

*De la beauté en mathématiques :  
l'exemple des pavages et leurs symétries.*

AZIZ EL KACIMI  
Université Polytechnique Hauts-de-France

Conférence grand public à  
Université Ibn Tofail (Kénitra, Maroc)  
Le 2 novembre 2016

A fait aussi l'objet d'exposés, d'ateliers ou de conférences :

---

au Lycée Louis Legrand, Paris le 24 octobre 2010  
100 ANS APMEP

---

à l'Université de Valenciennes, le 22 mai 2014  
Journée EXPOSONS-NOUS

---

à l'Université Hassan II de Casablanca, le 24 octobre 2014

---

dans divers établissements secondaires de la région  
Nord - Pas de Calais à différentes occasions :  
Semaine des mathématiques (en 2013 et 2014),  
activités organisées, interventions en classe...

*Les heures pendant lesquelles nous sommes  
absorbés par la beauté sont les seules  
où nous sommes vivants... Là est la  
vie réelle et tout le reste n'est  
qu'illusion ou simple résignation.*

**R. Jefferies**

*Le mathématicien n'étudie pas les  
mathématiques pures parce  
qu'elles sont utiles ;  
il les étudie parce qu'il y  
prend plaisir, et il y prend plaisir  
parce qu'elles sont belles.*

**H. Poincaré**

*Nul mathématicien ne peut  
être un mathématicien accompli  
s'il n'est aussi poète.*

**K. Weierstrass**

Mieux encore :

*Aucun peuple ne peut vivre  
en dehors de la beauté !*

A. Camus

## *Qu'y a-t-il de beau en mathématiques ?*

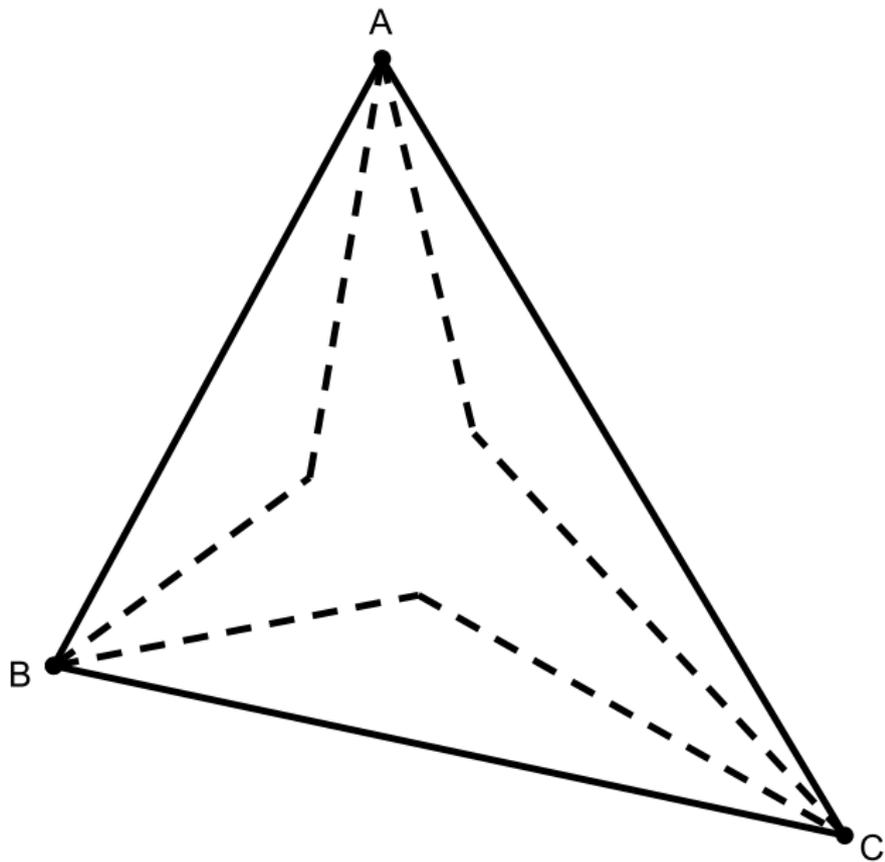
- Les objets ?*
- les formules ?*
- les théorèmes ?*
- ou les démonstrations ?*

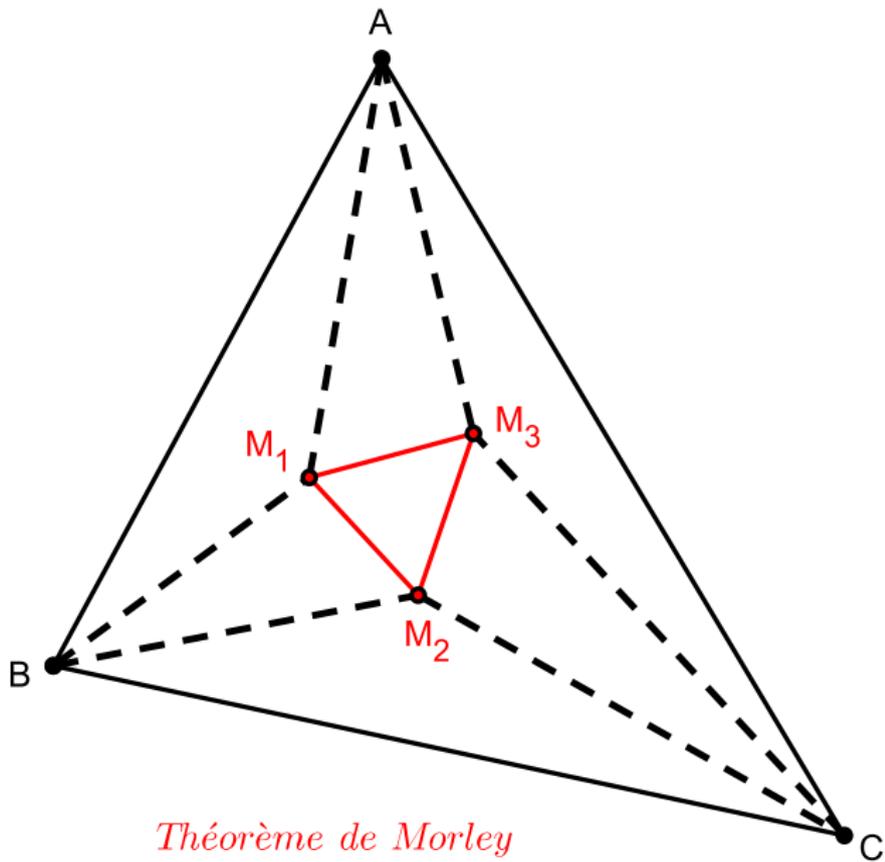
*Sans doute un peu de tout ! Cela dépend :*

- de la nature des objets,*
- de la manière dont on les relie,*
- celle dont on démontre un théorème !*

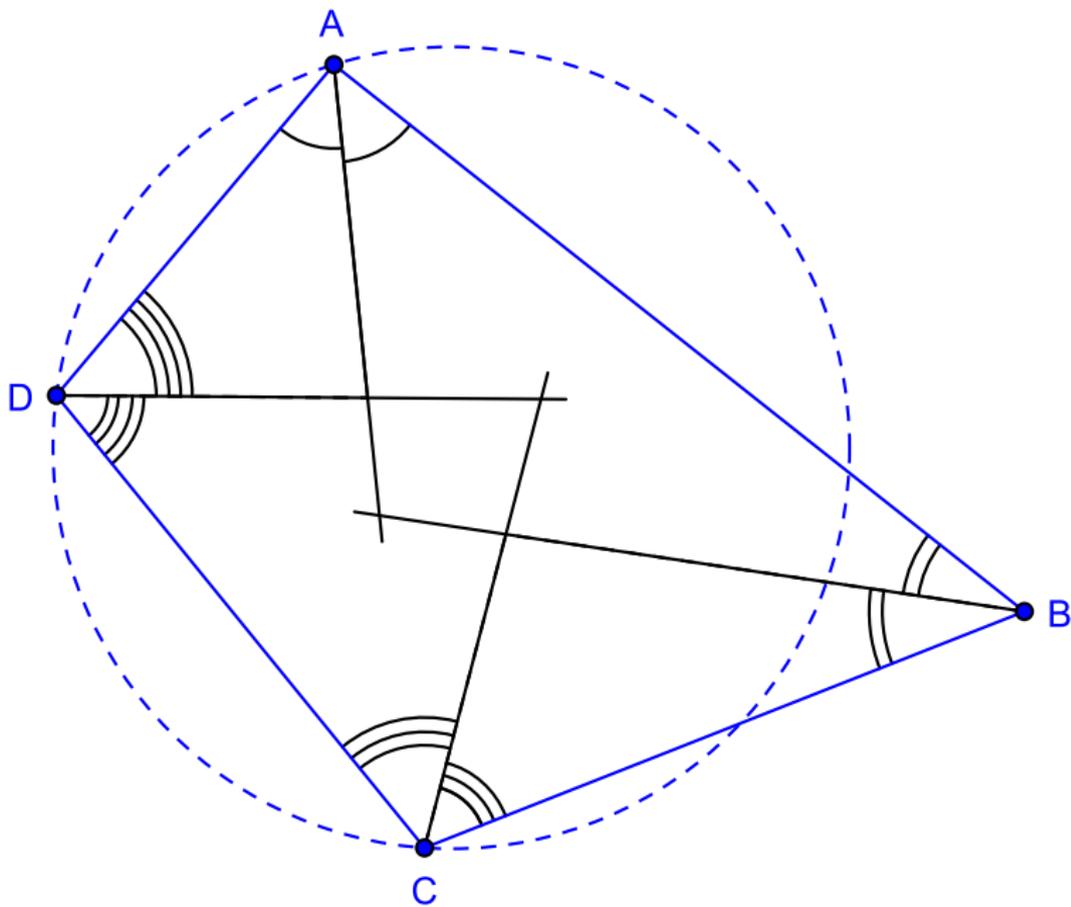
*Les exemples ne manquent pas ! Nous avons choisi de parler des pavages et leurs symétries. Mais avant cela donnons-en brièvement quelques autres.*

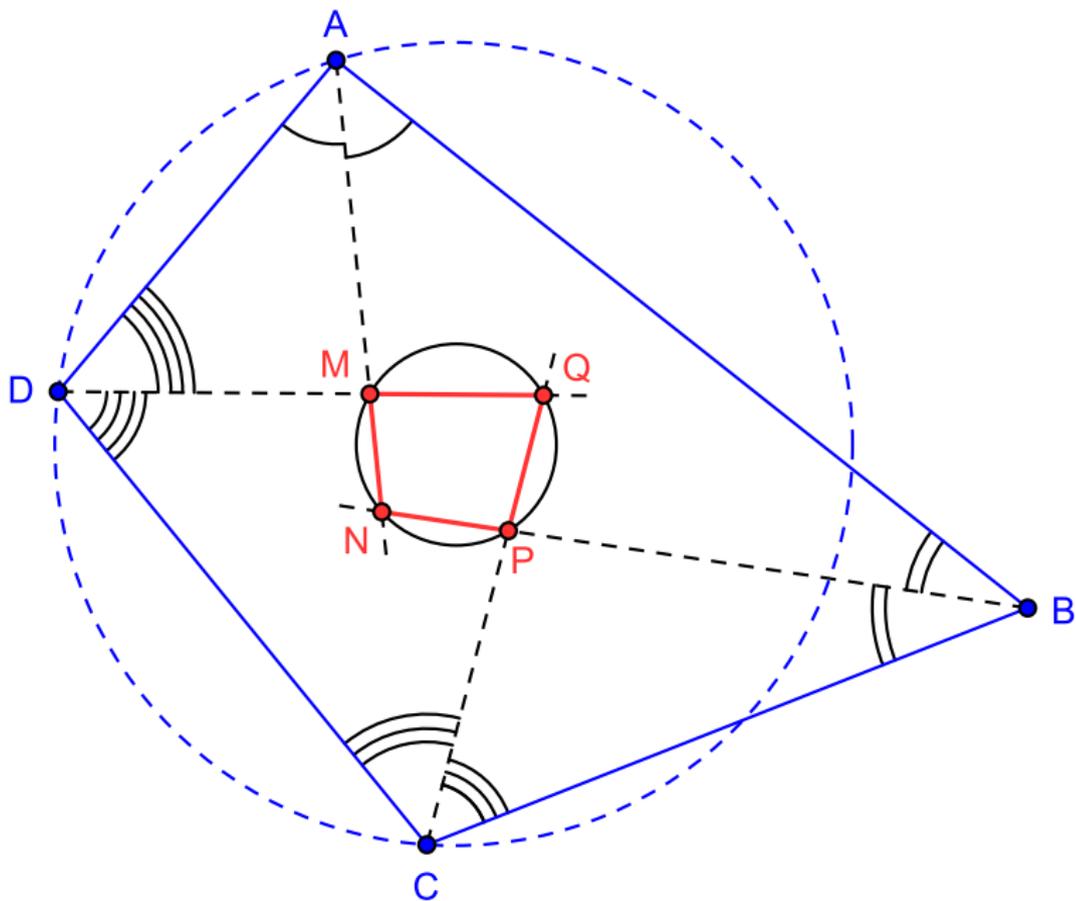
- *Par deux points passe toujours une droite. C'est une vertu pour trois points d'être alignés ! de former un triangle équilatéral !*
- *Par trois points non alignés passe toujours un cercle et un seul. C'est une vertu pour quatre points d'être cocycliques ! de former un carré !*
- *Beaucoup de théorèmes ont pour conclusion :*
  - *Alors les trois points... sont alignés.*
  - *Alors le triangle... est équilatéral.*
  - *Alors les quatre points... sont cocycliques.*
  - *Alors le quadrilatère... est un carré.*





*Théorème de Morley*





*En analyse, voici un beau :*

### Théorème

*On se donne un borélien  $A$  de  $\mathbb{R}$  de mesure de Lebesgue strictement positive i.e.  $0 < \lambda(A) \leq +\infty$ . Alors l'ensemble  $E = A - A = \{a - b : a, b \in A\}$  est un voisinage de 0.*

*Par exemple, en vidant l'intervalle  $[0, 1]$  de tous ses rationnels, on obtient un borélien  $A$  de  $\mathbb{R}$  de mesure (de Lebesgue) 1. Il est d'intérieur vide et, curieusement, il existe  $\varepsilon > 0$  tel que  $]-\varepsilon, \varepsilon[ \subset E = A - A$  ? C'est vraiment étonnant !*

## Démonstration rapide

Soit  $A$  un borélien de  $\mathbb{R}$  tel que  $\lambda(A) > 0$ . On peut supposer  $\lambda(A) < +\infty$ , le cas  $\lambda(A) = +\infty$  s'y ramène.

- Notons  $1_A$  la fonction indicatrice de  $A$ . On pose :

$$h(t) = \int_{\mathbb{R}} 1_A(x)1_A(x+t)d\lambda(x).$$

- Cette quantité existe et est une fonction continue de  $t \in \mathbb{R}$ . (C'est l'étape la moins évidente de la démonstration.)
- On a  $h(0) = \int_{\mathbb{R}} 1_A(x)1_A(x)d\lambda(x) = \lambda(A) > 0$ . Comme  $h$  est continue, il existe  $\varepsilon > 0$  tel que  $h(t) > 0$  pour tout  $t \in ]-\varepsilon, \varepsilon[$ .
- Par suite, pour tout  $t \in ]-\varepsilon, \varepsilon[$ , il existe  $x_t$  tel que  $1_A(x_t)1_A(x_t+t) > 0$ , c'est-à-dire  $x_t \in A$  et  $x_t+t \in A$ , ce qui signifie  $x_t+t-x_t = t \in E = A-A$ .
- Conclusion :  $]-\varepsilon, \varepsilon[ \subset E = A-A$ .

*Le plus court poème de la poésie française :*

**Le chantre**

*Et l'unique cordeau des trompettes marines.*

**G. Apollinaire**

*Le plus court poème mathématique :*

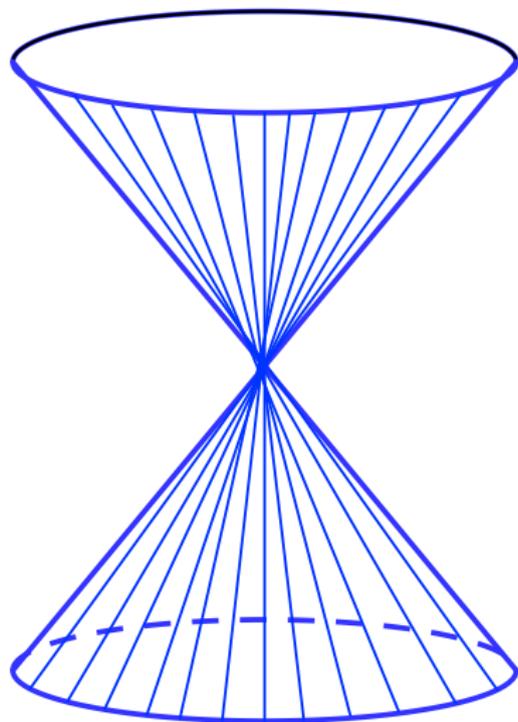
*Tout corps fini est commutatif  
Et son ordre est un entier primitif.*

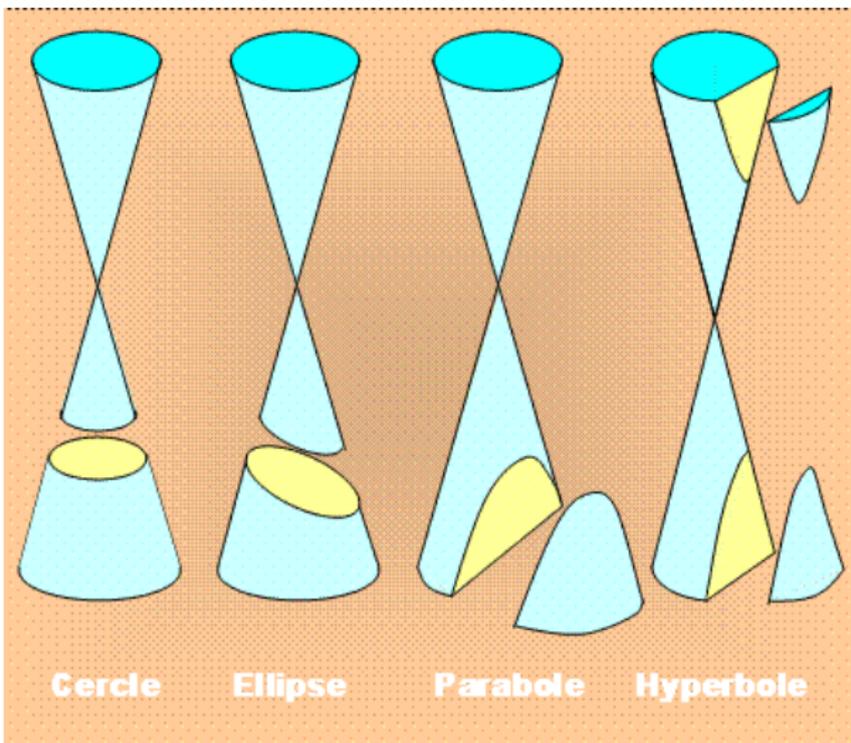
**J. Wedderburn** *est l'auteur du premier vers*

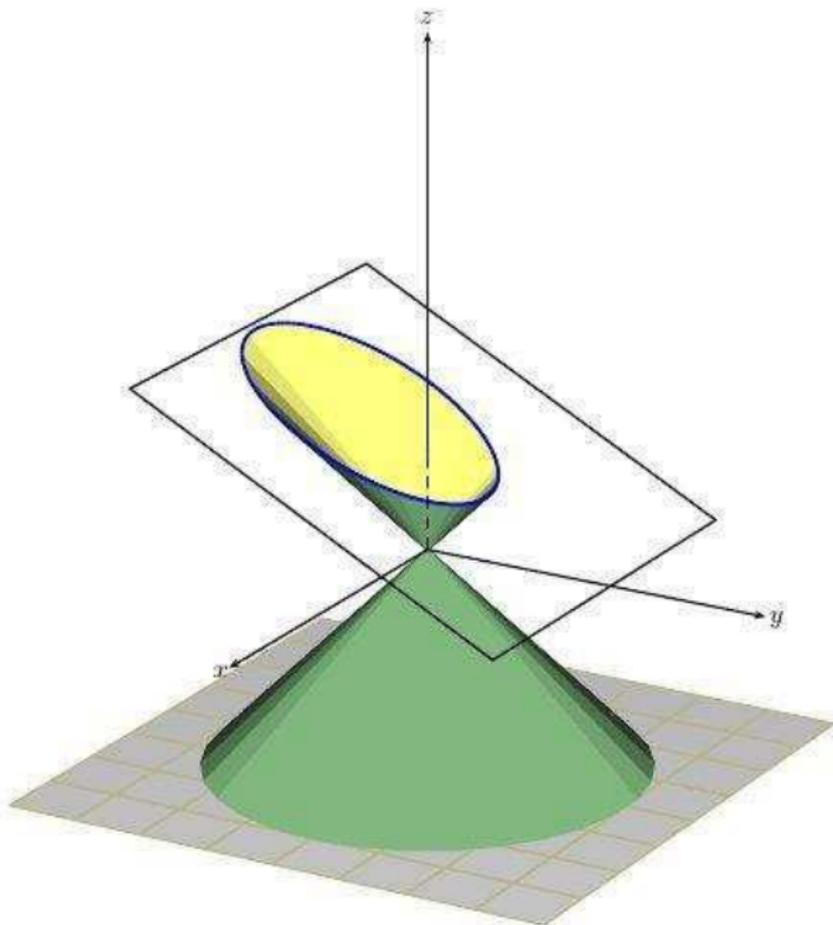
*“Démonstration du deuxième vers” !*

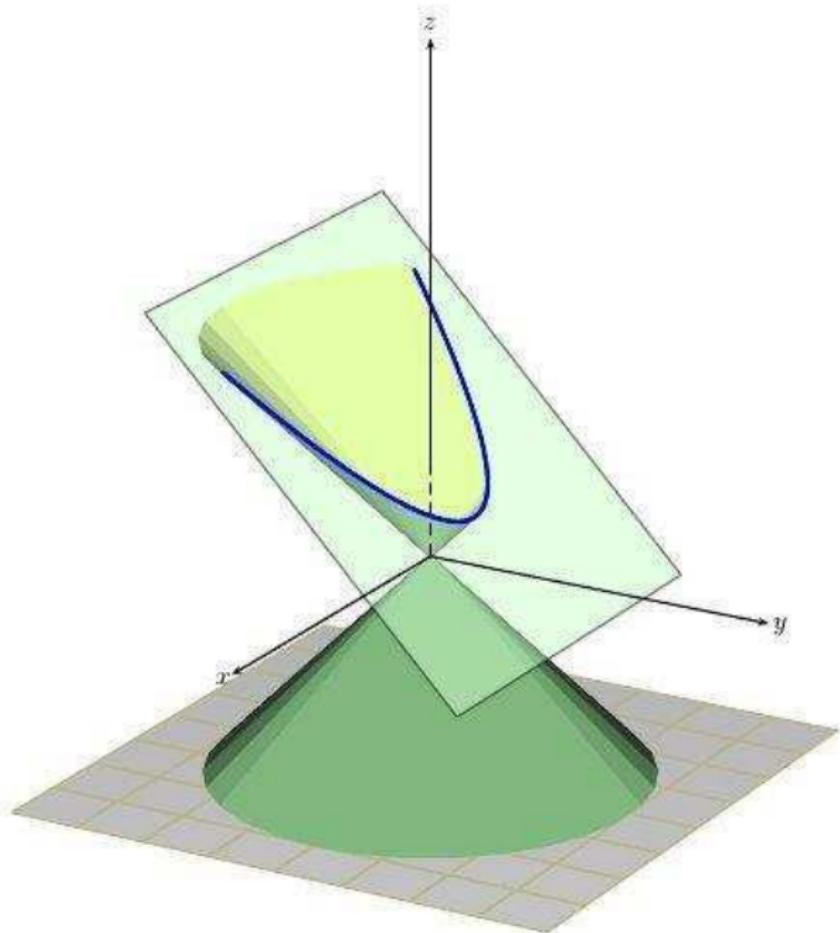
*Soit  $K$  un corps fini.*

- Il n’y a qu’un seul homomorphisme d’anneaux  $\phi : \mathbb{Z} \rightarrow K$ . Il est défini par  $\phi(1) = 1_K$  (l’élément unité de  $K$ ).*
- Comme  $K$  est fini,  $\phi$  n’est pas injectif. Son noyau est un idéal de  $\mathbb{Z}$ , donc du type  $p\mathbb{Z}$  avec  $p > 0$ . L’entier  $p$  est forcément premier ; c’est la **caractéristique** de  $K$ .*
- L’homomorphisme  $\phi$  induit un homomorphisme de corps injectif  $\bar{\phi} : \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \rightarrow K$ . Son image est un sous-corps  $K_0$  de  $K$  isomorphe à  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  (donc d’ordre  $p$ ).*
- Le corps  $K$  a une structure d’espace vectoriel sur  $K_0$ . Comme il est fini, il est de dimension finie. Par suite il est isomorphe à  $K_0^r$  pour un certain entier  $r \geq 1$ .*
- Conclusion : Le corps  $K$  a  $p^r$  éléments.*

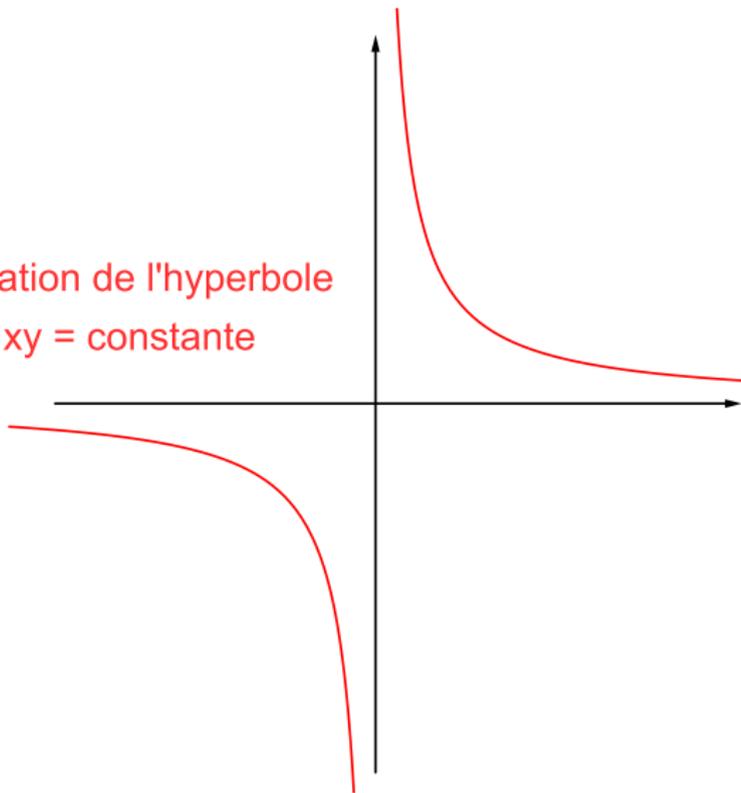


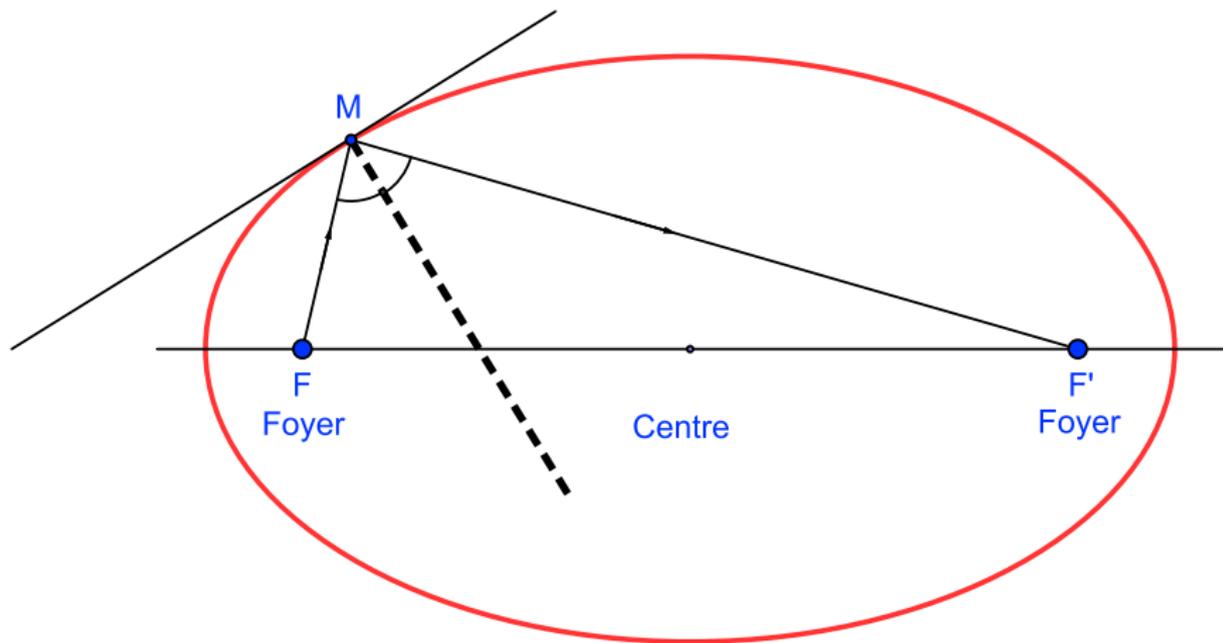


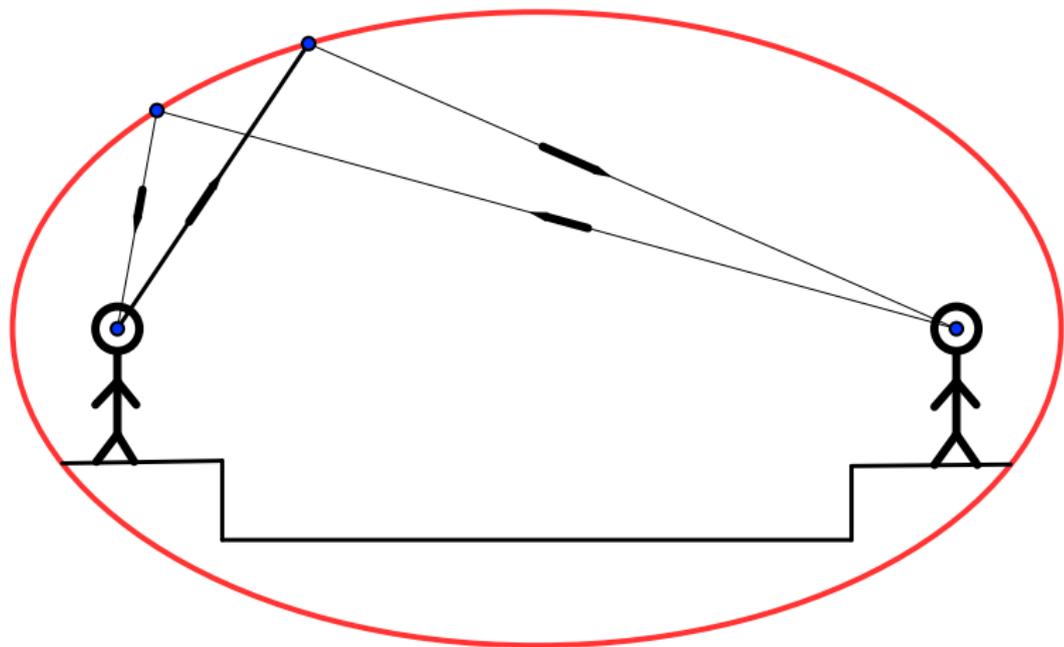


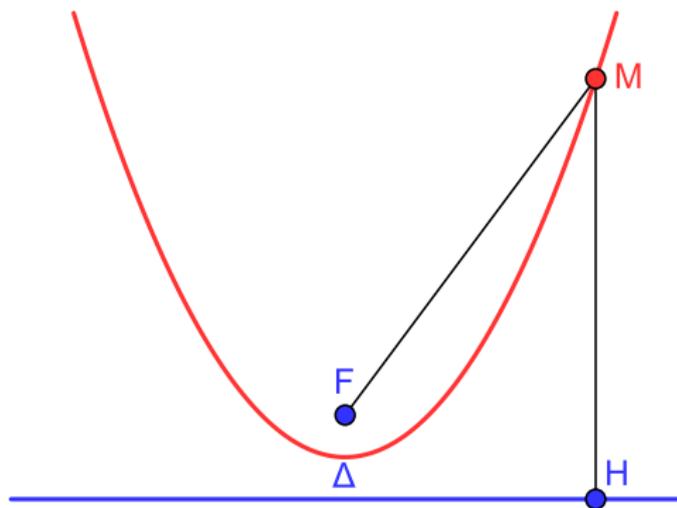


Equation de l'hyperbole  
 $xy = \text{constante}$

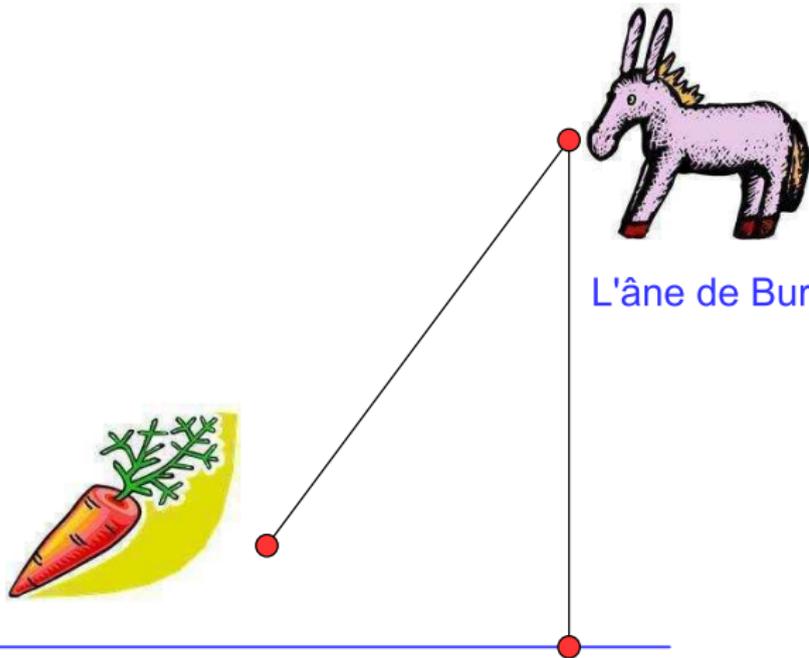






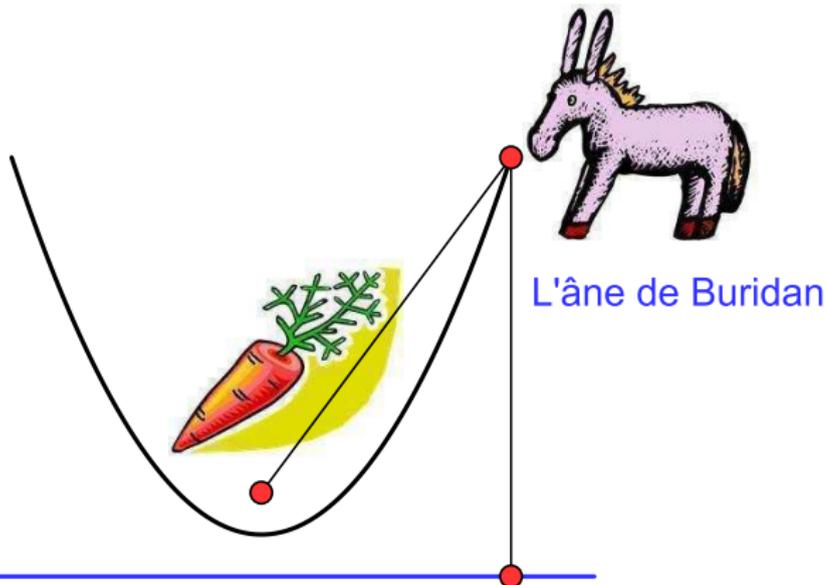


Ensemble des points à égale distance  
d'un point  $F$  appelé foyer et une  
droite  $\Delta$  appelée directrice



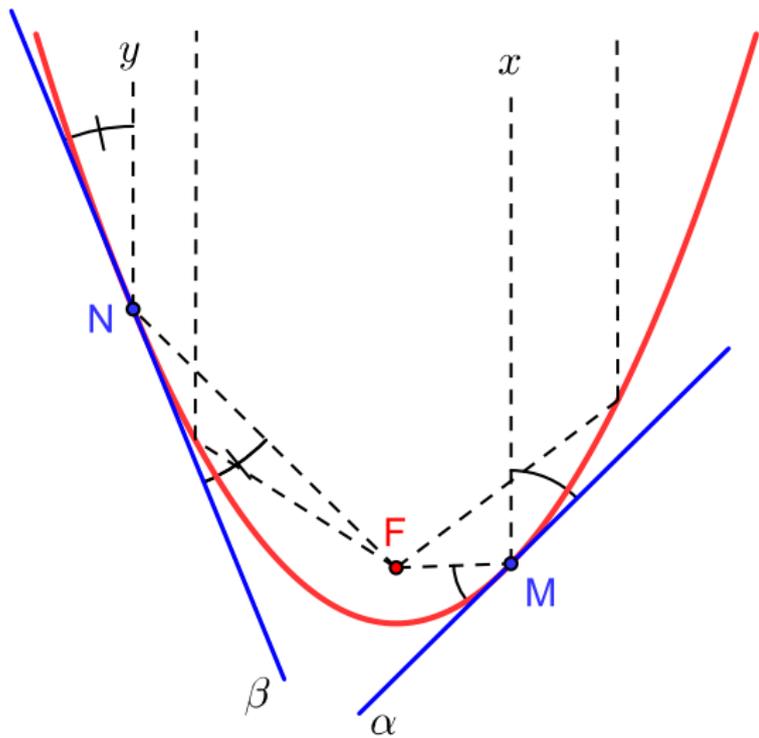
L'âne de Buridan

Il est à égale distance de la rivière et de la carotte.  
Choisira-t-il de boire ou de manger ?



L'âne de Buridan

Il a choisi les deux et a été alors obligé  
de cheminer sur la parabole. C'est la  
courbe d'indécision fatale de ce petit âne !



# 1. Mouvements euclidiens

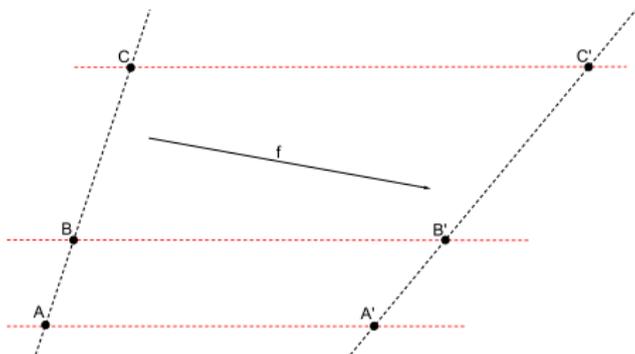
On note  $\mathbb{E}$  le plan affine, c'est-à-dire un ensemble dont les éléments sont les *points* tel que par exemple le tableau noir sur lequel on écrit, un sol bien poli d'une grande salle, une table bien lisse... On s'y déplace dessus dans tous les sens, sans contrainte et sans limite!

À ce plan est associé un autre ensemble qu'on note  $\vec{\mathbb{E}}$  et qu'on appelle *plan vectoriel*. Un élément de cet ensemble s'appelle *vecteur* et se note  $\vec{u}$ ; il est représenté par un couple de points  $(A, B)$  ( $A$  et  $B$  sont des éléments de  $\mathbb{E}$ ). La "fonction" de  $\vec{u}$  est celle d'une force qui pousse les points de  $\mathbb{E}$  dans une direction, un sens et avec une certaine intensité. Ceci ne doit pas dépendre du point poussé; le vecteur  $\vec{u}$  peut donc être représenté par tout autre couple de points  $(A', B')$  sur lequel il produit le même effet.

Un **mouvement** du plan est une bijection  $f$  de  $\mathbb{E}$  sur lui-même qui doit avoir quelques propriétés en plus.  
D'abord :

- Envoyer trois points alignés  $A, B, C$  sur trois points alignés  $A', B', C'$  dans le même ordre ;
- le rapport dans lequel  $B$  divise le segment  $[AC]$  doit être le même que celui dans lequel  $B'$  divise  $[A'C']$ .

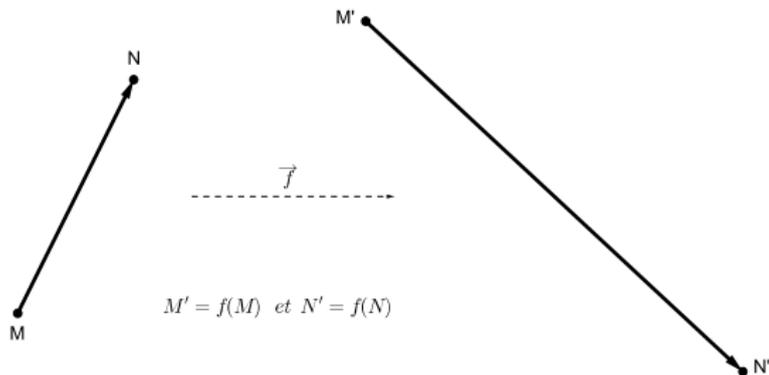
On dira que l'application  $f$  est **affine**.



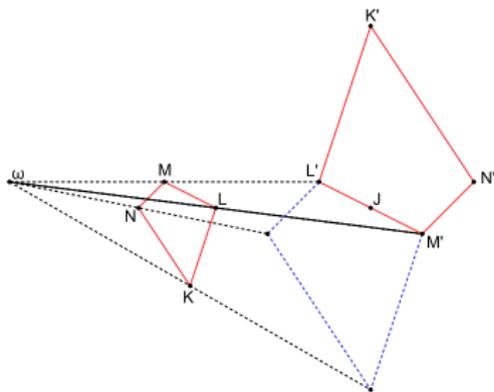
À toute transformation affine  $f$  de  $\mathbb{E}$ , on associe une application  $\overrightarrow{f} : \overrightarrow{\mathbb{E}} \longrightarrow \overrightarrow{\mathbb{E}}$  définie par :

$$\overrightarrow{f}(\overrightarrow{MN}) = \overrightarrow{f(M)f(N)}$$

et qu'on appelle *direction* de  $f$ . C'est une transformation linéaire du plan vectoriel  $\overrightarrow{\mathbb{E}}$ . On vérifie facilement :  $\overrightarrow{g \circ f} = \overrightarrow{g} \circ \overrightarrow{f}$ .



On peut voir sur la figure qui suit comment une transformation de ce type agit sur une figure géométrique.

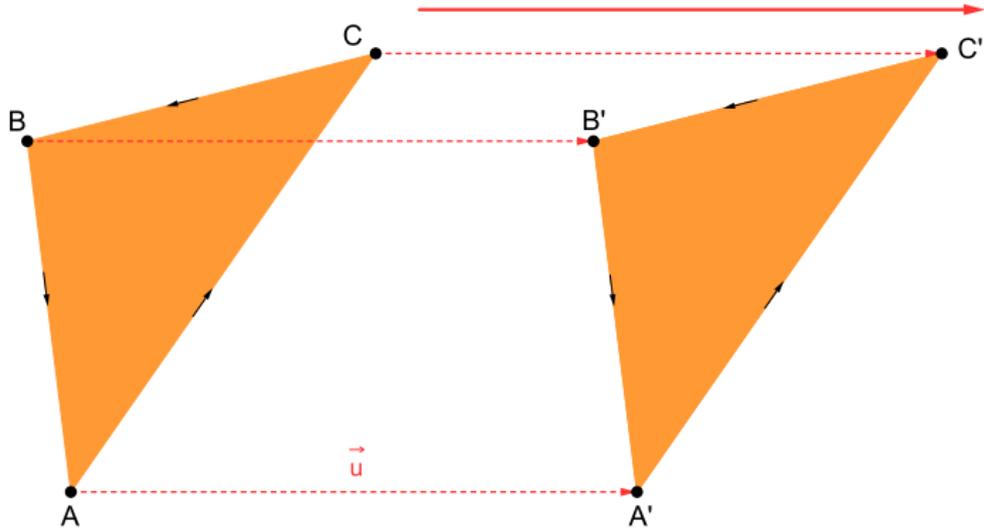


Cette transformation est une **similitude**. Elle préserve la forme mais pas la taille !

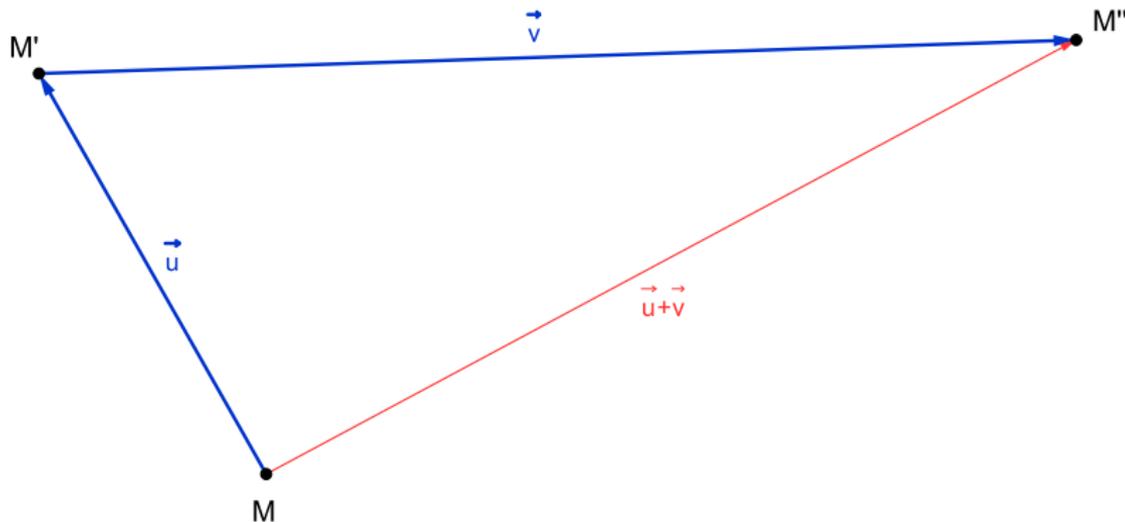
Celles qui gardent la forme et la taille sont appelées **isométries**. On demande à ce que la distance entre deux points  $A$  et  $B$  soit la même qu'entre leurs transformés  $A'$  et  $B'$ . On peut lister toutes ces transformations.

## *Translation*

*Elle consiste à pousser les points par un vecteur  $\vec{u}$ . Elle est donc naturellement définie par ce vecteur. Elle conserve l'orientation.*

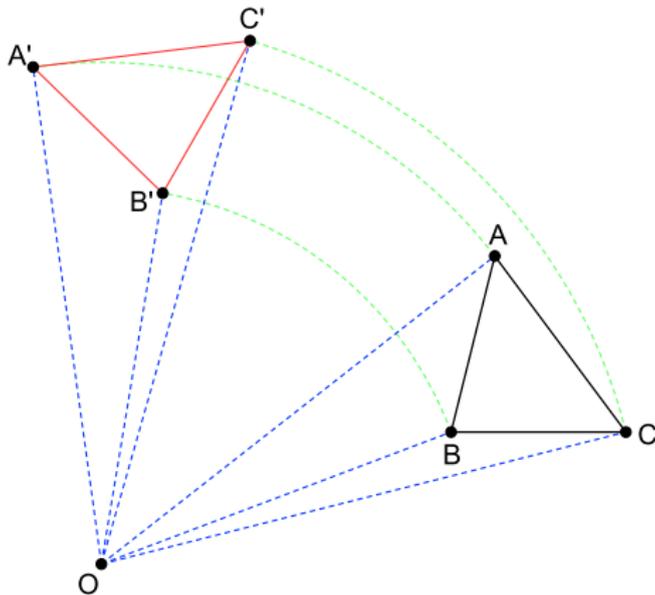


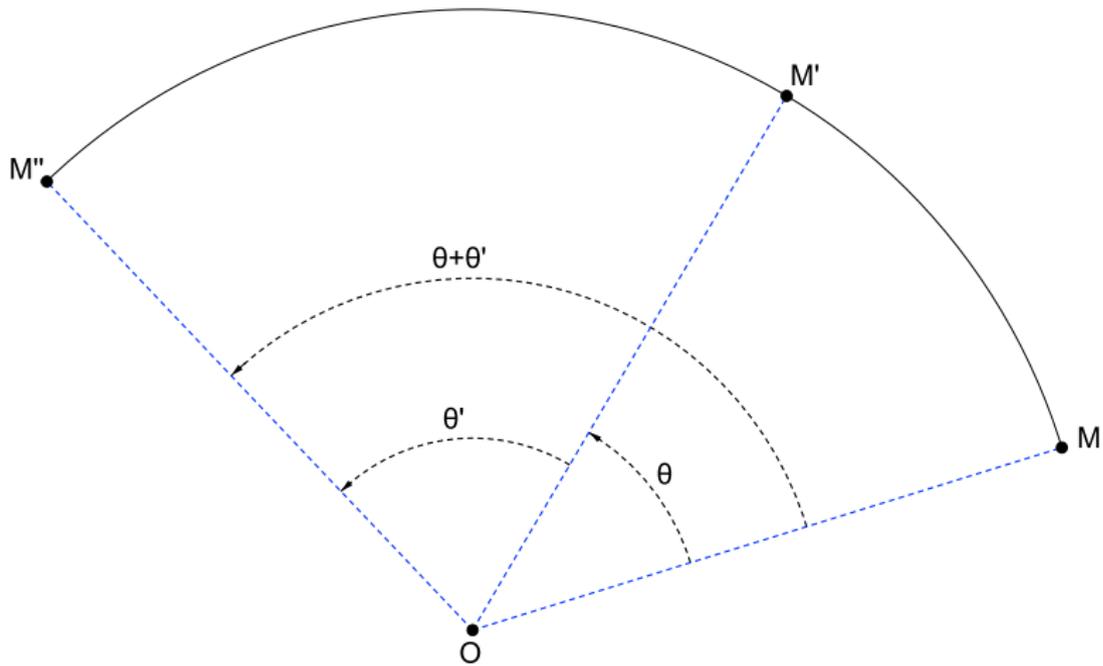
*Les translations se composent comme les vecteurs.  
La translation de vecteur nul est l'identité.  
Les translations forment un groupe commutatif  $\mathcal{T}$   
canoniquement isomorphe au groupe additif  $(\vec{\mathbb{E}}, +)$ .*



## Rotation

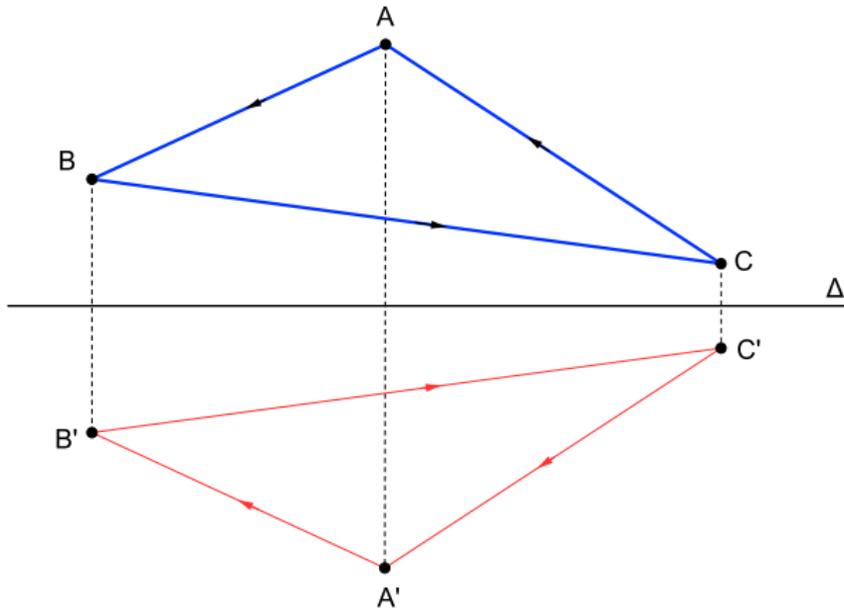
Elle consiste à faire tourner les points d'un angle appelé **angle de rotation** autour d'un point appelé **centre de rotation**.



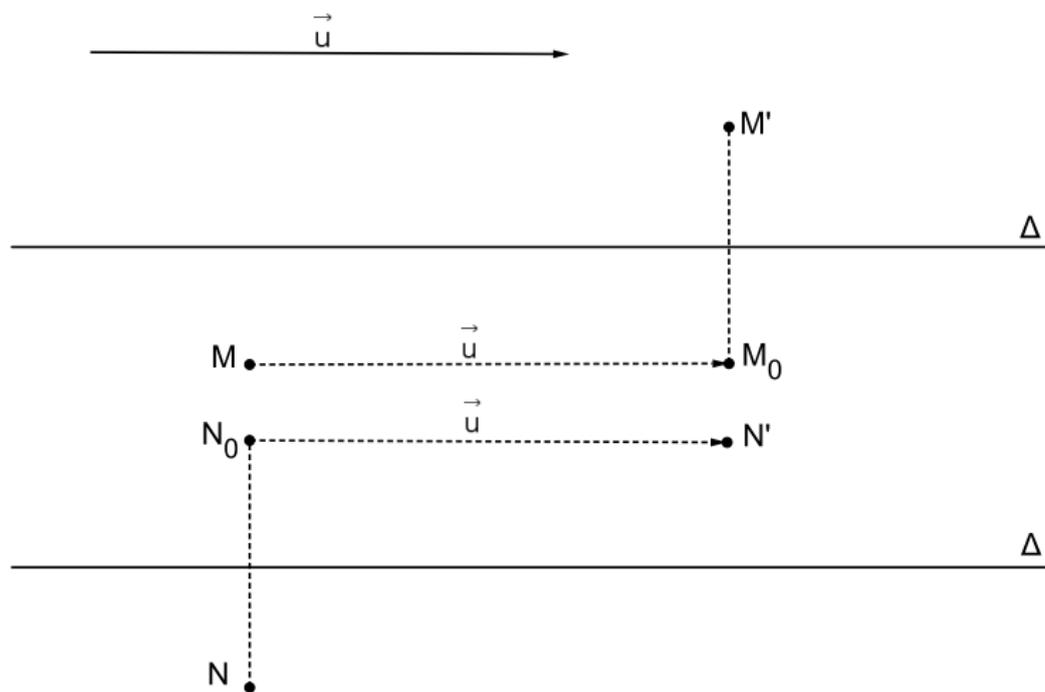


## Réflexion ou symétrie axiale

C'est regarder l'image d'un objet dans un miroir ! Elle est donc associée à une droite appelée **axe de réflexion** (ou **axe de symétrie**). Elle ne conserve pas l'orientation.



## *Symétrie glissée*



Toutes ces transformations forment un groupe, qu'on appelle *groupe des isométries* du plan euclidien  $\mathbb{E}$  et qu'on note  $Isom(\mathbb{E})$ .

Le groupe  $Isom(\mathbb{E})$  possède pas mal de sous-groupes. Certains d'entre eux sont en première ligne :

- Le groupe des translations  $\mathcal{T}$  qu'on a déjà rencontré.
- Les rotations de centre un point  $O$  forment un sous-groupe isomorphe au groupe des rotations (linéaires) de  $Isom(\overrightarrow{\mathbb{E}})$ .

## Rappels sur les suites exactes

- Soit  $(G_i, \varphi_i)_{i \geq 0}$  une suite où  $G_i$  est un groupe et  $\varphi_i : G_i \longrightarrow G_{i+1}$  un morphisme. On dira que cette suite est **exacte** au rang  $i \geq 1$  si le noyau de  $\varphi_i : G_i \longrightarrow G_{i+1}$  est égal à l'image de  $\varphi_{i-1} : G_{i-1} \longrightarrow G_i$ . La suite :

$$G_0 \xrightarrow{\varphi_0} G_1 \xrightarrow{\varphi_1} \cdots \xrightarrow{\varphi_{i-2}} G_{i-1} \xrightarrow{\varphi_{i-1}} G_i \xrightarrow{\varphi_i} G_{i+1} \cdots$$

est dite **exacte** si elle est exacte à chaque rang  $i \geq 1$ .

- Une suite exacte du type :

$$0 \longrightarrow G_1 \xrightarrow{\varphi_1} G_2 \xrightarrow{\varphi_2} G_3 \longrightarrow 1$$

signifie que  $\varphi_1$  est injectif,  $\varphi_2$  est surjectif et que le noyau de  $\varphi_2$  est égal à l'image de  $\varphi_1$ . En gros, cela dit que  $G_2$  est “constitué” de  $G_1$  et de  $G_3$ . On dit que  $G_2$  est une **extension** de  $G_3$  par  $G_1$ .

- Soit  $\pi : \text{Isom}(\mathbb{E}) \longrightarrow \text{Isom}(\vec{\mathbb{E}})$  l'application qui à une isométrie affine  $f$  associe sa direction  $\vec{f}$ . Alors  $\pi$  est un morphisme de groupes surjectif, de noyau  $\mathcal{T}$  et on a une suite exacte :

$$\vec{0} \longrightarrow \mathcal{T} \hookrightarrow \text{Isom}(\mathbb{E}) \xrightarrow{\pi} \text{Isom}(\vec{\mathbb{E}}) \longrightarrow 1.$$

- Le groupe cyclique  $C_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  d'ordre  $n$  se plonge dans  $\text{Isom}(\mathbb{E})$  en envoyant son générateur  $\bar{1}$  sur une rotation d'angle  $\frac{2\pi}{n}$ .
- Tout groupe diédral  $D_n$  se plonge dans  $\text{Isom}(\mathbb{E})$  : c'est le groupe de symétrie d'un polygone régulier à  $n$  côtés.
- Si  $G$  est un sous-groupe de  $\text{Isom}(\mathbb{E})$ , ses éléments qui préservent l'orientation forment un sous-groupe de  $G$  (donc de  $\text{Isom}(\mathbb{E})$  aussi) noté  $G^+$ .

- L'application déterminant  $\det : \text{Isom}(\overrightarrow{\mathbb{E}}) \longrightarrow \{1, -1\}$  est un morphisme de groupes. D'où le morphisme :

$$\phi : \text{Isom}(\mathbb{E}) \longrightarrow \{1, -1\}$$

donné par  $\phi = \det \circ \pi$ . On peut le restreindre à n'importe quel sous-groupe  $G$ . Son noyau dans ce cas-là est  $G^+$ .

- On a des suites exactes :

$$1 \longrightarrow \mathcal{T} \hookrightarrow \text{Isom}^+(\mathbb{E}) \xrightarrow{\pi} \text{Isom}^+(\overrightarrow{\mathbb{E}}) \longrightarrow 1.$$

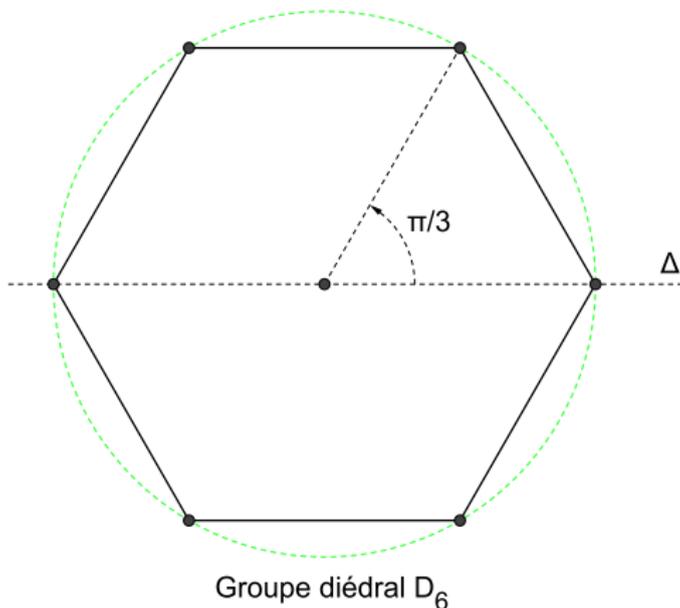
$$1 \longrightarrow \text{Isom}^+(\mathbb{E}) \hookrightarrow \text{Isom}(\mathbb{E}) \xrightarrow{\phi} \{1, -1\} \longrightarrow 1.$$

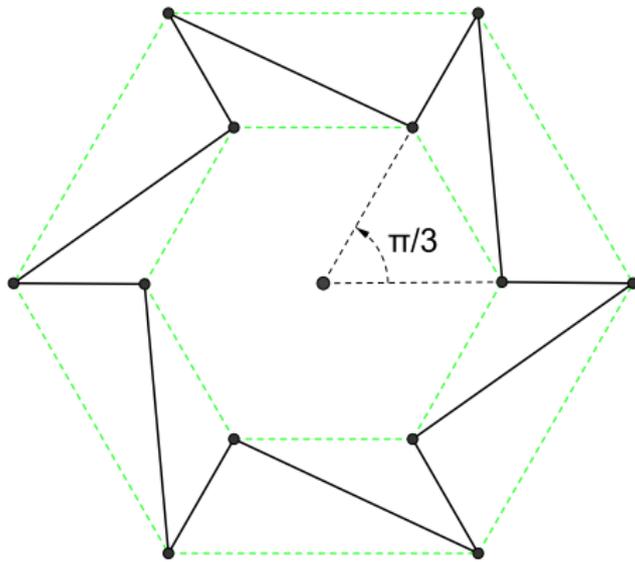
$$1 \longrightarrow C_n \hookrightarrow D_n \xrightarrow{\phi} \{1, -1\} \longrightarrow 1.$$

- $C_n$  et  $D_n$  sont les seuls sous-groupes finis de  $\text{Isom}(\mathbb{E})$  comme le montre le théorème qui suit.

## Théorème de Leonardo

*Les sous-groupes finis d'isométries du plan sont de deux types : le groupe cyclique  $C_n$  et le groupe diédral  $D_n$ .*





Groupe cyclique  $Z/6Z$

## Preuve.

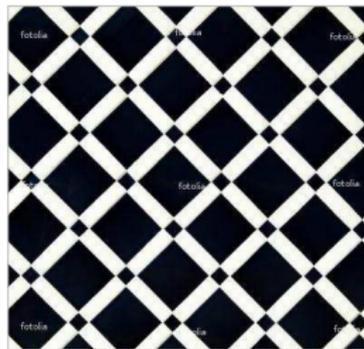
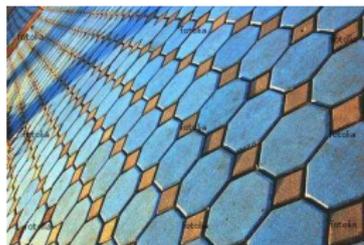
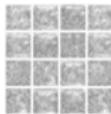
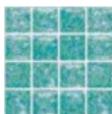
*Il s'agit évidemment de Léonard de Vinci ! Il a été le premier à avoir remarqué les symétries possibles d'un bâtiment central et comment y attacher des chapelles et des niches sans détruire les symétries du noyau. C'est la raison pour laquelle ce théorème lui revient.*

- *$G$  ne contient ni translation ni symétrie glissée (la composée d'une translation et d'une réflexion d'axe parallèle au vecteur de translation) ; ces éléments sont d'ordre infini. Et si  $G$  en contenait, cela contredirait le fait qu'il soit fini.*

- On suppose que  $G$  préserve l'orientation. Il ne contient donc que des rotations. Si deux rotations  $\rho_1$  et  $\rho_2$  avaient des centres différents, le commutateur  $\rho_2^{-1}\rho_1^{-1}\rho_2\rho_1$  serait une translation non triviale, ce qui n'est pas possible, donc tous les éléments de  $G$  sont des rotations de même centre et par suite  $G$  est isomorphe à  $C_n$  (ici  $n$  est l'ordre de  $G$ ).
- Supposons que  $G$  contient une réflexion. Les éléments qui préserve l'orientation forment un sous-groupe cyclique  $C_n$  d'après ce qui précède. C'est le noyau du morphisme  $\phi : G \longrightarrow \{1, -1\}$  qui est non trivial et par suite surjectif; il est alors d'indice 2 dans  $G$  et donc normal;  $G$  s'identifie à un produit semi-direct  $C_n \rtimes \{1, -1\}$  qui est isomorphe au groupe diédral  $D_n$ .

## 2. Les pavages et leurs symétries

*Quelques images pour une définition visuelle !*





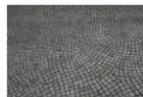


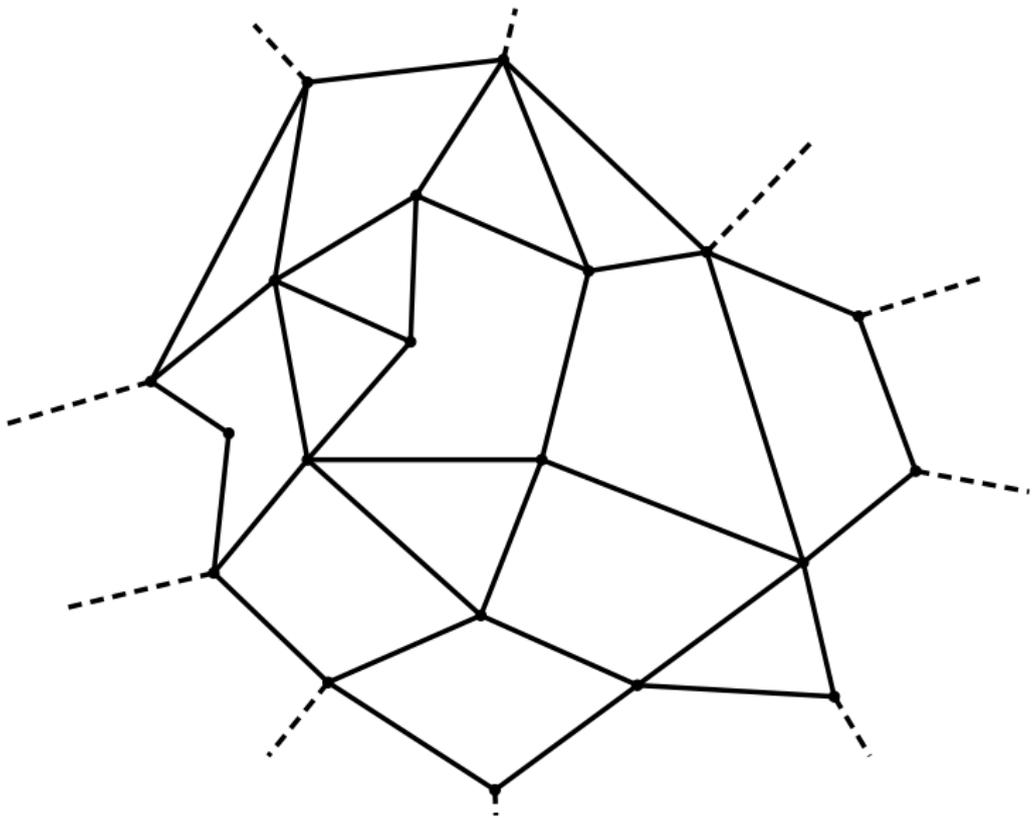
Mosquée Hassan 2 à Casablanca

## *Quelques frises !*



Un *pavage*  $\mathcal{P}$  est une partition du plan en polygones ne pouvant ni se chevaucher ni laisser de place vide.





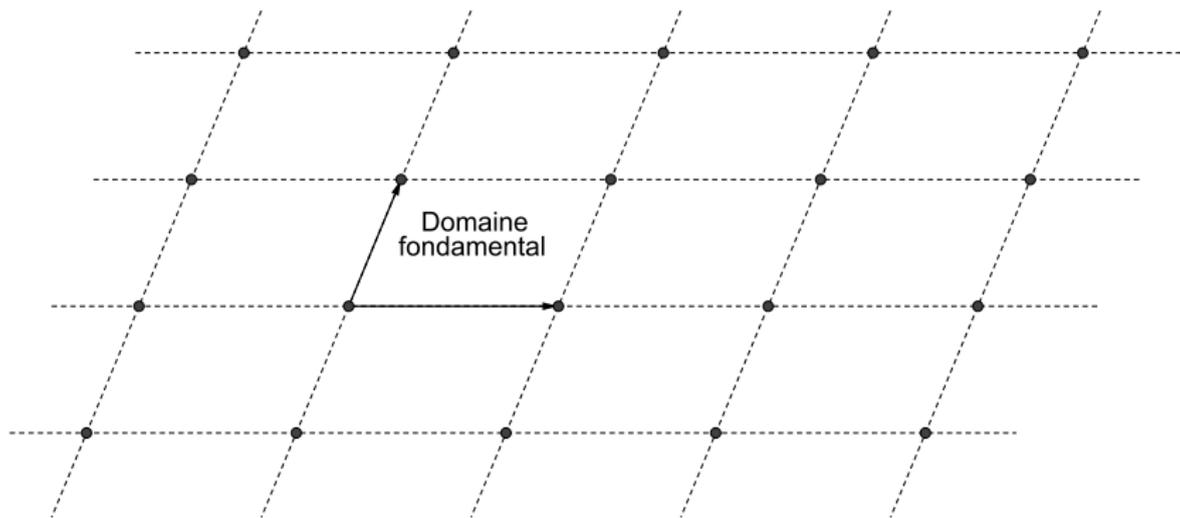
## Définition

Un *automorphisme* d'un pavage  $\mathcal{P}$  est une isométrie du plan qui envoie un pavé sur un autre pavé. Les automorphismes de  $\mathcal{P}$  forment un groupe qu'on note  $\text{Aut}(\mathcal{P})$ .

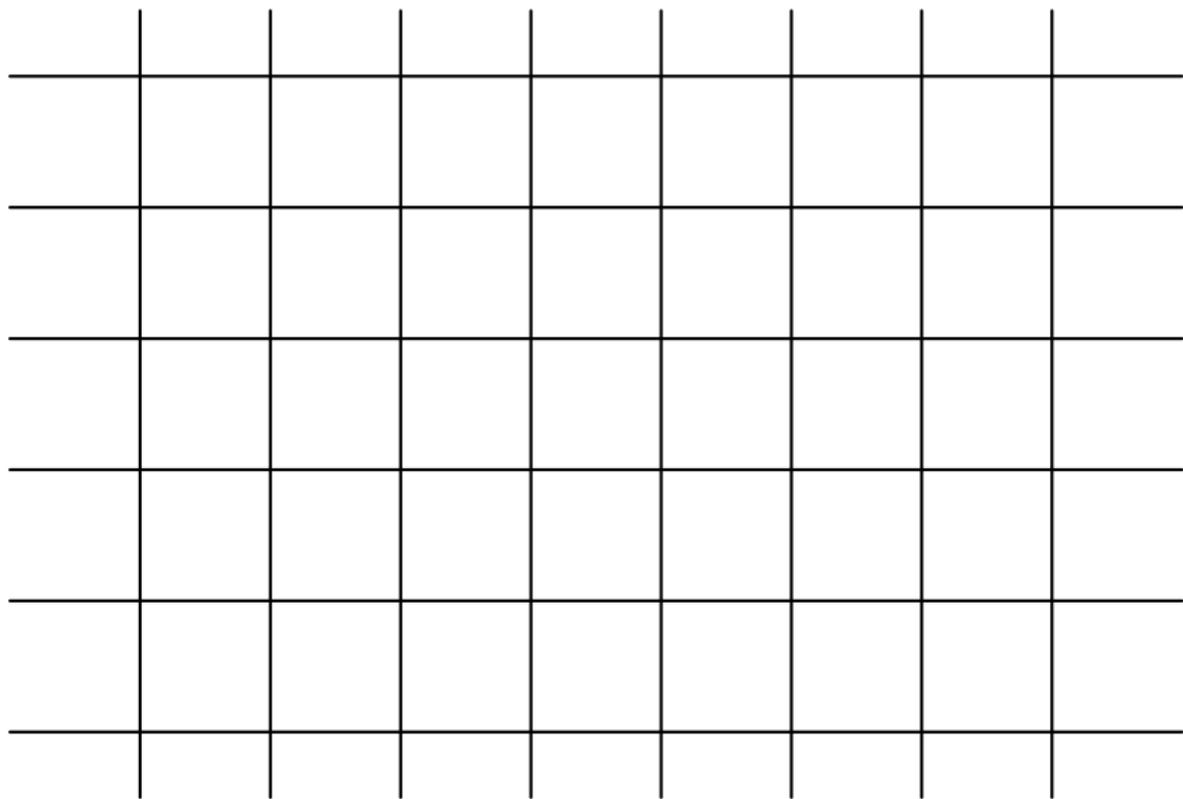
## Définition

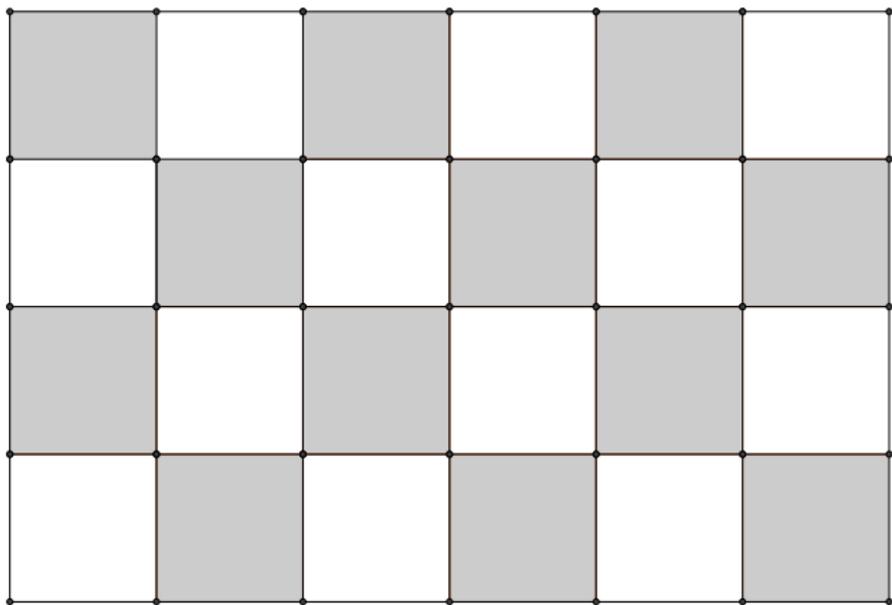
Le pavage  $\mathcal{P}$  est dit *périodique* si  $\text{Aut}(\mathcal{P})$  contient deux translations linéairement indépendantes.

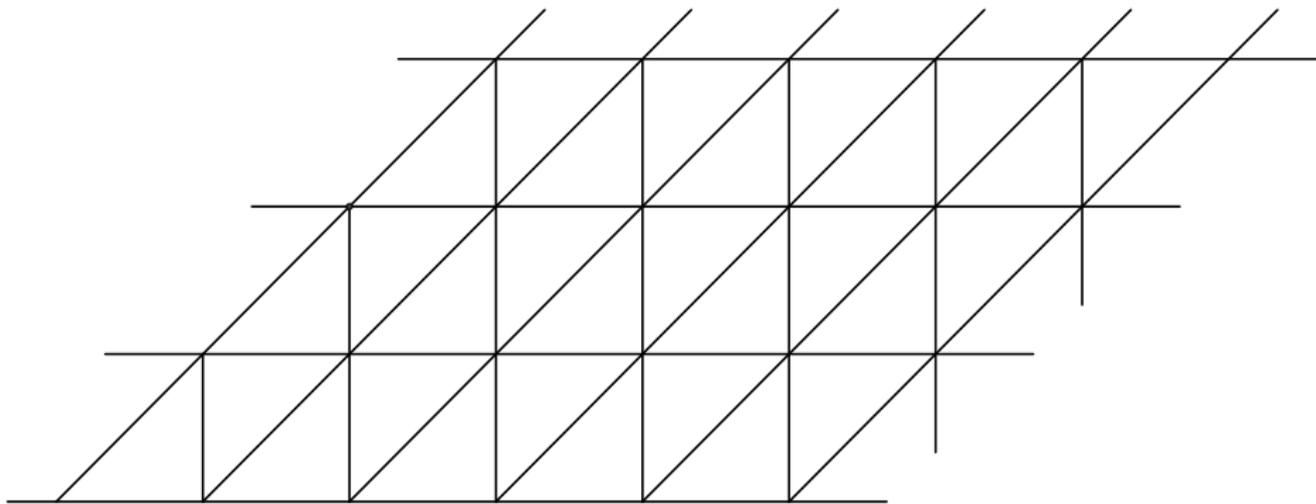
Les vecteurs  $\vec{a}$  et  $\vec{b}$  de plus petite "longueur" associés respectivement à ces translations engendrent un *réseau* dans le plan.

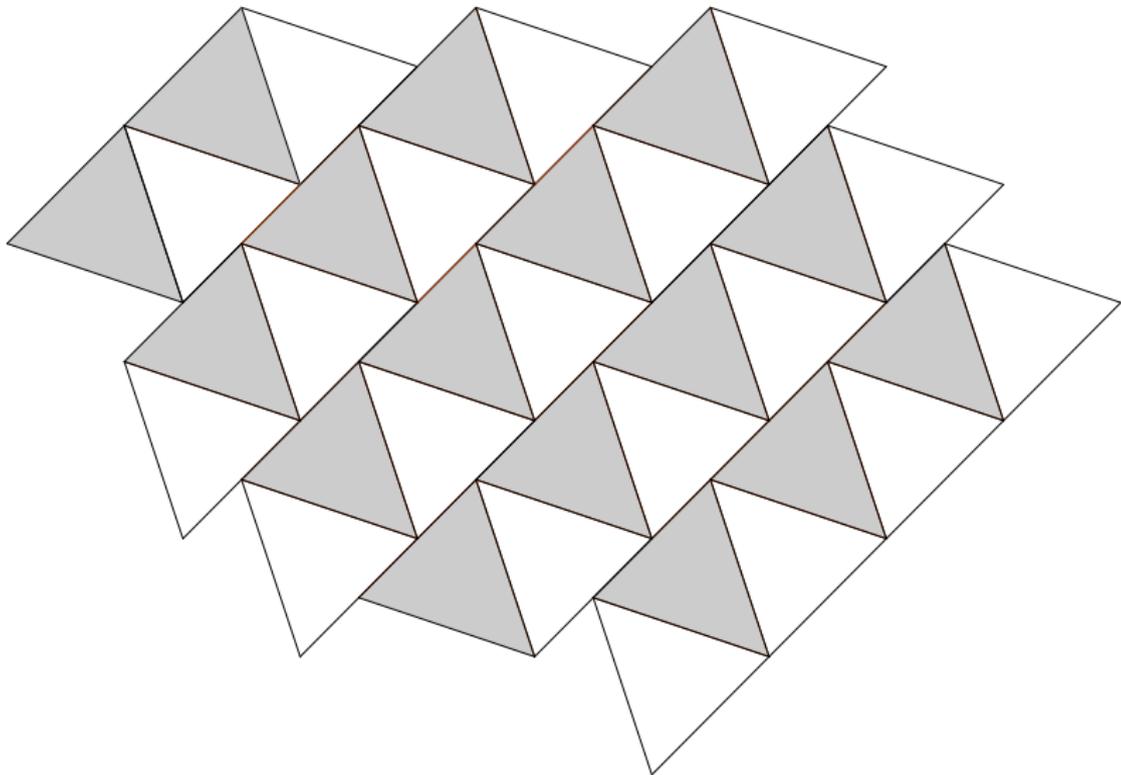


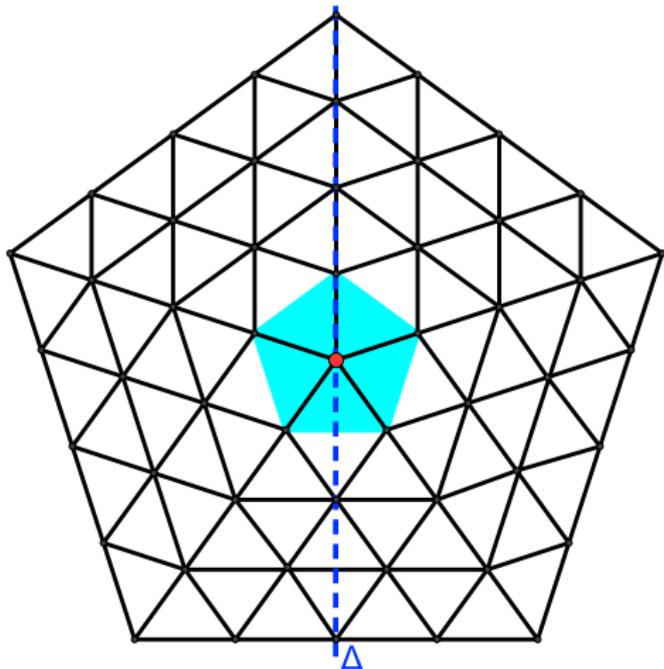
*Un réseau dans le plan euclidien*





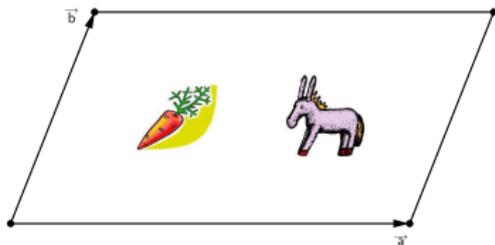






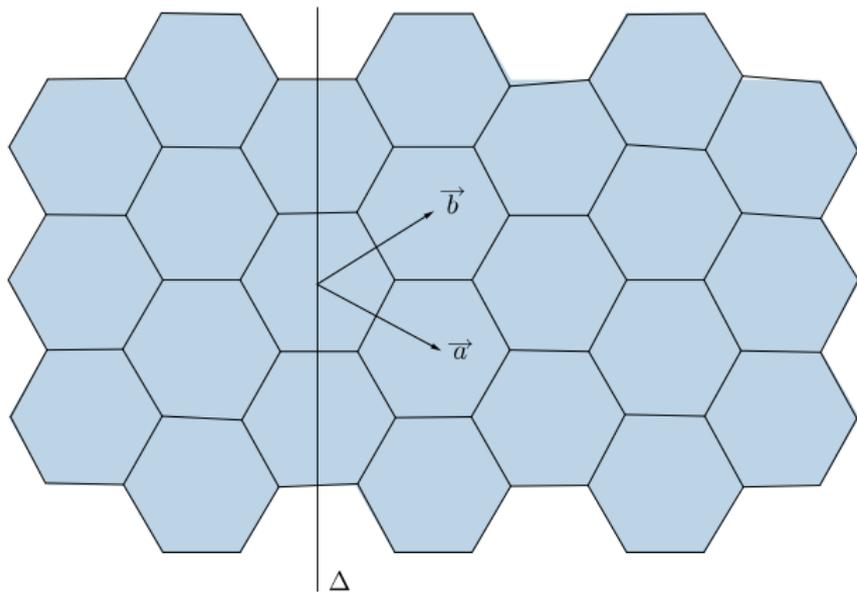
Pavage non périodique mais ayant un groupe de symétrie isomorphe au groupe diédral  $D_5$  engendré par la rotation d'angle  $72^\circ$  et la réflexion d'axe  $\Delta$

Les vecteurs  $\vec{a}$  et  $\vec{b}$  déterminent un parallélogramme appelé *domaine fondamental* du réseau.



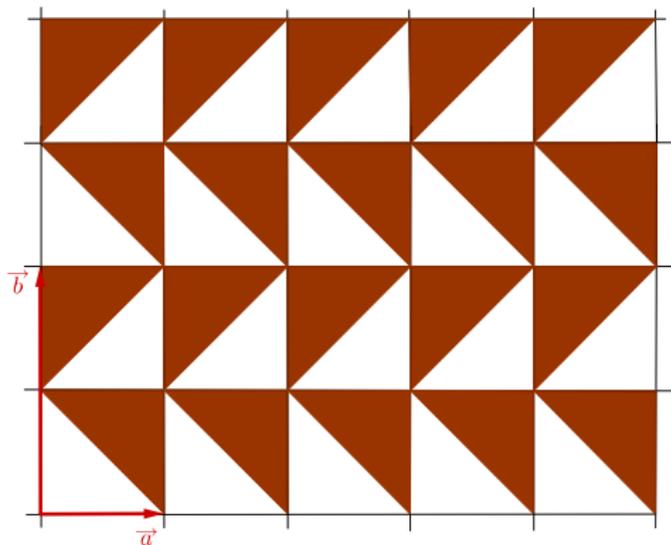
Dans un pavage périodique le motif essentiel se trouve dans le domaine fondamental du réseau. Celui-ci peut aussi posséder une “*certaine symétrie interne*”. Le groupe des automorphismes du pavage est une *extension* du réseau  $\Gamma$  par un groupe fini  $G$  constitué de réflexions et de rotations. On a donc une suite exacte :

$$0 \longrightarrow \Gamma \hookrightarrow \text{Aut}(\mathcal{P}) \xrightarrow{\pi} G \longrightarrow 1.$$



Ici  $\text{Aut}(\mathcal{P})$  est engendré par  $\Gamma = \mathbb{Z}\vec{a} \oplus \mathbb{Z}\vec{b}$ , la réflexion  $\sigma$  d'axe  $\Delta$  et la rotation de centre l'origine et d'angle  $\theta = \frac{\pi}{3}$ .  
 On a une suite exacte scindée :

$$0 \longrightarrow \Gamma \hookrightarrow \text{Aut}(\mathcal{P}) \xrightarrow{\pi} D_6 \longrightarrow 1.$$



Ici  $\text{Aut}(\mathcal{P})$  est engendré par  $\tau_1(x, y) = (x + 1, y)$  (translation) et la symétrie glissée  $\tau'_2(x, y) = (-x, y + 1)$ . Le réseau  $\Gamma$  l'est par la translation  $\tau_1$  de vecteur  $\vec{a} = (1, 0)$  et la translation  $\tau_2 = \tau'_2 \circ \tau'_2$  de vecteur  $\vec{b} = (0, 2)$ . Le groupe  $G = \pi(\text{Aut}(\mathcal{P}))$  se réduit à la réflexion  $\sigma(x, y) = (-x, y)$ . On a ainsi une suite exacte non scindée :

$$0 \longrightarrow \Gamma \hookrightarrow \text{Aut}(\mathcal{P}) \xrightarrow{\pi} \{1, -1\} \longrightarrow 1.$$

### 3. Pavages réguliers

#### Question

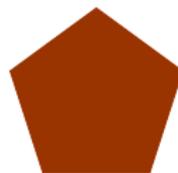
*Quels sont les polygones réguliers qui pavent de façon périodique le plan euclidien  $\mathbb{E}$  ?*



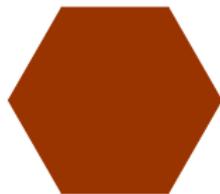
Triangle équilatéral



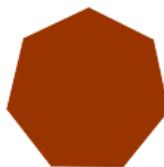
Carré



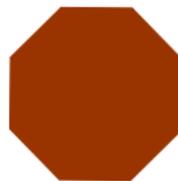
Pentagone



Hexagone



Heptagone



Octogone

*Polygones réguliers*

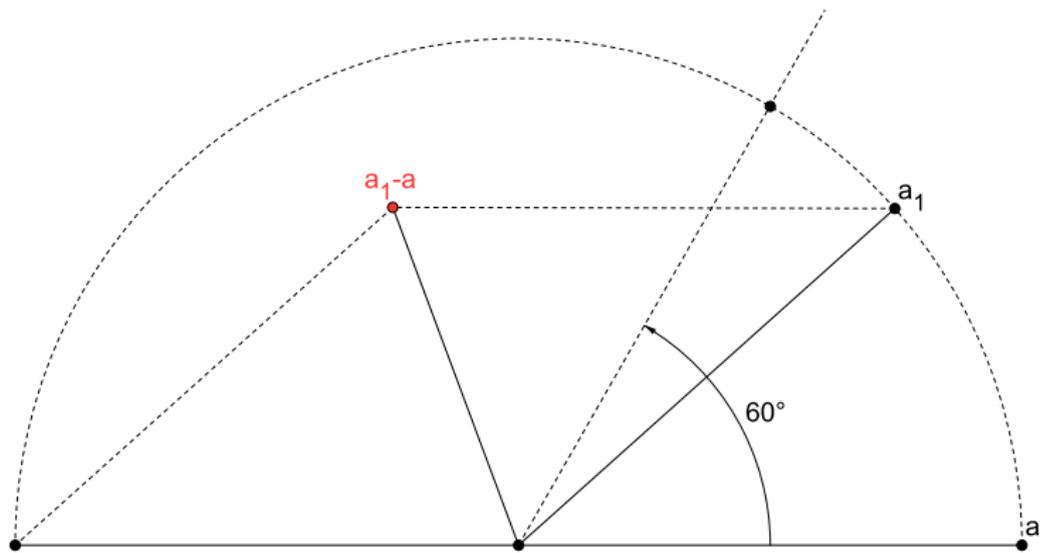
## Théorème

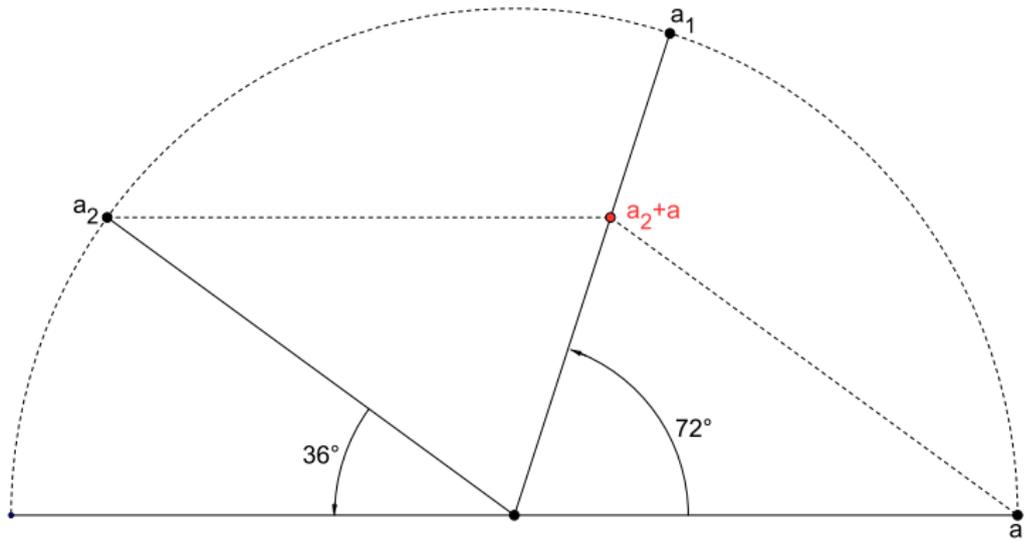
*L'ordre d'une rotation dans le groupe  $G$  est 2, 3, 4 ou 6.*

*Preuve. Le groupe fini  $G$  (qui ne contient que des rotations) agit en préservant le réseau  $\Gamma$ . Soit  $\rho$  son générateur. Soit  $\vec{a}$  un élément de  $\Gamma$  ayant la plus petite longueur.*

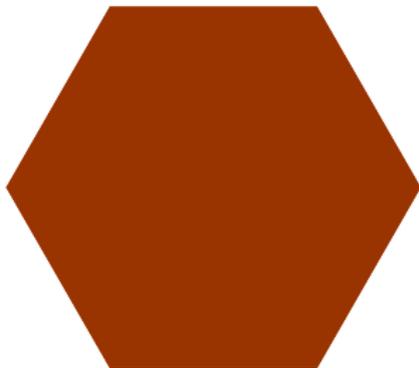
*1 - Supposons que l'ordre de  $G$  est supérieur à 6. Dans ce cas l'angle de rotation de  $\rho$  est strictement inférieur à  $\frac{\pi}{3}$ . Posons  $\vec{a}_1 = \rho(\vec{a})$ ; alors le vecteur  $\vec{a}_1 - \vec{a}$  appartient à  $\Gamma$  et a une longueur strictement inférieure à celle de  $\vec{a}$ ; ce qui contredit le choix de  $\vec{a}$ .*

*2 - Supposons maintenant  $n = 5$ . Dans ce cas l'angle de rotation de  $\rho$  est  $\frac{2\pi}{5}$ . Posons  $\vec{a}_1 = \rho(\vec{a})$  et  $\vec{a}_2 = \rho(\vec{a}_1)$ . Alors le vecteur  $\vec{a}_2 + \vec{a}$  appartient à  $\Gamma$  et a une longueur strictement inférieure à celle de  $\vec{a}$ ; ce qui contredit encore une fois le choix de  $\vec{a}$ .*





## *Polygones réguliers paveurs*



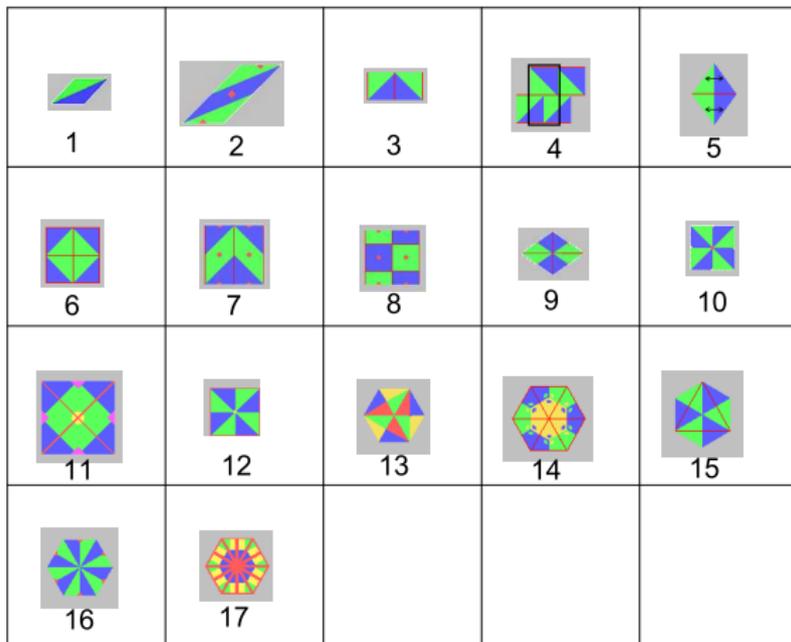






*Le salar d'Uyuni en Bolivie*





*Les 17 groupes paveurs !*

<http://www.scienceu.com/geometry/articles/tiling/wallpaper.html>

## Question

### *Qu'est-ce qu'un groupe paveur ?*

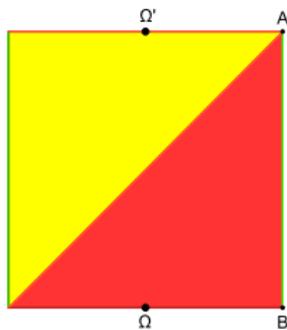
*On rappelle qu'un groupe d'isométries du plan est exactement un ensemble de mouvements (y compris celui qui est sans effet) stable par compositions successives et par passage à leurs inverses :*

- Les translations poussent,*
- les rotations font tourner,*
- les réflexions symétrisent par rapport à des axes.*

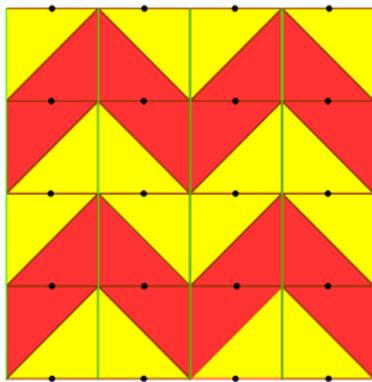
*Quand on prend une “brique” avec un motif dedans, qu'on lui applique de toutes les manières possibles les mouvements du groupe et qu'on arrive à paver le plan de façon périodique, on dit alors que le groupe en question est **paveur**.  
Regardons en détail un exemple.*

*La brique de départ est celle du pavage numéro 7 sur laquelle on opère les mouvements qui suivent :*

- on symétrise par rapport au point  $\Omega$  et tous ses translatés horizontaux et verticaux par un carreau,*
- on symétrise par rapport à l'axe vertical tracé en vert et tous ses translatés horizontaux et verticaux par un carreau.*



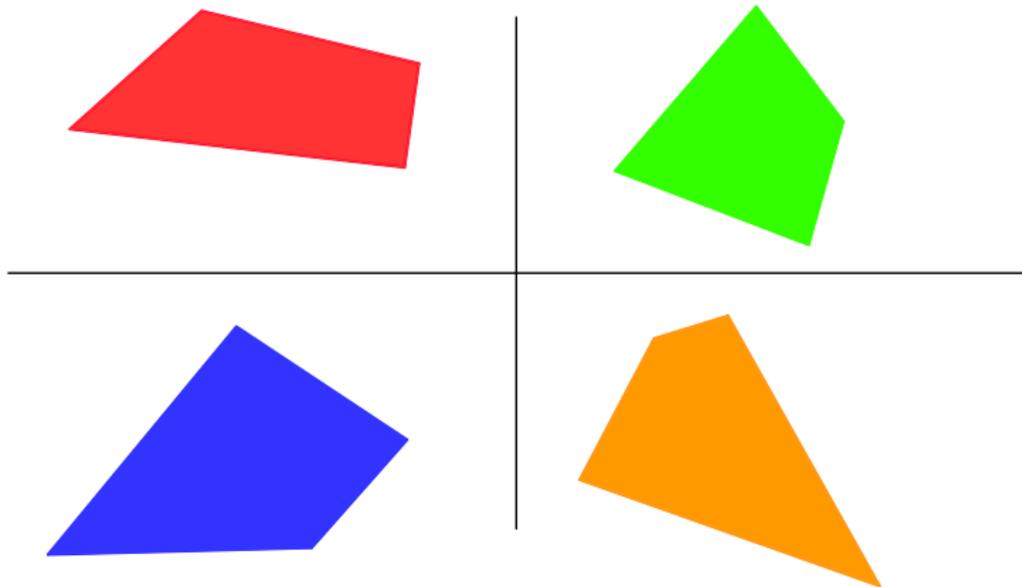
*On obtient alors le pavage qui suit. Le groupe paveur est engendré par le réseau  $\Gamma$  dont les translations sont données par un vecteur horizontal et un vecteur vertical de deux carreaux (deux briques) chacun, de la symétrie centrée en  $\Omega$  et la réflexion d'axe la droite  $(AB)$ .*



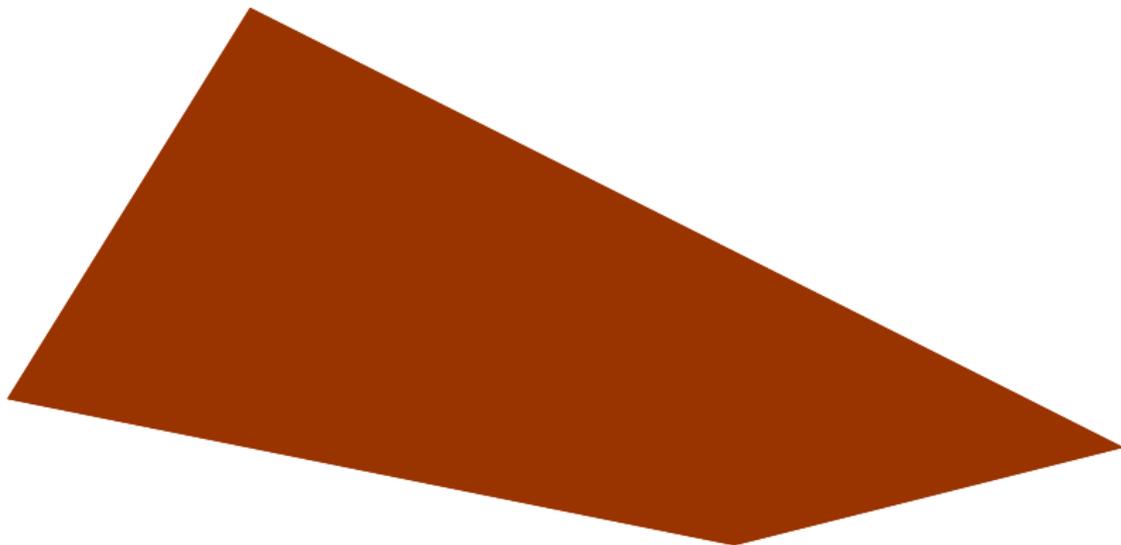
## 4. Polygones paveurs

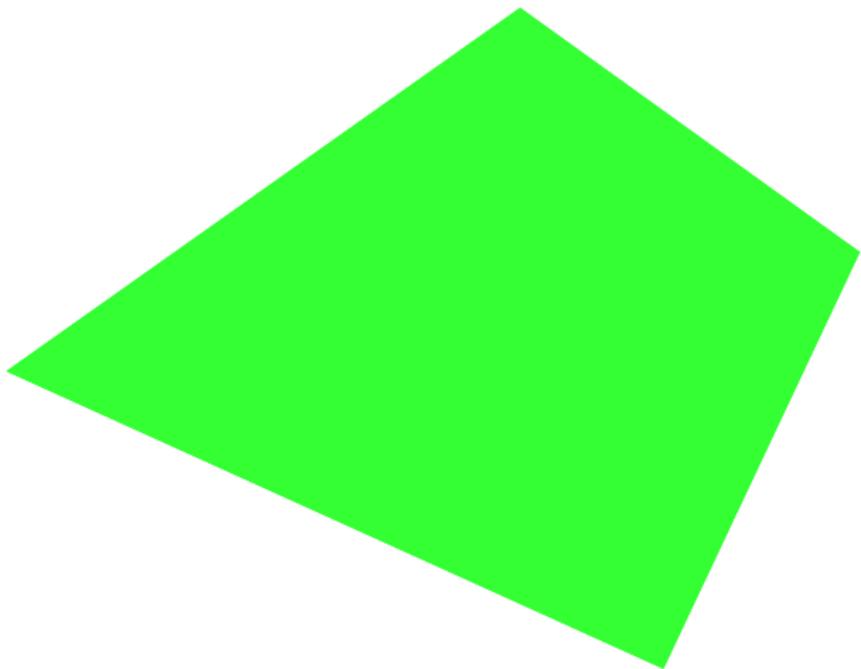
### Question

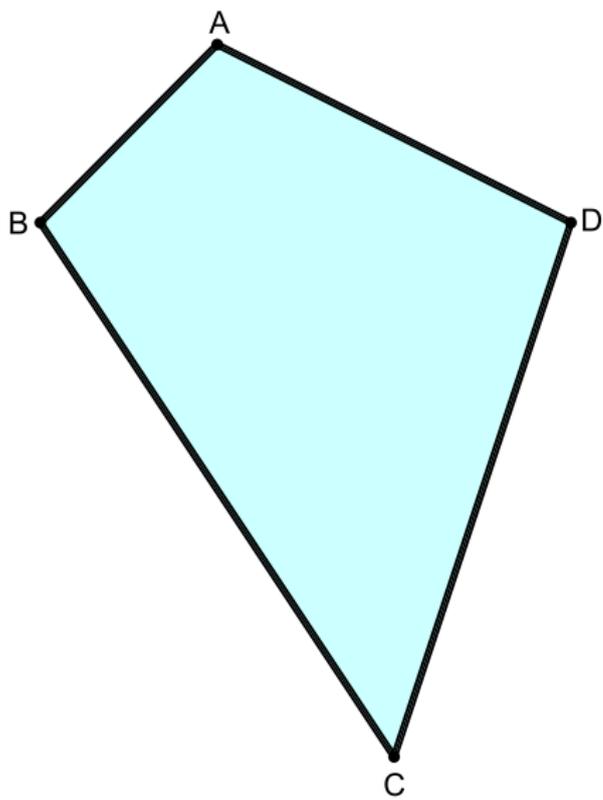
*Un carreleur peut-il carreler le sol avec des carreaux tous "égaux" et ayant l'une des formes suivantes ?*



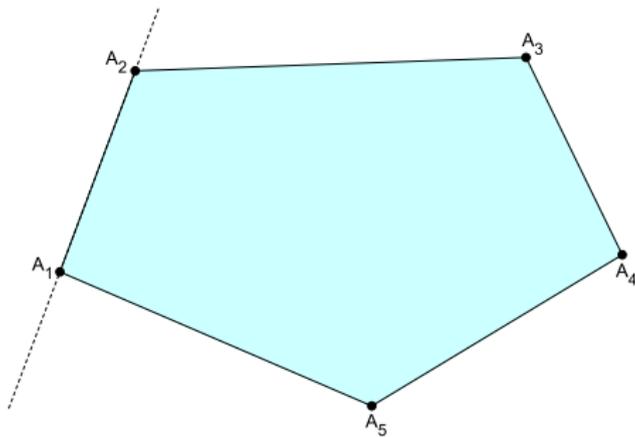
*Un quadrilatère convexe quelconque peut-il paver ?*







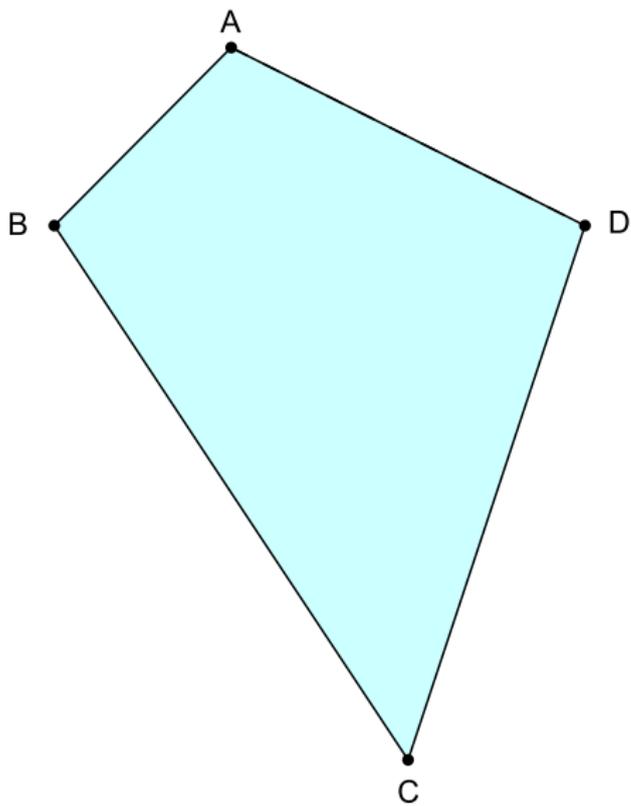
On rappelle qu'un *polygone*  $\Delta_n$  à  $n$  ( $n \geq 3$ ) côtés est la donnée de  $n$  points (distincts bien sûr)  $A_1, \dots, A_n$  dans le plan. On dira que  $\Delta_n$  est convexe si, pour tous  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ , la droite  $(A_i A_j)$  partage le plan de telle sorte que les points qui restent soient tous dans le même demi-plan.

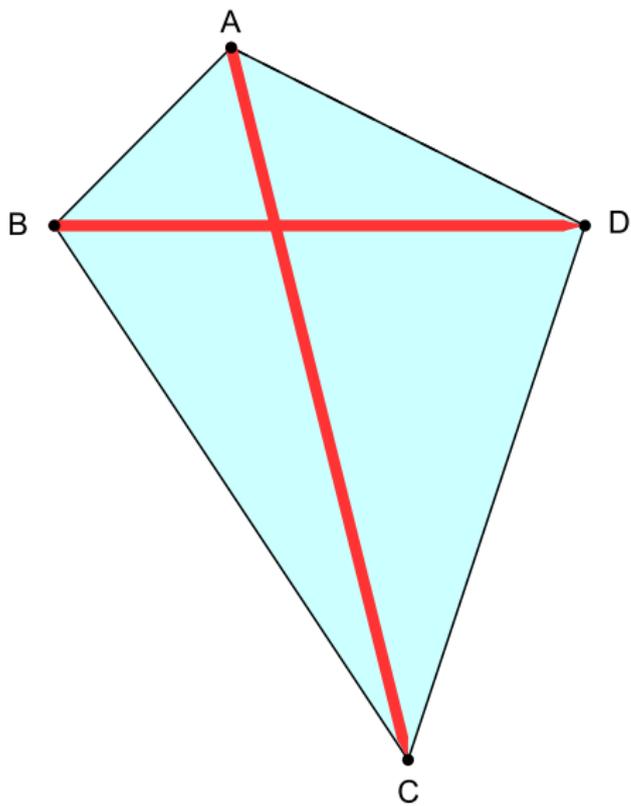


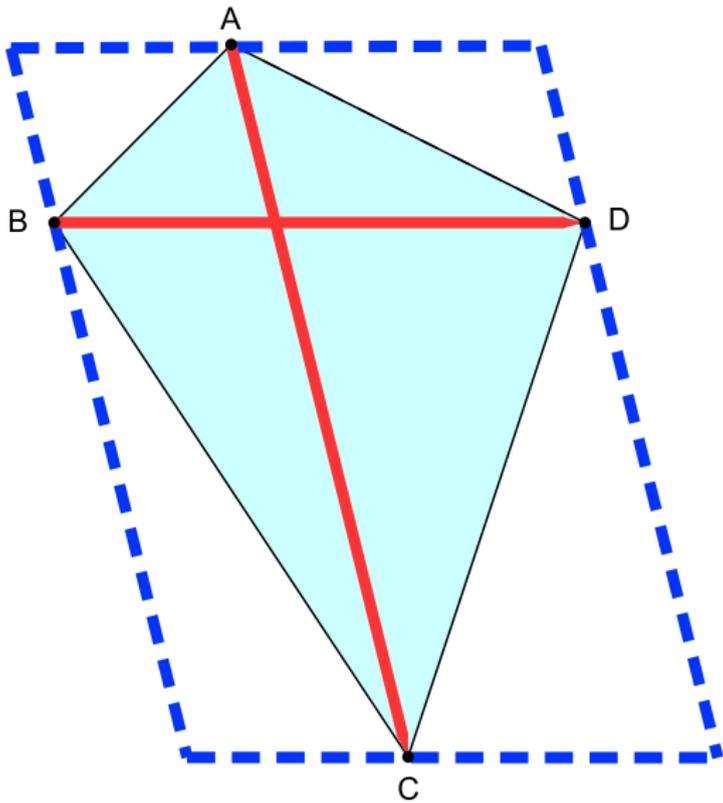
$$\text{Somme des angles} = (n - 2)\pi$$

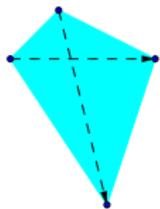
## Opération carrelage

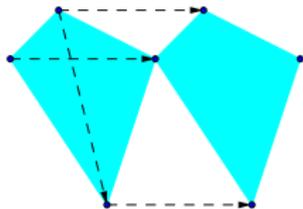
- 1 - Prendre une vingtaine de quadrilatères convexes isométriques. Commencer à les placer côte à côte pour couvrir une portion du plan.*
- 2 - Constater qu'il n'y a aucune obstruction au niveau des angles à chacun des sommets et que l'opération est toujours possible.*
- 3 - Donner les vecteurs des deux translations qui déterminent le réseau du pavage périodique. Voir s'il y a éventuellement d'autres symétries (c'est-à-dire des symétries centrales, des rotations ou autres...)*

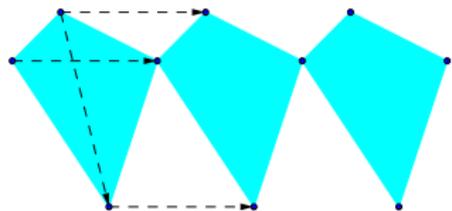


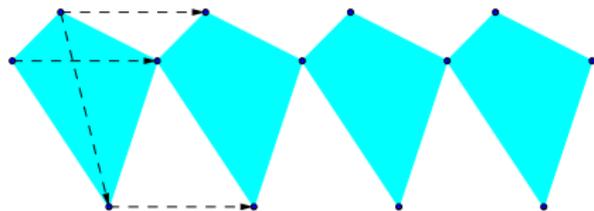


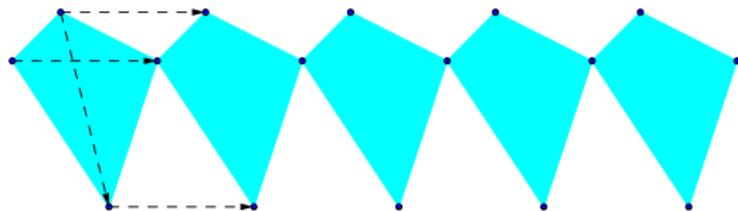


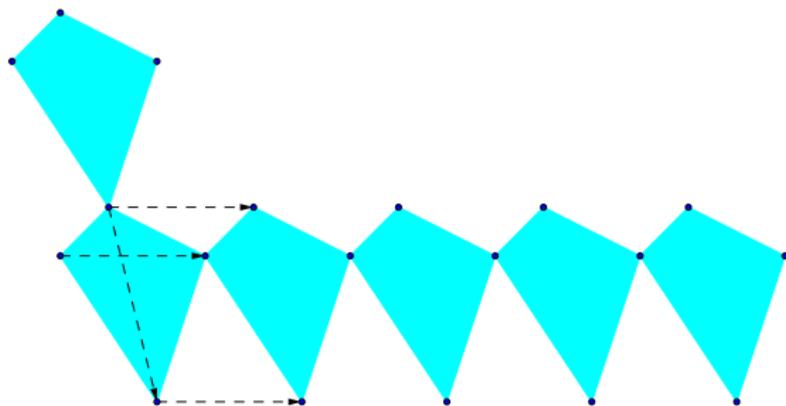


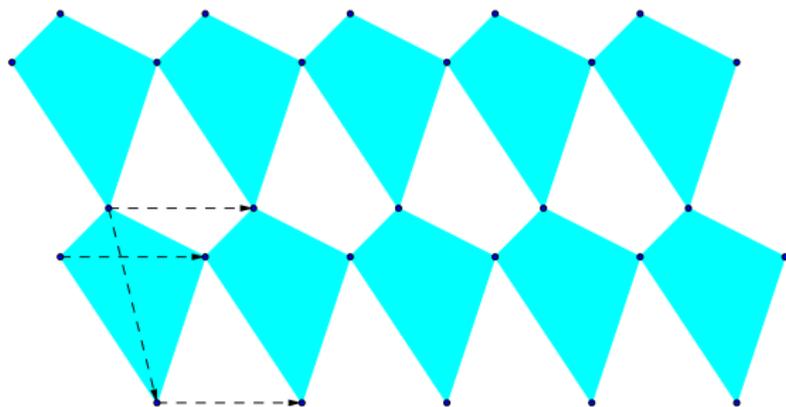


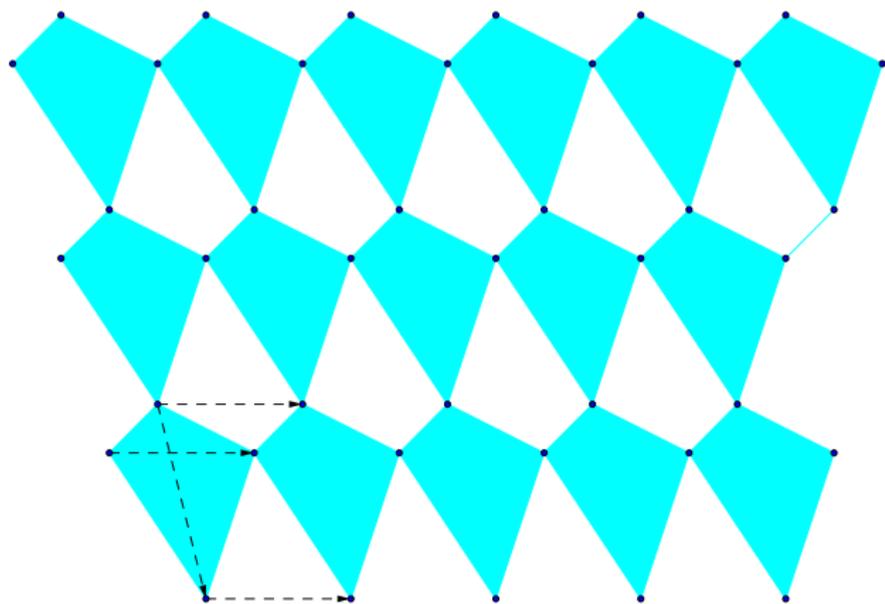


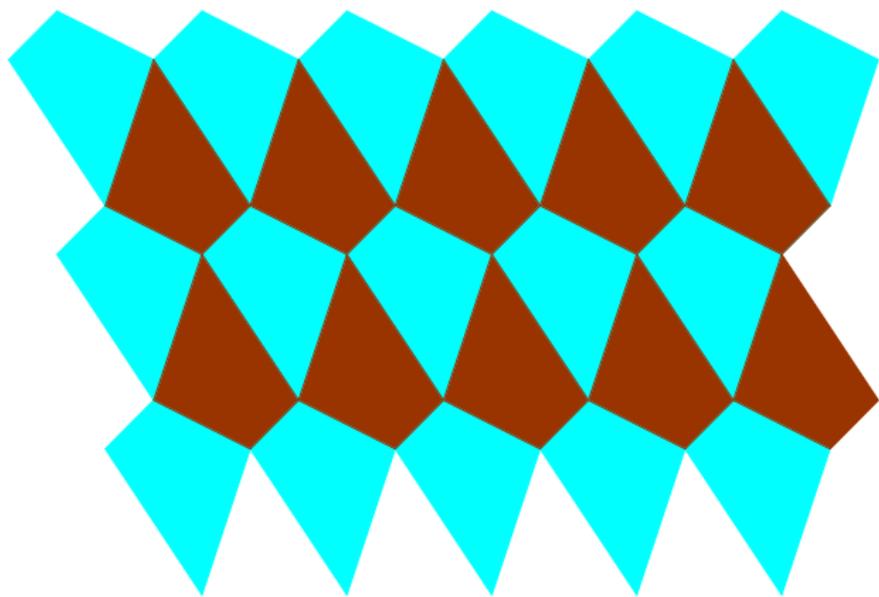


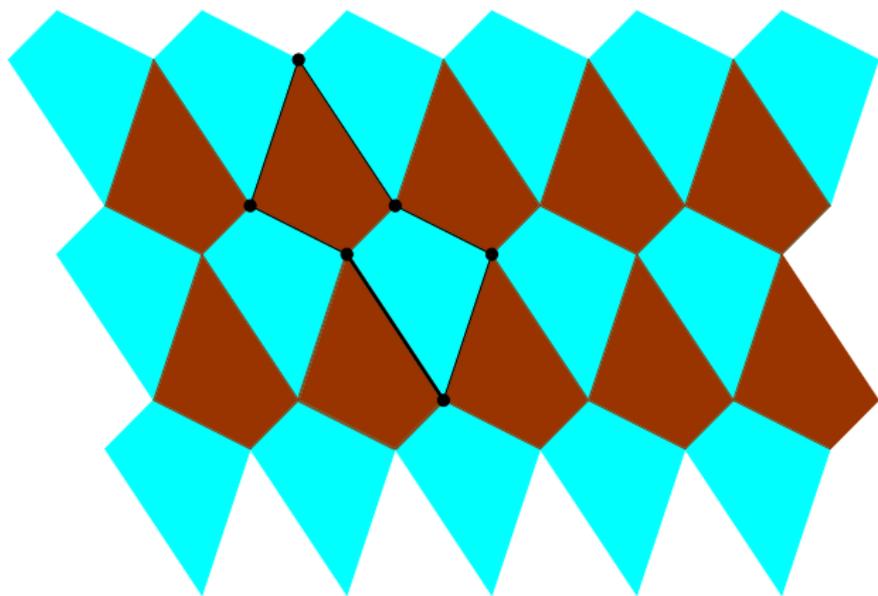


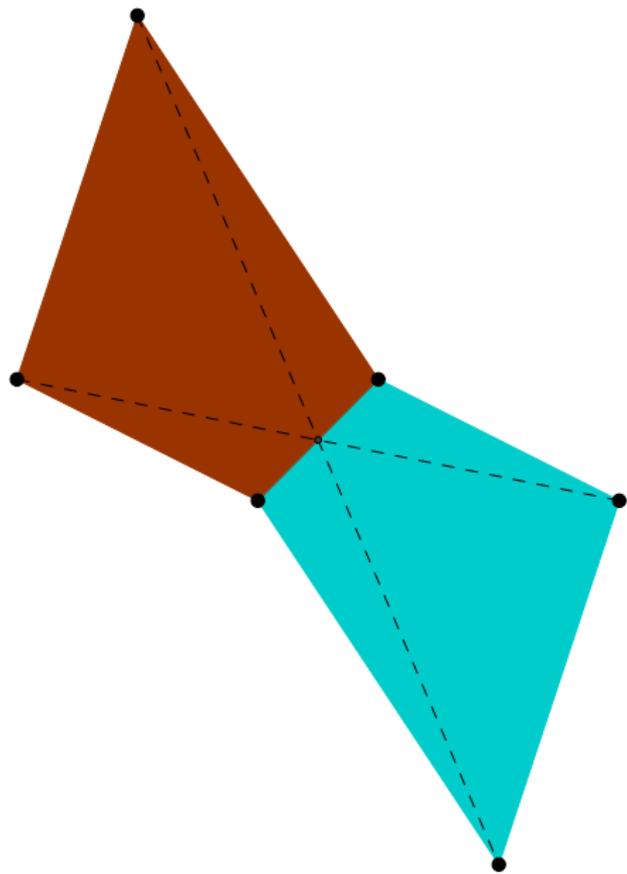


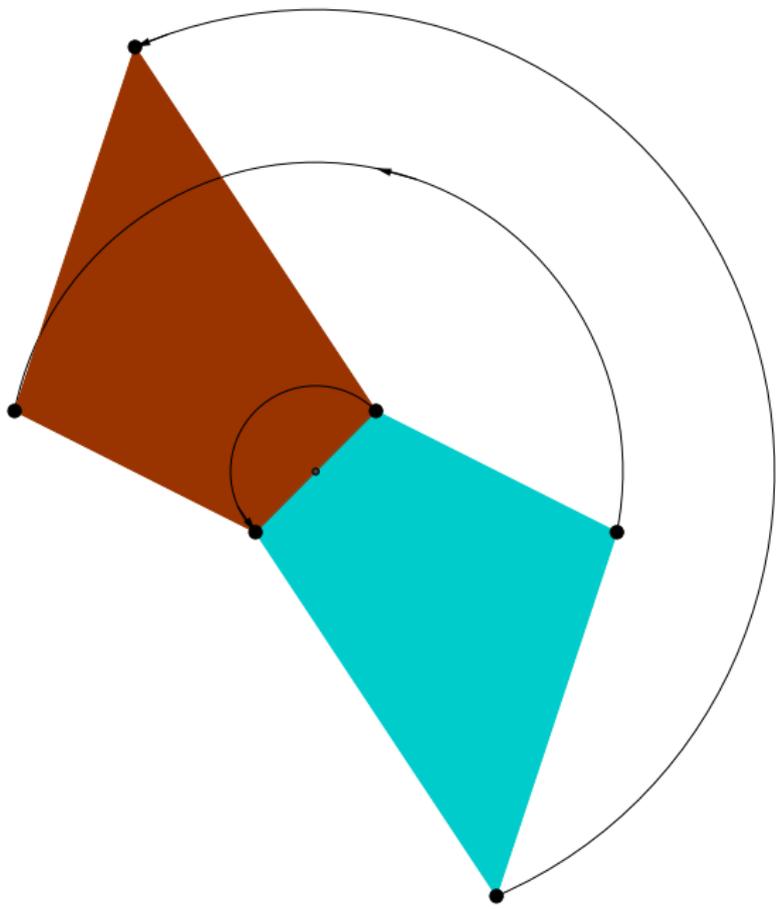












*Nous avons déjà vu qu'un hexagone régulier pave toujours et de façon périodique ! La question qui suit est alors naturelle.*

### Question

*Existe-t-il des hexagones non réguliers qui pavent ? Si oui, donnent-ils des pavages périodiques comme dans le cas régulier ?*

*Évidemment, un hexagone quelconque ne pave pas : on peut facilement construire des exemples à cet effet. Mais il en existe qui pavent même périodiquement. Ceux-là ont bien entendu une certaine particularité. Nous allons en voir un exemple.*

## Théorème

Soit  $\Delta = ABCDEF$  un hexagone ayant un centre de symétrie  $\omega$ . Alors  $\Delta$  pave périodiquement le plan.

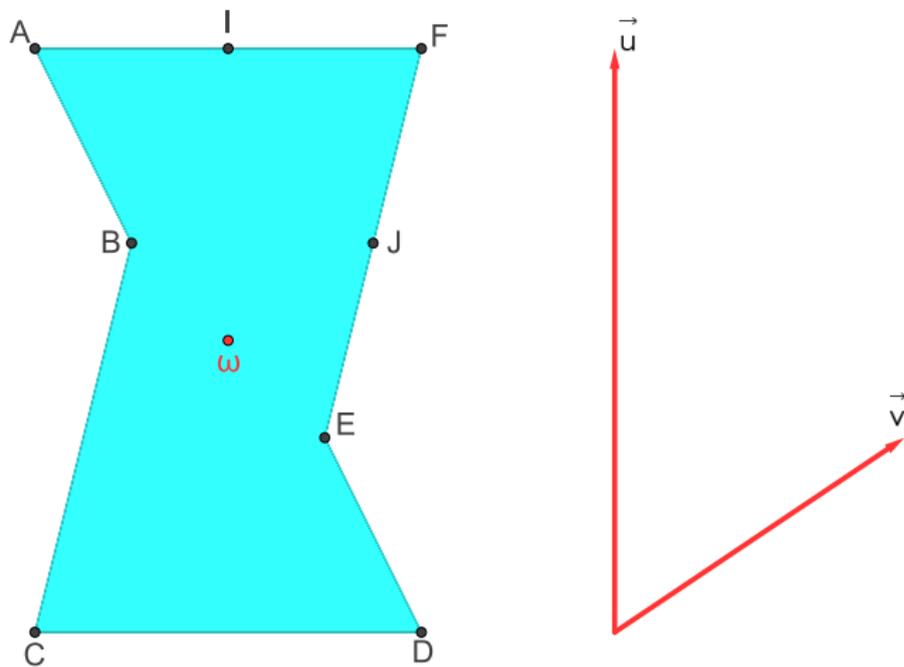
## Preuve

Elle est presque immédiate. Soient  $I$  et  $J$  les milieux respectifs des segments  $[AF]$  et  $[FE]$ , posons :

$$\vec{u} = 2\omega\vec{I} \quad \text{et} \quad \vec{v} = 2\omega\vec{J}$$

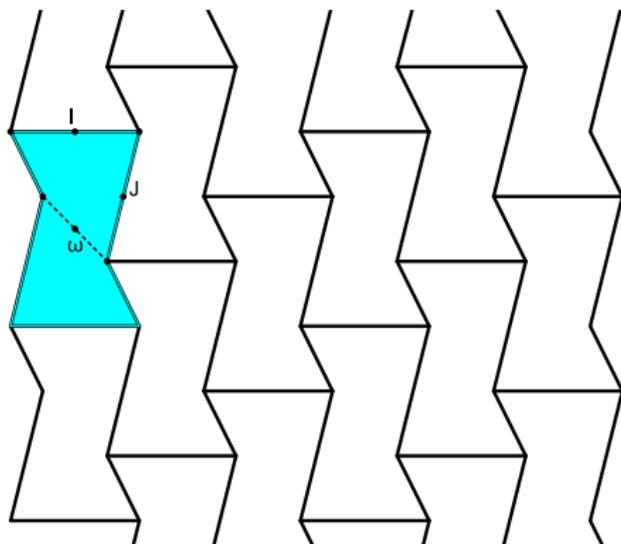
et notons  $\tau_1$  et  $\tau_2$  les translations associées respectivement à  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ . Si  $\sigma_\omega$ ,  $\sigma_I$  et  $\sigma_J$  sont les symétries de centres respectifs  $\omega$ ,  $I$  et  $J$  alors :

$$\tau_1 = \sigma_I \circ \sigma_\omega \quad \text{et} \quad \tau_2 = \sigma_J \circ \sigma_\omega.$$



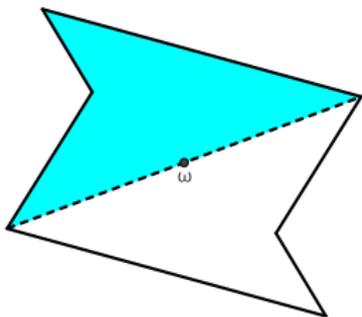
Hexagone avec un centre de symétrie  $\omega$

Les translatsés de  $\Delta$  par le groupe  $\Gamma$  engendré par  $\tau_1$  et  $\tau_2$  forment un pavage  $\mathcal{P}$  du plan dont le groupe des automorphismes  $\text{Aut}(\mathcal{P})$  contient (par construction même) le réseau  $\Gamma$ , donc  $\mathcal{P}$  est périodique (cf. dessin qui suit).



*Première application : tout quadrilatère convexe ou non pave périodiquement.*

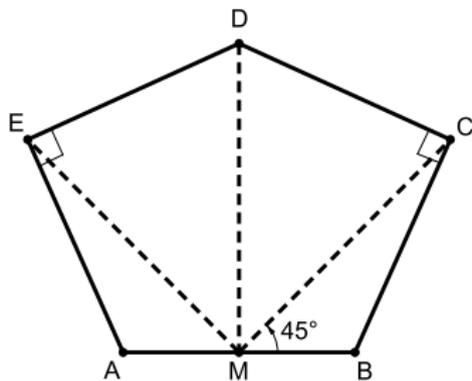
*On symétrise ce quadrilatère par rapport au milieu  $\omega$  d'un côté dont la droite qui le contient détermine un demi-plan ouvert ne le contenant pas. La réunion des deux quadrilatères (l'initial et son symétrisé) donne un hexagone ayant  $\omega$  comme centre de symétrie. On applique alors ce qui précède.*



La réunion du quadrilatère et de son symétrisé par rapport à  $\omega$  donne un hexagone ayant  $\omega$  comme centre de symétrie

## Deuxième application : *Le pavage du Caire*

*Il s'agit d'un pavage par un pentagone équilatéral (les 5 côtés sont égaux). On en trouve dans certaines rues du Caire, d'où son appellation.*



Pavé du Caire

Les angles de sommets C et E sont droits  
La somme des angles de sommets A, B et D  
est donc égale à  $360^\circ$

*Nous allons commencer par construire ce pentagone, ensuite nous montrerons comment on peut l'utiliser pour paver le plan.*

- On part d'un segment  $[AB]$ . De son milieu  $M$  on trace deux segments  $[MC]$  et  $[ME]$  tels que :*

$$MC = ME = AB$$

*et les mesures des angles  $\widehat{BMC}$  et  $\widehat{EMA}$  soient égales à  $\frac{\pi}{4}$  (ou 45). L'angle  $\widehat{EMC}$  est donc droit. Les perpendiculaires menées par  $C$  et  $E$  respectivement à  $(BC)$  et  $(AE)$  se coupent en un point  $D$ .*

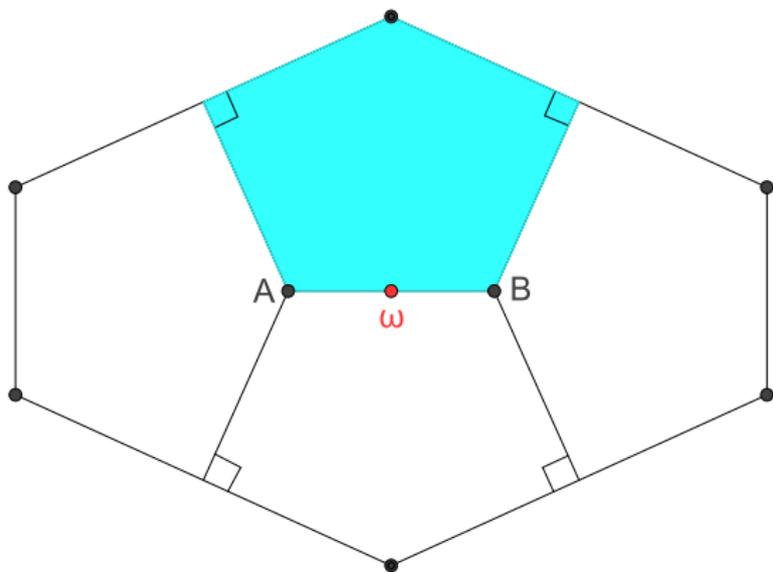
- Le pentagone convexe  $ABCDE$  est équilatéral. On sait que  $MC = ME = AB$  ; reste juste à montrer que :

$$ED = CD = BC.$$

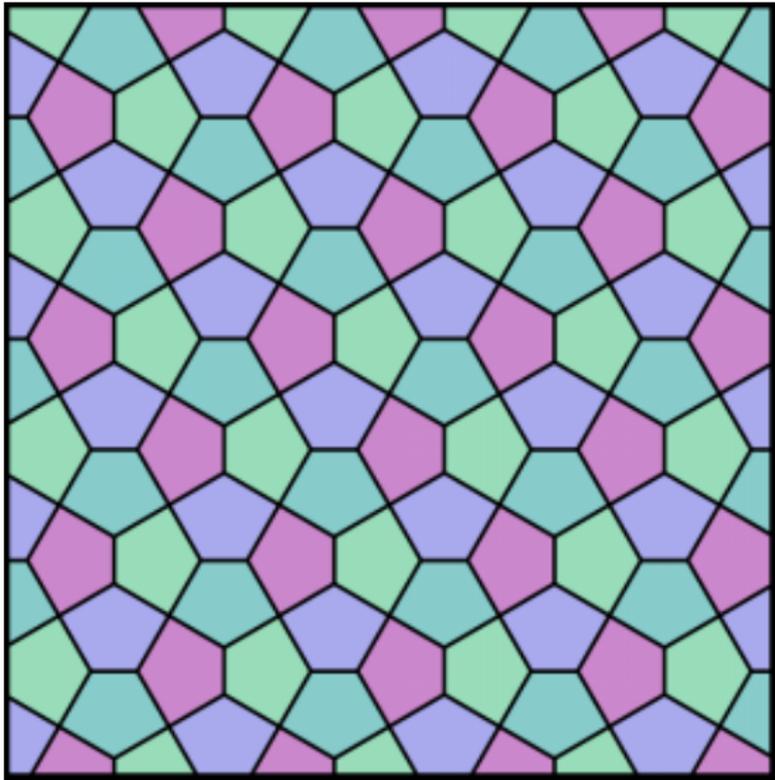
Par symétrie par rapport à l'axe  $(MD)$  on a  $ED = CD$  ; il suffit donc d'établir l'égalité  $BC = CD$ . Comme les angles  $\widehat{BMD}$  et  $\widehat{BCD}$  sont droits le quadrilatère  $MBCD$  est inscrit dans un cercle  $\mathcal{C}$  ; donc les angles  $\widehat{DBC}$  et  $\widehat{CMD}$  (qui interceptent le même arc dans le cercle  $\mathcal{C}$ ) sont égaux.

Par suite l'angle  $\widehat{DBC}$  vaut  $\frac{\pi}{4}$  ; comme le triangle  $DBC$  est rectangle en  $C$  (par construction), l'angle  $\widehat{BCD}$  vaut aussi  $\frac{\pi}{4}$ , ce qui montre que le triangle  $BCD$  est isocèle de base le segment  $[BD]$  et donc  $BC = CD$ .

- On prend quatre exemplaires isométriques d'un tel pentagone. On les dispose comme dans le dessin qui suit. Le lecteur peut alors facilement vérifier que l'on obtient un hexagone ayant le point  $\omega$  (milieu du segment  $AB$ ) comme centre de symétrie.
- Pour obtenir le pavage du Caire, il suffit alors de paver à l'aide de l'hexagone qu'on vient d'obtenir. C'est un pavage périodique comme on peut le constater de façon immédiate.

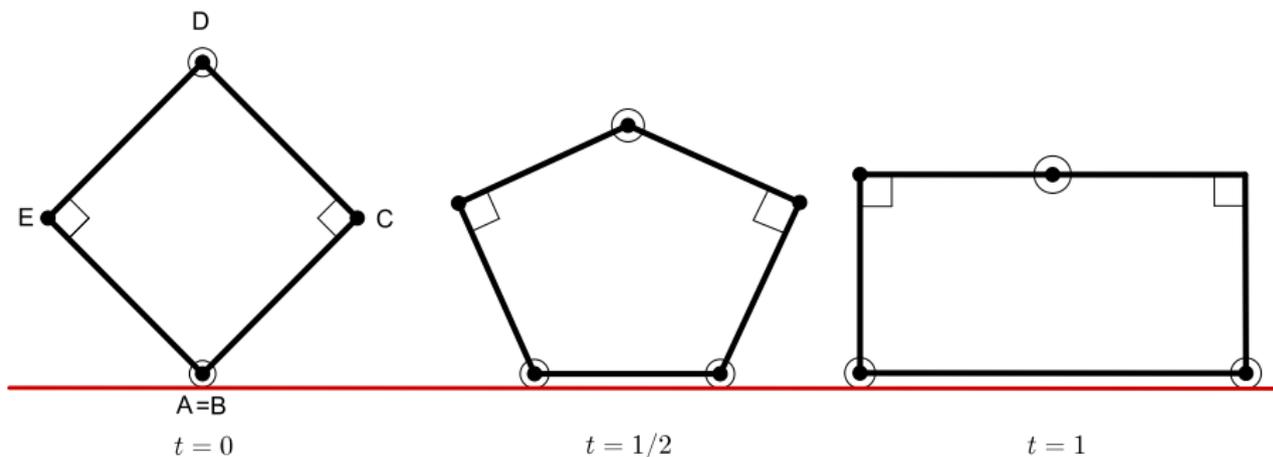


Quatre pavés du Caire disposés comme ci-dessus  
donnent un hexagone ayant un centre de symétrie





*Sortie station Metro Behoos*



[www.univ-valenciennes.fr/lamav/elkacimi/FamillePavagesCaire.pdf](http://www.univ-valenciennes.fr/lamav/elkacimi/FamillePavagesCaire.pdf)

## 5. Petite conclusion

*Le thème des pavages a beaucoup intéressé les géomètres, les artistes, les artisans... à travers la symétrie et la beauté des objets dont il fait usage. Il a aussi de nombreuses applications hormis son utilisation pour décorer les sols, les murs et pas mal d'autres surfaces. Il est très ancien, de caractère universel et a tenu une place centrale dans le développement de beaucoup de civilisations : les décors somptueux qu'on peut admirer par exemple au Palais de l'Alhambra à Grenade (Espagne) montrent à quel point l'art islamique a été à la fois précurseur, bâtisseur et porteur d'excellence dans ce domaine.*

*L'étude des pavages est aussi centrale en cristallographie. Depuis quelques années, elle a constitué presque une branche propre des mathématiques, combinant géométrie et théorie des groupes. (Le lecteur qui aimerait plonger plus profondément dans le sujet pourrait consulter le beau livre de **B. Grünbaum** et **G. Shephard** (cf. références). Une question principale reste toujours la suivante :*

*Quels polygones donnent des pavages monoédraux ?*

*Précédemment nous avons plus ou moins indiqué quelques éléments de réponse ; nous allons les résumer ci-après.*

*5.1. Il a été démontré par I. Niven en 1978 qu'un polygone convexe ayant un nombre de côtés supérieur ou égal à 7 ne pave jamais. Il faut donc se limiter au triangle, au quadrilatère, au pentagone et à l'hexagone.*

*5.2. Un parallélogramme pave toujours le plan comme on peut le voir sur l'un des dessins de la section 2. Donc tout triangle pave : il suffit de prendre deux exemplaires, de les coller de façon à obtenir un parallélogramme et paver ensuite.*

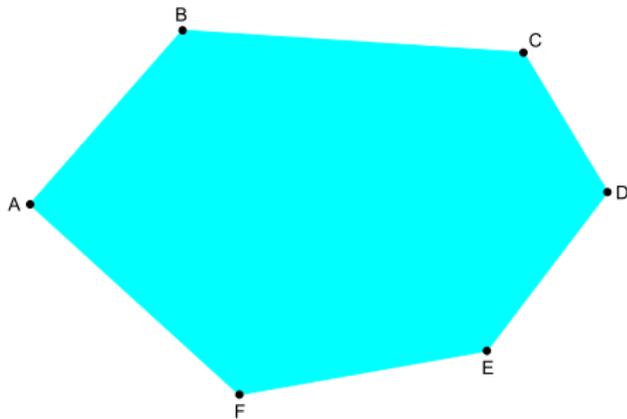
*5.3. Comme on l'a vu, tout quadrilatère (convexe ou pas) pave le plan et même de façon périodique.*

5.4. Un hexagone  $\Delta = ABCDEF$  pave si, et seulement si, il fait partie de l'une des classes qui suivent (liste établie par **K. Reinhardt** dans sa thèse en 1918) :

1)  $\widehat{FAB} + \widehat{ABC} + \widehat{BCD} = 2\pi$  et  $CD = FA$ .

2)  $\widehat{FAB} + \widehat{ABC} + \widehat{CDE} = 2\pi$  et  $BC = DE$  et  $CD = FA$ .

3)  $\widehat{FAB} + \widehat{BCD} + \widehat{DEF} = \frac{2\pi}{3}$  et  $AB = BC$ ,  $CD = DE$  et  $EF = FA$ .



## Question

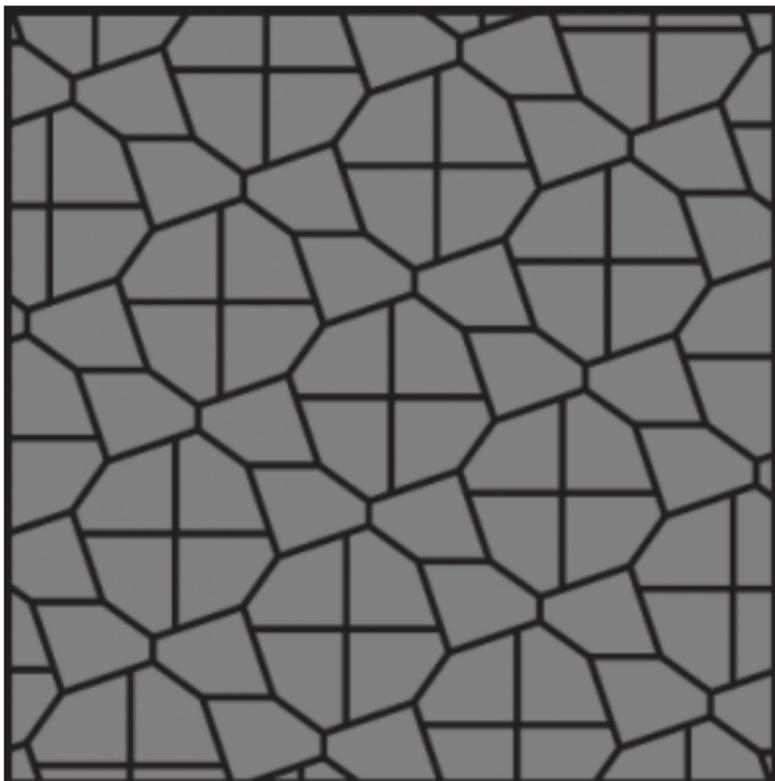
### *Qu'en est-il de la pentagonie ?*

*À l'heure actuelle, on ne connaît pas tous les pentagones qui pavent le plan même ceux qui sont équilatéraux.*

- K. Reinhardt en construit les 5 premiers.*
- R.B. Kershner en construit 3 de plus et publie en 1968 un papier dans lequel il pense avoir donné tous les pentagones (au nombre de 8) qui pavent le plan.*

*En 1975, M. Gardner présente le théorème de Kershner dans la rubrique Jeux mathématiques du journal Scientific American.*

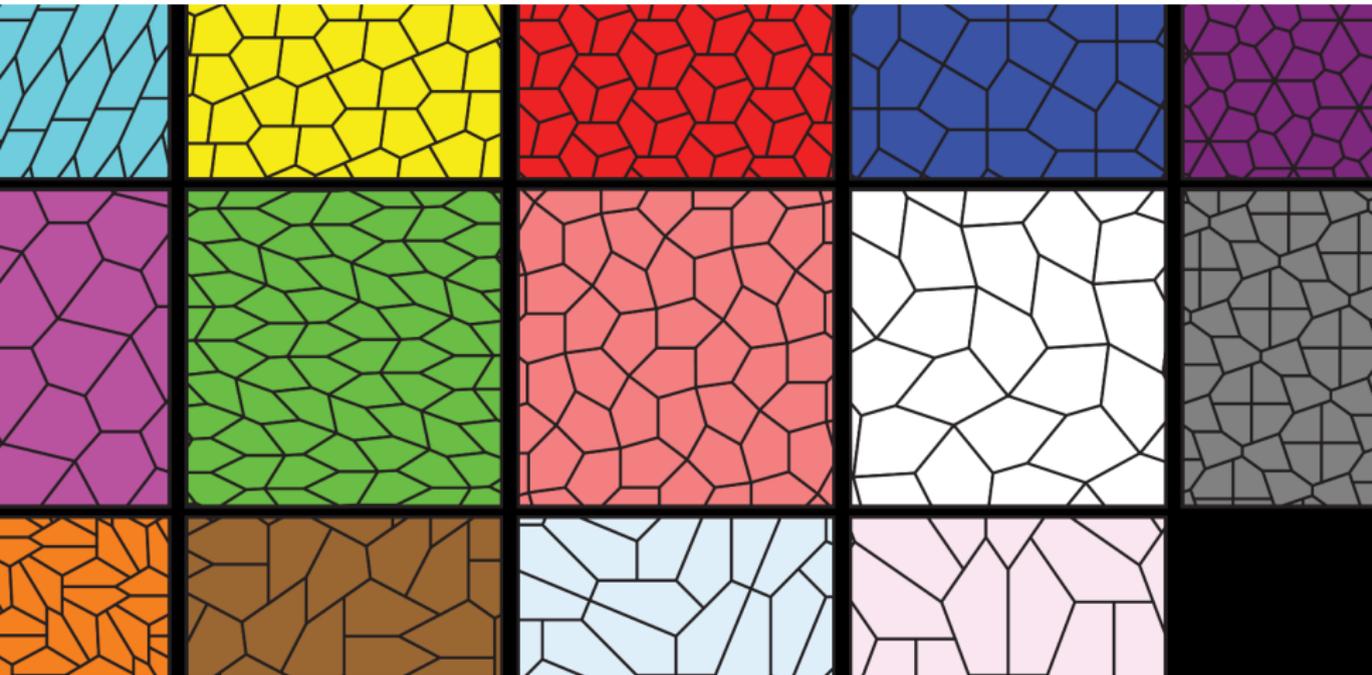
*R. James III (un informaticien) jeta un coup d'œil sur le résumé et décida de retrouver lui-même la liste de Kershner. Manque de pot (pour Kershner) : il en trouve un qui n'y est pas !*



- *Mais l'exemple construit par R. James "transgresse" une règle : des sommets sont déposés sur les arêtes !*

*L'histoire ne s'arrête pas là...*

- *Le fils de Marjorie Rice (fermière Californie) était abonné au journal Scientific American. Elle l'ouvrit par hasard. Malgré le peu de connaissances qu'elle avait en mathématiques, elle a commencé à faire des essais (attirée par les dessins) et en découvrit un nouveau en 1976-77 puis 3 autres !*
- *La liste est ainsi ramenée à 13. Le 14<sup>ème</sup> a été découvert par Rof Stein en 1985.*



- Ces 14 classes de pentagones qui pavent le plan sont les seules connues actuellement. Il y a encore du travail à faire dans cette direction.
- Les pavages qu'on obtient par ces 14 pentagones sont tous périodiques : leurs groupes d'automorphismes contiennent chacun un réseau. La question qui suit est toujours ouverte :

### Question

*Existe-t-il des pentagones qui pavent le plan mais pas de façon périodique ?*



## 6. Les mouvements euclidiens de l'espace

On se place dans l'espace euclidien  $\mathcal{E}$  de dimension 3. L'origine (vecteur nul) sera notée  $O$  et on se donnera une base orthonormée  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . Quand on parlera de coordonnées  $(x, y, z)$  d'un point de  $\mathcal{E}$  ce sera toujours par rapport à un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . On notera  $\text{Isom}(\mathcal{E})$  le groupe des isométries de  $\mathcal{E}$ .

1 - On montre alors facilement que, si  $f \in \text{Isom}(\mathcal{E})$ ,  $O'$  l'image de  $O$  par  $f$  et  $\tau$  la translation de vecteur  $\overrightarrow{OO'}$  alors  $f$  s'écrit  $f = \tau \circ u$  avec  $u : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  fixant  $O$  donc linéaire.

On peut donc se limiter à étudier les isométries linéaires dans un premier temps. En fait, le groupe  $\text{Isom}(\mathcal{E})$  est le produit semi-direct  $\mathcal{E} \rtimes O(\mathcal{E})$  où  $O(\mathcal{E})$  est le groupe des isométries linéaires de  $\mathcal{E}$ .

2 - Il existe toujours un nombre réel  $\theta$  et une base orthonormée  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  par rapport à laquelle la matrice de  $u$  a l'une des formes suivantes :

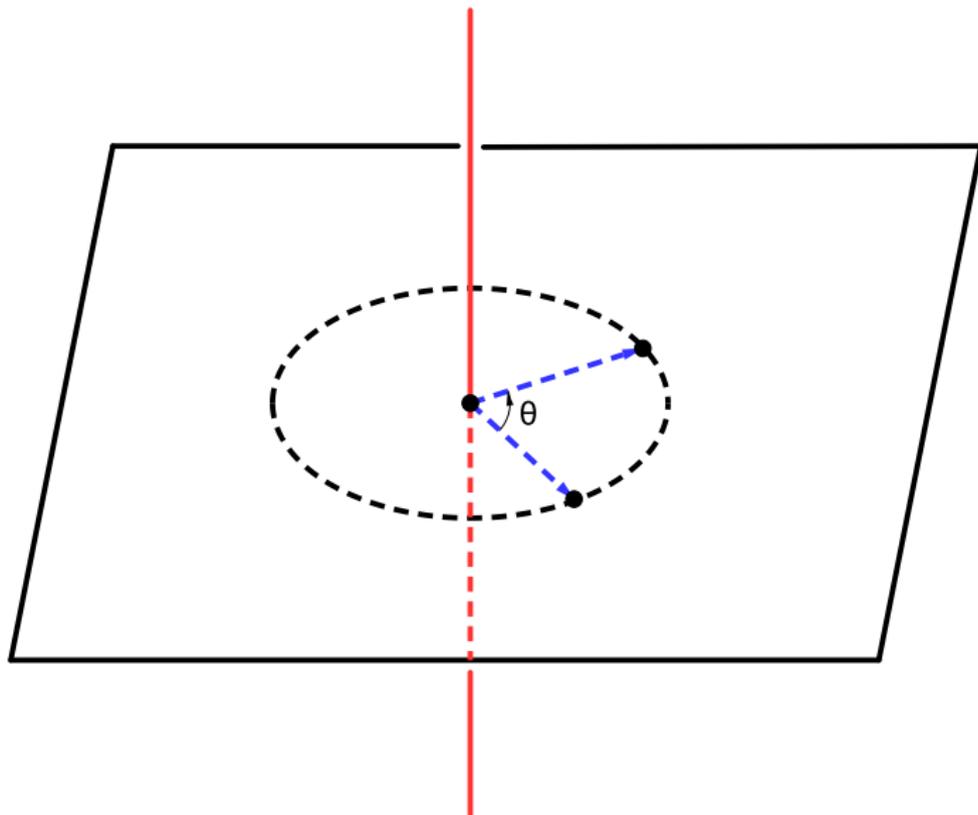
– si  $u$  préserve l'orientation alors la matrice  $A$  est de la forme :

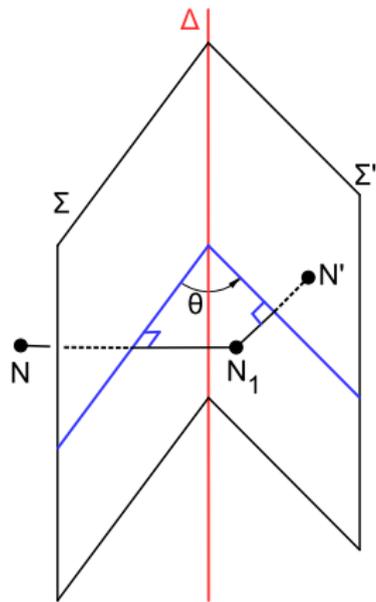
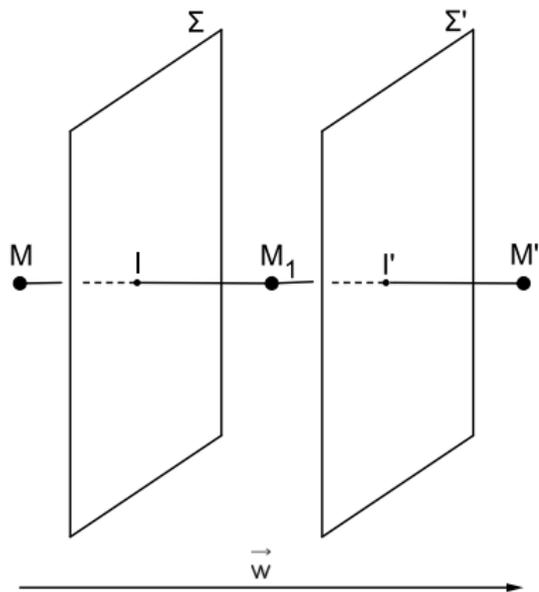
$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

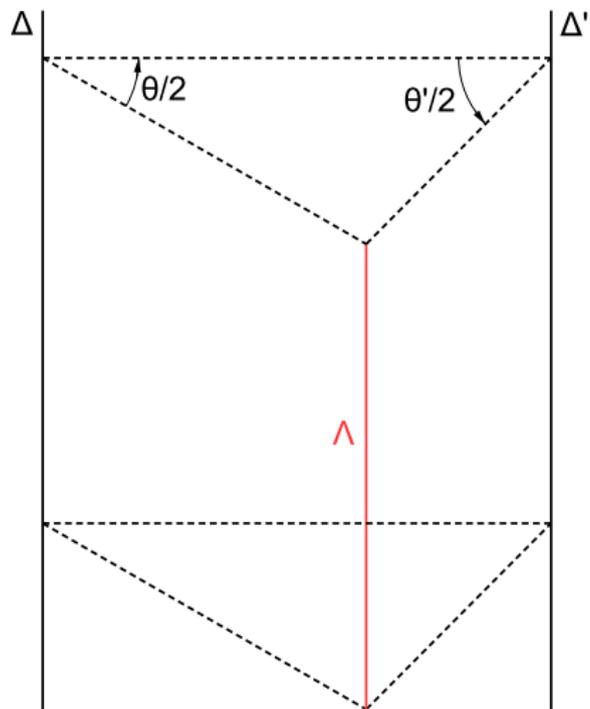
– si  $u$  ne préserve pas l'orientation,  $A$  est de la forme :

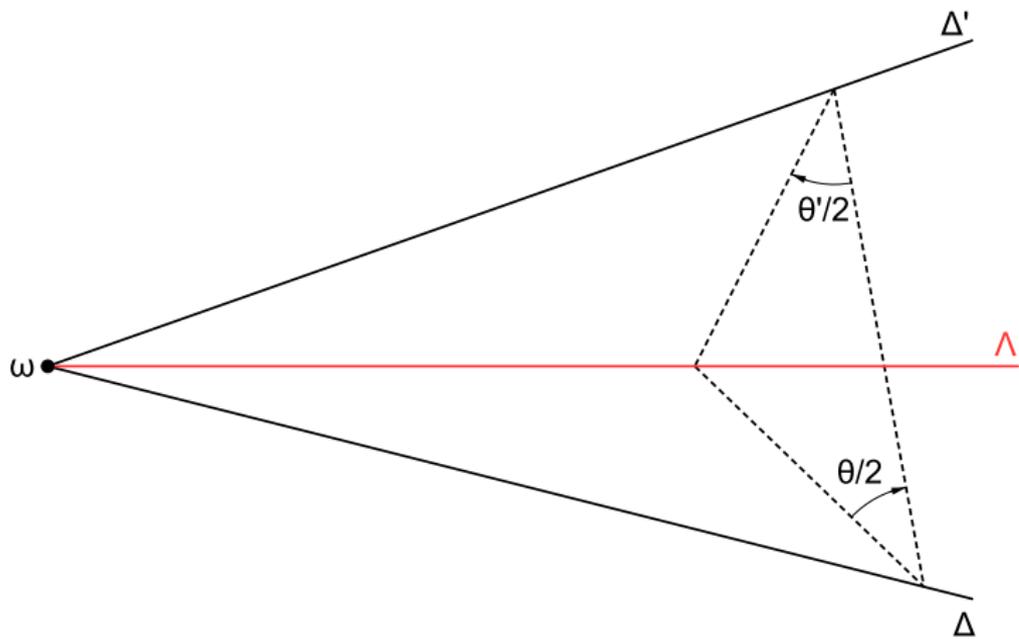
$$A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

La matrice  $A_1$  correspond au cas où  $u$  est une rotation d'angle  $\theta$  et d'axe la droite engendrée par le vecteur  $\vec{e}_1$ .









On peut lister toutes les isométries affines de l'espace euclidien  $\mathcal{E}$  de dimension 3. Celles qui fixent l'origine sont évidemment linéaires et sont :

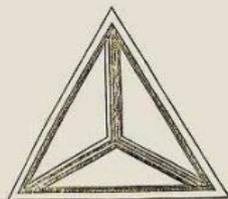
- les réflexions (par rapport à un plan vectoriel) ou
- les rotations (par rapport à une droite vectorielle).

Celles qui ne sont pas linéaires sont composées d'une isométrie linéaire et d'une translation non triviale. Plus précisément, soit  $f$  une de ces isométries. Alors :

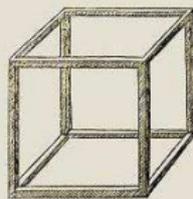
- $f$  est une translation ou
- $f$  est une rotation d'axe une droite affine ne passant pas par l'origine ou
- $f$  est une réflexion par rapport à un plan affine ou
- $f$  est la composée d'une rotation et d'une translation de vecteur orthogonal à l'axe de cette rotation. Une telle transformation est appelée **vissage** (c'est le mouvement d'un tournevis ou d'un tire-bouchon).

*Les nombres mesurent la taille,  
les groupes mesurent la symétrie !*

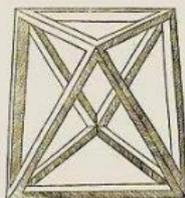
## *Les polyèdres réguliers de l'espace*



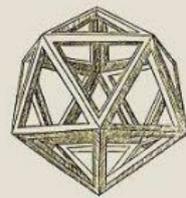
Le tétraèdre



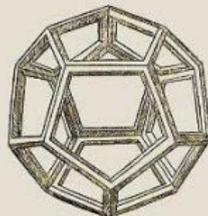
Le cube



L'octaèdre



L'icosaèdre



Le dodécaèdre

LES CINQ CORPS PLATONIENS (POLYÈDRES RÉGULIERS)  
Dessins de Léonard de Vinci pour *La Divine proportion* de Luca Pacioli

## *Les sous-groupes finis d'isométries de l'espace*

*Les sous-groupes finis du groupe des isométries linéaires de l'espace sont tous connus de façon explicite :*

- Le groupe cyclique d'ordre  $n$  :  $C_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  qui correspond au groupe de symétrie d'une scie à dents circulaire.*
- Le groupe diédral  $D_n = C_n \rtimes \{1, -1\}$  qui correspond au groupe de symétrie d'un polygone régulier plan à  $n$  côtés.*

*Pour les autres, on se contente de donner ceux dont les éléments préservent l'orientation :*

- Le groupe du tétraèdre régulier isomorphe à  $A_4$ .*
- Le groupe du cube isomorphe à  $S_4$ .*
- Le groupe de l'octaèdre régulier isomorphe à  $S_4$ .*
- Le groupe du dodécaèdre régulier isomorphe à  $A_5$ .*
- Le groupe de l'icosaèdre régulier isomorphe à  $A_5$ .*

## *De la bonne lecture !*

- Armstrong, M.A. *Groups and Symmetry*. Collection Undergraduate Texts in Math., Springer Verlag (1988).
- Ernst, B. *Le miroir magique de M.C. Escher*. Taschen Éditeur.
- Deledicq, A. & Raba, R. *Le monde des pavages*. ACL Les Éditions du *Kangourou* (2002).
- Grünbaum, B., and Shephard, G. *Tilings and Patterns*. Freeman, New York (1987)
- de la Harpe, P. *Quelques problèmes non résolus en géométrie plane*. L'enseignement Mathématique 35 (1989), 227-243.
- Kershner, R.B. *On paving the plane*. American Math. Monthly 75 (1968), 839-844.

- Martin, G.E. *Transformation Geometry. Introduction to Symmetry*. Undergraduate Texts in Mathematics, Springer Verlag (1982).
- Nicolas, A. *Parcelles d'infini. Promenade au jardin d'Escher*. Bibliothèque scientifique *Champs*, Belin (2006).
- Nivin, I. *Convex polygons that cannot tile the plane*. American Mathematical Monthly, Vol. 85 (1978), 785-792.
- Rice, M. *Intriguing tessellations*. (Faire une recherche par Google en utilisant le titre comme mot-clé.)
- Schattschneider, D. *Tiling the Plane with Congruent Pentagons*. Mathematics Magazine, Vol. 51, (1978), 29-44.
- Weyl, H. *Symétrie et mathématique moderne*. Collection *Champs*, Flammarion (1996).