf{m}} e^{-\frac{2\pi}{\nu}\langle B^j\mathbf{m}, v\rangle\lambda^t} e_{B^j\mathbf{m}}(x) \right\}.$$

Le sous-espace $H_{\mathbf{0}}$ est réduit aux constantes, donc isomorphe à $\mathbb{C}$. Chaque $H_{\mathbf{m}}$ est fermé et on a une décomposition en somme directe :

$$\mathcal{H}_{\widehat{\mathcal{F}}}(\widehat{M}) = H_{\mathbf{0}} \oplus \bigoplus_{\mathbf{m}\in\Lambda_*} H_{\mathbf{m}}.$$

L'opérateur $\delta : \mathcal{H}_{\widehat{\mathcal{F}}}(\widehat{M}) \longrightarrow \mathcal{H}_{\widehat{\mathcal{F}}}(\widehat{M})$ défini par $\delta h = h - h\circ\sigma^{-1}$ respecte cette décomposition et son noyau est exactement $H_{\mathbf{0}}$. Sa restriction à chaque $H_{\mathbf{m}}$ est une injection $H_{\mathbf{m}} \longrightarrow H_{\mathbf{m}}$. Enfin pour tout $\mathbf{m} \in \Lambda$, soit $H^-_{\mathbf{m}}$ l'espace des fonctions $h = \sum_{j\in\mathbb{Z}} h_{B^j\mathbf{m}} e^{-\frac{2\pi}{\nu}\langle B^j\mathbf{m}|v\rangle\lambda^t} e_{B^j\mathbf{m}}(x)$ dans $H_{\mathbf{m}}$ telles que $h_{B^j\mathbf{m}} = 0$ pour $j < j_0$ ou $j_0 \in \mathbb{Z}$ ne dépend que de la fonction h.

Pour $\mathbf{m} \in \Lambda_+ \cup \{\mathbf{0}\}$ (où $\Lambda_+ = \{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n : \langle \mathbf{m}, v\rangle > 0\}$), on définit les applications linéaires $\mathcal{L}_{\mathbf{m}} : \mathcal{H}_{\widehat{\mathcal{F}}}(\widehat{M}) \longrightarrow \mathbb{C}$ comme suit. Pour :

$$g(x,t) = \sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^n} g_{\mathbf{m}} e^{-\frac{2\pi}{\nu}\langle \mathbf{m}, v\rangle\lambda^t} e_{\mathbf{m}}(x)$$

on pose :

$$\mathcal{L}_{\mathbf{m}}(g) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} g_{B^j\mathbf{m}} \quad \text{et} \quad \mathcal{L}_{\mathbf{0}}(g) = \int_{\mathbb{T}^n}\int_0^1 g(x,t)dxdt = g_{\mathbf{0}}. \tag{26}$$

On vérifie facilement que $\mathcal{L}_{\mathbf{m}}$ et $\mathcal{L}_{\mathbf{0}}$ ainsi définies sont des fonctionnelles $\widehat{\mathcal{F}}$-analytiques non nulles et σ-invariantes sur $(\widehat{M},\widehat{\mathcal{F}})$. On note $\mathcal{N}_{\mathbf{m}}$ l'intersection de $H_{\mathbf{m}}$ avec le noyau de $\mathcal{L}_{\mathbf{m}}$.

3.17.2. Théorème. i) *On a* $H^{0,1}_{\mathcal{F}}(\mathbb{T}^{n+1}_A) = H^1(\Sigma, \mathcal{H}_{\widehat{\mathcal{F}}}(\widehat{M}))$.

ii) *Si* $g \in H_{\mathbf{m}}$ *avec* $\mathbf{m}$ *dans* $\Lambda_+ \cup \{\mathbf{0}\}$, *alors l'équation cohomologique* $\widehat{\mathcal{F}}$*-analytique* $g = h - h\circ\sigma^{-1}$ *a une solution* $h \in H_{\mathbf{m}}$ *si, et seulement si,* $g \in \mathcal{N}_{\mathbf{m}}$ *; ce qui implique que* $H^1(\Sigma, H_{\mathbf{m}})$ *est isomorphe à* $\mathbb{C}$. *Ainsi l'espace vectoriel* $H^{0,1}_{\mathcal{F}}(\mathbb{T}^{n+1}_A)$ *est de dimension infinie.*

iii) *Pour tout* $g \in H^-_{\mathbf{m}}$ *avec* $\mathbf{m} \in \Lambda_- = \{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^n : \langle \mathbf{m}, v\rangle < 0\}$, *l'équation cohomologique* $g = h - h\circ\sigma^{-1}$ *a une solution unique* $h \in H_{\mathbf{m}}$.

iv) *L'espace des fonctionnelles* $\widehat{\mathcal{F}}$*-analytiques* σ*-invariantes sur* $(\widehat{M},\widehat{\mathcal{F}})$ *est engendré par les fonctionnelles* $\mathcal{L}_{\mathbf{m}}$ *avec* $\mathbf{m} \in \Lambda_+ \cup \{\mathbf{0}\}$.

Je me suis récemment mis à regarder une version feuilletée (ou à paramètre) du théorème de C. Guichard [Gu] obtenu à la fin du 19ème siècle : *pour toute fonction holomorphe* $g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, *il existe une fonction holomorphe* $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ *telle que* $f(z) - f(z+1) = g(z)$ *pour tout* $z \in \mathbb{C}$. La généralisation que j'en ai donnée dans [E37] est illustrée dans le théorème qui suit.

3.17.3. Théorème. *Soit* $(M,\mathcal{F})$ *un feuilletage complexe simple de codimension* n *dont les feuilles sont des surfaces de Riemann non compactes et simplement connexes. Soit* $\gamma : M \longrightarrow M$ *un automorphisme de* $\mathcal{F}$ *fixant chaque feuille et agissant librement et proprement. Alors l'espace* $\mathcal{H}_{\mathcal{F}}(M)$ *n'est pas réduit aux fonctions basiques et pour tout* $g \in \mathcal{H}_{\mathcal{F}}(M)$, *l'équation cohomologique* $h - h\circ\gamma = g$ *admet une solution* $h \in \mathcal{H}_{\mathcal{F}}(M)$ *i.e. l'espace vectoriel* $H^1(\mathbb{Z}, \mathcal{H}_{\mathcal{F}}(M))$ *est trivial (ici* $\mathcal{H}_{\mathcal{F}}(M)$ *est vu comme un* $\mathbb{Z}$*-module via l'action* $(k,f) \in \mathbb{Z}\times\mathcal{H}_{\mathcal{F}}(M) \longmapsto f\circ\gamma^k \in \mathcal{H}_{\mathcal{F}}(M)$*).*

Bien entendu, si la variété M est le plan complexe $\mathbb{C}$ et le feuilletage est constitué d'une seule feuille (M elle-même), on retrouve le théorème de Guichard en prenant pour γ la translation $z \in \mathbb{C} \longmapsto z+1 \in \mathbb{C}$.

Les méthodes intermédiaires utilisées pour démontrer ce théorème ont donné quelques résultats supplémentaires en rapport avec le problème du $\overline{\partial}_{\mathcal{F}}$.

Soit $(M,\mathcal{F})$ un feuilletage complexe par surfaces de Riemann. Une fonction $M \xrightarrow{f} \mathbb{C}$ est dite $\mathcal{F}$*-méromorphe* si sa restriction à toute feuille est une fonction méromorphe au sens usuel. Comme, en restriction à chaque feuille, les zéros et les pôles sont isolés, leurs ensembles respectifs sont transverses au feuilletage. On peut voir aussi que si on se donne une petite sous-variété ouverte Σ (petite signifie contenue dans un ouvert U distingué pour le feuilletage) lisse transverse au feuilletage, on peut construire des fonctions $\mathcal{F}$*-holomorphes* ou $\mathcal{F}$*-méromorphe* sur U. La question suivante est tout à fait naturelle : *étant donnée une réunion dénombrable* Σ *de petites sous-variétés ouvertes lisses* Σ_i *transverses*

au feuilletage, existe-t-il une fonction $\mathcal{F}$-méromorphe $f : M \longrightarrow \mathcal{F}$ admettant Σ comme ensemble de pôles ? En d'autres termes, y a-t-il une version feuilletée du théorème de Mittag-Leffler ? La réponse est oui pour les feuilletages complexes que nous venons de considérer et lorsque Σ vérifie certaines conditions.

Soit $\mathcal{P}$ une réunion dénombrable de parties P de M ; on dira que $\mathcal{P}$ est une *famille acyclique* si elle satisfait les conditions qui suivent :

– $\mathcal{P}$ est discrète *i.e.* si $P, P' \in \mathcal{P}$ avec $P \neq P'$, il existe deux ouverts V et V' distingués pour $\mathcal{F}$ disjoints tels que $P \subset V$ et $P' \subset V'$;

– Il existe un recouvrement ouvert acyclique (pour le faisceau $\mathcal{H}$) $\mathcal{U}$ de M par des ouverts U distingués tel que tout $P \in \mathcal{P}$ est contenu dans un certain $U \in \mathcal{U}$ et tout $U \in \mathcal{U}$ contient au plus un élément $P \in \mathcal{P}$. On dira que le recouvrement $\mathcal{U}$ est *associé* à $\mathcal{P}$.

3.17.4. Théorème (Mittag-Leffler avec paramètre). *On suppose que le feuilletage complexe vérifie les hypothèses du théorème 3.17.5 ou que chaque feuille a $\mathbb{Z}$ comme groupe fondamental. Soit Σ une famille acyclique de sous-variétés ouvertes Σ_i transverses à $\mathcal{F}$ et $\mathcal{U} = \{U_i\}$ un recouvrement ouvert associé à Σ. Sur chaque U_i on se donne une fonction $\mathcal{F}$-méromorphe $h_i : U_i \longrightarrow \mathbb{C}$ et $\mathcal{F}$-holomorphe en dehors de Σ_i de telle sorte que $h_i - h_j$ soit $\mathcal{F}$-holomorphe sur $U_i \cap U_j$. Alors il existe une fonction $\mathcal{F}$-méromorphe $h : M \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que $h - h_i$ est $\mathcal{F}$-holomorphe sur U_i.*

De façon similaire, en utilisant le théorème 3.17.4, on peut montrer un théorème d'existence de fonction $\mathcal{F}$-holomorphe à zéros prescrits.

3.17.5. Théorème. *On suppose $H^2(M, \mathbb{Z}) = 0$ et que le feuilletage complexe $(M, \mathcal{F})$ satisfait aux hypothèses du théorème 3.17.6. Soit $Z = \{Z_i\}$ une famille acyclique de sous-variétés ouvertes transverses à $\mathcal{F}$ et $\mathcal{U} = \{U_i\}$ un recouvrement ouvert acyclique associé à Z. Sur chaque U_i on se donne une fonction $\mathcal{F}$-holomorphe $h_i : U_i \longrightarrow \mathbb{C}$ admettant Z_i comme ensemble de zéros et que $\frac{h_j}{h_i}$ est $\mathcal{F}$-holomorphe et sans zéro sur $U_i \cap U_j$. Il existe alors une fonction $\mathcal{F}$-holomorphe h sur M admettant Z comme ensemble de zéros.*

Dorénavant, on supposera que M est un ouvert $\mathbb{C} \times B$ où B est n'importe quelle variété différentiable. On munit M du feuilletage complexe $\mathcal{F}$ dont les feuilles sont les traces sur M des plans complexes $\mathbb{C} \times \{t\}$ où $t \in B$. On dira que $\mathcal{F}$ est le *feuilletage canonique* sur l'ouvert M

Soit $f : M \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction $\mathcal{F}$-holomorphe. On dira que f admet un prolongement $\mathcal{F}$-holomorphe s'il existe un ouvert $\widehat{M}$ de $\mathbb{C} \times B$ contenant strictement M et une fonction $\mathcal{F}$-holomorphe $\widehat{f} : \widehat{M} \longrightarrow \mathbb{C}$ dont la restriction à M soit égale à f. On dira que M est un *domaine de $\mathcal{F}$-holomorphie*, s'il existse une fonction $\mathcal{F}$-holomorphe sur M qui n'admet aucun prolongement $\mathcal{F}$-holomorphe.

3.17.6. Théorème. *Soit M un domaine borné de $\mathbb{C} \times B$ dont le bord ∂M est une variété de classe C^2. Supposons que le feuilletage complexe canonique $(M, \mathcal{F})$ satisfait aux hypothèses du théorème 3.17.6. et que $H^2(M, \mathbb{Z}) = 0$. Alors M est un domaine de $\mathcal{F}$-holomorphie.*

Dans la référence [E42] je me suis intéressé à l'existence de fonctions méromorphes ayant des pôles prescrits dans un cadre un peu différent.

3.17.7. Théorème. *Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage complexe dont les feuilles sont des surfaces de Riemann non compactes défini par une fibration différentiablement triviale $\pi : M \longrightarrow B$ mais pour laquelle la structure complexe de chacune des fibres $\pi^{-1}(t)$ depend de t. Soit $\sigma : B \longrightarrow M$ une section de π contenue dans une partie $\mathcal{F}$-relativement compacte M. Alors, pour tout ouvert $\mathcal{F}$-relativement compact U contenant $\Sigma = \sigma(B)$ et tout entier $s \geq 0$, il existe une fonction $U \longrightarrow \mathbb{C}$ de classe C^s qui n'est constante sur aucune des feuilles de $(U, \mathcal{F})$, meromorphe le long des feuilles et dont l'ensemble des pôles est exactement Σ.*

La démonstration de ce théorème, qui est un peu longue et élaborée, donne au passage celle du théorème suivant qui est une sorte de théorème de finitude.

3.17.8. Théorème. *On se met dans les hypothèses du théorème 3.17.7 et on suppose que les feuilles sont des surfaces de Riemann compactes ainsi que la variété B. Alors $H_s^{0,1}(M, \mathcal{F})$ est un module finiment engendré sur l'algèbre de Banach $\mathcal{C}_b^s(B)$ des fonctions de classe C^s dont toutes les dérivées jusqu'à l'ordre s sont bornées.*

Ici $H_s^{0,1}(M, \mathcal{F})$ est le premier espace vectoriel de cohomologie de Dolbeault le long des feuilles des formes de classe C^s qui sont C^∞ le long des feuilles et dont toutes les dérivées jusqu'à l'ordre s sont bornées.

Le calcul explicite de $H_s^{0*}(M, \mathcal{F})$ sur des exemples concrets est assez complexe même lorsque $s = 0$ (*i.e.* aucune régularité transverse à part la continuité n'est exigée). Toutefois nous sommes arrivés à le faire sur un exemple loin d'être trivial : le feuilletage affine complexe de Reeb sur une surface de Hopf $\mathbb{S}^{n+1} \times \mathbb{S}^1$ (*cf.* [44]).

• On pose $\widetilde{M} = \mathbb{C} \times \mathbb{R}^n \setminus \{(0,0)\}$ et on considère le feuilletage $\widetilde{\mathcal{F}}$ défini par le système différentiel $dt_1 = \ldots = dt_n = 0$ où $(z, t_1, \ldots, t_n)$ sont les coordonnées d'un point (z, t) dans $\widetilde{M}$. Les feuilles de $\widetilde{\mathcal{F}}$ sont holomorphiquement équivalentes à $\mathbb{C}$ sauf celle qui correspond à $t = 0$ qui est $\mathbb{C}^*$. Soit $\phi : \widetilde{M} \longrightarrow \widetilde{M}$ le difféomorphisme de M défini par $\phi(z, t) = (\lambda z, \lambda t)$ où $\lambda \in]0, 1[$. L'action de $\mathbb{Z}$ engendrée par ϕ est libre, propre et discontinue ; le quotient $M = \widetilde{M}/\phi$ est difféomorphe à la *variété de Hopf* réelle $\mathbb{S}^{n+1} \times \mathbb{S}^1$. Le feuilletage $\widetilde{\mathcal{F}}$ est invariant par ϕ et induit un feuilletage complexe $\mathcal{F}_\lambda$ de dimension 1 sur M. Les feuilles sont des copies de $\mathbb{C}$ sauf celle qui correspond à $t = 0$ qui est une *courbe elliptique* C_λ dont la structure complexe est donnée par celle de la couronne $\{z \in \mathbb{C} \ : \ |\lambda| < |z| < 1\}$. Tout isomorphisme de feuilletages $f : (M, \mathcal{F}_\lambda) \longrightarrow (M, \mathcal{F}_{\lambda'})$ induit un biholomorphisme de C_λ sur $C_{\lambda'}$. Donc si $|\lambda| \neq |\lambda'|$, $\mathcal{F}_\lambda$ n'est pas isomorphe à $\mathcal{F}_{\lambda'}$.

• Cherchons le groupe $G(\mathcal{F}_\lambda)$ des automorphismes de $\mathcal{F}_\lambda$ sur $M = \widetilde{M}/\phi$ (dans le cas où $\widetilde{M} = \mathbb{C} \times \mathbb{R}$). Un élément $f \in G(\mathcal{F}_\lambda)$ est donné par un automorphisme $\widetilde{f} : \widetilde{M} \longrightarrow \widetilde{M}$ de $\mathcal{F}$ commutant à l'action de ϕ ; il s'écrit $\widetilde{f}(z, t) = (f_1(z, t), f_2(t))$ où f_1 est holomorphe en z et commute à la multiplication $z \longmapsto \lambda z$ et f_2 est un difféomorphisme de $\mathbb{R}$; f_1 est nécessairement de la forme $f_1(z, t) = a(t)z$ où $a(t) \in \mathrm{GL}(1, \mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$ dépendant différentiablement de t. D'autre part, comme $\mathbb{C}^*$ n'est pas équivalent à $\mathbb{C}$, f_2 doit fixer 0 et commuter à l'homothétie $\phi_2 : t \longmapsto \lambda t$ *i.e.* $f_2(\lambda t) = \lambda f_2(t)$; il est alors du type $f_2(t) = bt$ où $b \in \mathbb{R}^*$. Le groupe $G(\mathcal{F}_\lambda)$ est donc celui des transformations de la forme $(z, t) \longmapsto (a(t)z, bt)$ où $a \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}^*)$ et $b \in \mathbb{R}^*$.

La variété ici est $M = \mathbb{S}^{n+1} \times \mathbb{S}^1$ qui est le quotient de $\widetilde{M} = \mathbb{C} \times \mathbb{R}^n \setminus \{(0,0)\}$ par

l'action de $\mathbb{Z}$ engendrée par l'automorphisme $(z,t) \in \widetilde{M} \xrightarrow{\gamma} (\lambda z, \lambda t) \in \widetilde{M}$. Elle sera munie du feuilletage $\mathcal{F}_\lambda$ qu'on notera simplement $\mathcal{F}$. Voici le résultat que nous avons obtenu après un calcul long et assez laborieux.

3.17.9. Théorème. *Les espaces vectoriels $H_0^{00}(M,\mathcal{F})$ et $H_0^{01}(M,\mathcal{F})$ sont tous les deux isomorphes à $\mathbb{C}$.*

3.18. Dynamique des groupes d'homéomorphismes

Soient E un espace métrique et G un sous-groupe de Homéo(E). Si A est une partie de E, $\overline{A}$ sera son adhérence ; l'orbite d'un point $x \in E$ sera notée $G(x)$.

Un ensemble $M \subset E$ est dit *minimal* s'il est fermé, invariant et minimal (au sens de l'inclusion) pour ces propriétés ; une orbite est dite *minimale* si son adhérence est un minimal. On rappelle que la *classe* d'une orbite O, qu'on note $C\ell(O)$, est la réunion des orbites O' telles que $\overline{O}' = \overline{O}$. Bien sûr $C\ell(O) = \{x \in E : \overline{G(x)} = \overline{O}\}$. On a les propriétés qui suivent.

i) Supposons O propre ; alors $C\ell(O) = O$.

ii) L'adhérence de O est un ensemble minimal si, et seulement si, $\overline{O} = C\ell(O)$.

iii) Pour toute orbite O, on a $\overline{O} = \overline{C\ell(O)}$.

Le théorème qui suit donne quelques propriétés qualitatives des groupes équicontinus d'homéomorphismes d'un espace métrique E (c'est le cas des groupes d'isométries par exemple). Le groupe Homéo(E) des homéomorphismes de E sera muni de la topologie C^0 (appelée aussi *topologie compacte-ouverte*). Tout ce qui suit a été établi dans [E33].

3.18.1. Théorème. *Soit G un groupe équicontinu d'homéomorphismes d'un espace métrique E. On a les propriétés suivantes.*

1) *Toute orbite O est minimale.*

2) *Si toute orbite est fermée, l'espace des orbites E/G est séparé.*

3) *L'espace des classes d'orbites $E/\widetilde{G}$ est toujours séparé.*

4) *Si E est compact, l'adhérence $\overline{G}$ de G dans* Homéo(E) *est un sous-groupe compact d'homéomorphismes de E et, pour tout $x \in E$, on a $\overline{G}(x) = \overline{G(x)}$.*

3.18.2. Corollaire. *Soit G un groupe équicontinu d'homéomorphismes d'un espace métrique connexe E. Alors :*

1) *Si G a une orbite O localement dense, toute orbite est partout dense.* (En effet, dans ce cas $\overline{O}$ est un ensemble minimal d'intérieur non vide.)

2) *Toute orbite O propre est fermée.* (En effet, dans ce cas $\overline{O} \setminus O$ est un fermé invariant strictement contenu dans l'ensemble minimal $\overline{O}$ et par suite $\overline{O} \setminus O$ est vide.)

3) *Si E est compact et si G a une orbite O localement dense, le groupe $\overline{G}$ opère transitivement ; cela signifie que si $x \in O$ on a :*

$$\overline{G}(x) = \overline{G(x)} = \overline{O} = E.$$

3.18.3. Remarques

i) Sous les hypothèses du théorème 1 et si E est compact, l'espace $E/\widetilde{G}$ des classes des orbites de G coïncide avec l'espace des orbites $E/\overline{G}$ de $\overline{G}$.

ii) Il existe un difféomorphisme $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ayant toutes ses orbites fermées non périodiques et l'espace des orbites $\mathbb{R}^2/f$ non séparé. Donc l'hypothèse d'équicontinuité dans le théorème 3.18.1 est substantielle.

3.18.4. Théorème. *Soit G un groupe dénombrable équicontinu d'homéomorphismes d'un espace vectoriel réel de dimension finie. Si G possède une orbite relativement compacte, toute orbite fermée est relativement compacte. On a le même résultat si E est un espace métrique compact connexe.*

Comme il existe un difféomorphisme $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ayant des orbites finies et des orbites fermées infinies, l'hypothèse d'équicontinuité est donc substantielle.

3.18.5. Théorème. *Soit G un groupe dénombrable d'isométries d'un espace vectoriel réel de dimension finie E. Supposons que toute orbite de G est finie ; alors le groupe G est fini.*

Dans [E33] nous y avons aussi étudié l'homotopie du groupe $\text{Homéo}_+(\mathbb{S}^1)$ des homéomorphismes du cercle $\mathbb{S}^1$ qui préservent l'orientation. On y donne une nouvelle démonstration élémentaire du fait que $\text{Homéo}_+(\mathbb{S}^1)$ se rétracte par déformation sur $\mathbb{S}^1$ vu comme sous-groupe constitué des rotations.

3.19. Équations cohomologiques

Un *système dynamique discret* (SDD en abrégé) est la donnée d'un couple (M, γ) où M est une variété et γ un difféomorphisme de M. On dira que deux SDD (M, γ) et (N, σ) sont *conjugués* s'il existe un difféomorphisme $h : M \longrightarrow N$ tel que $\sigma = h \circ \gamma \circ h^{-1}$. Un *système dynamique continu* (SDC en abrégé) est la donnée d'un couple (M, X) où M est une variété et X un champ de vecteurs sur M. Deux SDC (M, X) et (N, Y) sont dits *conjugués* s'il existe un difféomorphisme $h : M \longrightarrow N$ tel que $h_*(X) = Y$.

On se donne un SDD (M, γ) et un SDC (M, X). On note $C^\infty(M)$ l'espace des fonctions complexes de classe C^∞ sur M. On s'intéresse aux problèmes suivants. Soit $g \in C^\infty(M)$.

(1) Existe-t-il $f \in C^\infty(M)$ telle que $f - f \circ \gamma = g$?

(2) Existe-t-il $f \in C^\infty(M)$ telle que $X \cdot f = g$?

L'équation (1) est appelée *équation cohomologique discrète* du SDD (M, γ) et la (2) *équation cohomologique continue* du SDC (M, X). La résolution de ces deux équations est un problème important en théorie des systèmes dynamiques. Mais il est très difficile d'attaque dans la plupart des cas.

Nous avons introduit la notion de distibution invariante par un difféomrphisme γ (c'est un cas particulier de courant invariant). Introduisons maintenant la notion de distribution invariante par un champ de vecteurs X. L'opérateur $X : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$ admet une extension naturelle aux distributions $X : T \in \mathcal{D}'(M) \longrightarrow X \cdot T \in \mathcal{D}'(M)$ avec $\langle X \cdot T, \varphi\rangle = -\langle T, X \cdot \varphi\rangle$. Une distribution T est dite *invariante* par X ou X-*invariante* si elle vérifie $X \cdot T = 0$ *i.e.* elle est nulle sur l'image de $X : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$ qui est

l'espace des *divergences* de X. Une condition nécessaire (et non suffisante en général) pour que l'équation $X \cdot f = g$ admette une solution f est donc $\langle T, g\rangle = 0$ pour toute distribution T invariante par X. De même, une condition nécessaire (et non suffisante en général) pour que l'équation cohomologique discrète $f - f \circ \gamma = g$ associée à un difféomorphisme $\gamma : M \longrightarrow M$ admette une solution f est donc $\langle T, g\rangle = 0$ pour toute distribution T invariante par γ.

Je vais énoncer, de façon assez brève, les résultats essentiels que j'ai obtenu dans [E35] en collaboration avec A. Dehghan-Nezhad.

1 - Soit X un champ de vecteurs sans singularités définissant un flot riemannien $\mathcal{F}$ (qu'on supposera transversalement orientable pour simplifier) sur une variété complète M. Alors, comme on l'a déjà vu, ce flot se relève au fibré des repères orthonormés directs transverses $R = \mathrm{SO}(n) \longrightarrow M^{\#} \xrightarrow{p} M$ en un flot transversalement parallélisable $\mathcal{F}^{\#}$ (défini aussi par un champ de vecteurs sans singularités $X^{\#}$ tel que $p_*(X^{\#}) = X$). L'adhérence de toute feuille de $\mathcal{F}^{\#}$ est alors un tore sur lequel $\mathcal{F}^{\#}$ est défini par un champ de vecteurs linéaire (*cf.* [Ca]). Cette adhérence se projette par p sur l'adhérence d'une feuille de $\mathcal{F}$ et le flot induit sur cette adhérence est aussi linéaire. On dira que $\mathcal{F}$ est *diophantien* si $\mathcal{F}^{\#}$ l'est (cela signifie que le vecteur qui définit le champ linéaire dans chaque fibre est diophantien). On a un diagramme commutatif :

$$
\begin{array}{ccc}
C^\infty(M^{\#}) & \xrightarrow{X^{\#}} & C^\infty(M^{\#}) \\
\sigma \downarrow & & \downarrow \sigma \\
C^\infty_R(M^{\#}) & \xrightarrow{X^{\#}} & C^\infty_R(M^{\#}) \\
p^* \uparrow & & \uparrow p^* \\
C^\infty(M) & \xrightarrow{X} & C^\infty(M).
\end{array}
\tag{27}
$$

L'équation cohomologique continue du SDC (M, X) est donc équivalente à l'équation cohomologique continue $X^{\#} \cdot f^{\#} = g^{\#}$ du SDC $(M^{\#}, X^{\#})$ équivariante sous l'action du groupe R ; cela signifie qu'on se donne $g^{\#} \in C^\infty_R(M^{\#})$ et on cherche $f^{\#} \in C^\infty_R(M^{\#})$ telle que $X^{\#} \cdot f^{\#} = g^{\#}$. Cette équation admet une solution $f^{\#} \in C^\infty(M^{\#})$ si, et seulement si, l'intégrale $\int_{F^{\#}} p^*(g)$ de $g^{\#}$ sur la fibre de la fibration basique $F^{\#} \hookrightarrow M^{\#} \xrightarrow{\pi^{\#}} W$ est nulle. Si cette solution n'est pas R-invariante, on la remplace par sa moyenne $\sigma(f^{\#})$ sur le groupe R qui en est une. Pour toute fonction $f \in C^\infty(M)$, on pose :

$$
I(f) = (p^*)^{-1}\left(\int_{F^{\#}} p^*(f)\right) \tag{28}
$$

(c'est l'intégrale de la fonction $p^*(f)$ sur la fibre de $\pi^{\#}$). La quantité $\int_{F^{\#}} p^*(f)$ est une fonction C^∞, $\mathcal{F}^{\#}$-basique sur $M^{\#}$ et invariante par l'action de R, donc son image réciproque par p^* est une fonction C^∞ sur M, basique pour le feuilletage $\mathcal{F}$. L'application I est donc en fait à valeurs dans $C^\infty(M/\mathcal{F})$; c'est une surjection de l'espace de Fréchet $C^\infty(M)$ sur l'espace de Fréchet $C^\infty(M/\mathcal{F})$. On a alors le :

3.19.1. Théorème. *Soit $\mathcal{F}$ un flot riemannien complet sur M défini par un champ X. On suppose $\mathcal{F}$ diophantien. Alors l'équation cohomologique continue $X \cdot f = g$ a une*

solution si, et seulement si, on a $I(g) = 0$. *L'espace* $H^1_{\mathcal{F}}(M)$ *est canoniquement isomorphe à l'espace* $C^\infty(M/\mathcal{F}) \otimes \chi$ *qui est aussi isomorphe à* $C^\infty_R(W)$.

Corollaire immédiat : *L'espace* $\mathcal{D}'_X(M)$ *des distributions sur* M *invariantes par le champ* X *est canoniquement isomorphe à l'espace* $\mathcal{D}'_R(W)$ *des distributions sur* W *invariantes par le groupe compact* R.

2 - Soient M une variété compacte et $\gamma : M \longrightarrow M$ un difféomorphisme. On note (x,t) les coordonnées d'un point z de $\widetilde{N} = M \times \mathbb{R}$ et $\widetilde{X}$ le champ $\frac{\partial}{\partial t}$; $\widetilde{X}$ est invariant par le difféomorphisme $(x,t) \in M \times \mathbb{R} \longmapsto (\gamma(x), t+1) \in M \times \mathbb{R}$ et induit donc un champ de vecteurs X partout non nul sur la variété quotient $N = M \times \mathbb{R}/(x,t) \simeq (\gamma(x), t+1)$. La deuxième projection $\widetilde{\pi} : \widetilde{N} = M \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est équivariante par rapport aux actions du groupe $\mathbb{Z}$: $\tau_k : t \in \mathbb{R} \longrightarrow t + k \in \mathbb{R}$ et $(\gamma^k, \tau_k) : (x,t) \in \widetilde{N} \longrightarrow (\gamma^k(x), t+k) \in \widetilde{N}$; cela signifie que, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{N} & \stackrel{(\gamma^k,\tau_k)}{\longrightarrow} & \widetilde{N} \\ \widetilde{\pi}\downarrow & & \downarrow\widetilde{\pi} \\ \mathbb{R} & \stackrel{\tau_k}{\longrightarrow} & \mathbb{R} \end{array}$$

Donc $\widetilde{\pi}$ induit une submersion $\pi : N \longrightarrow \mathbb{S}^1$; c'est en fait une fibration plate de monodromie γ. Notons $\mathcal{F}$ le flot défini par X ; on dit que $(N, \mathcal{F})$ est la *suspension* de (M, γ). On a le :

3.19.2. Théorème. *L'équation cohomologique continue* $X \cdot f = g$ *a une solution sur* N *si, et seulement si, l'équation cohomologique discrète* $K - K \circ \gamma = \Phi$ *a une solution sur* M *pour* $\Phi(x) = \int_0^1 g(x,t)dt$.

Corollaire immédiat : *La transposée* ζ' *de l'application linéaire continue et surjective* ζ *qui à* $g \in C^\infty(N)$ *associe* $\zeta(g) = \int_0^1 g(.,t)dt \in C^\infty(M)$ *est un isomorphisme de* $\mathcal{D}'_\gamma(M)$ *sur* $\mathcal{D}'_X(N)$.

3 - Soit $A \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$ une matrice diagonalisable sur le corps des nombres réels ayant toutes ses valeurs propres positives. On supposera qu'elle est *hyperbolique i.e.* 1 n'est pas dans son spectre. On notera B la transposée de A.

La matrice B agit linéairement sur le réseau $\mathbb{Z}^n$. Soit Σ une partie de ce réseau contenant un et un seul représentant de chaque orbite de cette action. L'orbite de $\mathbf{0}$ est réduite à $\{\mathbf{0}\}$. Il est clair que $\mathbb{Z}^n = \bigcup_{\mathbf{m} \in \Sigma} \{B^k(\mathbf{m}) : k \in \mathbb{Z}\}$ est une partition de $\mathbb{Z}^n$.

Pour tout $\mathbf{m} \in \Sigma$, soit $V_{\mathbf{m}}$ le sous-espace de $C^\infty(\mathbb{T}^n)$ engendré par la famille de fonctions $\{\Theta_{B^k\mathbf{m}} : k \in \mathbb{Z}\}$ *i.e.* les fonctions $f \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ qui s'écrivent : $f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f_{B^k\mathbf{m}}\Theta_{B^k\mathbf{m}}$. L'espace $V_{\mathbf{0}}$ est égal à $\mathbb{C}$ et nous avons une décomposition orthogonale :

$$C^\infty(\mathbb{T}^n) = \bigoplus_{\mathbf{m}\in\Sigma} V_{\mathbf{m}}.$$

L'action du groupe $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{T}^n$ par la matrice A induit une action sur $C^\infty(\mathbb{T}^n)$ définie par l'application $f \in C^\infty(\mathbb{T}^n) \longrightarrow f \circ A \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$. Si la fonction $f \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ est

de la forme $f = \sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^n} f_{\mathbf{m}}\Theta_{\mathbf{m}}$, alors $f \circ A = \sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^n} f_{\mathbf{m}}\Theta_{B\mathbf{m}}$. L'action préserve chaque $V_{\mathbf{m}}$ (et bien sûr aussi le sous-espace $V_{\mathbf{0}} = \mathbb{C}$). Pour $f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f_{B^k\mathbf{m}}\Theta_{B^k\mathbf{m}} \in V_{\mathbf{m}}$, on a $f \circ A = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f_{B^k\mathbf{m}}\Theta_{B^{k+1}\mathbf{m}}$. Pour tout $\mathbf{m} \in \Sigma$, soit $\pi_{\mathbf{m}} : C^\infty(\mathbb{T}^n) \longrightarrow V_{\mathbf{m}}$ la projection orthogonale sur le sous-espace $V_{\mathbf{m}}$ et $\ell_{\mathbf{m}} : C^\infty(\mathbb{T}^n) \longrightarrow \mathbb{C}$ la forme linéaire continue définie par :

$$\ell_{\mathbf{m}}(f) = \pi_{\mathbf{m}}(f)(\mathbf{0}) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f_{B^k\mathbf{m}}.$$

L'orbite $\Lambda_{\mathbf{0}}$ étant réduite à $\mathbf{0}$, la forme $\ell_{\mathbf{0}}$ n'est rien d'autre que $\ell_{\mathbf{0}}(f) = \int_{\mathbb{T}^n} f(x)dx = f_{\mathbf{0}}$. On pose $\mathcal{H} = \bigcap_{\mathbf{m}\in\Sigma}$ (Noyau de $\ell_{\mathbf{m}}$) qui est un sous-espace fermé de $C^\infty(\mathbb{T}^n)$. Le théorème qui suit donne les conditions exactes de résolution de l'équation cohomologique discrète pour $(\mathbb{T}^n, A)$.

3.19.3. Théorème. *Il existe un opérateur borné $L : \mathcal{H} \longrightarrow C^\infty(\mathbb{T}^n)$ tel que, pour toute fonction $\Phi \in \mathcal{H}$, la fonction $K = L(\Phi)$ est solution de l'équation cohomologique discrète $K - K \circ A = \Phi$.*

Corollaire immédiat : *L'espace $\mathcal{D}'_A(\mathbb{T}^n)$ des distributions A-invariantes sur $\mathbb{T}^n$ est engendré par les formes linéaires continues $\ell_{\mathbf{m}} : f \in C^\infty(\mathbb{T}^n) \longmapsto \pi_{\mathbf{m}}(f)(\mathbf{0}) \in \mathbb{C}$ avec $\mathbf{m}$ variant dans Σ.*

Nous avons appliqué le théorème 3.19.3 pour résoudre l'équation cohomologique continue du flot d'Anosov associé à la matrice A. Mais d'abord une description explicite de la variété qui supporte ce champ paraît nécessaire.

On suspend le difféomorphisme linéaire $A : \mathbb{T}^n \longrightarrow \mathbb{T}^n$; on obtient la variété $\mathbb{T}^{n+1}_A$ qu'on a déjà rencontrée. On la reprend alors avec les champs de vecteurs $X = \frac{\partial}{\partial t}$ et $X_i = \lambda_i^t u_i$ où $i = 1, \cdots, n$. Comme toutes les valeurs propres $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ sont différentes de 1, le champ X définit un flot d'Anosov. C'est à son équation cohomologique que nous allons nous intéresser.

Tout élément de $C^\infty(\mathbb{T}^{n+1}_A)$ est une fonction C^∞ : $(x,t) \in \mathbb{T}^n \times \mathbb{R} \overset{f}{\longmapsto} f(x,t) \in \mathbb{C}$ qui vérifie en plus la condition d'invariance $f(A(x), t+1) = f(x,t)$. Elle se développe en série de Fourier :

$$f(x,t) = \sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^n} f_{\mathbf{m}}(t)\Theta_{\mathbf{m}}(x)$$

où les coefficients de Fourier (dépendant de manière C^∞ du paramètre t) vérifient les relations $f_{\mathbf{m}}(t+1) = f_{B\mathbf{m}}(t)$. Notons I l'application linéaire continue de $C^\infty(\mathbb{T}^{n+1}_A)$ dans $C^\infty(\mathbb{T}^n)$ qui à toute fonction g associe $I(g) = \int_0^1 g(\cdot, t)dt$.

3.19.4. Théorème. *Soit $g \in C^\infty(\mathbb{T}^{n+1}_A)$. L'équation cohomologique continue $X \cdot f = g$ a une solution $f \in C^\infty(\mathbb{T}^{n+1}_A)$ si, et seulement si, pour tout $\mathbf{m} \in \Sigma$, on a $\ell_{\mathbf{m}}(I(g)) = 0$. La*

solution est donnée, à une constante additive près, par la série :

$$f(x,t) = \sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^n} \left(\int_1^t g_{\mathbf{m}}(u)du - \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 g_{B^k\mathbf{m}}(u)du \right) e^{2i\pi\langle x,\mathbf{m}\rangle}. \tag{29}$$

Des versions plus générales du théorème 3.19.3 (pour l'un d'eux sur un groupe de Lie compact) ont été données dans [E41]. L'une d'elles reste pour le tore $\mathbb{T}^n$ mais le difféomorphisme en question est associé à une transformation affine.

Soit γ l'automorphisme affine de $\mathbb{T}^n$ donné par $\gamma(x) = A(x+a)$ où A est une matrice de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})$ *i.e.* A is est à coefficients entiers et de déterminant égal à 1 ou -1 et la constante $a = (a_1, \cdots, a_n)$ est un élément de $\mathbb{T}^n$ (vu comme un vecteur de $\mathbb{R}^n$).

Soient A' la transposée de A et B l'inverse de A'. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, B^k désigne la $|k|^{\text{ème}}$ puissance de B si $k \geq 0$ et celle de B^{-1} si $k < 0$. On définit la suite de matrices (S_k) indexée par $\mathbb{Z}$ comme suit :

$$\begin{cases} S_0 = 0 \\ S_{k+1} = S_k B + I. \end{cases}$$

Cette suite est facile à construire par récurrence. On pose :

$$a^{\perp} = \{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n : \langle \mathbf{m}, a\rangle = 0\} \quad \text{et} \quad F_B = \{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n : B(\mathbf{m}) = \mathbf{m}\}.$$

Alors $a^{\perp}$ et F_B sont des sous-groupes de $\mathbb{Z}^n$. Dorénavant, on supposera que les hypothèse suivantes sont satisfaites :

La matrice B n'a pas de vecteur fixe $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n$ i.e. aucun vecteur $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n$ ne satisfait $B(\mathbf{m}) = \mathbf{m}$.

L'action de γ sur une fonction $f : \mathbb{T}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ est donnée par :

$$f \circ \gamma = \sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^n} e^{2i\pi\langle A'(\mathbf{m}),a\rangle} f_{\mathbf{m}} \Theta_{A'(\mathbf{m})} = \sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^n} e^{2i\pi\langle \mathbf{m},a\rangle} f_{B(\mathbf{m})} \Theta_{\mathbf{m}}.$$

L'équation cohomologique $f - f \circ \gamma = g$ donne lieu au système :

$$f_{\mathbf{m}} - e^{2i\pi\langle \mathbf{m},a\rangle} f_{B(\mathbf{m})} = g_{\mathbf{m}} \quad \text{pour} \quad \mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n.$$

Il est alors clair que le noyau L de l'opérateur $\delta(f) = f - f \circ \gamma$ est engendré par $\Theta_{\mathbf{m}}$ avec $\mathbf{m}$ variant dans le sous-groupe $a^{\perp} \cap F_B$ *i.e.* :

$$L = \left\{ f \in C^{\infty}(\mathbb{T}^n) : f_{\mathbf{m}} = 0 \text{ for } \mathbf{m} \notin a^{\perp} \cap F_B \right\}.$$

Une condition nécessaire pour que le système $f_{\mathbf{m}} - e^{2i\pi\langle \mathbf{m},a\rangle} f_{B(\mathbf{m})} = g_{\mathbf{m}}$ (avec $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n$) admette une solution est donc $g_{\mathbf{m}} = 0$ pour $\mathbf{m}$ dans $a^{\perp} \cap F_B$. Soit V le sous-espace vectoriel de $C^{\infty}(\mathbb{T}^n)$ defini par :

$$V = \left\{ f \in C^{\infty}(\mathbb{T}^n) : f_{\mathbf{m}} = 0 \text{ pour } \mathbf{m} \in a^{\perp} \cap F_B \right\}.$$

L'opérateur $\delta : C^\infty(\mathbb{T}^n) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{T}^n)$ préserve chaque facteur de la décomposition :

$$C^\infty(\mathbb{T}^n) = V \oplus L.$$

On peut donc se limiter à étudier l'opérateur δ sur V. Pour $g \in V$ donnée, le système en question a comme solutions formelles :

$$f^+_{\mathbf{m}} = \begin{cases} 0 & \text{si } \mathbf{m} \in a^\perp \cap F_B \\ \frac{g_{\mathbf{m}}}{1-e^{2i\pi\langle \mathbf{m},a\rangle}} & \text{si } \mathbf{m} \in \left(a^\perp\right)^c \cap F_B \\ f_{\mathbf{m}} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{2i\pi\langle S_k(\mathbf{m}),a\rangle} g_{B^k(\mathbf{m})} & \text{sinon.} \end{cases}$$

ou :

$$f^-_{\mathbf{m}} = \begin{cases} 0 & \text{si } \mathbf{m} \in a^\perp \cap F_B \\ \frac{g_{\mathbf{m}}}{1-e^{2i\pi\langle \mathbf{m},a\rangle}} & \text{si } \mathbf{m} \in \left(a^\perp\right)^c \cap F_B \\ f_{\mathbf{m}} = -\sum_{k=-1}^{-\infty} e^{2i\pi\langle S_k(\mathbf{m}),a\rangle} g_{B^k(\mathbf{m})} & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'injectivité de δ force ces deux solutions à coïncider, ce qui impose la condition :

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{2i\pi\langle S_k(\mathbf{m}),a\rangle} g_{B^k(\mathbf{m})} = 0.$$

Soit Σ_0 le sous-ensemble de $\mathbb{Z}^n$ contenant un et un seul élément de chaque orbite de l'action de B sur $\mathbb{Z}^n \backslash F_B$. On pose $\Sigma = \left(a^\perp \cap F_B\right) \cup (\Sigma_0 \setminus F_B)$. Pour tout $\mathbf{m} \in \Sigma$, on note $T_{\mathbf{m}}$ la fonctionnelle linéaire $C^\infty(\mathbb{T}^n) \longrightarrow \mathbb{C}$ definie par :

$$\langle T_{\mathbf{m}}, g\rangle = \begin{cases} \int_{\mathbb{T}^n} \overline{\Theta}_{\mathbf{m}}(x) g(x) dx = g_{\mathbf{m}} & \text{pour } \mathbf{m} \in a^\perp \cap F_B \\ \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{2i\pi\langle S_k(\mathbf{m}),a\rangle} g_{B^k(\mathbf{m})} & \text{pour } \mathbf{m} \in \Sigma_0 \setminus F_B \end{cases}$$

où $\overline{\Theta}_{\mathbf{m}}(x) = e^{-2i\pi\langle \mathbf{m},x\rangle}$. Un calcul immédiat montre que $T_{\mathbf{m}}$ est continue et vérifie la relation $\langle T_{\mathbf{m}}, f \circ \gamma\rangle = \langle T_{\mathbf{m}}, f\rangle$; donc cette fonctionnelle est une distribution γ-invariante sur $\mathbb{T}^n$.

Notons $N_{\mathbf{m}}$ le noyau de $T_{\mathbf{m}}$ et $\mathcal{N}$ l'intersection de tous les $N_{\mathbf{m}}$; $\mathcal{N}$ est un sous-espace fermé de $C^\infty(\mathbb{T}^n)$.

3.19.5. Théorème. *L'adhérence de l'image de l'opérateur $\delta : C^\infty(\mathbb{T}^n) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{T}^n)$ est égale au sous-espace $\mathcal{N}$. Ceci montre que l'espace $\overline{H}^1(\mathbb{Z}, C^\infty(G))$ (de cohomologie réduite du groupe discret $\mathbb{Z}$ à valeurs dans $C^\infty(\mathbb{T}^n)$) est isomorphe à $C^\infty(\mathbb{T}^n)/\mathcal{N}$ et que l'espace $\mathcal{D}_\gamma$ des distributions γ-invariantes sur $\mathbb{T}^n$ est engendré par les fonctionnelles $T_{\mathbf{m}}$.*

4 - Soit E un espace de Fréchet complexe dont la topologie est définie par une famille séparante de semi-normes $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On se donne un opérateur continu $T : E \longrightarrow E$ (*i.e.* une application linéaire continue). On dira que T est *inversible* s'il existe un opérateur continu $S : E \longrightarrow E$ tel que $ST = TS = I$ (I est l'identité de E). On appelle *valeur spectrale* de T tout nombre complexe λ tel que l'opérateur $T - \lambda I$ ne soit pas inversible. L'ensemble des valeurs spectrales de T est le *spectre* de T ; on le note $\sigma(T)$. Si E est un Banach, $\sigma(T)$ est une partie fermée de $\mathbb{C}$ contenue dans le disque $D(0, |||T|||)$ où $|||T|||$ est la norme de l'opérateur T. Ce qui n'est pas toujours le cas sur un Fréchet quelconque. On appelle *valeur propre* de T tout nombre complexe λ tel que l'opérateur $T - \lambda I$ ne soit pas injectif. Tout vecteur x non nul de E qui vérifie $Tx = \lambda x$ est appelé *vecteur propre* associé à la valeur propre λ. Bien sûr, toute valeur propre est une valeur spectrale.

Soient maintenant Σ une surface de Riemann non compacte et $\mathcal{H}(\Sigma)$ l'espace des fonctions holomorphes $\Sigma \longrightarrow \mathbb{C}$ muni de la topologie C^0 qui en fait un espace de Fréchet. Soit γ un automorphisme de Σ. Alors γ définit un *opérateur de composition* :

$$f \in \mathcal{H}(\Sigma) \overset{T}{\longmapsto} f \circ \gamma \in \mathcal{H}(\Sigma)$$

sur $\mathcal{H}(\Sigma)$. C'est un automorphisme topologique de $\mathcal{H}(\Sigma)$ et donc $\lambda = 0$ est une valeur régulière de T. Une question se pose naturellement : *quelles sont les valeurs $\lambda \in \mathbb{C}^*$ qui constituent le spectre $\sigma(T)$ de T ? Les opérateurs $T - \lambda I$ sont-ils surjectifs ?* A priori la réponse à cette dernière question n'est pas si évidente mais nous allons voir qu'une simple remarque sur la cohomologie d'une variété de Stein à valeurs dans un faisceau analytique cohérent permet de donner presque immédiatement la réponse.

3.19.6. Théorème. [E40] *Soient Σ une surface de Riemann non compacte et γ un automorphisme de Σ agissant de façon libre et propre et tel que la surface de Riemann $M = \Sigma/\gamma$ soit non compacte. Alors :*

i) Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, l'opérateur $T - \lambda I$ est surjectif i.e. l'équation cohomologique $Tf - \lambda f = g$ admet une solution $f \in \mathcal{H}(\Sigma)$ pour toute donnée $g \in \mathcal{H}(\Sigma)$.

ii) On suppose Σ simplement connexe. Alors tout nombre complexe λ non nul est valeur propre de l'opérateur de composition T induit par γ sur $\mathcal{H}(\Sigma)$. Le sous-espace propre $\mathcal{H}_\lambda(\Sigma)$ associé à λ est isomorphe à $\mathcal{H}(M)$.

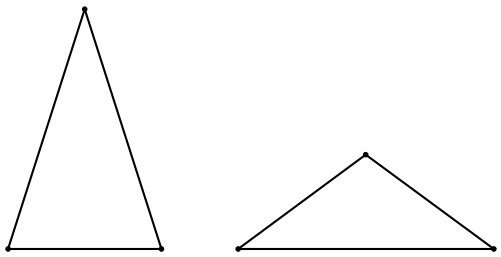
Si on pose $\Sigma = \mathbb{C}$, $\gamma(z) = z + 1$ et $\lambda = 1$, on récupère le théorème de Guichard [Gu].

4. COLORIAGE DE QUASI-CRISTAUX DYNAMIQUE SYMBOLIQUE

4.1. Coloriage

Un *pavage* de l'espace euclidien $\mathbb{E}^n$ ($\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire usuel) est une partition $\mathcal{P}$ de $\mathbb{R}^n$ par des polytopes (pour simplifier) n'ayant en commun que leurs faces. Un élément P de $\mathcal{P}$ sera appelé *pavé*. Un *automorphisme* de $\mathcal{P}$ est une isométrie $\sigma : \mathbb{E}^n \longrightarrow \mathbb{E}^n$ qui envoie pavé sur pavé ; l'ensemble $\mathrm{Aut}(\mathcal{P})$ des automorphismes de $\mathcal{P}$ est un sous-groupe du groupe $\mathrm{Iso}(\mathbb{E}^n)$ des isométries de $\mathbb{R}^n$. On dira que $\mathcal{P}$ est *périodique* si $\mathrm{Aut}(\mathcal{P})$ contient un sous-groupe $\mathcal{T}$ isomorphe au réseau $\mathbb{Z}^n$ de $\mathbb{R}^n$ *i.e.* s'il contient n translations $\tau_1, \cdots, \tau_n$ linéairement indépendantes. En particulier un tel pavage peut être bâti à partir d'un nombre fini de types de pavés. La dimension $n = 2$ offre une image plus précice : celle d'un carrelage à l'aide d'un seul type de carreaux par exemple. Les exemples qui vont nous intéresser ne sont pas périodiques mais presque.

Un pavage $\mathcal{P}$ est dit *répétitif* s'il peut être construit à partir d'un nombre fini de pavés et possède la propriété d'*isomorphie locale* : n'importe quel "morceau" de $\mathbb{E}^n$ dans une région bornée se répète dans n'importe quelle autre région de taille suffisamment grande. Beaucoup d'exemples intéressants de pavages sont *hiérarchiques* dans le sens où il y a un certain nombre de règles qui permettent de passer d'un pavage $\mathcal{P}_0$ à un autre pavage similaire $\mathcal{P}_1$ avec le même type de pavés mais d'une taille plus grande (dans un rapport τ) ; les pavés de $\mathcal{P}_1$ sont des unions de ceux de $\mathcal{P}_0$. La réitération du procédé permet de construire un pavage $\mathcal{P}_2$ dans un rapport de taille τ^2 et ainsi de suite... Le *pavage de Penrose-Robinson* du plan bâti à l'aide des deux triangles ci-dessous en est l'illustration parfaite !



Les deux triangles sont isocèles. Les deux côtés égaux du premier mesurent $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (nombre d'or) et le troisième vaut 1. Le deuxième a ses deux côtés égaux qui mesurent 1 et le troisième mesure τ. Ces deux triangles collés de deux manières différentes le long de leurs côtés donnent deux autres qui leur sont semblables mais avec des côtés multipliés par τ (cf. (Fig.5))).

Fig.4

Nous nous sommes intéressés au coloriage d'un pavage répétitif et hiérarchique $\mathcal{P}$. On appelle *coloriage* de $\mathcal{P}$ toute application surjective $\phi : \mathcal{P} \longrightarrow M$ où M est un ensemble fini M (ensemble de couleurs). Supposons qu'un groupe fini G agit sur M à l'aide d'une application $\sigma : G \times M \longrightarrow M$. On dira que le coloriage $\phi : \mathcal{P} \longrightarrow M$ admet une *symétrie locale* (ou simplement a une (G, σ, M)-*symétrie*) si, pour tout $g \in G$ et tout morceau Σ du pavage $\mathcal{P}$ dans n'importe quelle région bornée, il existe $R > 0$ tel que toute boule de rayon R contient un morceau Σ' isométrique à Σ mais avec des couleurs obtenues à partir de celles des pavés de Σ permutées par g. Notre résultat fondamental est alors le suivant :

4.1.1. Théorème [E25]. *Soit $\mathcal{P}$ un pavage répétitif et hiérarchique. Alors, pour tout triplet (G, σ, M), il existe un coloriage $\phi : \mathcal{P} \longrightarrow M$ ayant une (G, σ, M)-symétrie.*

Pour décrire la suite du travail, nous aurons besoin d'une notion d'*orientation* sur l'ensemble des pavés (du pavage de départ $\mathcal{P}_0$) d'un pavage répétitif $\mathcal{P} = (\mathcal{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Rappelons qu'il n'y a qu'un nombre fini de types de pavé qui permettent (en suivant ceraines règles) de paver l'espace euclidien ; pour simplifier (et ceci sera sans perte de généralité), on va supposer qu'il y en a deux : les petits notés δ_S et les grands notés δ_L. Soient H un groupe fini et p un entier strictement positif. Soit δ_p un pavé (grand ou petit) de $\mathcal{P}_p$ et notons $\mathcal{U}_{\delta_p}$ l'ensemble de ses $\mathcal{P}_0$-pavés. Une *H-orientation relative* de ces pavés est juste une fonction $\Psi_H : \mathcal{U}_{\delta_p} \longrightarrow H$.

On définit $\Psi_H(\delta)$ pour n'importe quel pavé δ de n'importe lequel des $\mathcal{P}_m$ de la façon suivante. (On dira que $\Psi_H(\delta)$ est la *H-orientation relative* de δ.) Le pavé δ est contenu dans un unique pavé δ_{m+p} de $\mathcal{P}_{m+p}$; sa position relative dans δ_{m+p} détermine un unique élément δ' de $\mathcal{U}_{\delta_p}$; on pose alors $\Psi_H(\delta) = \Psi_H(\delta')$. Étant donnée une H-orientation relative Ψ_H, on dira qu'une fonction $\Phi_H : \mathcal{P}_0 \longrightarrow H$ est une *H-orientation globale* des pavés de $\mathcal{P}_0$ si la propriété qui suit est satisfaite : pour deux pavés distincts $\alpha, \beta \in \mathcal{P}_0$, soit m un entier tel que α et β appartiennent au même pavé de $\mathcal{P}_{mp}$; on considère les suites de pavés :

$$\alpha = \alpha_0, \alpha_p, \cdots, \alpha_{mp} = \beta_{mp}, \beta_{(m-1)p}, \cdots, \beta_p, \beta_0 = \beta$$

tels que α_{ip} (resp. β_{jp}) est l'unique pavé de $\mathcal{P}_{ip}$ contenant $\alpha_{(i-1)p}$ (resp. $\beta_{(j-1)p}$). La propriété qu'on demande est alors :

$$\Psi_H(\alpha_{mp}) \cdot \ldots \Psi_H(\alpha_p) \cdot \Psi_H(\alpha_{mp}) \cdot \Phi_H(\alpha)^{-1} = \Psi_H(\beta_{mp}) \cdot \ldots \Psi_H(\beta_p) \cdot \Psi_H(\beta_{mp}) \cdot \Phi_H(\beta)^{-1}.$$

On peut toujours trouver une *H-orientation globale* $\Phi_H : \mathcal{P}_0 \longrightarrow H$ à partir de n'importe quelle H-orientation relative Ψ_H satisfaisant la condition qu'on vient de mentionner. En effet, on fixe $\alpha_0 \in \mathcal{P}_0$, on pose $\Phi_H(\alpha_0) = 1$ (élément neutre de H) et, pour n'importe quel $\beta \in \mathcal{P}_0$, on pose :

$$\Phi_H(\beta) = \Psi_H(\alpha_0)^{-1}\Psi_H(\alpha_p)^{-1} \ldots \Psi_H(\alpha_{mp})^{-1} \cdot \Psi_H(\beta_{mp}) \ldots \Psi_H(\beta_p)\Psi_H(\beta_0 \tag{30}$$

où $\alpha = \alpha_0, \alpha_p, \cdots, \alpha_{mp} = \beta_{mp}, \beta_{(m-1)p}, \cdots, \beta_p, \beta_0 = \beta$ vérifient les même conditions que précédemment. On a la propriété : l'image $H' = \Phi_H(\mathcal{P}_0)$ est un sous-groupe ; on peut donc au besoin remplacer H par H', ce qui nous amène à nous autoriser à supposer que Φ_H

est surjective. On peut même choisir Φ_H avec des propriétés en plus qui nous sont utiles mais que nous ne décrirons pas (nous n'en aurons pas besoin pour énoncer les résultats).

Lorsqu'une H-orientation globale Φ_H est donnée on peut aussi considérer des coloriages où les pavés ne peuvent recevoir que des couleurs permises par leur orientation. Plus précisément, soit G un groupe fini agissant sur M (ensemble des couleurs). Soient $h \in H$ et M_h une partie non vide de M G-invariante. On dira que le coloriage $\mathcal{P}_0 \longrightarrow M$ est *isolé* si tout pavé ayant l'orientation h n'est coloré que par les éléments de M_h. Autrement on dira que le coloriage est *mixte*.

Soit maintenant $\Phi_H : \mathcal{P}_0 \longrightarrow H$ une H-orientation globale. Pour $h \in H$, soit M_h la partie G-invariante de M des couleurs permises aux pavés ayant l'orientation h ; les G-orbites de M_h seront notées $C_{h,1}, \cdots, C_{h,N}$ (N dépend de h bien sûr). Supposons que l'on veuille que les couleurs $C_{h,1}, \cdots, C_{h,N}$ apparaissent avec des fréquences $a_{h,1}, \cdots, a_{h,N}$ (entiers positifs) parmi les pavés ayant l'orientation h. Soient S_h une union disjointe de $a_{h,1}$ copies de $C_{h,1}$, $a_{h,2}$ copies de $C_{h,2}, \cdots$, $a_{h,N}$ copies de $C_{h,N}$ et $S = \prod_{h \in H} S_h$. Le groupe G agit sur S coordonnée par coordonnée. Soit k le cardinal de S, fixons une bijection de S avec $\{1, \cdots, k\}$ et identifions $(\mathrm{Aut}(S), S)$ à $(\mathfrak{S}_k, \{1, \cdots, k\})$ (où $\mathfrak{S}_k$ est le groupe des permutations de k éléments). D'après le théorème 4.1.1. il existe un coloriage $\overline{\varphi} : \mathcal{P}_0 \longrightarrow M$ de $\mathcal{P}_0$ ayant une $\mathfrak{S}_k$-symétrie. Pour tout $\delta \in \mathcal{P}_0$ ayant h comme H-orientation globale on pose alors $\varphi(\delta) = h$ coordonnée de $\overline{\varphi}$ qui est identifiée à un élément de M. On a alors le :

4.1.2. Théorème [E25]. *Le coloriage φ associé aux fréquences $\{(a_{h,1}, \cdots, a_{h,N}) : h \in H\}$ a les propriétés qui suivent* :

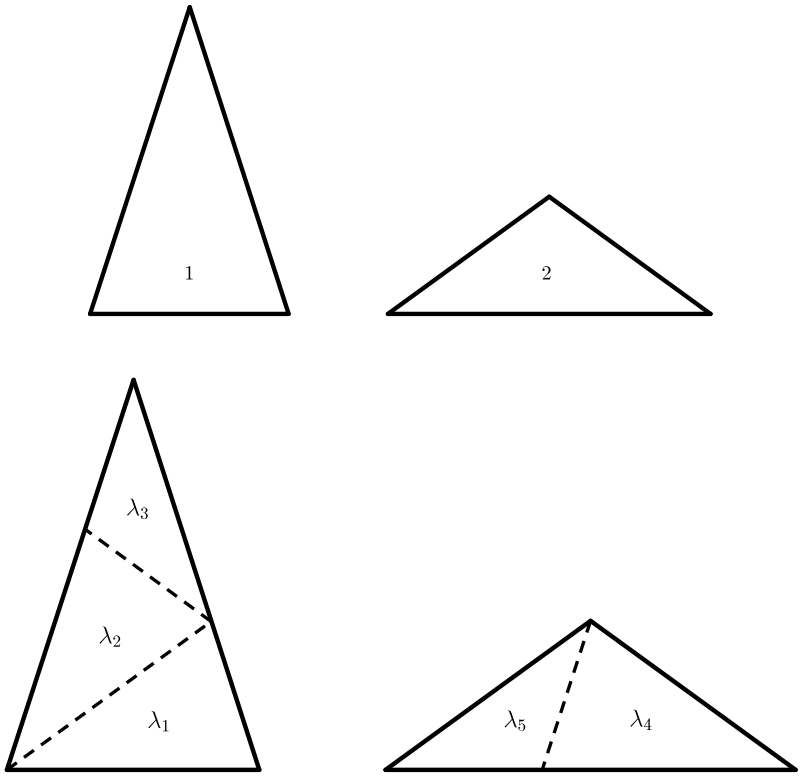
(i) *La (G, σ, M)-symétrie.*

(ii) *Soit $\alpha \in \mathcal{P}_0$ fixé. Soit δ_{mp} l'unique pavé de $\mathcal{P}_{mp}$ contenant α. Soient $h \in H$ et $C_{h,i}$ et $C_{h,j}$ deux G-orbites dans M_h. Soient $\mu \in C_{h,i}$, $\mu' \in C_{h,j}$, $A_{h,\mu}(\delta_{mp})$ (resp. $A_{h,\mu'}(\delta_{mp})$ le nombre de $\mathcal{P}_0$-pavés de δ_{mp} ayant la H-orientation h et la couleur μ (resp. μ'). Alors le rapport $\frac{A_{h,\mu}(\delta_{mp})}{A_{h,\mu'}(\delta_{mp})}$ tend vers $\frac{a_{h,i}}{a_{h,j}}$.*

iii) *Soient $h, h' \in H$. Soient $A_h(\delta_{mp})$ (resp. $A_h(\delta_{mp})$ le nombre des $\mathcal{P}_0$-pavés de δ_{mp} ayant la H-orientation h (resp. h'). Alors le rapport $\frac{A_h(\delta_{mp})}{A_h(\delta_{mp})}$ tend vers 1 lorsque m tend vers $+\infty$.*

On s'intéresse maintenant à un pavage hiérarchique $(\mathcal{T}_i, \mathcal{S}_i)_{i \in \mathbb{N}})$; $\mathcal{S}_i$ est l'ensemble des types de pavés qui constituent $\mathcal{P}_i$. Pour tout $i \in \mathbb{N}$, les $\mathcal{S}_i$ ont même nombre n de pavés et les pavés de $\mathcal{S}_{i+1}$ sont obtenus à partir de ceux de $\mathcal{S}_i$ en leur appliquant une homothétie de rapport $\tau > 1$. Un élément δ de $\mathcal{S}_i$ est composé d'éléments $\lambda_1, \cdots, \lambda_{k_\delta}$ de $\mathcal{S}_{i-1}$; les différents λ_ℓ constituent les positions relatives des pavés type de $\mathcal{S}_{i-1}$ dans ceux de $\mathcal{S}_i$. L'ensemble de ces positions relatives sera noté Λ (*cf.* (Fig.5) qui suit qui précise les choses dans le cas du pavage de Robinson-Penrose). On a deux applications $\pi_1, \pi_2 : \Lambda \longrightarrow \{1, \cdots, n\}$ qui ont la signification suivante : pour $\lambda \in \Lambda$, $\pi_2(\lambda)$ est le type de pavé de λ dans $\mathcal{S}_i$ et $\pi_1(\lambda)$ est son type dans $\mathcal{S}_{i-1}$ contenu dans λ. Ainsi le cardinal de Λ est $\sum_{i,j} a_{ij}$ où $a_{ij} = \#\{\lambda \in \Lambda : \pi_1(\lambda) = i, \pi_2(\lambda) = j\}$. La matrice $A = (a_{ij})_{i,j=1,\cdots,n}$ est appelée *matrice de multiplicité* du pavage hiérarchique $\mathcal{P} = (\mathcal{P}_i, \mathcal{S}_i)_{i \in \mathbb{N}}$. La (Fig.5) montre

clairement que le pavage de Robinson-Penrose a la matrice d'Anosov $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ comme matrice de multiplicité.



La deuxième configuration est obtenue en multipliant
la première par le nombre d'or $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Fig.5

Tout $\mathcal{P}_0$-pavé δ_0 est contenu dans un unique $\mathcal{P}_1$-pavé δ_1 ; la subdivision de δ_1 en $\mathcal{P}_0$-pavés ne dépend que de son type. Plus généralement, tout $\mathcal{P}_i$-pavé δ_i est contenu dans un unique $\mathcal{P}_{i+1}$-pavé δ_{i+1} et l'inclusion $\delta_i \subset \delta_{i+1}$ est semblable à l'inclusion $\delta_0 \subset \delta_1$, qui est simplement obtenue en gonflant la première par le rapport τ^i ! Et toute position $\delta_0 \subset \delta_1$ (ou $\delta_i \subset \delta_{i+1}$) détermine un unique élément $\lambda \in \Lambda$; Λ est donc le même ensemble (indépendant de i) décrivant les positions relatives des $\mathcal{P}_i$-pavés type dans les $\mathcal{P}_{i+1}$-pavés type.

L'espace du pavage

Un $\mathcal{P}_0$-pavé δ_0 est contenu dans un unique $\mathcal{P}_1$-pavé δ_1 lequel est contenu dans un unique $\mathcal{P}_2$-pavé δ_2 et ainsi de suite... On obtient ainsi une suite $(\delta_0, \delta_1, \cdots, \delta_i, \cdots)$. Si $(\delta'_0, \delta'_1, \cdots, \delta'_i, \cdots)$ est une autre telle suite, on a $\delta_i = \delta'_i$ pour i assez grand. On dira qu'une telle suite est *admissible*. Ceci nous permet de décrire l'espace du pavage.

Soit X l'espace des suites $(\lambda_1, \cdots, \lambda_i, \cdots)$ d'éléments de Λ telles que $\pi_2(\lambda_i) = \pi_1(\lambda_{i+1})$. On munit X de la topologie produit : X est une partie de $\Lambda^{\mathbb{N}}$ muni de la topologie produit

où chaque Λ est discret. On prend le quotient de X par la relation déquivalence :

$$z = (\lambda_1, \cdots, \lambda_i, \cdots) \text{ équivalente à } z' = (\lambda'_1, \cdots, \lambda'_i, \cdots) \Longleftrightarrow \exists i_0 : \lambda_i = \lambda'_i \text{ pour } i \geq i_0.$$

L'espace topologique quotient est l'*espace du pavage* hiérarchique $\mathcal{P} = (\mathcal{P}_i, \mathcal{S}_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Comme souvent dans le cas de l'espace des feuilles d'un feuilletage, sa topologie est mauvaise ; son étude se fait alors en lui associant une C^*-algèbre (*cf.* [Co]) dont nous allons donner la construction.

La C^*-algèbre de $\mathcal{P}$

Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $X_k = \{w = (\lambda_1, \cdots, \lambda_k) : \lambda_i \in \Lambda, \pi_2(\lambda_i) = \pi_1(\lambda_{i+1})\}$. On a une application de *troncature* $X_k \longrightarrow X_{k-1}$ qui, à toute suite $w = (\lambda_1, \cdots, \lambda_k)$ associe $\dot{w} = (\lambda_1, \cdots, \lambda_{k-1})$. Soit $\mathcal{A}_k$ l'algèbre des matrices complexes $(a_{ww'})$ indexées par X_k telles que $a_{ww'} = 0$ si $\pi_2(\lambda_k) \neq \pi_2(\lambda'_k)$ (ici $w = (\lambda_1, \cdots, \lambda_k)$ et $w = (\lambda'_1, \cdots, \lambda'_k)$). On a une inclusion naturelle $j_{k-1} : \mathcal{A}_{k-1} \hookrightarrow \mathcal{A}_k$ définie comme suit : soient $x = (a_{vv'})$ dans $\mathcal{A}_{k-1}$ (avec $v = (\lambda_1, \cdots, \lambda_{k-1})$ et $v' = (\lambda'_1, \cdots, \lambda'_{k-1})$) et $w = (\lambda_1, \cdots, \lambda_{k-1}, \lambda_k)$ et $w' = (\lambda'_1, \cdots, \lambda'_{k-1}, \lambda_k)$; l'image de x par j_{k-1} sera la matrice $(a_{ww'})$ avec :

$$a_{ww'} = \begin{cases} a_{\dot{w}\dot{w}'} & \text{si } \lambda_k = \lambda'_k \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La limite inductive (au sens linéaire et topologique) du système $(\mathcal{A}_k, j_k)$ est la C^*-*algèbre* du pavage hiérarchique $(\mathcal{P}_i, \mathcal{S}_i)$.

Soient maintenant $\mathfrak{G}$ un groupe fini et $\Psi : \Lambda \longrightarrow \mathfrak{G}$ une application dont l'image $\Psi(\Lambda)$ engendre $\mathfrak{G}$. On pose $\overline{S} = S \times \mathfrak{G}$ et :

$$\overline{\Lambda} = \left\{\{(s, \sigma), \lambda, (s', \sigma')\} \in \overline{S} \times \Lambda \times \overline{S} : \pi_1(\lambda) = s, \pi_2(\lambda) = s', \Psi(\lambda) = (\sigma')^{-1}\sigma\right\}.$$

Il existe alors un pavage hiérarchique $(\overline{\mathcal{P}}_i, \overline{\mathcal{S}}_i = \overline{\mathcal{S}})$ dont les pavés type sont les éléments de $\overline{\mathcal{S}}$ et l'ensemble de leurs positions relatives $\overline{\Lambda}$; les projections $\overline{\pi}_1, \overline{\pi}_2, \overline{\Lambda} \longrightarrow \overline{\mathcal{S}}$ (similaires à π_1 et π_2) sont données par :

$$\pi_1(\{(s, \sigma), \lambda, (s', \sigma')\}) = (s, \sigma) \text{ et } \pi_1(\{(s, \sigma), \lambda, (s', \sigma')\}) = (s', \sigma').$$

La matrice de multiplicité de $(\overline{\mathcal{P}}_i, \overline{\mathcal{S}}_i)$ a pour coefficients :

$$a_{(s,\sigma),(s',\sigma')} = \#\left\{\lambda \in \Lambda\times : \pi_1(\lambda) = s, \pi_2(\lambda) = s', \Psi(\lambda) = (\sigma')^{-1}\sigma\right\}.$$

L'ensemble $\overline{\Lambda}$ des positions relatives des $\overline{\mathcal{P}}_0$-pavés se décrit parfaitement bien à partir de Λ et de l'application Ψ.

Au pavage hiérarchique $(\overline{\mathcal{P}}_i, \overline{\mathcal{S}}_i)$ est associé, par le procédé qu'on a déjà utilisé, des espaces $(\overline{X}_k)$ et un système d'algèbres de matrices $(\overline{\mathcal{A}}_k, \overline{j}_k)$ qui donne, par limite inductive, la C^*-algèbre $\overline{\mathcal{A}}$ associée à $\overline{\mathcal{P}}$. En plus, on a une injection canonique $\eta : \mathcal{A} \hookrightarrow \overline{\mathcal{A}}$ et une

action de $\mathfrak{G}$ sur $\overline{\mathcal{A}}$ qui fixe chaque élément de $\eta(\mathcal{A})$. L'action de $\mathfrak{G}$ sur $\overline{\mathcal{A}}$ est induite par les actions sur $\overline{\Lambda}$ et $\overline{\mathcal{A}}_k$:

$$g \cdot \overline{\lambda} = g \cdot \{(s,\sigma),\lambda,(s',\sigma')\} = \{(s,g\sigma),\lambda,(s',g\sigma')\}$$

$$g \cdot \overline{w} = g \cdot (\overline{\lambda}_1,\cdots,\overline{\lambda}_k) = (g\cdot\overline{\lambda}_1,\cdots,g\cdot\overline{\lambda}_k)$$

$$(g\cdot x)_{\overline{w},\overline{w}'} = a_{g^{-1}\overline{w},g^{-1}\overline{w}'}$$

lorsque $\overline{w} = (\overline{\lambda}_1,\cdots,\overline{\lambda}_k)$ et $\overline{w}' = (\overline{\lambda}'_1,\cdots,\overline{\lambda}'_k)$ et $x = (a_{\overline{w},\overline{w}'})_{\overline{w},\overline{w}'\in\overline{X}_k}$.

Avant de continuer, faisons quelques rappels sur certains objets rattachés à une C^*-algèbre $\mathcal{A}$. Notons $* : x \in \mathcal{A} \longmapsto x^* \in \mathcal{A}$ l'involution sur $\mathcal{A}$. Un *projecteur* de $\mathcal{A}$ est un élément $p \in \mathcal{A}$ tel que $p^* = p$ (on dira que p est *involutif*) et $p^2 = p$. Deux projecteurs p_1 et p_2 sont dits *équivalents* s'il existe $y \in \mathcal{P}$ tel que $p_1 = yy^*$ et $p_2 = y^*y$. Un élément $x \in \mathcal{P}$ est dit *positif* s'il existe $y \in \mathcal{A}$ tel que $x = yy^*$; ceci permet de définir un ordre (partiel) sur $\mathcal{A}$: $x \leq y$ si $y - x$ est positif.

Une *trace* sur $\mathcal{A}$ est une application continue $f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que $f(xy) = f(yx)$ et $f(x)$ est un réel positif pour x positif.

Trace associée à un pavage $\mathcal{P}$

Soit ξ la valeur propre de Perron-Frobenius (*cf.* [Gn]) de la matrice de multiplicité A associée à $\mathcal{P}$ et notons $\overrightarrow{u} = (u_1,\cdots,u_n) = (u_s)_{s\in\mathcal{S}}$ son vecteur propre markovien *i.e.* $u_1,\cdots,u_n \geq 0$ et $u_1+\cdots+u_n = 1$. Pour tout $x = (a_{vv'})_{v,v'\in X_{k-1}}$ dans $\mathcal{A}_{k-1}$, on pose :

$$\mathrm{Tr}_{k-1}(x) = \frac{1}{\xi^{k-1}} \sum_{v\in X_{k-1}} u_{\pi_2(\lambda_{k-1})} a_{vv} \tag{31}$$

où $v = (\lambda_1,\cdots,\lambda_{k-1})$. Alors Tr_{k-1} est une trace sur $\mathcal{A}_{k-1}$; en plus, si j_{k-1} est l'inclusion de $\mathcal{A}_{k-1}$ dans $\mathcal{A}_k$, on a $\mathrm{Tr}_k(j_{k-1}(x)) = \mathrm{Tr}_{k-1}(x)$. On vérifie aussi que $\mathrm{Tr}_{k-1}(\text{identité}) = 1$. Ceci permet de définir une trace $\mathrm{Tr} : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que $\mathrm{Tr}(\text{identité}) = 1$.

De la même manière que précédemment, on définit une trace $\overline{\mathrm{Tr}} : \overline{\mathcal{A}} \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que $\overline{\mathrm{Tr}}(\text{identité}) = 1$ et vérifiant en plus $\overline{\mathrm{Tr}}(\eta(x)) = \mathrm{Tr}(x)$ pour tout $x \in \mathcal{A}$ où η est l'inclusion de $\mathcal{A}$ dans $\overline{\mathcal{A}}$.

Nous allons maintenant énoncer notre résultat principal démontré dans [E29]. Nous aurons besoin de préciser le groupe $\mathfrak{G}$ que nous considérons.

On a un groupe G qui agit sur l'ensemble des couleurs M. Soient $C_1,\cdots,C_N$ les G-orbites de cette action. Supposons qu'on veuille voir les couleurs dans $C_1,\cdots,C_N$ dans les fréquences respectives $a_1,\cdots,a_N$ (entiers positifs) ; on usera de la notation $(a_\mu)_{\mu\in M}$ avec la convention $a_\mu = a_{\mu'}$ lorsque μ et μ' sont dans la même orbite. Soit S' la réunion disjointe de a_1 copies de C_1,..., a_N copies de C_N ; naturellement G agit sur S'. On prend alors $\mathfrak{G} = \mathrm{Aut}(S')$ et $\Psi : \Lambda \longrightarrow \mathfrak{G}$ dont l'image engendre $\mathfrak{G}$. Ceci nous permet de construire le pavage hiérarchique $\overline{\mathcal{P}}$ comme précédemment.

Rappelons que les $\mathcal{P}_0$-pavés sont coloriés en regardant un $\mathcal{P}_0$-pavé δ comme un $\overline{\mathcal{P}}_0$-pavé $\overline{\delta}$ et en identifiant le type de $\overline{\delta}$ dans $\overline{\mathcal{S}}_0$. Pour tout $\mu \in M$, on définit un projecteur $\Pi^\mu \in \overline{\mathcal{A}}_1$ en posant : $\Pi^\mu = (a_{\overline{ww}'})_{\overline{w},\overline{w}' \in \overline{X}_1}$ où :

$$a_{\overline{ww}'} = \begin{cases} 0 & \text{si } \overline{w} \neq \overline{w}' \\ 1 & \text{si } \pi_1(\overline{\lambda}_1) \text{ a la couleur } \mu \text{ où } \overline{w} = (\overline{\lambda}_1) \\ 0 & \text{si } \pi_1(\overline{\lambda}_1) \text{ n'a pas la couleur } \mu \text{ où } \overline{w} = (\overline{\lambda}_1) \end{cases} \tag{32}$$

4.1.3. Théorème [E25]. *On a les assertions qui suivent.*

i) *Les projections* Π^μ *scindent l'unité* $1 \in \eta(\mathcal{A}) \subset \overline{\mathcal{A}}$ *i.e. leur somme est* 1. *Pour tout* $g \in G$, $g\Pi^\mu = \Pi^{g\mu}$. *Le rapport* $\frac{Tr(\Pi^\mu)}{a_\mu}$ *ne dépend pas de* $\mu \in M$.

ii) *Soient* P_1 *et* P_2 *deux projecteurs de* $\mathcal{A}$ *tels que* $P_1 \leq P_2$. *Alors, pour tout* $\mu \in M$, *il existe des projecteurs* Q_1^μ *et* Q_2^μ *de* $\overline{\mathcal{A}}$ *tels que* :

a) $Q_1^\mu \leq Q_2^\mu \leq \Pi^\mu$;

b) *pour tout* $g \in G$, $gQ_1^\mu = Q_1^{g\mu}$ *et* $gQ_2^\mu = Q_2^{g\mu}$;

c) *si* $Q_1 = \sum_{\mu \in M} Q_1^\mu$ *et* $Q_2 = \sum_{\mu \in M} Q_2^\mu$, *alors* $Q_1, Q_2 \in \mathcal{A}$ *et* P_1 *et* P_2 *sont équivalents respectivement à* Q_1 *et* Q_2 *dans* $\mathcal{A}$;

d) *les rapports* $\frac{Tr(Q_1^\mu)}{a_\mu}$ *et* $\frac{Tr(Q_2^\mu)}{a_\mu}$ *ne dépendent pas de* $\mu \in M$.

4.2. Diagrammes de Bratteli

On appelle *diagramme de Bratteli* un graphe infini $B = (V, E)$ où V est l'ensemble des *sommets*, E l'ensemble des *arêtes* tous deux partionnés en sous-ensembles finis non vides $V = V_0 \cup V_1 \cup \cdots$ et $E = E_1 \cup E_2 \cup \cdots$ et munis de deux applications $s, r : E \longrightarrow V$ (s est la *source* et r est le *but*) de telle sorte que :

i) $V_0 = \{v_0\}$ considéré comme le sommet du diagramme ;

ii) $r(E_n) \subset V_n$ pour $n = 1, 2, \cdots$ et $r^{-1}(v) \neq \emptyset$ pour tout $v \in V$;

iii) $s(E_n) \subset V_{n-1}$ pour $n = 1, 2, \cdots$ et $s^{-1}(v) \neq \emptyset$ pour tout $v \in V_1 \cup V_2 \cup \cdots$.

Un *morphisme* de diagrammes de Bratteli $B = (V, E)$ et $B' = (V', E')$ est un couple $(\varphi, \psi) = (\varphi_n, \psi_n)$ d'applications $\varphi : V \longrightarrow V'$ et $\psi : E \longrightarrow E'$ telles que $\varphi(V_n) \subset V'_n$, $\psi(E_n) \subset E'_n$ et, pour tout $n = 1, 2, \cdots$, le diagramme qui suit soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} V_{n-1} & \stackrel{\varphi_{n-1}}{\longrightarrow} & V'_{n-1} \\ s \uparrow & & \uparrow s \\ E_n & \stackrel{\psi_n}{\longrightarrow} & E'_n \end{array}$$

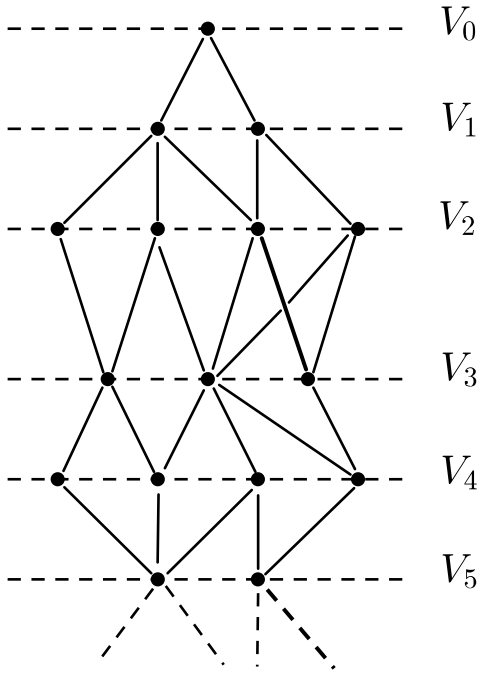


Fig.6

4.2.1. Soient $B = (V, E)$ un diagramme de Bratteli, m, n deux entiers naturels tels que $m > n$ et $v \in V_n$ et $w \in V_m$. Un *chemin* de v à w est une suite d'arêtes $(e_{n+1}, \cdots, e_m)$ telle que $s(e_{n+1}) = v$, $r(e_m) = w$ et $s(e_{j+1}) = r(e_j)$ pour tout j tel que $n < j \leq m$; on définit de la même façon un chemin infini d'origine v_0. On dira que B est *simple* si, pour tout $n = 0, 1, 2, \cdots$, il existe $m > n$ tel que tout sommet $v \in V_n$ peut être joint par un chemin à tout sommet $w \in V_m$.

4.2.2. Se donner un ordre $\geq$ sur B, c'est se donner un ordre sur chaque partie $s^{-1}(v)$ pour tout $v \in V \setminus \{v_0\}$. On dira que $e \in E_n$ est *maximal* (resp. *minimal*) s'il est maximal (resp. minimal) dans $r^{-1}(r(e))$. Étant donné $v \in V_n$, il est facile de voir qu'il existe un unique chemin $(e_1, \cdots, e_n)$ de v_0 à v tel que chaque e_i est maximal (resp. minimal). On dira que $B = (V, E, \geq)$ est *proprement ordonné* s'il possède un unique chemin infini $(e_1, \cdots, e_n, \cdots)$ maximal $e_{\max}$ et un unique chemin infini minimal $e_{\min}$.

4.2.3. Soit X_B l'ensemble des chemins infinis de B (partant de v_0 bien sûr). On y met la distance qui suit. Soient $x, y \in X_B$ dont les m premiers segments coïncident ; on pose $d(x, y) = \frac{1}{m+1}$. Pour cette distance d, X_B est un Cantor (*i.e.* X est totalement discontinu sans point isolé). Une base de la topologie associée est donnée par les *cylindres* :

$$U(e_1, \cdots, e_n) = \{(f_1, \cdots, f_j, \cdots) \in X_B : f_j = e_j \text{ pour } 1 \leq j \leq n\}.$$

Soit $x = (e_1, \cdots, e_n, \cdots) \in X_B$; soit $j \in \mathbb{N}^*$ tel que $e_1, \cdots, e_{j-1}$ soient maximaux et e_j non maximal. À x on associe $V_B(x) = (f_1, \cdots, f_j, e_{j+1}, \cdots)$ où f_j est le successeur de e_j dans $r^{-1}(r(e_j))$ et $(f_1, \cdots, f_{j-1})$ est le chemin minimal de v_0 à $s(f_j)$. Pour $x = x_{\max}$

on pose $V_B(x_{\max}) = x_{\min}$; V_B est l'*application de Vershik* du diagramme de Bratteli proprement ordonné $(V, E, \geq)$.

4.2.4. Un *système dynamique* est un couple (X, T) où X est un espace métrique compact et T un homéomorphisme. On dira que (X, T) est *minimal* si l'orbite $\{T^n x : n \in \mathbb{Z}\}$ de tout point $x \in X$ est dense. On dira que (X, T) est un *système dynamique de Cantor* si X est un ensemble de Cantor ; on dira que (X, T) est un *système minimal de Cantor* si en plus T est minimal.

On se donne un système minimal de Cantor (X, T) . Une *partition de Kakutani-Rohlin* (KR-partition en abrégé) est une partition en ouverts-fermés du type :

$$\mathcal{P} = \{T^j Zk : k \in A \text{ et } 0 \leq j < h_k\} \tag{33}$$

où A est un ensemble fini et h_k un entier strictement positif. La $k^{\text{ème}}$ *tour* de $\mathcal{P}$ est $\mathcal{P} = \{T^j Zk : 0 \leq j < h_k\}$; ses *étages* sont $T^j Z_k$, $j = 0, \cdots, h_k - 1$. La base de la partition $\mathcal{P}$ est $Z = \bigcup_{k \in A} Z_k$.

Soit $(\mathcal{P}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de KR-partitions chacune donnée comme suit :

$$\mathcal{P}_n = \{T^j Z_{n,k} : k \in A \text{ et } 0 \leq j < h_{n,k}\}$$

ayant pour base $Z_n = \bigcup_{k \in A_n} Z_{n,k}$ avec $\mathcal{P}_0 = \{X\}$. On dira que cette suite est *imbriquée* si, pour tout n, $Z_{n+1} \subset Z_n$ et $\mathcal{P}_{n+1}$ raffine $\mathcal{P}_n$.

4.2.5. Au système de Bratteli-Vershik (X_B, V_B) on peut toujours associer une suite de KR-partitions $\mathcal{P}_n$. Pour tout n, les ensembles qui partitionnent sont les cylindres $U(e_1, \cdots, e_n)$ et la base Z_n est constituée des cylindres $U(e_1, \cdots, e_n)$ pour lesquels les e_i sont des arêtes minimales. On vérifie facilement que la suite $(\mathcal{P}_n)$ est imbriquée (au sens de la définition qu'on vient de donner).

Inversement, soit $(\mathcal{P}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite imbriquée de KR-partitions telle qu'on ait la propriété qui suit :

$$(\beta) \qquad \text{La suite} \quad \beta_n = \inf_{k \in A_{n,k}} \{h_{n,k}\} \quad \text{tend vers l'infini.}$$

Alors, à une telle suite on peut associer un diagramme de Bratteli $B = (V, E, \geq)$: les sommets de V_n sont les $|A_n|$ tours de $\mathcal{P}_n$ et les arêtes partant d'un sommet $v_{n,k} \in V_n$ et allant vers ceux de V_{n-1} sont déterminées par la manière dont la tour associée $S_{n,k}$ traverse les tours $S_{n-1,i_1}, \cdots, S_{n-1,i_m}$ de $\mathcal{P}_{n-1}$. L'ordre sur ces arêtes est celui dans lequel $S_{n,k}$ traverse les tours $S_{n-1,i_1}, \cdots, S_{n-1,i_m}$ de $\mathcal{P}_{n-1}$.

La remarque qui va suivre dans le cas d'un diagramme de Bratteli ordonné associé à une suite imbriquée de KR-partitions $\mathcal{P}_n$ donne une idée de la manière dont on peut définir un système dynamique associé à un diagramme de Bratteli $B = (V, E, \geq)$ non nécessairement proprement ordonné.

4.2.6. Pour tout n, soit ϖ_n l'ensemble des chemins de V_0 à V_n. Pour $m > n$, on a une application de *troncature* $j_{m,n} : \varpi_m \longrightarrow \varpi_n$ qui, à tout chemin $(e_1, \cdots, e_n, \cdots, e_m)$, associe le chemin $(e_1, \cdots, e_n)$. Pour tout $v \in V_n$, l'ensemble $\varpi(v)$ des chemins de $\{*\} \in V_0$ à v est appelé *ϖ_n-tour paramétrée* par v ; son cardinal est le nombre d'étages de cette tour. Chaque tour est un ensemble ordonné puisque les chemins de $\{*\}$ à v le sont. Nous exclurons les diagrammes de Bratteli ordonnés qui ne vérifient pas la condition (β).

Soit X_B l'ensemble des suites $\{x_1, \cdots, x_n, \cdots\}$ où :

(i) $x_n = (x_{n,i})_{i\in\mathbb{Z}}$ est un élément de $\varpi_n^{\mathbb{Z}}$;

(ii) $j_{m,n}(x_{m,i}) = x_{n,i}$ pour $m > n$ et $i \in \mathbb{Z}$;

(iii) pour tout entier positif K, il existe $m > n$ et un sommet $v \in V_m$ tels que le segment $x_n[-K, K] = \{x_{n,-K}, x_{n,-K+1}, \cdots, x_{n,K-1}, x_{n,K}\}$ est obtenu en appliquant $j_{m,n}$ à un segment de l'ensemble ordonné des chemins de v_0 à v.

Comme les ensembles ϖ_n sont finis, $\prod_n \varpi_n^{\mathbb{Z}}$ est compact ; l'espace X_B étant une partie de celui-ci, il hérite de la topologie induite.

Notons T_B l'application $X_B \longrightarrow X_B$ qui à tout $x = (x_1, \cdots, x_n, \cdots)$ avec $x_n = (x_{n,i})_i \in \varpi_n^{\mathbb{Z}}$ associe $x' = (x'_1, \cdots, x'_n, \cdots)$ où $x'_{n,i} = x_{n,i+1}$. On dira que (X_B, T_B) est le *système dynamique associé* à $B = (V, E, \geq)$. On a alors la :

Proposition. *L'espace X_B est compact et, si $B = (V, E, \geq)$ est un diagramme de Bratteli ordonné simple, (X_B, T_B) est un système minimal de Cantor.*

4.2.7. Soient maintenant $B = (V, E, \geq)$ un diagramme de Bratteli ordonné, G un groupe fini et $\lambda : E \longrightarrow G$ une application ; on dira que λ est un *marquage* des arêtes de B par les éléments de G. On définit un nouveau diagramme de Bratteli $B_\lambda = (V_\lambda, E_\lambda)$ par $V_{0,\lambda} = \{*\}$, $V_{n,\lambda} = V_n \times G$ et $E_{n,\lambda} = E_n \times G$ pour tout $n \geq 1$; les applications image et source $r, s : E \longrightarrow V$ sont définies par $r(e, g) = (r(e), g)$ et $s(e, g) = (s(e), g\lambda(e))$ lorsque $e \in E_n$ avec $n \geq 2$ et $s(e, g) = \{*\}$ pour $e \in E_1$. Soit $\pi : (V_\lambda, E_\lambda) \longrightarrow (V, E)$ définie par $\pi(v_{0,\lambda}) = v_0$, $\pi(v, g) = v$ pour tout $v \in V_n$ avec $n \geq 1$ et $\pi(e, g) = e$. On peut voir aisément que la restriction de π à $\pi^{-1}(v, g)$ est une bijection sur $r^{-1}(v)$ pour tout $v \in V \setminus \{v_0\}$; elle permet donc de transposer l'ordre qu'il y a sur $r^{-1}(v)$ en un ordre sur $\pi^{-1}(v, g)$. On obtient donc un diagramme de Bratteli ordonné $B_\lambda = (V_\lambda, E_\lambda, \geq)$; le système dynamique (X_λ, T_λ) qui lui est associé (construit en 4.2.6) est appelé le *système produit croisé* pour le marquage λ.

On peut remarquer finalement que l'application $\pi : (V_\lambda, E_\lambda) \longrightarrow (V, E)$ possède la propriété de *"relèvement unique des chemins"* dans le sens qui suit : si $m > n \geq 1$ et $(e_n, \cdots, e_m)$ un chemin de B de V_{n-1} à V_m avec $r(e_m) = v$ alors, pour tout $g \in G$, il existe un unique chemin $(\widetilde{e}_n, \cdots, \widetilde{e}_m)$ dans B_λ se projetant par π sur $(e_n, \cdots, e_m)$ et tel que $r(\widetilde{e}_m) = (v, g)$.

Le groupe G agit sur $B_\lambda = (V_\lambda, E_\lambda)$ par $\gamma_g(v, h) = (v, gh)$, $\gamma_g(e, h) = (e, gh)$ lorsque $v \in V \setminus \{v_0\}$ et $\gamma_g(v_{0,\lambda}) = v_{0,\lambda}$.

Soient (X, T) et (X_λ, T_λ) les systèmes dynamiques associés respectivement à $B = (V, E, \geq)$ et $B_\lambda = (V_\lambda, E_\lambda, \geq)$ (*cf.* 4.2.6). L'application $\pi : (V_\lambda, E_\lambda) \longrightarrow (V, E)$ envoie les

chemins de $\{*\}$ à (v,g) sur les chemins de $\{*\}$ à v et respecte l'application troncature. La "propriété de relèvement unique" implique que π envoie la ϖ_n-tour de (V_λ, E_λ) paramétrée par $(v,g) \in V_{n,\lambda}$ bijectivement sur la ϖ_n-tour de (V,E) paramétrée par $v \in V_n$ en respectant l'ordre. Donc π induit une application $\pi : (X_\lambda, T_\lambda) \longrightarrow (X,T)$. De plus, l'action de G sur $(V_\lambda, E_\lambda, \geq)$ donne une action $\{\gamma_g\}_{g\in G}$ de G sur (X_λ, T_λ) telle que $\pi \circ \gamma_g = \pi$.

4.2.8. La propriété "*un lacet se relève en lacet*". Soient $B = (V,E,\geq)$ et $B' = (V',E',\geq)$ deux diagrammes de Bratteli ordonnés et $\pi : (V,E,\geq) \longrightarrow (V',E',\geq)$ un morphisme ayant la propriété du relèvement unique des chemins. Soient m, n et k des entiers naturels tels que $k \leq \inf\{m,n\}$ et $u' \in V'_m$ et $v' \in V'_n$.

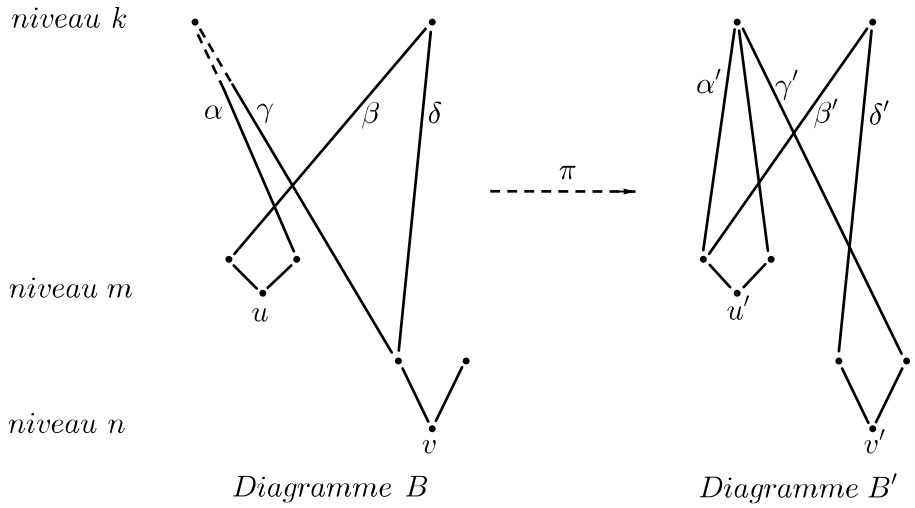


Fig.7

Soient α' et β' des chemins arrivant à u', γ' et δ' des chemins arrivant à v'. On suppose que, dans l'ordre lexicographique, α' est le successeur de β' et que γ' est le successeur de δ' ; on suppose aussi que α' et γ' ont même source dans V'_k et que β' et δ' ont aussi même source dans V'_k. On a alors un lacet : il part de u', parcourt β' jusqu'à sa source, ensuite parcourt δ' jusqu'à v' puis, par γ' jusqu'à la source de α' et repart par α' jusqu'à u'. Soient $u \in V_m$ et $v \in V_n$ tels que $\pi(u) = u'$ et $\pi(v) = v'$. Soient α (resp. β) l'unique chemin de V_k à V_m se projetant sur α' (resp. sur β') et arrivant à u. De même, soient γ (resp. δ) l'unique chemin de V_k à V_n se projetant sur γ' (resp. sur δ') et arrivant à v. On dira que π possède la propriété "*un lacet se relève en lacet*" si :

$(\mathcal{LRL})$ (Source de β = source de δ) $\Longrightarrow$ (source de α = source de γ).

Nous allons nous contenter alors d'une partie de notre résultat principal dans [39], le reste nécessite plus d'ingrédients techniques pour être énoncé.

4.2.9. Théorème. *On suppose que $\pi : (V,E,\geq) \longrightarrow (V',E',\geq)$ vérifie la propriété $(\mathcal{LRL})$. Alors le quotient du système dynamique (X_λ, T_λ) par l'action de G est canoniquement isomorphe au système dynamique (X,T).*

4.3. K-groupe d'un diagramme de Bratteli

4.3.1. Le triplement d'un Bratteli. Soit $(V, E, \geq)$ un diagramme de Bratteli ordonné simple. On définit $(V^{\mathcal{Q}}, E^{\mathcal{Q}}, \geq)$ par :

$V_0^{\mathcal{Q}} = \{*\}$, un singleton ;

$V_n^{\mathcal{Q}}$ est constitué de triplets $(u, v, w) \in V_n \times V_n \times V_n$ tels que pour un certain $y \in V_m$ où $m > n$, la tour $\varpi(y)$ de niveau m passe successivement à travers la tour $\varpi(u)$ de niveau n, puis par $\varpi(v)$ ensuite par $\varpi(w)$. Une arête $\widetilde{e} \in E_n^{\mathcal{Q}}$ est un triplet (u, e, w) tel que e soit une arête de (V, E) et $(u, r(e), w) \in V_n^{\mathcal{Q}}$. Soit :

$\{e_1, e_2, \cdots, e_k\}$ l'ensemble de toutes les arêtes dans $r^{-1}(r(e))$,
$\{f_1, f_2, \cdots, f_\ell\}$ l'ensemble de toutes les arêtes dans $r^{-1}(u)$ et
$\{g_1, g_2, \cdots, g_m\}$ l'ensemble de toutes les arêtes dans $r^{-1}(w)$.

Les sources de $(u, e_1, w), (u, e_2, w), \cdots, (u, e_k, w)$ sont respectivement :

$$(s(f_\ell), s(e_1), s(e_2)), (s(e_1), s(e_2), s(e_3)), \cdots, (s(e_{k-1}), s(e_k), s(g_1)).$$

Le but de (u, e, w) est bien sûr $(u, r(e), w)$. Si $r^{-1}(r(e))$ est ordonné comme $\{e_1, e_2, \cdots, e_k\}$, l'ordre de $r^{-1}(r(u, e, w))$ sera $\{(u, e_1, w), (u, e_2, w), \cdots, (u, e_k, w)\}$. Le diagramme de Bratteli $(V^{\mathcal{Q}}, E^{\mathcal{Q}}, \geq)$ ainsi défini est appelé *triplement* de $(V, E, \geq)$.

L'application $\pi : (V^{\mathcal{Q}}, E^{\mathcal{Q}}, \geq) \longrightarrow (V, E, \geq)$ donnée par $(u, v, w) \mapsto v, (u, e, w) \mapsto e$ possède la propriété d''*unicité du relèvement des chemins*' dans le sens qui suit. Si $m > n \geq 1$ et $(e_n, e_{n+1}, \cdots, e_m)$ est un chemin dans (V, E) de V_{n-1} à V_m avec $r(e_m) = v$, alors, pour tout $(u, v, w) \in V_m^{\mathcal{Q}}$, il existe un unique chemin $(\widetilde{e}_n, \tilde{e}_{n+1}, \cdots, \tilde{e}_m)$ dans $(V^{\mathcal{Q}}, E^{\mathcal{Q}})$ qui s'envoie par π sur $(e_n, e_{n+1}, \cdots, e_m)$ et tel que $r(\widetilde{e}_m) = (u, v, w)$. Il est facile de voir que l'application $\pi : (V^{\mathcal{Q}}, E^{\mathcal{Q}}, \geq) \longrightarrow (V, E, \geq)$ induit un isomorphisme entre les systèmes dynamiques associés donnés par 4.2.6.

4.3.2. Les groupes $K^0(X, T)$ et $K_{-0}(V, E, \geq)$. Soit (X, T) un système dynamique de Cantor apériodique (il ne possède aucune orbite périodique). On note $C(X, \mathbb{Z})$ l'ensemble des fonctions continues sur X et à valeurs dans $\mathbb{Z}$. On pose :

$$K^0(X, T) = C(X, \mathbb{Z})/\partial_T C(X, \mathbb{Z}) \tag{34}$$

où $\partial_T : C(X, \mathbb{Z}) \to C(X, \mathbb{Z})$ est l'opérateur *cobord* défini par $\partial_T(f) = f - f \circ T$.

Soit (V, E) un diagramme de Bratteli et $(V, E, \geq)$ le même objet mais équipé d'un ordre sur les arêtes qui en fait un diagramme de Bratteli ordonné. Le groupe $K_0(V, E)$ est défini comme la limite inductive du système :

$$\mathbb{Z}^{|V_0|} \xrightarrow{A_0} \mathbb{Z}^{|V_1|} \xrightarrow{A_1} \mathbb{Z}^{|V_2|} \xrightarrow{A_2} \mathbb{Z}^{|V_3|} \xrightarrow{A_3} \cdots$$

où l'homomorphisme positif A_n est donné par la multiplication par la *matrice d'incidence* entre les niveaux $n-1$ et n (c'est une matrice à $|V_{n-1}|$ lignes et $|V_n|$ colonnes ayant 1 à la $i^{\text{ème}}$ ligne et $j^{\text{ème}}$ colonne s'il y a une arête ayant pour source le sommet $v_{n-1,i}$ et pour but le sommet $v_{n,j}$ et 0 sinon).

On définit un autre groupe $K_0(V, E, \geq)$ de la façon ssuivante. Pour $\overline{m} = (m_k)_{k \in V_n} \in \mathbb{Z}^{|V_n|}, w \in V_\ell, (\ell > n)$ et deux chemins θ, τ arrivant vers w de V_n à V_ℓ on note $I(\theta, \tau)$ l'ensemble des chemins entre θ et τ (y compris θ, τ) dans l'ordre linéaire sur l'ensemble des chemins de V_n à V_m arrivant à w. On pose :

$$\sigma_{\overline{m}}(\theta; w; \tau) = \begin{cases} \sum_\phi m_{s(\phi)} & \text{somme sur tous les chemins } \phi \text{ dans } I(\theta, \tau) \\ & \text{avec } \tau \text{ exclu si } \theta < \tau \\ -\sum_\phi m_{s(\phi)} & \text{somme sur tous les chemins } \phi \text{ dans } I(\theta, \tau) \\ & \text{avec } \theta \text{ exclu si } \theta > \tau \end{cases}$$

Ici, $s(\theta)$ est la source du chemin θ. Soit $\overline{m} = (m_k)_{k \in V_n}$ un élément de $\mathbb{Z}^{|V_n|}$. On définit le sous-ensemble :

$$B\mathbb{Z}^{|V_n|} \subset \mathbb{Z}^{|V_n|}$$

en décrétant que $\overline{m} \in B\mathbb{Z}^{|V_n|}$ si, et seulement si, la condition qui suit est satisfaite :

$$\sum_{i=1}^{N} \sigma_{\overline{m}}(\theta_i; w_i; \tau_i) = 0,$$

lorsque :

(a) $w_1, w_2, \ldots, w_N \in V_\ell$, $(\ell > n)$
(b) θ_i, τ_i *sont des chemins de* V_n *à* V_ℓ *arrivant à* w_i
(c) $s(\tau_i) = s(\theta_{i+1}), i = 1, \ldots, N-1$
(d) $s(\tau_N) = s(\theta_1)$.

Observons que $A_n(B\mathbb{Z}^{|V_n|}) \subset B\mathbb{Z}^{|V_{n+1}|}$. On définit $K_0(V, E, \geq)$ comme la limite inductive du système de groupes et d'homomorphismes :

$$\frac{\mathbb{Z}^{|V_0|}}{B\mathbb{Z}^{|V_0|}} \xrightarrow{A_0} \frac{\mathbb{Z}^{|V_1|}}{B\mathbb{Z}^{|V_1|}} \xrightarrow{A_1} \frac{\mathbb{Z}^{|V_2|}}{B\mathbb{Z}^{|V_2|}} \xrightarrow{A_2} \frac{\mathbb{Z}^{|V_3|}}{B\mathbb{Z}^{|V_3|}} \xrightarrow{A_3} \cdots \tag{35}$$

4.3.3. Théorème. *Pour* $B = (V, E, \geq)$ *soit* (X_B, T_B) *défini comme dans* 4.2.6 *et posons* $(X, T) = (X_B, T_B)$. *On définit le triplet* $B^{\mathcal{Q}} = (V^{\mathcal{Q}}, E^{\mathcal{Q}}, \geq)$ *comme dans* 4.3.1. *Alors* $K^0(X, T)$ *est naturellemnt isomorphe à* $K_0(V^{\mathcal{Q}}, E^{\mathcal{Q}}, \geq)$.

LISTE DES TRAVAUX

[E1] El Kacimi Alaoui, A. *Cohomologie feuilletée-Exemples de calculs.* Thèse de 3ème cycle (Juin 1980) Lille I.

[E2] El Kacimi Alaoui, A. *Sur la cohomologie feuilletée.* Compositio Mathematica 49 (1983), 195-215.

[E3] El Kacimi Alaoui, A. & Tihami, A. *Cohomologie bigraduée de certains feuilletages.* Bulletin de la Soc. Math. de Belgique Fasc. 2, Vol. 38 (1986), 144-157.

[E4] El Kacimi Alaoui, A., Sergiescu, V. & Hector, G. *La cohomologie basique d'un feuilletage riemannien est de dimension finie.* Math. Z. 188 (1985), 593-599.

[E5] El Kacimi Alaoui, A. & Hector, G. *Décomposition de Hodge sur l'espace des feuilles d'un feuilletage riemannien.* CRAS Paris, t. 298, Série I, n° 13 (1984).

[E6] El Kacimi Alaoui, A. & Hector, G. *Décomposition de Hodge basique pour un feuilletage riemannien.* Ann. Inst. Fourier, Grenoble 36,3 (1986), 207-227.

[E7] El Kacimi Alaoui, A. *Equation de la chaleur sur les espaces singuliers.* C.R. Acad. Sc. Paris, t. 303, Série I, n° 6, 1986.

[E8] El Kacimi Alaoui, A. *Dualité pour les feuilletages transversalement holomorphes.* Manuscripta Math. 58, (1987), 417-443.

[E9] El Kacimi Alaoui, A. *Opérateurs transversalement elliptiques sur les feuilletages riemanniens et applications.* Compositio Mathematica 73, (1990), 57-106

[E10] El Kacimi Alaoui, A. *Stabilité des V-variétés kählériennes.* Lecture Notes In Math n°1345 (1988), 111-123.

[E11] El Kacimi Alaoui, A. *Aspects analytiques et cohomologiques des variétés feuilletées.* Thèse de Doctorat d'Etat soutenue le 9 décembre 1986 à Lille I.

[E12] El Kacimi Alaoui, A. & Nicolau, M. *Déformations des feuilletages transversalement homogènes.* Publication n° 47 du Centre de Recerca Matemàtica Barcelona (1987).

[E13] El Kacimi Alaoui, A. & Nicolau, M. *G-feuilletages de type fini.* Pub. IRMA Vol. 9 n° X (1987).

[E14] El Kacimi Alaoui, A. *Examples of foliations and problems in transverse complex analysis.* "Workshop on functional analytic methods in Complex Analysis" Trieste 6 Fev-19 Fev 1988. World Scientific Publishing Company in Singapore, (1990),341-364

[E15] El Kacimi Alaoui, A. & Nicolau, M. *Déformations des feuilletages transversalement holomorphes à type différentiable fixé.* Publicacions Matemàtiques, Vol. 32 (1989),416-430.

[E16] El Kacimi Alaoui, A. & Nicolau, M. *Structures géométriques invariantes et feuilletages de Lie.* Indagationes Mathematicae, N.S., 1 (3), (1990) 323-334.

[E17] El Kacimi Alaoui, A. & Nicolau, M. *On the topological invariance of the basic cohomology.* Mathematische Annalen 295, (1993), 627-634.

[E18] El Kacimi Alaoui, A. *Invariants de certaines actions de Lie. Instabilité du caractère Fredholm.* Manuscripta Mathematica 74, (1992), 143-160.

[E19] El Kacimi Alaoui, A. & Nicolau, M. *A class of C^∞-stable foliations* Ergod. Th. & Dynam. Sys., 13 (1993), 697-704.

[E20] El Kacimi Alaoui, A. *Un survol sur la théorie de Hodge-de Rham des variétés lisses et singulières.* Proyecciones, 12 N^o 2 (1993), 63-118.

[E21] El Kacimi Alaoui, A. & Gallego, E. *Applications harmoniques feuilletées.* Illinois Journal of Math., Vol. 40, number 1 (1996), 115-122.

[E22] El Kacimi Alaoui, A., Matsumoto, S. & Moussa, T. *Currents invariant by a Kleinian group.* Hokkaido Math. Journal Vol. 26, (1997), 177-202.

[E23] El Kacimi Alaoui, A. & Gmira, B. *Stabilité du caractère kählérien transverse.* Israël J. of Math., 101 (1997), 323-347.

[E24] El Kacimi Alaoui, A. *La cohomologie comme exemple d'invariant topologique.* Dans Quelques aspects des mathématiques actuelles, Ellipses, (1999), 185-217.

[E25] El Kacimi Alaoui, A. & Parthasarathy, R. *Coloring quasicrystals with prescribed symmetries and frequencies.* Discrete and Comput. Geom. 22, (1999) 459-475.

[E26] Abouqateb, A. & El Kacimi Alaoui, A. *Fonctionnelles invariantes et courants basiques.* Studia Mathematica 143 (3) (2000), 199-219.

[E27] El Kacimi Alaoui, A., Guasp, G. & Nicolau, M. *On deformations of transversely homogeneous foliations.* Topology. Vol. 40, (2001), 1363-1393.

[E28] Barre, R. & El Kacimi Alaoui, A. *Foliations.* Handbook of Differential Geometry Vol. II, Elsevier(2006), 33-77 edited by F.J.E. Dillen & L.C.A. Verstraelen.

[E29] El Kacimi Alaoui, A. & Parthasarathy, R. *Trace Splittings of C^*-algebras of tilings via colorings.* Proc. Amer. Math. Soc. 131 (2003), no. 4, 1191–1204.

[E30] El Kacimi Alaoui, A. *de Rham-Hodge classique.* Colloque 2001, Société Mathématique de Tunisie, 113-142.

[E31] El Kacimi Alaoui, A. *Towards a Basic Index Theory.* Proceedings of the Summer School and Workshop Dirac Operator : Yesterday and Today, CAMS-AUB, Beirut 2001, (2005), 251-261.

[E32] El Kacimi Alaoui, A.& Sohou, T. *Sur le problème additif de Cousin basique.* Proyecciones Vol. 22, 3 (2003), 243-271.

[E33] El Kacimi Alaoui, A., Hattab, H. & Salhi, E. *Remarques sur certains groupes d'homéomorphismes d'espaces métriques.* JP Journal of Geometry & Topology Vol. 4 No. 3 (2004), 225-242.

[E34] El Kacimi Alaoui, A. *Examples of transverse structures of foliations* in Differential Geometry and Topology, Discrete and Computational Geometry edited by M. Boucetta & J.-M. Morvan, NATO sciences Series III: Computer and Systems sciences Vol. 197 (2005), 109-132.

[E35] Dehghan-Nezhad, A. & El Kacimi Alaoui, A. *Équations cohomologiques de flots riemanniens et de difféomorphismes d'Anosov.* Journal of the Mathematical Society of Japan, Vol. 54, N°4 (October 2007), 1105-1134.

[E36] El Kacimi Alaoui, A. & Slimène, J. *Le $\overline{\partial}_{\mathcal{F}}$ pour certains feuilletages complexes.* Annales de l'Institut Fourier Tome 60 n^{o}2 (2010), 727-757.

[E37] El Kacimi Alaoui, A. *The $\overline{\partial}$ along the leaves and Guichard's Theorem for a simple complex foliation.* Math. Annalen 347, (2010), 885-897.

[E38] El Kacimi Alaoui, A. & Parthasarathy, R. *Skew-product for group-valued edge labellings of Bratteli diagrams.* Publicacions Matemàtiques 53 (2009), 329-354.

[E39] El Kacimi Alaoui, A. & Parthasarathy, R. *The K-group of substitutional systems.* Publicacions Matemàtiques 54 (2010) 3-23.

[E40] El Kacimi Alaoui, A. *On some holomorphic cohomological equations.* Results in Mathematics. Volume 63, Issue 1 (2013), 329-334

[E41] El Kacimi Alaoui, A. & Hmili, H. *Cohomological equations and invariant distributions on a compact Lie group.* Hokkaido Mathematical Journal. Vol. 43 (June 2014), 151-173.

[E42] El Kacimi Alaoui, A. *Leafwise meromorphic functions with prescribed poles.* Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series, 48(2), (2017), 261-282.
En ligne : https://link.springer.com/article/10.1007/s00574-016-0020-x
Rapport du référé : http://www.elkacimi.fr/les-pdf/Report-El-Kacimi-BSBM.pdf

[E43] El Kacimi Alaoui , A.& Zeggar, A. *Area and perimeter foliations on spaces of polygons.* Grad. J. Math. 4, (2019), no. 1, 18–29.

[E44] El Kacimi Alaoui, A. *Cohomologie feuilletée du flot affine de Reeb sur $\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^1$.* Grad. J. Math. 4, (2019), no. 2, 85–95.

[E45] Ben Charrada, R. & El Kacimi Alaoui, A. *Cohomologie de Dolbeault feuilletée du feuilletage complexe affine de Reeb.* arXiv:1909.11599v1 [math.CV] 25 Sep 2019.

[E46] El Kacimi Alaoui, A. *Cohomologie des groupes discrets à valeurs dans un Fréchet.* http://www.elkacimi.fr/les-pdf/CohomologieDesGroupes.pdf

[E47] El Kacimi Alaoui, A. *Foliated cohomology and infinitesimal deformations of developable foliations.* (January 2025). Journal of Topology and Analysis, Vol. 18, No. 3 (2026) 967-987.

[E48] El Kacimi Alaoui, A. & Zeggar, A. *La suite des λ-dérivés d'un polygone.* Images des mathématiques (19 octobre 2025)

Livre

[E49] Asaoka, M., El Kacimi, A., Hurder, S. & Richardson, K. *Foliations : Dynamics, Geometry, Topology.* Advanced Courses in Mathematics, CRM Barcelona, Birkhuser, (December 2014).

Édition d'actes

[E50] Baklouti, A., El Kacimi, A., Kallel, S. & Mir, N. *Analysis and Geometry: Perspectives and Recent Advances.* Actes du Colloque à la mémoire de S. Baouendi, Tunis (Tunisie), Avril 2014. Springer Proc. in Mathematics & Statistics.

RÉFÉRENCES

[Ar] ARNOLD, V. *Small denominators. I. On maps of the circle onto itself.* Izv. Acad. Sc. USSR, Ser. Mat., 25, 1 (1961), 21-86.

[At] ATIYAH, M.F. *Elliptic operators and compact groups.* Lecture Notes in Math, 401 (1974).

[Ba] BARRA, R. *Distributions invariantes.* Thèse d'Etat, Université de Poitiers (1984).

[Br] BARRE, R. *De quelques aspects de la théorie des Q-variétés différentielles et analytiques.* Ann. Inst. Fourier 23 No. 3, (1973) 227-312.

[BG] BENSON, C. & GORDON, C.S. *Kähler and symplectic structures on nilmanifolds.* Topology 27 (1988) 513-518.

[BGM] BERGER, M., GAUDUCHON, P. & MAZET, E. *Le spectre d'une variété riemannienne.* L. N. in Math. 142 (1971).

[Bo] BOREL, A. *Compact Clifford-Klein forms of symmetric space.* Topology 2 (1963) 111-112.

[Cb] CALABI, E. *On Kähler manifolds with vanishing canonical class.* Algebraic Geometry and Topology, a symposium in honor of Lefschetz.

[Ca] CARRIÈRE, Y. *Flots riemanniens.* Journées sur les structures transverses des feuilletages. Toulouse, Astérisque n° 116 (1984)

[Cl] CONLON, L. *Transversally parallelizable foliations of codimension two.* Trans. AMS 194, (1975) 79-102.

[Co] CONNES, A. *A survey of foliations and operator algebras.* Proceedings of Symp. in Pure Math. Vol. 38 (1982).

[DO] DIEDERICH, K. & OHSAWA, T. *On the parameter dependence of solutions to the $\overline{\partial}$-equation.* Math. Ann. 289, (1991), 581-588.

[DK] DUCHAMP, T. & KALKA, M. *Deformation theory for holomorphic foliations.* J. of Diff. Geom. 14, (1979), 317-337.

[Fé] FÉDIDA, E. *Sur l'existence des feuilletages de Lie.* CRAS de Paris 278, (1974) 835-837.

[Fr] FREITAG, E. *Hilbert Modular Forms.* Springer-Verlag, (1990).

[Ga] GAILLARD, P.Y. *Transformation de Poisson de formes différentielles. Le cas de l'espace hyperbolique.* Commnt. Math. Helvetici. 61, (1986), 581-616.

[Gn] GANTMACHER, F.R. *The theory of matrices.* Vol. II, 1959, Chelsea, New York (1960).

[G1] GHYS, E. *Un feuilletage analytique dont la cohomologie basique est de dimension infinie.* Pub. IRMA - Lille, Vol. VII, Fasc. I (1985).

[G2] GHYS, E. *Actions localement libres du groupe affine.* Inven. Math. 82 (1985), 479-526

[GHS] GIRBAU, J., HAEFLIGER, A. & SUNDARARAMAN, D. *On deformations of transversely holomorphic foliations.* J. Für die reine und Angewendte Math., Band 345, (1983), 122-147.

[GT] GIGANTE, G. & TOMASSINI, G. *Foliations with complex leaves.* Diff. Geo. and its Applications 5, (1995) 33-49.

[GS] Ghys, E & V. Sergiescu, V *Stabilité et conjugaison différentiable pour certains feuilletages.* Topology 19 (1980) 179-197

[Go] Godement, R. *Topologie algébrique et théorie des faisceaux.* Hermann, Paris (1958).

[GM] Gomez Mont, X. *Transversal holomorphic structures.* J. of Diff. geom. 15, (1980), 161-185.

[GL] Gorokhovsky, A. & Lott, J. *The index of transverse Dirac-type operator: the case of Abelian Molino sheaf.* http://arxiv4.library.cornell.edu/PS_cache/arxiv/pdf/1005/1005.0161v1.pdf

[Gr] Griffiths, P.A. *Deformations of G-structures.* Part A ; Math. Ann. 155, (1964), 292-315.

[Gu] Guichard, C. *Sur la résolution de l'équation aux différences finies* $G(x+1)-G(x)=H(x)$. Ann. Sc. ENS Série 3, 4 (1887) 361-380.

[H1] Haefliger, A. *Groupoïdes d'holonomie et classifiants.* Astérisque n°116 (1984).

[H2] Haefliger, A. *Homotopy, Integrability.* Lecture Notes in Math ; n° 197, Amsterdam.

[H3] Haefliger, A. *Pseudo-groups of local isometries.* In Differential Geometry Santiago de Compostela, sept. 1984, 174-197. L. Cordero Editor, Research notes 131, Pitman (1985),174-197.

[H4] Haefliger, A. *Some remarks on foliations with minimal leaves.* J. Diff. Geo. 15, (1980), 269-284.

[HL] Haefliger, A. & Li, B. *Currents on a circle invariants by a Fuchsian group.* Lecture Notes in Math., 1007 (1981), 369-378.

[Hm] Hamilton, R.S. *Deformation Theory of foliations.* Preprint Cornell University, New-York.

[Hr] Hermann, M. *Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations.* Publ. Math. I.H.E.S., 49 (1972), 5-233.

[Hz] Herz, C.S. *Functions wich are divergences.* Am. J. of Math., Vol. 92 (1970), 641-656.

[Ho] Hosak, J.M. *Semicontinuity of nullity or deficiency implies normabilty of the space.* Proc. of the AMS Vol. 30, 2 (1971) 321 - 323.

[KT1] Kamber, F., Tondeur, P. *Duality for Riemannian foliations.* Proc. Sym. Pure Math. Vol. 4 (1982).

[KT2] Kamber, F., Tondeur, P. *Foliated Bundles and Characteristic classes.* Lectures Notes in Math., n°493 Springer-Verlag (1975).

[KT3] Kamber, F., Tondeur, P. *Hodge de Rham theory for Riemannian foliations.* Math Ann. 277,(1987),415-431 (1986).

[Ko] Kobayashi, R. *Einstein-Kähler metrics on V-surfaces.* Math. Ann., 272 (1985), 385-398.

[KS1] Kodaira, K. & Spencer, D.C. *Multifoliate Structures.* Ann. of Math. 74 (1961), 52-100.

[KS2] Kodaira, K. & Spencer, D.C. *On deformations of complex analytic structures,* I & II. Ann. of Math., 67, (1958),328-466.

[KS3] Kodaira, K. & Spencer, D.C. *On deformations of complex analytic structures*, III. Ann. of Math., 71, 1 (1960),43-76.

[Ku] Kuranishi, M. *Deformations of compact complex manifolds.* Fascicule du Séminaire de Mathématiques Supérieures, Montréal (1971).

[LR] Langevin, R & Rosenberg, H. *On stability of compact leaves and fibrations* Topology 16 (1977) 107 - 111

[La] Lazarov, C. *An index theorem for foliations.* Illinois J. of Math. Vol. 3 n°1 (1986).

[Me] Methée, P.D. *Sur les distributions invariantes dans le groupe de rotation de Lorentz.* Comm. Math. Helv., Vol. 28, (1954), 224-269.

[Mi] Milnor, J. *On the* 3*-dimensional Brieskorn Manifolds* $M(p,q,r)$. Ann. of Math. Studies *Knots, Groups and* 3*-Manifolds* edited by L. P. Neuwirth, (1975) 175-225.

[M1] Molino, P. *Etude des feuilletages transversalement complets et applications.* Ann. Sc. ENS t. 10 (1977) 289-307.

[M2] Molino, P. *Géométrie globale des feuilletages riemanniens.* Pro. Kon. Neder. Akad., Ser. A, 1, 85 (1982), 45-76.

[M3] Molino, P. *Propriétés cohomologiques et propriétés topologiques des feuilletages à connexion transverse projetable.* Topology 12, (1973), 317-325.

[M4] Molino, P. *Riemannian foliations.* Birkhäuser, (1988).

[Mw] Mostow, M.A. *Continuous cohomology of spaces with two topologies.* Memoirs of the American Mathematical Society Number 175.

[Pa] Palais, R.S. *Seminar on the Atiyah-Singer Index Theorem.* Ann. of Math. Studies n°57 Princeton University Press (1965).

[Rm] de Rham, G. *Sur la division de formes et de courants par une forme linéaire.* Comm. Math. Helv., Vol. 28 (1954), 346-352.

[R1] Reinhart, B.L. *Foliated manifolds with bundle-like metrics.* Ann. of Math., 69 (1959), 119-132.

[R2] Reinhart, B.L. *Harmonic integrals on almost product manifolds.* Trans. A.M.S., 88 (1958) 243-276.

[R3] Reinhart, B.L. *Harmonic integrals on foliated manifolds.* Am. J. of Math., (1959), 529-586.

[Ro] Roger, C. *Méthodes homotopiques et cohomologiques en théorie des feuilletages.* Thèse Orsay (1974).

[S1] Sarkaria, K.S. *The de Rham cohomology of foliated manifolds.* Thesis, Stony Brook (1974).

[S2] Sarkaria, K.S. *Non degenerescence of some spectral sequences.* Ann Inst. Fourier de Grenoble, 34, 1, (1984), 39-46.

[Sc] Schwarz, G.S. *On the de Rham cohomology of the leaf space of foliation.* Topology 13, (1974), 185-187.

[Se] Sergiescu, V. *Cohomologie basique et dualité des feuilletages riemanniens.* Ann. Inst. Fourier de Grenoble, 53, 3 (1985), 137-158.

[Sℓ] Slimène, J. *Deux exemples de calcul explicite de cohomologie de Dolbeault feuilletée.* Proyecciones Vol. 27, N^0 1, pp. 63-80, May 2008.

[St] Sternberg, S. *Lectures on differential Geometry.* Prentice-Hall, inc (1964).

[Te] Tengstrand, A. *Invariant distributions under an orthogonal group of arbitrary signature.* Math. Scand., Vol. 8 (1960), 201-218.

[V1] VAISMAN, I. *Variétés riemanniennes feuilletées.* Czechosl. Math. J. 21 (1971), 46-75.

[V2] VAISMAN, I. *Sur la cohomologie des variétés analytiques complexes feuilletées.* C.R. Acad. Sc., Paris t. 273 (1971), 1067-1070.

[Wa] WANG, H.C. *Closed manifolds with homogeneous complex structure.* Amer. J. Math. 76 (1954) 1-32.

[We] WELLS, R.C. *Differential Analysis on Complex Manifolds.* G.T.M. $n^{\circ}65$, Springer-Verlag (1979).

[Wo] WOLAK, R. *On G-foliations.* Ann. Pol. Math., 46 (1985),371-377.

[Ym] YAMABE, H. *On arcwise connected subgroup of a Lie group.* Osaka Math. J. ,2 (1950),13-14

[Ya] YAU, S.T. *On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold and the complex Monge-Ampère equation I.* Comm. Pure and Appl. Ma th. XXXI (1978), 339-411.

[Zi] ZIEMIAN, B. *On G-invariant distributions.* J. of Diff. Equations, 35 (1980), 66-86.