ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

MICHEL BELLIART

OLIVIER BIREMBAUX

Actions localement libres de groupes résolubles

Annales de l'institut Fourier, tome 44, n° 5 (1994), p. 1519-1537.

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1994__44_5_1519_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
44, 5 (1994), 1519-1537

ACTIONS LOCALEMENT LIBRES DE GROUPES RÉSOLUBLES

par M. BELLIART et O. BIREMBAUX

0. Introduction.

Soit M une variété fermée de dimension $n \geq 3$. On dit qu'un flot différentiable Φ^t sur M est un *flot d'Anosov* [An] si

- Φ^t est sans point fixe global (c'est-à-dire sans orbite réduite à un point)
- le fibré tangent à M se décompose en la somme de trois sous-fibrés continus stables par Φ^t :

$$TM = T^{ss} \oplus T^{uu} \oplus \mathbb{R}.Y$$

  tels que T^{uu} est dilaté et T^{ss} contracté par Φ^t (Y est le champ tangent à Φ^t).

Nous dirons que Y est un *champ d'Anosov* si son flot est un flot d'Anosov.

A un flot d'Anosov on peut associer plusieurs feuilletages. Notons $T^s = T^{ss} \oplus \mathbb{R}Y$ et $T^u = T^{uu} \oplus \mathbb{R}Y$. Les distributions T^u, T^s, T^{uu}, T^{ss} sont intégrables et définissent respectivement le feuilletage instable (ou central-instable), stable (central-stable), instable fort et stable fort. Comme le passage de Y à $-Y$ permute les feuilletages stables et instables, il est d'usage de s'intéresser uniquement aux feuilletages stables. On définit ainsi la *codimension* de Y comme étant la codimension de son feuilletage stable.

Si N est une variété fermée de dimension ≥ 2, un *difféomorphisme d'Anosov* de N est un difféomorphisme ϕ de N tel que le fibré tangent à

Mots-clés : Groupes de Lie - Systèmes dynamiques - Feuilletages - Flots d'Anosov.
Classification A.M.S. : 58F07 – 58F18

N se décompose en la somme continue de deux sous-fibrés :

$$TN = T^{uu} \oplus T^{ss}$$

où T^{uu} et T^{ss} sont ϕ-invariants, et ϕ contracte T^{ss} et dilate T^{uu}. En pareil cas, T^{uu} et T^{ss} sont uniquement intégrables et donnent lieu à des feuilletages dits respectivement stable et instable.

Le lien entre difféomorphismes d'Anosov et flots d'Anosov est le suivant : considérons la variété

$$M = N \times \mathbb{R}/(n,t) \sim (\phi(n), t+1)$$

où ϕ est un difféomorphisme d'Anosov de N. Alors, on vérifie sans peine que le flot $\dfrac{\partial}{\partial t}$ est un flot d'Anosov sur M. Son feuilletage stable est le feuilletage horizontal engendré par le feuilletage stable de ϕ, et son feuilletage stable-central en est l'épaississement. Ainsi, les difféomorphismes d'Anosov peuvent être vus comme des cas particuliers de flots d'Anosov. Réciproquement, il est conjecturé que "la plupart" des flots d'Anosov sont des suspensions de difféomorphismes d'Anosov en codimension 1. (C'est la conjecture de Verjovsky; voir par exemple [Gh2] pour un énoncé précis).

Une autre famille d'exemples est constituée par les flots homogènes et infra-homogènes. Soient G un groupe de Lie, Y un champ invariant à droite, K un sous-groupe compact commutant avec Y et Γ un sous-groupe discret cocompact de G. Le flot de Y sur $K \setminus G/\Gamma$ est dit *infra-homogène*; on dira qu'il est *homogène* si $K = \{1\}$. Les articles [To1], [To2] classifient complètement les flots d'Anosov de ce type.

Notons GA le groupe affine des transformations $x \to a+bx$ $(b > 0)$ de la droite réelle. Il a été montré dans [Ma] que le feuilletage stable de tout flot d'Anosov *transitif* (1) sur une 3-variété est paramétré par une action continue de GA; inversement, une action de GA de classe C^2 qui préserve le volume d'une 3-variété fermée induit un flot d'Anosov correspondant à l'action des homothéties $(0, b)$ de GA. Ce résultat hautement non trivial constitue le coeur de la preuve du

THÉORÈME 1 (Ghys). — *Une action localement libre de GA de classe $C^r (r \geq 2)$ qui préserve un volume continu sur une 3-variété fermée M est C^r-conjuguée à une action homogène.*

(1) Un flot est transitif si il possède une orbite dense.

Il y a deux groupes de Lie simplement connexes non isomorphes de dimension 3 qui contiennent à la fois une copie de GA et un sous-groupe discret cocompact. Le théorème de Ghys ramène l'étude des actions considérées à celle des réseaux uniformes de ces deux groupes, et fournit ainsi une classification complète.

En adaptant les méthodes de Ghys, nous allons montrer le

THÉORÈME 2. — *Soient G un groupe de Lie de dimension $n-1$, Φ une action localement libre de classe C^r $(r \geq 2)$ de G sur une variété fermée M de dimension n. Si Φ préserve un volume continu sur M et s'il existe dans l'algèbre de Lie de G un champ Y tel que* $\mathrm{ad}(Y)$ *ait les valeurs propres $0, \alpha_1, ..., \alpha_{n-2}$ avec* $\mathrm{Re}(\alpha_i) < 0$ *alors Φ est C^r-conjuguée à une action homogène.*

Si $n = 3$, le seul groupe possible est GA et on retrouve le théorème de Ghys ; si $n > 3$, toutes les actions modèles ont lieu sur les espaces homogènes d'un unique groupe résoluble.

Le but de cet article est de démontrer le théorème 2. Dans le premier paragraphe, nous décrivons tous les flots d'Anosov homogènes de codimension 1, en utilisant la classification de P. Tomter. Dans le second paragraphe, nous étudions le groupe G, ce qui nous permet de montrer dans un troisième paragraphe que la variété M supporte une structure d'espace homogène pour laquelle le flot de Y est lui-même homogène. Dans le courant de cette preuve, il deviendra clair que ce flot est d'Anosov ; c'est pourquoi nous utilisons le langage de la théorie d'Anosov, bien adapté à notre situation.

La méthode utilisée dans la troisième partie de ce travail pour construire un champ homogène transverse aux orbites est une amélioration de [Gh1]. Ce dernier utilisait la théorie des représentations irréductibles de G dans un espace de Hilbert ; les calculs deviennent rapidement pénibles en grande dimension, à cause du nombre croissant d'indices et du problème technique de la diagonalisation. A la place, nous utilisons un raisonnement sur la croissance des fonctions impliquées $(n \geq 4)$ ou une inégalité élémentaire sur leur norme L_2 $(n = 3)$.

Des exemples immédiats prouvent qu'en dimension n, il existe une famille à $n-1$ paramètres de groupes tels que $\mathrm{ad}(Y)$ a pour valeurs propres $0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-2}$ avec $\mathrm{Re}(\alpha_i) < 0$. On a donc pour ces groupes une classification des actions localement libres de codimension 1 et de classe C^2 préservant un volume continu sur une variété compacte. Il se trouve que pour un choix générique d'un tel groupe, il n'existe aucune action ayant ces propriétés.

A. El Kacimi nous a soumis ce problème et nous a constamment guidés dans sa résolution. E. Ghys et A. Verjovsky nous ont aidés à en améliorer la rédaction. Nous les en remercions.

1. Modèles homogènes.

Dans toute la suite de cet article, $n \geq 3$. Nous avons, dans l'introduction, décrit rapidement les flots d'Anosov homogènes; nous allons ici décrire plus longuement le cas particulier de codimension 1.

Soit μ un entier algébrique unitaire de module > 1 dont les conjugués sur $\mathbb{Q}$: $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-2}$ ont un module < 1. Un tel nombre est appelé *nombre de Pisot* ([Pi]). Par des méthodes classiques de théorie des nombres, μ est réel et il existe une matrice $A \in SL(n-1, \mathbb{Z})$ dont les valeurs propres sont exactement $\mu, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-2}$. Comme A préserve le réseau standard de $\mathbb{R}^{n-1}$, A induit un difféomorphisme d'Anosov sur $\mathbb{T}^{n-1}$, et on peut en construire la suspension M^n. A cet effet, on considère le sous-espace F de $\mathbb{R}^{n-1}$ correspondant aux valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-2}$ de A. Soient $\widetilde{\mathcal{F}}$ le feuilletage de $\mathbb{R}^{n-1}$ par les hyperplans parallèles à F, $\mathcal{F}$ son image sur $\mathbb{T}^{n-1}$: $\mathcal{F}$ est le feuilletage stable du difféomorphisme d'Anosov induit sur $\mathbb{T}^{n-1}$ par A. Il est facile de montrer que la suspension de $\mathcal{F}$ est homogène : supposons d'abord que les λ_i sont tous réels. Soit $(X_1, \ldots, X_{n-2})$ une base de vecteurs propres de A[2] soit Z un vecteur propre pour la valeur μ. Si on considère la variété

$$M = \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}/(x,t) \sim (Ax, t+1)$$

et le flot d'Anosov $Y = \dfrac{\partial}{\partial t}$ correspondant à A on constate facilement que

$$[X_i, Y] = \alpha_i X_i \ (i = 1, \ldots, n-2); \ [Z, Y] = \beta Z \tag{1}$$

où

$$e^{\alpha_1} = \lambda_1, \ldots, e^{\alpha_{n-2}} = \lambda_{n-2}, e^{\beta} = \mu.$$

Ceci montre que M a la structure d'un espace homogène H/Γ, où H est le groupe de Lie résoluble simplement connexe dont l'algèbre est décrite par

---

(2) A est diagonalisable, car ses valeurs propres, qui sont des nombres algébriques conjugués, sont nécessairement distinctes.

la formule (1) et Γ est un réseau uniforme de H. Ainsi, Y est un champ d'Anosov homogène de codimension 1. Quand les λ_i ne sont pas tous réels, on a quand même la relation (1) dans le complexifié du fibré tangent de M : dans tous les cas, Y est d'Anosov, homogène de codimension 1(3).

Dans le cas particulier où $n = 3$, il existe une autre famille d'exemples : soit N une surface compacte à courbure négative constante. Considérons le fibré unitaire M sur N, et le flot géodésique sur M. Ce flot constitue, historiquement, le premier exemple de flot d'Anosov ([An]). Pour montrer qu'il est homogène, il suffit de remarquer que le revêtement universel de N est l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^2$, et que M, quotient du fibré unitaire de $\mathbb{H}^2$ par un groupe discret d'isométries, est difféomorphe à un espace homogène $PSL(2,\mathbb{R})/\Gamma$ où Γ est isomorphe au groupe fondamental de N. D'autre part, un calcul facile montre que Y est tangent au sous-groupe des matrices diagonales. Plus généralement, on peut remplacer $SL(2,\mathbb{R})$ par son revêtement universel $\widetilde{SL}(2,\mathbb{R})$: ceci donne de nouveaux exemples, qui sont des revêtements finis des précédents, comme il résulte de la théorie des groupes fuschiens (exposée par exemple dans [DNF]). Il se trouve que ces exemples sont les seuls :

1.1. Proposition. — *Tout flot d'Anosov homogène de codimension 1 est du type ci-dessus.*

Preuve. — Soit Y un flot d'Anosov homogène de codimension 1 sur la variété G/Γ. Soient $\mathcal{G}$ l'algèbre de Lie de G et $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}$ sa complexifiée; nous identifions les fibrés T^{uu} et T^{ss} aux sous-algèbres de Lie de $\mathcal{G}$ qui leur sont tangentes ([To2]). Soient $X_1, ..., X_{n-2}, Z \in \mathcal{G}_{\mathbb{C}}$ des champs propres pour $\mathrm{ad}(Y)$ tels que $X_1, ..., X_{n-2}$ engendrent T^{ss} et Z engendre T^{uu}. Nous allons distinguer deux cas.

(a) $n \geq 4$.

Nous montrons d'abord que G est résoluble. Comme G admet un réseau uniforme, il est unimodulaire (cf. [Ra]; voir aussi le paragraphe suivant pour la définition de la fonction modulaire). Ainsi, $\mathrm{ad}(Y)$ est de trace nulle. Notons $\beta > 0$ la valeur propre correspondant à Z et $\alpha_1, ..., \alpha_{n-2}$ les valeurs propres correspondant à $X_1, ..., X_{n-2}$, dont la partie réelle est négative (car elles correspondent au sous-espace propre T^s). Comme il y a au moins deux α_i et que $\beta = -\alpha_1 - ... - \alpha_{n-2}$, les nombres

(3) Les feuilletages stables correspondant à de tels flots sont très rigides : par exemple, [EN] ont montré leur stabilité C^{∞}.

$-\beta, \beta-\alpha_1, ..., \beta-\alpha_{n-2}$ ne sont pas valeurs propres de $\mathrm{ad}(Y)$, donc l'identité de Jacobi implique que

$$[T^s, Z] = 0.$$

Pour la même raison, si $\alpha_i + \alpha_j$ n'est pas valeur propre de $\mathrm{ad}(Y)$ alors $[X_i, X_j] = 0$. En particulier si on range les α_i par partie réelle décroissante,

$$\alpha_i + \alpha_j = \alpha_k \text{ implique que } k > i, j$$

par conséquent

$$[X_i, X_j] = \sum_{k>i,j} c_k^{i,j} X_k$$

où les $c_k^{i,j}$ sont les constantes de structure. Mais une telle écriture prouve que $X_1, ..., X_n, Z, Y$ est une base de Malcev ([Be]) de l'algèbre $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}$, qui par conséquent est résoluble.

Maintenant, $T^{uu} \oplus T^{ss}$ est un idéal de codimension 1 $\mathcal{N}$ de $\mathcal{G}$, et $\mathcal{N}$ est égal à $[\mathcal{G}, \mathcal{G}]$. En effet, d'une part $\mathcal{N} \subset [\mathcal{N}, Y] \subset [\mathcal{G}, \mathcal{G}]$, car $\mathrm{ad}(Y)$ est un endomorphisme de $\mathcal{N}$; d'autre part, comme $\mathcal{G}$ est résoluble, $[\mathcal{G}, \mathcal{G}]$ est de codimension au moins 1 dans $\mathcal{G}$, ce qui implique l'égalité voulue. Par conséquent, $\mathcal{N}$ est nilpotente ([Bo]). Selon [To1], $\mathcal{N}$ correspond à un sous-groupe de Lie N de G, et il existe un automorphisme ϕ du groupe N, préservant le réseau uniforme $\Lambda = \Gamma \cap N$ de N, tel que le feuilletage stable de G/Γ pour Y soit la suspension du feuilletage stable de N/Λ pour ϕ. La proposition viendra donc du lemme suivant :

1.2. Lemme. — *Soit N un groupe de Lie nilpotent. Si N possède un sous-groupe discret cocompact Λ et si il existe un automorphisme ϕ de N qui laisse Λ invariant et induit un difféomorphisme d'Anosov de codimension 1 sur N/Λ, alors N est abélien.*

Preuve. — Soit C le centre de N : c'est un sous-groupe de Lie abélien non nul invariant par ϕ, et $C/(C \cap \Lambda)$ est compact [Ra]. En considérant les valeurs propres de la différentielle de ϕ sur l'algèbre de C, on voit que ϕ induit sur $C/(C \cap \Lambda)$ un difféomorphisme d'Anosov, nécessairement de codimension 1; aussi C contient le fibré instable T^u correspondant à ϕ. Si N/C n'est pas le groupe trivial, ϕ induit sur la variété compacte $(N/C)/\Lambda$ un difféomorphisme d'Anosov sans partie instable, ce qui est absurde. Donc, N/C est le groupe trivial : *i.e.* N est abélien. □

(b) $n = 3$.

Dans ce cas, les sous-espaces T^{ss}, T^{uu} sont de dimension 1, et on peut les supposer engendrés par les champs X et Z respectivement. Ces champs sont propres pour $\mathrm{ad}(Y)$, pour des valeurs propres notées respectivement α et β. Par unimodularité, $\alpha = -\beta$; comme Y est d'Anosov, $\alpha \neq 0$ et on peut normaliser en remplaçant Y par $\alpha^{-1}Y$. On a donc :

$$[X, Y] = X \text{ et } [Z, Y] = -Z.$$

L'identité de Jacobi implique donc

$$[X, Z] = k.Y \ (k \in \mathbb{R})$$

si $k = 0$, on trouve une suspension de difféomorphisme de $\mathbb{T}^2$, sinon, M est un espace homogène de $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$. □

2. Structure de G.

Nous revenons maintenant au cas général. Soit G le groupe de Lie de dimension $n-1$ agissant sur M^n. Notons respectivement $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}$ l'algèbre de Lie de G et sa complexifiée. Soit $(X_1, ..., X_{n-2}, Y)$ une base de $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}$ dans laquelle $\mathrm{ad}(Y)$ est triangulaire supérieure; comme à la proposition 1.1, on voit que $X_1, ..., X_{n-2}$ engendrent un idéal nilpotent $\mathcal{N}_{\mathbb{C}}$ de codimension 1, égal à l'idéal dérivé de $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}$. Celui-ci est le complexifié de l'idéal dérivé $\mathcal{N}$ de $\mathcal{G}$, et correspond à un sous-groupe connexe N de G. Le groupe G est donc résoluble.

Rappelons que la fonction modulaire Δ d'un groupe de Lie G est un morphisme continu de G dans $\mathbb{R}_+^*$, qui représente le défaut d'invariance à droite des mesures invariantes à gauche; on dit que G est *unimodulaire* si $\Delta \equiv 1$. La fonction modulaire de G est reliée à l'algèbre de Lie de G par la formule :

$$\Delta(\exp(Y)) = e^{\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}(Y))} \tag{2}$$

où Y est un champ invariant à gauche quelconque sur G. Ceci montre que N est le noyau de la fonction modulaire de G. Ainsi, N est un sous-groupe de Lie de G. D'autre part, comme N est un sous-groupe normal de codimension 1, G a selon [Bo] la structure d'un produit semi-direct $N \rtimes \mathbb{R}$: un élément g de G s'écrit de manière unique sous la forme $x.\exp(tY)$ avec

$x \in N, t \in \mathbb{R}$ et si on le note plus simplement (x,t), la loi de G est donnée par la formule

$$(x_1,t_1).(x_2,t_2) = (x_1.{}^{t_1}x_2, t_1 + t_2)$$

où ${}^{t_1}x_2$ désigne l'élément $\exp(t_1.Y)x_2\exp(-t_1.Y)$. Dans la suite, nous adopterons ces notations; nous écrirons aussi $x(g), t(g)$ les éléments de N et $\mathbb{R}$ tels que $g = (x(g), t(g))$. Maintenant, si nous posons

$$\beta = -\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}(Y)) = -\sum_{i=1}^{n-2} \alpha_i > 0,$$

la formule (2) donne

$$\Delta(g) = e^{\beta.t(g)} \tag{3}$$

ce qui confirme que G n'est pas unimodulaire.

Dans le cas où $n = 3$, il est possible de simplifier ces notations et formules. En effet, N est de dimension 1, donc isomorphe à $\mathbb{R}$. Si nous notons $a = x(g)$ et $b = e^{\beta.t(g)}$, nous obtenons un isomorphisme entre G et le groupe affine GA, constitué des transformations de $\mathbb{R}$ de la forme

$$x \to a + bx \ (b > 0).$$

La loi de groupe s'écrit

$$(a,b).(c,d) = (a + bc, bd),$$

et la formule (3) devient

$$\Delta(a,b) = b.$$

Pour $g \in GA$, nous noterons $a(g), b(g)$ les réels tels que $g = (a(g), b(g))$.

Il est connu que GA peut être plongé dans deux groupes de Lie de dimension 3 simplement connexes non isomorphes ([Gh1]) : l'un est résoluble et l'autre semi-simple, isomorphe au revêtement universel de $SL(2,\mathbb{R})$. Quand $n \geq 4$, nous allons montrer qu'il existe un seul groupe de Lie H de dimension n, connexe, unimodulaire et contenant G. En effet, H étant connexe, il est à revêtement près uniquement déterminé par son algèbre de Lie $\mathcal{H}$; celle-ci s'obtient en complétant $\mathcal{G}$ par une nouvelle direction Z. Comme H est unimodulaire, on aura : $\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_{\mathcal{H}}(Y)) = 0$ donc on peut choisir Z tel que $[Z,Y] = \beta.Z$. Comme $-\beta, \beta - \alpha_i$ ne sont pas valeurs propres de $\mathrm{ad}(Y)$, l'identité de Jacobi implique : $[\mathcal{N}, Z] = 0$. Ces égalités déterminent parfaitement $\mathcal{H}$ et permettent de construire le revêtement universel $\widetilde{H}$ de H comme le produit fibré donné par le diagramme :

$$\begin{array}{ccccc} \widetilde{H} & \to & GA & \\ \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow & \Delta^{-1} \\ G & \to & \mathbb{R}_+^* & \\ & \Delta & & \end{array}$$

Maintenant, H s'obtient en quotientant $\widetilde{H}$ par un sous-groupe discret central, mais $\widetilde{H}$ a un centre nul : par conséquent, $H = \widetilde{H}$.

Dans le paragraphe suivant, nous démontrons le théorème principal.

3. Le champ Z.

On sait que l'algèbre de Lie de G s'injecte dans l'algèbre de Lie des champs de vecteurs sur M : à tout champ invariant à droite sur G est associé un champ sur M par la formule

$$X \to d\Phi(-, m).X \quad \text{où} \quad \Phi(g, m) = g.m.$$

De tels champs sont dits les *champs fondamentaux* associés à l'action. Nous allons montrer qu'il existe sur M un champ Z de classe C^{r-1} tel que :

$$[Z, Y] = -Z \quad [Z, X] = kY, \ k \in \mathbb{R} \quad (\text{cas } n = 3)$$

$$[Z, Y] = \beta Z \quad [Z, \mathcal{N}] = 0 \quad (\text{cas } n \geq 4).$$

Ceci implique que l'algèbre des champs de vecteurs sur M contient l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie H qui contient G, et que Φ se prolonge en une action localement libre de classe C^{r-1} de H sur M. En fait, il sera possible de voir que cette action est C^r, et nous aurons donc démontré le

THÉORÈME PRINCIPAL. — *Soient G un groupe de Lie de dimension $n-1$, Φ une action localement libre de classe C^r $(r \geq 2)$ de G sur une variété fermée M de dimension n. Si Φ préserve un volume continu sur M et s'il existe dans l'algèbre de Lie de G un champ Y tel que* $\mathrm{ad}(Y)$ *ait les valeurs propres $0, \alpha_1, ..., \alpha_{n-2}$ avec* $\mathrm{Re}(\alpha_i) < 0$ *alors Φ est C^r-conjuguée à une action homogène.*

Remarquons que le volume continu dont ce théorème suppose l'existence est en fait de classe C^r, par un lemme de [Gh1].

Nous utilisons les complexifiés des différents fibrés associés à M. Nous désignons par la même lettre un élément d'un fibré quelconque et son complexifié. Avec cette convention, soit Ω le volume préservé par l'action de G, et soit Z un champ (réel) continu tel que :

$$\Omega(X_1, ..., X_{n-2}, Y, Z) = 1.$$

Soit $g = (x,t) \in G$. On a :

$$\begin{aligned} g^*\Omega(X_1, ..., X_{n-2}, Y, Z) &= \Omega(g_*X_1, ..., g_*X_{n-2}, g_*Y, g_*Z) \\ &= e^{\alpha_1 t} ... e^{\alpha_{n-2} t}\Omega(X_1, ..., X_{n-2}, Y, g_*Z) \\ &= e^{-\beta t}\Omega(X_1, ..., X_{n-2}, Y, g_*Z) \\ &= 1 \end{aligned}$$

et donc

$$(x,t)_*(Z) \equiv e^{\beta t} Z \mod(\mathcal{G}_{\mathbb{C}}). \tag{4}$$

Nous cherchons maintenant un champ (réel) T sous la forme

$$T = Z + FY + \sum_{i=1}^{n-2} G^i X_i \quad (F, G^i \in C^0(M))$$

où $C^0(M)$ est l'espace des fonctions continues de M dans $\mathbb{C}$; ce champ vérifiera

$$\begin{aligned} &(a,b)_*(T) = b^{-1}(T + k(2aY + a^2X)) \text{ (cas } n = 3) \\ &(x,t)_*(T) = e^{\beta t}T \text{ (cas } n \geq 4). \end{aligned} \tag{5}$$

Ces formules sont une version "intégrale" des relations de crochets liant X_i, Y et Z dans $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$, la complexifiée de $\mathcal{H}$. On les obtient en regardant comment T évolue sous l'action adjointe de G dans $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$.

Nous construisons d'abord un T qui est solution de (5) pour les g de la forme $(1,t)$, puis nous vérifions que ce T est solution pour tout g.

3.1. Proposition. — *Il existe un champ T de classe C^0 tel que $(1,t)_*(T) = e^{\beta t}T$.*

Démonstration. — Il existe des familles $\phi_t, \psi_t^1, ..., \psi_t^{n-2}$ de fonctions continues sur M telles que

$$(1,t)_*(Z) = e^{\beta t}Z + \phi_t Y + \Sigma\psi_t^i X_i. \tag{6}$$

On a donc :

$$(1,t)_*(T) \equiv e^{\beta t} Z + \phi_t Y + F \circ (1,-t) Y \quad \mathrm{mod.}(X_1, ..., X_{n-2}).$$

Comme dans [Gh1], on remarque que pour $t > 0$, F est solution d'un opérateur contractant sur l'espace de Banach $C^0(M)$:

$$U_t(F) = e^{-\beta t}(F \circ (1,-t) + \phi_t).$$

De plus, ces opérateurs commutent entre eux donc ont le même point fixe, qui est encore solution pour $t < 0$ car $U_t \circ U_{-t} = \mathrm{Id}$. Ceci prouve l'existence (et l'unicité) de F.

Remplaçons Z par $Z + FY$, ce qui revient à remplacer ϕ_t par 0 dans l'équation (6). (Pour simplifier, nous continuerons à noter ψ^i et G^i les fonctions qui correspondent à ce "nouveau" Z). On calcule G^{n-2} par le même procédé que F. Ici, les équations deviennent :

$$(1,t)_*(T) \equiv e^{\beta t} T_0 + \psi_t^{n-2} X_{n-2} + e^{\alpha_{n-2} t} G^{n-2} \circ (1,-t) X_{n-2}$$

(la congruence est prise modulo $X_1, ..., X_{n-3}$),

$$V_t^{n-2}(G^{n-2}) = e^{(-\beta+\alpha_{n-2})t}(G^{n-2} \circ (1,-t)) + e^{-\beta t}\psi_t^{n-2}.$$

En remplaçant Z par $Z + G^{n-2}X_{n-2}$, on calcule G^{n-3} de la même manière, et en itérant, on obtient tous les G^i, donnés par les familles d'opérateurs :

$$V_t^i(G^i) = e^{(-\beta+\alpha_i)t}(G^i \circ (1,-t)) + e^{-\beta t}\psi_t^i.$$

A la fin, le champ T obtenu vérifie (5). Par construction, T est unique pour cette propriété; maintenant, on peut choisir les X_i de telle sorte que l'on ait $X_i = AX_i'$, avec A une matrice de déterminant 1 et X_i' une base réelle de $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$. On a alors :

$$\begin{aligned} \Omega(X_1, ..., X_{n-2}, Y, T) &= 1 \\ &= \Omega(AX_1', ..., AX_{n-2}', Y, T) \\ &= \Omega(X_1', ..., X_{n-2}', Y, T) \end{aligned}$$

et comme les champs X_i' et Y sont réels ainsi que le volume Ω, on obtient en conjuguant :

$$\Omega(X_1', ..., X_{n-2}', Y, \overline{T}) = 1$$

ce qui prouve que $\overline{T}$ vérifie (5). Par unicité, on a donc $T = \overline{T}$ et T est un champ réel. □

Nous avons obtenu un champ solution de (5) quand g a la forme $(1, t)$. Nous devons maintenant vérifier que ce champ est aussi solution pour g quelconque. Il y a deux cas à distinguer :

3.2. Proposition ($n \geq 4$). — *Le champ T trouvé plus haut vérifie $(x,t)_*(T) = e^{\beta t}T$.*

3.3. Proposition ($n = 3$). — *Avec les notations propres à cette dimension, le champ T vérifie $(a,b)_*(T) = b^{-1}(T + k(2aY + a^2X))$ où k est une constante.*

La différence vient de ce qu'en dimension 3, il existe des modèles semi-simples en plus du modèle résoluble présent en toute dimension.

Démonstration de 3.2. — Comme pour la proposition précédente, on raisonne par induction. En premier lieu, il existe une famille de fonctions continues ϕ_g, indexées continûment par G, qui vérifient :

$$(x,t)_*(T) \equiv e^{\beta t}T + \phi_g Y \mod(\mathcal{N}_{\mathbb{C}}). \tag{7}$$

On a donc :

$$\begin{aligned}(hg)_*(T) &\equiv h_*(e^{\beta t(g)}T + \phi_g Y) \mod(\mathcal{N}_{\mathbb{C}})\\ &\equiv e^{\beta t(hg)}T + (e^{\beta t(g)}\phi_h + \phi_g \circ h^{-1})Y \mod(\mathcal{N}_{\mathbb{C}})\end{aligned}$$

d'où :

$$\phi_{hg} = e^{\beta t(g)}\phi_h + (\phi_g \circ h^{-1}). \tag{8}$$

De plus on a $\phi_{(1,t)} = 0$ par construction de T. Nous voulons montrer que ϕ_g est nul pour tout g ; d'après (8) il suffit de prouver la nullité sur N.

a) Si nous montrons que ϕ_x est nul pour tout élément du centre $Z(N)$ de N, la formule (8) nous permettra de passer au quotient, et de considérer la famille $\phi_{xZ(N)}$ indexée par $N/Z(N)$; par le même procédé, on peut alors montrer la nullité sur $Z(N/Z(N))$ de chaque ϕ_x ; et ainsi de suite. Comme N est nilpotent, on obtient au bout d'un nombre fini d'étapes la nullité sur N. Nous pouvons donc nous borner au cas N abélien.

b) De même, il existe dans N un sous-espace vectoriel (non trivial) N_1 sur lequel l'action de G par conjugaison interne est diagonalisable [(4)].

[(4)] Nous entendons : diagonalisable par blocs de rang 1 ou 2, les blocs de rang 2 étant sans valeur propre réelle.

(En effet, puisque N est ici supposé abélien, cette action n'est pas autre chose qu'une représentation du groupe de Lie résoluble G dans $GL(N)$.) Si nous montrons que ϕ_x est nul pour tout x de N_1, nous pourrons passer au quotient et considérer la famille ϕ_{xN_1} indexée par N/N_1. Si $N_1 \neq N$, on peut ensuite itérer ce procédé et on obtient ainsi la nullité sur tout N. Nous nous sommes donc ramenés au cas où l'action de G sur N par conjugaison est diagonalisable.

Soit alors $(v_1, ..., v_{n-2})$ une base de l'espace vectoriel N où l'action a la forme diagonale suivante :

$$(g, x) \to A^{t(g)}x$$

avec A une matrice diagonale par blocs de rang 2, dont les blocs sont les suivants :

$$e^{a_k}\begin{pmatrix} \cos b_k & \sin b_k \\ -\sin b_k & \cos b_k \end{pmatrix}$$

où a_k et b_k sont respectivement les parties réelle et imaginaire de α_k. Munissons N de la métrique euclidienne pour laquelle les v_i forment une base orthonormale; alors pour tout $x \in N$ et tout $g = (1,t) \in G$:

$$\|A^t.x\| \leq e^{\alpha.t}\|x\|$$

où $\alpha = \sup(a_i)$. De ceci, on tire que $(1,t)B(0,R)(1,-t)$ est inclus dans $B(1, e^{\alpha t}R)$. D'autre part, selon (8), on a en norme L_2 :

$$\begin{aligned}\|\phi_{g.x.g^{-1}}\| &= e^{-\beta t}\|\phi_{g.x}\| \\ &= e^{-\beta t}\|\phi_x\|.\end{aligned}$$

Soit $\tau : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ la fonction qui à R associe $\sup\limits_{\|x\|\leq R} \|\phi_x\|$. C'est clairement une fonction croissante et continue qui mesure la croissance de $\|\phi_x\|$ en fonction de $\|x\|$.

Des deux formules précédentes, on déduit :

$$\tau(e^{\alpha t}R) \geq e^{-\beta t}\tau(R).$$

Comme $-\beta > \alpha$, si τ (donc ϕ) n'est pas constamment nulle, la croissance de τ est strictement sur-linéaire. Or, cette croissance est au plus linéaire : en effet, d'après (8) on a

$$\phi_{x+y} = \phi_x + \phi_y \circ x^{-1}$$

et donc $\tau(R+R') \leq \tau(R)+\tau(R')$.

Ceci prouve que la fonction ϕ est identiquement nulle.

Par le même procédé, nous montrons maintenant que ψ^{n-2} est nulle. En effet, on a

$$g_*(T) \equiv e^{\beta t(g)}T + \psi_g^{n-2}X_{n-2} \quad \mathrm{mod}(X_1, ..., X_{n-3}).$$

Comme plus haut, on montre que

$$\psi_{hg}^{n-2} = e^{\beta t(g)}\psi_h^{n-2} + e^{\alpha_{n-2}t(h)}(\psi_g^{n-2} \circ h^{-1}).$$

Soit $\sigma : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ la fonction qui à R associe $\sup_{\|x\| \leq R} \|\psi_x^{n-2}\|$. Là encore, la croissance de σ est sous-linéaire, et

$$\begin{aligned} \|\psi_{g.x.g^{-1}}^{n-2}\| &= e^{-\beta t}\|\psi_{g.x}^{n-2}\| \\ &= e^{\beta' t}\|\psi_x^{n-2}\| \end{aligned}$$

où $\beta' = -\beta + a_i$, et $\beta' > \alpha$. Par conséquent, la croissance de σ est à la fois sur-linéaire et sous-linéaire ; donc $\|\psi^{n-2}\| = 0$.

Clairement, on peut itérer ce procédé, qui prouve que $\psi^{n-3} = ... = \psi_1 = 0$. Nous avons donc trouvé un champ de vecteurs T de classe C^0 tel que

$$g_*T = e^{\beta t(g)}.T \quad \text{et} \quad \Omega(X_1, ..., X_{n-2}, Y, T) = 1.$$

Démonstration de 3.3. — Nous raisonnons comme pour la proposition précédente, en employant les notations propres à la dimension 3. Il existe une famille de fonctions ϕ_g telles que

$$\begin{aligned} &\phi_{(0,b)} = 0 \\ &\phi_{gh} = b^{-1}(h)\phi_g + \phi_h \circ g^{-1}. \end{aligned}$$

Nous écrivons la dernière de ces équations sous trois formes différentes :

$$\begin{aligned} &(a)\ \phi_{(a,b)} = \phi_{(a,1)(0,b)} = b^{-1}\phi_{(a,1)} \\ &(b)\ \phi_{(a,b)} = \phi_{(0,b)(b^{-1}a,1)} = \phi_{(b^{-1}a,1)} \circ (0, b^{-1}) \\ &(c)\ \phi_{(x+y,1)} = \phi_{(x,1)} + \phi_{(y,1)} \circ (-x, 1). \end{aligned}$$

Combinant (a) et (b), on tire :

$$\phi_{(a,1)} = a\phi_{(1,1)} \circ (0, a^{-1}) \ (a > 0)$$

ce qui implique en norme L_2 :

$$\|\phi_{(a,1)}\| = |a|.\|\phi_{(1,1)}\|.$$

Désormais, nous noterons $k = \phi_{(1,1)}$. De (c) il vient, pour $x, y > 0$:

$$\begin{aligned}\|\phi_{(x+y,1)}\| &= \|\phi_{(x,1)} + \phi_{(y,1)} \circ (-x,1)\| \\ &= |x+y|.\|k\| \\ &= (|x| + |y|)\|k\| \\ &= \|\phi_{(x,1)}\| + \|\phi_{(y,1)} \circ (-x,1)\|.\end{aligned}$$

Pour la norme L_2, l'espace des fonctions continues sur M est préhilbertien : dans un tel espace, l'égalité

$$\|u_1 + \dots + u_n\| = \|u_1\| + \dots + \|u_n\|$$

implique que les u_i sont colinéaires. Donc, selon la formule précédente, les fonctions $\phi_{(y,1)}$ et $\phi_{(x,1)} \circ (x,1)$ sont colinéaires. Ceci étant valable pour tous x, y on en déduit que $\phi_{(x,1)} = x.k$, d'où l'on tire :

$$\phi_{(a,b)} = \frac{a}{b}k$$

et comme selon (a)

$$\begin{aligned}\phi_{gh} &= \frac{a(gh)}{b(gh)}k \\ &= \frac{a(g) + b(g)a(h)}{b(g)b(h)}k \\ &= b^{-1}(h)\frac{a(g)}{b(g)}k + \frac{a(h)}{b(h)}k \circ g^{-1}\end{aligned}$$

on en déduit que k est invariante par l'action de GA. Ceci veut dire que k est une fonction continue basique; or $\mathcal{F}$ est à feuilles denses selon la proposition II.1.5. de [Gh1]. Aussi, k est constante.

A présent, il existe une famille ψ_g de fonctions telles que :

$$g_*(Z) = b^{-1}(g)Z + k\frac{a(g)}{b(g)}Y + \psi_g X.$$

On a $\psi_{(a,1)} = 0$ par construction. On calcule facilement que

$$\psi_{gh} = b^{-1}(h)\psi_g + b(g)\psi_h \circ g^{-1} + k\frac{a(g)a(h)}{b(g)}$$

que nous écrivons dans trois cas particuliers :

$$(a)\ \psi_{(a,b)} = \psi_{(a,1)(0,b)} = b^{-1}\psi_{(a,1)}$$
$$(b)\ \psi_{(a,b)} = \psi_{(0,b)(b^{-1}a,1)} = b\psi_{(b^{-1}a,1)} \circ (0, b^{-1})$$
$$(c)\ \psi_{(x+y,1)} = \psi_{(x,1)} + \psi_{(y,1)} \circ (-x, 1) + kxy;$$

(a) et (b) donnent :

$$\psi_{(a,1)} = a^2\psi_{(1,1)} \circ (0, a^{-1}).$$

Nous notons $l = \psi_{(1,1)}$. De (c) il vient, pour $xy > 0$:

$$\begin{aligned}(x+y)^2\|l\| &= \|\psi_{(x+y,1)}\| \\ &= \|\psi_{(x,1)} + \psi_{(y,1)} \circ (-x,1) + kxy\| \\ &\leq \|\psi_{(x,1)}\| + \|\psi_{(y,1)} \circ (-x,1)\| + \|kxy\| \\ &= (x+y)^2\|l\| + \left(\frac{1}{2}|k| - \|l\|\right) xy.\end{aligned}$$

Par conséquent, $|k| \geq 2\|l\|$. Mais si on remplace y par $-x$ dans (c), on a :

$$\begin{aligned}0 &= \|\psi_{(0,1)}\| \\ &= \|\psi_{(x,1)} + \psi_{(-x,1)} \circ (-x,1) - kxy\|.\end{aligned}$$

Donc, $\psi_{(x,1)} + \psi_{(-x,1)} \circ (-x, 1) = kxy$, ce qui donne en norme :

$$\begin{aligned}\|\psi_{(x,1)} + \psi_{(-x,1)} \circ (-x,1)\| &= |k|x^2 \\ &\leq \|\psi_{(x,1)}\| + \|\psi_{(-x,1)}\| \\ &= 2\|l\|x^2\end{aligned}$$

par conséquent, $|k| \leq 2\|l\|$. Il y a donc égalité, et (c) implique :

$$\|\psi_{(x,1)} + \psi_{(y,1)} \circ (-x,1) + kxy\| = \|\psi_{(x,1)}\| + \|\psi_{(y,1)}\| + |kxy|$$

ce qui prouve que ces fonctions sont colinéaires. Comme l'une d'elles est constante, elles sont toutes constantes, et (a) permet de calculer simplement que

$$\psi_{(a,b)} = \frac{a^2}{2b}k.$$

La proposition est démontrée. □

Nous pouvons maintenant démontrer le résultat principal de cet article :

THÉORÈME PRINCIPAL. — *Soient G un groupe de Lie de dimension $n-1$, Φ une action localement libre de classe C^r $(r \geq 2)$ de G sur une* *variété fermée M de dimension n. Si Φ préserve un volume continu sur M et s'il existe dans l'algèbre de Lie de G un champ Y tel que* $\mathrm{ad}(Y)$ *ait les valeurs propres* $0, \alpha_1, ..., \alpha_{n-2}$ *avec* $\mathrm{Re}(\alpha_i) < 0$ *alors Φ est C^r-conjuguée à une action homogène.*

Démonstration. — Il faut s'assurer que le flot de Z est de classe C^r. Ici encore, il y a deux cas à distinguer.

Le cas le plus difficile est $n = 3$. Nous renvoyons le lecteur à l'article [Gh1], mais nous allons brièvement décrire sa méthode : elle consiste à construire la variété stable d'un point m fixe par une homothétie h de G. Il s'agit d'une sous-variété de classe C^r (ici de dimension 1) qui passe par m et contient tous les points x, assez voisins de m, tels que $h^k.x$ tend vers x pour $k \to \infty$. Le champ Z est tangent à cette variété en chacun de ses points. En utilisant la théorie hyperbolique à la Hirsch-Pugh-Shub ([HPS]) on peut vérifier que le champ Z est analytique dans une carte locale qui est de classe C^r. (L'article original considère en fait une carte C^{r-1}, mais on peut la prendre C^r en vertu de [GT].)

Dans le cas $n \geq 4$, la même méthode permet d'obtenir directement que le champ Z est C^1 : en effet, l'application de premier retour au point m dilate la direction Z plus fortement qu'elle ne contracte la distribution stable. Par conséquent, elle contracte non seulement la norme C^0 mais aussi la norme C^1 quand on applique la méthode du point fixe. Plus précisément, si on considère l'ensemble des germes de feuilletages C^1 définis au voisinage de m, la distance C^1 en fait un espace métrique complet, et l'application de premier retour vérifie sur cet espace les hypothèses du théorème du point fixe ; une démonstration rigoureuse se trouve dans [HPS].

Puisque Z est C^1, il existe donc les crochets $[Z, Y]$ et $[Z, X_i]$. Ceux-ci peuvent être calculés simplement comme les dérivées de Lie de Z le long des flots associés à Y et X_i. Puisque $g_*(Z) = e^{\beta t(g)} Z$, on voit que

$$[Z, Y] = \beta.Z \text{ et } [Z, \mathcal{N}] = 0.$$

Ceci nous donne déjà une conjugaison C^1 de ϕ à une action homogène, car les crochets ci-dessus définissent l'algèbre d'un groupe de Lie. Maintenant, on peut comme expliqué plus haut trouver un point m fixé par une homothétie non triviale $(0, t)$ (avec $t > 0$ pour fixer les idées). Si nous paramétrons la variété stable du point fixe m pour cette homothétie par son abscisse curviligne et l'orbite de m par le paramètre local en $1 \in G$, nous obtenons un système C^r de coordonnées locales (g, z) en m, avec $g \in G$ et $z \in \mathbb{R}$, l'action de G se faisant par la formule $h.(g, m) = (hg, m)$.

De la théorie des équations différentielles ordinaires, décrite par exemple dans [AI], et de l'expression trouvée pour les crochets $[X_i, Z]$ et $[Y, Z]$ il vient que

$$Z = e^{\beta y} k(z) \frac{\partial}{\partial z}$$

où k est une fonction C^0, ne s'annulant pas.

Considérons le morphisme $\psi : H/\Gamma \to M$ où Γ est le stabilisateur de m dans H et $\psi(x\Gamma) = xm$. Il s'agit d'un difféomorphisme de classe C^1 qui préserve le feuilletage de M par les G-orbites. Ce feuilletage est sans feuille compacte, de classe C^r et à holonomie non triviale : par conséquent, le théorème A de [GT] entraîne que ψ est transversalement C^r. Dans la carte locale considérée ici, on a :

$$\phi(g, z) = (g, z + e^{\beta y} \int_z^{z+t} k(\tau) d\tau) \tag{9}$$

et vue la forme particulière (9) de ψ, ce morphisme est en fait de classe C^r. □

Remarque. — Nous avons signalé que si G est un groupe de Lie dont l'algèbre de Lie respecte la formule suivante :

$$[X_i, Y] = \alpha_i X_i \ i = 1, ..., n-2, \ Re(\alpha_i) < 0 \tag{10}$$

tout feuilletage de codimension 1 obtenu par une action de G qui préserve le volume satisfait nos hypothèses. Mais selon le théorème et la classification du paragraphe 1, ceci implique que G est le produit semi-direct de $\mathbb{R}^{n-2}$ par $\mathbb{R}$, avec la loi

$$(x_1, t_1).(x_2, t_2) = (x_1 + A_1^t x_2, t_1 + t_2)$$

la matrice A étant diagonale avec pour valeurs propres les conjugués d'un nombre de Pisot. Par conséquent, si G est un choix "générique" dans la famille des groupes définis par (10), *il n'existe aucun feuilletage de codimension 1 sur une variété fermée M, induit par une action localement libre de G qui préserve le volume.* A notre connaissance, ceci constitue le premier exemple d'une famille de groupes ne possédant aucun feuilletage suffisamment régulier de codimension 1.

BIBLIOGRAPHIE

[An] D.V. ANOSOV, Geodesic flows on compact Riemannian manifolds of negative curvature, Proc. Steklov Inst. Math., A.M.S. Translations (1969).

[AI] D.V. ARNOLD, Yu.D. ILL'YASHENKO, E.M.S. I (Dynamical Systems), Springer-Verlag.

[Be] P. BERNAT & al., Représentations des groupes de Lie résolubles, Dunod, Paris 4 (1972).

[Bo] N. BOURBAKI, Groupes et algèbres de Lie, Masson, éditeur.

[DNF] B. DOUBROVINE, S. NOVIKOV, R. FOMENKO, Géométrie contemporaine (vol. 1), éditions MIR.

[EN] A. EL KACIMI ALAOUI, M. NICOLAU, A class of C^∞-stable foliations, Ergod. Th. & Dynam. Sys., 13 (1993), 697-704.

[Gh1] E. GHYS, Actions localement libres du groupe affine, Invent. Math., 82 (1985), 479-526.

[Gh2] E. GHYS, Codimension 1 Anosov flows and suspensions, Lecture Notes, 1331 (1980).

[Go] C. GODBILLON, Feuilletages, Birkhauser, P.M. 98 (1989).

[GT] E. GHYS, T. TSUBOI, Différentiabilité des conjugaisons entre systèmes dynamiques de dimension 1, Ann. Inst. Fourier, 38-1 (1988), 215-244.

[HPS] M.W. HIRSH, C.C. PUGH, M. SHUB, Invariant manifolds, Lect. Notes Math., 583 (1977).

[Ma] B. MARCUS, Ergodic properties of horocyclic flows for surfaces of negative curvature, Ann. Math., 105 (1977), 81-105.

[Pi] C. PISOT, Eine merkwürdige Klasse ganzer algebraischer Zahlen, J. Reine Angew. Math., 209 (1962), 82-83.

[Pl] J.F. PLANTE, Foliations with measure preserving holonomy, Ann. Math., 102 (1978), 327-361.

[Ra] M.S. RAGHUNATHAN, Discrete subgroups of Lie groups, Springer.

[To1] P. TOMTER, Anosov flows on infra-homogeneous spaces, Proc. Symp. In Pure Math., 14 (1970), 299-327.

[To2] P. TOMTER, On the classification of Anosov flows, Topology, 14 (1975), 179-189.

Manuscrit reçu le 10 février 1994,
révisé le 4 octobre 1994.

M. BELLIART & O. BIREMBAUX,
URA au CNRS 751
Université de Valenciennes
Le Mont Houy, BP 311
59304 Valenciennes Cedex (France).