Université de Valenciennes
et du Hainaut-Cambrésis

Déformations d'actions de groupes et de certains réseaux résolubles

Thèse soutenue le 26 juin 2006

par

Cédric ROUSSEAU

pour obtenir le grade de

Docteur en Mathématiques

Composition du Jury

Président	R. Barre	*Université de Valenciennes*
Rapporteurs	D. Fisher	*Indiana University, Bloomington*
	G. Meigniez	*Université de Bretagne-Sud*
	R. Parthasarathy	*Tata Institute, Bombay*
Examinateur	A. Zeghib	*CNRS, ENS de Lyon*
Directeur de Thèse	A. El Kacimi	*Université de Valenciennes*

N° d'ordre : 06 - 13

Université de Valenciennes
et du Hainaut-Cambrésis

Déformations d'actions de groupes et de certains réseaux résolubles

Thèse soutenue le 26 juin 2006

par

Cédric ROUSSEAU

pour obtenir le grade de

Docteur en Mathématiques

Composition du Jury

Président	R. Barre	*Université de Valenciennes*
Rapporteurs	D. Fisher	*Indiana University, Bloomington*
	G. Meigniez	*Université de Bretagne-Sud*
	R. Parthasarathy	*Tata Institute, Bombay*
Examinateur	A. Zeghib	*CNRS, ENS de Lyon*
Directeur de Thèse	A. El Kacimi	*Université de Valenciennes*

N° d'ordre : 06 - 13

Remerciements

Je tiens à exprimer ici ma grande gratitude envers les personnes qui, du fait de leur concours ou de leur soutien, ont pris part à la concrétisation de plusieurs années d'études et de recherches que représente ce mémoire de thèse.

Mes tout premiers remerciements vont à Aziz El Kacimi. Les nombreux conseils qu'il a su m'apporter durant son encadrement amical m'ont été d'une aide précieuse dans la résolution des problèmes auxquels il m'a introduit.

De par ses suggestions lors de nos conversations, Rajagopalan Parthasarathy a considérablement contribué aux orientations prises par mon travail. Je l'en remercie vivement, ainsi que d'avoir bien voulu être rapporteur de cette thèse.

David Fisher et Gaël Meigniez ont très aimablement accepté eux aussi d'être rapporteurs de ce travail ; je leur en suis profondément reconnaissant.

Un grand merci également à Abdelghani Zeghib pour avoir bien voulu faire partie du jury en tant qu'examinateur, et à Raymond Barre pour avoir gentiment accepté d'en assurer la présidence.

J'adresse aussi toutes mes amitiés aux membres du LAMATH et aux collègues du département de Mathématiques de l'UVHC, et tout spécialement à Emmanuel Andréo avec qui je partage mon bureau. Son écoute active lorsque je lui exposais mes préoccupations m'a bien souvent aidé à avancer sur le chemin que je m'efforçais de tracer.

Quant à mes pensées les plus intimes, elles vont bien sûr à ma famille et à ma compagne Stéphanie ; je leur dédie ce mémoire.

Table des matières

Introduction

Sans avoir l'ambition d'être exhaustif sur le sujet, on se propose dans un premier temps de présenter la notion, ou plutôt les notions, de rigidité en géométrie et dans les systèmes dynamiques (essentiellement celles de rigidité locale et de rigidité infinitésimale) et d'en dresser un bref historique. Une grande partie de ce qui sera évoqué, et bien d'autres choses encore, l'est également dans [Fis04], le lecteur intéressé par une vue d'ensemble sur la rigidité en géométrie et dans les systèmes dynamiques pouvant également consulter [Spa95] et [Spa04]. Le cadre général étant ainsi préalablement établi, nous pourrons par la suite préciser dans quelle mesure viennent s'y inscrire les résultats obtenus durant la préparation de cette thèse.

0.1 Rigidité : définitions et principaux résultats

Soient Γ un groupe de type fini et G un groupe topologique. On désigne par $R(\Gamma, G)$ l'ensemble des morphismes de groupes de Γ dans G muni de la topologie de la convergence ponctuelle *i.e.* la topologie induite par celle du produit G^Γ, de sorte que deux morphismes de Γ dans G sont proches si, et seulement si, ils le sont sur un ensemble de générateurs de Γ (voir par exemple [Wei60]).

Définition 0.1.1. *Un morphisme de groupes $r : \Gamma \to G$ est dit* ***localement rigide*** *si tout autre morphisme de groupes $r' : \Gamma \to G$ suffisamment proche de r est conjugué à r, c'est-à-dire s'il existe un voisinage V de r dans $R(\Gamma, G)$ tel que :*

$$\forall\ r' \in V,\ \exists\ g \in G,\ \forall\ \gamma \in \Gamma,\ r'(\gamma) = gr(\gamma)g^{-1}.$$

Lorsque Γ est un sous-groupe de G, on dira que Γ ***est localement rigide dans*** *G si l'injection canonique de Γ dans G est localement rigide.*

Cette notion de rigidité locale trouve en particulier son intérêt dans la situation où, étant donnée une variété différentiable M, G est le groupe $\mathrm{Diff}^\infty(M)$ muni de la C^∞–topologie et $r : \Gamma \to G$ le morphisme de groupes associé à une action différentiable (encore notée $r : \Gamma \times M \to M$) d'un groupe discret Γ sur M. En effet, si une telle action est localement rigide, on pourra en contrôler les variations de dynamique à son voisinage étant donné que toute action qui lui est suffisamment proche lui est conjuguée (et même différentiablement conjuguée). Dans ce contexte, on peut d'ailleurs raffiner le concept de rigidité locale de la manière suivante :

Définition 0.1.2. *Si $r : \Gamma \to \mathrm{Diff}^k(M)$ est une action de classe C^k $(0 \leq k \leq \infty)$ de Γ sur M, on dit que r est* ***$C^{k,l,i,j,m}$–localement rigide*** *(avec $0 \leq l, i, j, m \leq \infty$ vérifiant $i \leq \min(k, l)$ et $m \leq j$) si tout $r' : \Gamma \to \mathrm{Diff}^k(M)$ suffisamment proche de r au sens de la C^i–topologie est conjugué à r par un difféomorphisme de classe C^j proche de l'identité pour la C^m–topologie. Pour $j = 0$, on dira que l'action est* ***structurellement stable*** *; lorsque $j > 0$, on pourra, sans préciser davantage, dire que l'action est* ***localement rigide****.*

La notion d'action structurellement stable apparaît notamment dans les travaux d'Anosov [Ano67] et Smale [Sma67] concernant les actions hyperboliques de $\mathbb{Z}$. Bien que n'entraînant pas la différentiabilité de la conjugaison, cette notion reste importante vu que la dynamique d'une telle action présente encore l'intérêt d'être contrôlable à son voisinage. Si les actions des groupes libres à n générateurs sont bien souvent structurellement stables, on peut en revanche constater qu'elles ne sont jamais localement rigides. En fait, il semble que la rigidité locale demande au groupe qui agit d'être suffisamment "grand". Ainsi, on peut montrer (voir [KL91]) que certaines actions de $\mathbb{Z}^k$ (avec $k \geq 2$) sont localement rigides. Des résultats de rigidité locale ont également été établis pour les cas suivants :

– certaines actions de réseaux dans $\mathrm{SO}(1,n)$ ne préservant pas le volume (voir [Kan96]) ;
– les actions isométriques des groupes ayant la propriété (T) de Kazhdan (voir [FM05]) ;
– certaines actions affines de réseaux dans $\mathrm{SP}(1,n)$ (voir [Hit03]) ;
– certaines actions isométriques de réseaux dans $\mathrm{SU}(1,n)$ (voir [Fis05]).

L'aspect « systèmes dynamiques » représente une forte motivation pour l'étude de la rigidité locale. Cependant, c'est à l'origine dans le cadre de la théorie générale des réseaux dans les groupes de Lie que celle-ci a été étudiée. Le premier résultat important en ce sens, obtenu d'abord partiellement par Calabi [Cal61], Calabi-Vesentini [CV60] et Selberg [Sel60], puis de manière complète par Weil [Wei60, Wei62], est le suivant :

Théorème 1. *Soit G un groupe de Lie semi-simple non localement isomorphe à $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$. Si Γ est un réseau cocompact irréductible dans G alors il est localement rigide dans G.*

Peu après, Weil [Wei64] découvre un nouveau critère de rigidité locale valide dans un cadre plus général. Tout morphisme $\Gamma \to G$ définit une action du groupe Γ sur $\mathfrak{g}$ via la représentation adjointe Ad_G (section 2.2.4 page 44). L'algèbre $\mathfrak{g}$ devient ainsi un Γ–module et on peut donc définir la cohomologie $H^*(\Gamma,\mathfrak{g})$ de Γ (en tant que groupe discret) à valeurs dans $\mathfrak{g}$. Weil montre alors le :

Théorème 2 (Weil, 1964). *Soit $r \in R(\Gamma, G)$ où Γ est un groupe de type fini et G un groupe de Lie. Si $H^1(\Gamma,\mathfrak{g}) = 0$, le morphisme r est localement rigide.*

De ce résultat on tire une nouvelle preuve du théorème 1 en montrant que dans les hypothèses de ce théorème l'espace $H^1(\Gamma,\mathfrak{g})$ est nul, ce que font Matsushima et Murakami dans [MM63]. Une vingtaine d'années plus tard, inspiré par ce théorème de Weil, Zimmer [Zim86] fait à nouveau le lien avec les actions de groupes de la façon suivante : si M est une variété différentiable, alors $G = \mathrm{Diff}^\infty(M)$ est un groupe de Lie de dimension infinie dont l'algèbre de Lie est l'espace $\mathrm{Vect}^\infty(M)$ des champs de vecteurs C^∞ sur M. Dans ce contexte, si $r : \Gamma \to \mathrm{Diff}^\infty(M)$ est une action différentiable d'un groupe Γ sur M, ce qui tient le rôle de l'action $\mathrm{Ad}_G \circ r$ du théorème 2 est tout simplement l'action de Γ sur $\mathrm{Vect}^\infty(M)$ donnée par la dérivée de r. Partant de là, et dans l'espoir que soit établi un analogue du théorème de Weil dont on pourrait déduire des résultats de rigidité locale, Zimmer définit la notion de rigidité infinitésimale :

Définition 0.1.3. *Une action différentiable d'un groupe Γ sur une variété M est dite* ***infinitésimalement rigide*** *(on précisera parfois par C^∞–**infinitésimalement rigide**) si $H^1(\Gamma, \mathrm{Vect}^\infty(M)) = 0$.*

Si depuis lors de nombreux résultats de rigidité infinitésimale ont été obtenus (voir notamment [Hur95, Kok99, Lew91, LZ89, Qia96, Zim90]), bien peu d'entre eux (dont [LZ89]) ont une application directe à la rigidité locale. Cependant, il faut noter que Fisher [Fis05] a récemment apporté une remarquable généralisation du théorème de Weil en montrant que, si M est une variété riemannienne compacte et Γ un groupe de présentation finie agissant sur M par isométries, alors il suffit que cette action soit infinitésimalement rigide pour qu'elle soit localement rigide dans $\mathrm{Diff}^\infty(M)$. L'action qui a été le plus étudiée à la fois sur le plan de la rigidité locale et sur celui de la rigidité infinitésimale est sans aucun doute l'action standard du groupe $\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$ (et de ses sous-groupes) sur le tore $\mathbb{T}^n$. Sur le premier plan, on retiendra essentiellement le résultat de Katok et Lewis [KL91] établissant que pour $n \geq 4$, l'action sur $\mathbb{T}^n$ de tout sous-groupe Γ de $\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$ d'indice fini est localement rigide. Sur le second, Lewis [Lew91] prouve pour $n \geq 7$ que l'action d'un tel sous-groupe Γ est également infinitésimalement rigide, et Pollicott [Pol95] obtient la rigidité infinitésimale de l'action de $\mathrm{SL}(3, \mathbb{Z})$ sur $\mathbb{T}^3$. Peu après, Hurder [Hur95] montre que plus largement, pour $n \geq 3$ et Γ sous-groupe de $\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$ d'indice fini, toute action affine de Γ sur $\mathbb{T}^n$ associée à l'action standard est infinitésimalement rigide.

0.2 Et quand ce n'est pas rigide ?

Évidemment, étant considérées les conséquences pour leur dynamique, on est en général plus intéressé par les actions rigides que par celles qui ne le sont pas, et effectivement, on trouve très peu dans la littérature existante d'exemples explicites d'actions non rigides. Concernant les actions sur les tores, Hurder montre dans [Hur92] que l'action de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ sur $\mathbb{T}^2$ n'est pas rigide à la déformation (notion que nous n'avons pas explicitée ici, mais que l'on trouvera définie dans [Hur92] bien sûr ou par exemple dans [Fis04]), et de ce fait qu'elle n'est pas localement rigide. Mais au niveau de la rigidité infinitésimale, rien n'est clairement établi pour $n = 2$. Par ailleurs, comme cela a déjà été dit à propos de la rigidité locale en général, le cas des tores tend à montrer que la rigidité infinitésimale elle aussi demande au sous-groupe Γ de $\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$ considéré d'être suffisamment "grand" (d'indice fini) ; mais ce n'est pas pour autant que l'on trouve des exemples de "petits" sous-groupes dont l'action sur $\mathbb{T}^n$ n'est pas (localement ou infinitésimalement) rigide. Sur ce point, un premier ensemble de résultats de cette thèse, développés dans le chapitre 3 et également repris dans [Rou05], concerne l'action sur $\mathbb{T}^2$ d'un sous-groupe monogène de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ engendré par une matrice hyperbolique A symétrique. On montrera que cette action n'est pas infinitésimalement rigide tout en étant W^s–infinitésimalement rigide pour $0 \leq s < 1$ au sens d'une rigidité infinitésimale de Sobolev que l'on définira.

Les autres résultats de la thèse, repris dans [Rou06], seront davantage en liaison avec la rigidité locale des réseaux dans les groupes de Lie. Le critère découvert par Weil motive le calcul de l'espace $H^1(\Gamma, \mathfrak{g})$ censé "mesurer" le défaut de rigidité d'un réseau dans un groupe de Lie et la recherche des méthodes pour faire ce calcul (voir notamment [Rag65], [Rag72]). Là encore, la rigidité présentant plus d'intérêt que la non-rigidité, la plupart des situations traitées conduisent à un espace de cohomologie nul, et bien peu de cas est fait de ceux qui ne le sont pas. On sait notamment que si Γ et G sont abéliens, l'action de Γ sur G est triviale et $H^1(\Gamma, \mathfrak{g}) \simeq \mathbb{R}^n \otimes \mathfrak{g}$ où n est le rang (de la partie libre) de Γ ; le cas nilpotent est aussi facile à traiter. Par contre, à notre connaissance, il n'existe pas dans la littérature d'exemple de calculs de cohomologie pour les réseaux dans les groupes de Lie résolubles non nilpotents. Nous apporterons un tel exemple en considérant le réseau $\Gamma = \mathbb{Z}^n \rtimes_A \mathbb{Z}$ (voir exemple ii) page 22), où A est une matrice hyperbolique de $\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$ diagonalisable sur $\mathbb{R}$ et à valeurs propres strictement positives, dans le groupe de Lie $G = \mathbb{R}^n \rtimes_A \mathbb{R}$, qui est résoluble et non nilpotent. En plus de quelques rappels généraux sur les groupes de Lie et la cohomologie des groupes, la première partie de cette thèse traîte du calcul de la cohomologie des extensions de groupes et des outils habituellement utilisés pour mener à bien ce calcul que sont la suite exacte de Hochschild-Serre (théorème 1.3.16 page 30) et la suite spectrale de Lyndon-Hochschild-Serre (section 1.4) ; l'effort étant surtout porté sur la suite exacte avec notamment la donnée explicite du morphisme de transgression. Ces outils seront employés pour effectuer le calcul inédit de l'exemple 1.4.4 page 36. Naturellement, on peut penser à également les utiliser pour traîter le problème de rigidité qui nous intéresse ; cependant, une démarche beaucoup plus directe suffira pour donner la dimension de l'espace $H^1(\Gamma, \mathfrak{g})$. On verra d'ailleurs, par la détermination explicite de ses déformations, dans quelle mesure le groupe Γ n'est pas localement rigide dans G tout en l'étant relativement à $\mathrm{SL}(n+1,\mathbb{R})$ dans un sens que l'on précisera.

Partie I

Rappels et généralités

Chapitre 1

Cohomologie des groupes

Un anneau Λ étant fixé, on parlera simplement dans toute cette section de **modules** et de **morphismes** pour désigner respectivement des modules à gauche sur Λ et des Λ–morphismes de Λ–modules.

1.1 Complexes différentiels, cohomologie

Définition 1.1.1. *Un **complexe différentiel** (K, d) (ou, plus simplement, **complexe**) est un module gradué*

$$K = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} K^n$$

*muni d'un endomorphisme d, appelé **différentielle** du complexe, tel que $d(K^n) \subset K^{n+1}$ pour tout n et $d^2 = d \circ d = 0$ (cette dernière condition équivalant à $\operatorname{Im} d \subset \operatorname{Ker} d$).*

On représente un tel complexe par la suite

$$K : 0 \longrightarrow K^0 \xrightarrow{\ d_0\ } K^1 \xrightarrow{\ d_1\ } \cdots \xrightarrow{\ d_{n-1}\ } K^n \xrightarrow{\ d_n\ } K^{n+1} \xrightarrow{\ d_{n+1}\ } \cdots$$

*où pour tout n, $d_n = d_{|K^n} : K^n \to K^{n+1}$ (en convenant que $K^{-1} = 0$ et $d^{-1} = 0$). Cette suite est dite **semi-exacte** du fait qu'à chaque rang n, $\operatorname{Im} d_n \subset \operatorname{Ker} d_{n+1}$.*

*Les éléments de K^n sont appelés les **n–cochaînes**. Si une cochaîne est dans $\operatorname{Ker} d$, on dit qu'elle est **fermée** (ou encore que c'est un **cocycle**) ; si elle est dans $\operatorname{Im} d$, on dit qu'elle est **exacte** (ou encore que c'est un **cobord**).*

*Tout cobord est donc un cocycle, mais en général, la réciproque n'est pas vérifiée. Si c'est le cas, autrement dit si $\operatorname{Im} d = \operatorname{Ker} d$, on dit que le complexe est **exact**.*

Soit K un complexe différentiel (on omettra souvent la différentielle d dans la notation). On notera pour chaque entier n,

$$Z^n(K) = K^n \cap \operatorname{Ker} d = \operatorname{Ker} d_n,$$

l'ensemble des n–cocycles, et

$$B^n(K) = d(K^{n-1}) = \operatorname{Im} d_{n-1},$$

l'ensemble des n–cobords. On mesure alors le « défaut d'exactitude » du complexe K au moyen de sa cohomologie, définie de la manière suivante :

Définition 1.1.2. *On appelle* ***cohomologie*** *d'un complexe K le module gradué*

$$H^*(K) = \operatorname{Ker} d \,/\, \operatorname{Im} d \simeq \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} H^n(K),$$

où pour tout entier n, $H^n(K)$ est le module quotient $Z^n(K)/B^n(K)$.

On peut aussi simplement considérer la cohomologie de K comme la suite $(H^n(K))_{n\in\mathbb{N}}$.

La classe de cohomologie (entendu dans $H^n(K)$) d'un n−cocycle k sera notée $[k]$, et deux cocycles appartenant à la même classe de cohomologie i.e. dont la différence est un cobord, seront dits ***équivalents*** *ou* ***cohomologues****.*

Remarque 1.1.3. Un complexe est donc exact si, et seulement si, $H^n(K) = 0$ pour tout $n \geq 0$.

Définition 1.1.4. *Soient (K, d) et (L, δ) deux complexes. Un* ***morphisme de complexes*** *f de K dans L est un morphisme de modules gradués i.e. un morphisme de K dans L tel que $f(K^n) \subset L^n$ pour tout n, vérifiant :*

$$\delta \circ f = f \circ d.$$

Un morphisme de complexes est représenté par le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & K^n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "f_n"'] & K^{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n+1}"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & L^n \arrow[r, "\delta_n"] & L^{n+1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

où pour tout n, $f_n = f_{|K^n} : K^n \to L^n$. Un tel morphisme peut bien sûr être considéré comme la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et clairement, c'est un ***isomorphisme de complexes*** *si, et seulement si, chaque f_n est un isomorphisme.*

Définition 1.1.5. *Soient (K, d) et (L, δ) deux complexes. On dit que K est un* ***sous-complexe*** *de L si pour tout $n \in \mathbb{N}$, K^n est un sous-module de L^n et $d_n = \delta_{|K^n}$.*

On constate que :

Proposition 1.1.6. *Tout morphisme de complexes $f : K \to K$ induit un morphisme en cohomologie $f^* : H^*(K) \to H^*(L)$, $[k] \mapsto [f_n(k)]$.*

Aussi, on montre facilement que :

Proposition 1.1.7. *Si K, L et M sont trois complexes et $f : K \to L$ et $g : L \to M$ deux morphismes, alors :*

i) $(\mathrm{Id}_K)^* = \mathrm{Id}_{H^*(K)}$ *et* $(g \circ f)^* = g^* \circ f^*$,

ii) si f est un isomorphisme de complexes, alors $f^* : H^*(K) \to H^*(L)$ est un isomorphisme.

On retiendra donc que des complexes isomorphes ont des cohomologies isomorphes. Pour autant, un morphisme de complexes qui n'est pas un isomorphisme peut très bien induire un isomorphisme en cohomologie ; c'est ce qu'on appelle un **quasi-isomorphisme** de complexes.

Proposition 1.1.8 (Lemme du serpent). *Soient K,L,M trois complexes, $f : K \to L$ et $g : L \to M$ deux morphismes de complexes tels que la suite*

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} M \longrightarrow 0 \tag{1.1.1}$$

*soit exacte. Alors il existe une suite $(\partial_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de morphismes $\partial_n : H^n(M) \to H^{n+1}(K)$, appelés **morphismes de connexion**, telle que pour tout n, la suite*

$$H^{n-1}(M) \xrightarrow{\partial_{n-1}} H^n(K) \xrightarrow{f_n^*} H^n(L) \xrightarrow{g_n^*} H^n(M) \xrightarrow{\partial_n} H^{n+1}(K) \tag{1.1.2}$$

soit exacte.

Preuve. Les différentielles des trois complexes seront toutes notées d et on se contentera de décrire comment sont définis les morphismes ∂_n. Dire que la suite (1.1.1) est exacte revient à dire qu'à chaque rang n, la suite

$$0 \longrightarrow K^n \xrightarrow{f_n} L^n \xrightarrow{g_n} M^n \longrightarrow 0$$

est exacte. Un entier n étant fixé, si $m \in Z^n(M)$, il existe par surjectivité de g_n un élément $l \in L^n$ tel que $m = g_n(l)$. Posons alors $l' = d_n l$. On a :

$$g_{n+1}(l') = g_{n+1}(d_n l) = d_n(g_n(l)) = d_n m = 0 \ ;$$

donc $l' \in \operatorname{Ker} g_{n+1} = \operatorname{Im} f_{n+1}$ et il existe un unique élément $k \in K^{n+1}$ tel que $l' = f_{n+1}(k)$. Aussi

$$f_{n+2}(d_{n+1}k) = d_{n+1}(f_{n+1}(k)) = d_{n+1}l' = d_{n+1}(d_n l) = 0,$$

et comme f_{n+2} est injective, $d_{n+1}k = 0$ *i.e.* $k \in Z^{n+1}(K)$. On pose alors $\partial_n([m]) = [k]$.

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & K^n \arrow[r] \arrow[d] & L^n \arrow[r, "g_n"] \arrow[d, "d_n"] \arrow[d, dotted, shift right] & M^n \arrow[r] \arrow[d] \arrow[l, dotted, shift left] & 0 \\
0 \arrow[r] & K^{n+1} \arrow[r, "f_{n+1}"] \arrow[d] & L^{n+1} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[l, dotted, shift left] & M^{n+1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}$$

On vérifie que $\partial_n([m])$ ne dépend que de $[m]$, que l'application ∂_n ainsi définie est un morphisme et que la suite (1.1.2) induite en cohomologie est exacte. □

1.2 Cohomologie des groupes : une définition

Soient G un groupe, dont on notera 1_G l'élément neutre, et E un ***G*–module**, c'est-à-dire un module sur lequel G agit à gauche. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, désignons par $C^n(G, E)$ le module des applications de G^n dans E (en convenant que $C^0(G, E) = E$).

Définition 1.2.1. *La suite*

$$K : 0 \longrightarrow E \xrightarrow{d_0} C^1(G,E) \xrightarrow{d_1} C^2(G,E) \xrightarrow{d_2} \cdots,$$

où pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $F \in C^n(G,E)$:

$$\begin{aligned} d_nF(g_1,\dots,g_{n+1}) = g_1.F(g_2,\dots,g_{n+1}) + \sum_{i=1}^{n}(-1)^iF(g_1,\dots,g_{i-1},g_ig_{i+1},g_{i+2},\dots,g_{n+1}) \\ + (-1)^{n+1}F(g_1,\dots,g_n), \end{aligned}$$

définit un complexe différentiel, dont la cohomologie, notée $H^*(G,E)$, est appelée la ***cohomologie de G à valeurs dans E****.*

Les éléments de $C^n(G,E)$ sont appelés les ***n–cochaînes inhomogènes****, ceux de $Z^n(G,E) = \operatorname{Ker} d_n$ les* ***n–cocycles inhomogènes****, et ceux de $B^n(G,E) = \operatorname{Im} d_{n-1}$ les* ***n–cobords inhomogènes****.*

On a ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$H^n(G,E) = Z^n(G,E)/B^n(G,E).$$

Remarque 1.2.2. Il faudrait, pour justifier la définition précédente, montrer que $d^2 = 0$, ce qui peut être fait directement ; ce n'est pas difficile, mais plutôt fastidieux. En fait, ce qu'on a pris ici comme définition n'est qu'une façon parmi d'autres de calculer la cohomologie d'un groupe G à coefficients dans un G–module E, chacune d'entre elles présentant ses avantages et ses inconvénients pour la démonstration de différents résultats. Par exemple, on peut considérer le complexe

$$^\circ K : 0 \longrightarrow E \xrightarrow{d_0} {}^\circ C^1(G,E) \xrightarrow{d_1} {}^\circ C^2(G,E) \xrightarrow{d_2} \cdots$$

sous-complexe de K constitué des ensembles $^\circ C^n(G,E)$ des n–cochaînes F, dites **inhomogènes normalisées**, qui vérifient :

$$F(g_1,\dots,g_n) = 0 \text{ dès que l'un des } g_i \text{ vaut } 1_G \;;$$

sa cohomologie donne également celle du groupe G à valeurs dans E.

Pour une définition plus précise de la cohomologie d'un groupe, on pourra notamment consulter [Gui80], pages 2 à 22.

1.2.1 Cas des dimensions $n = 0$ et $n = 1$

En dimension $n = 0$, on a $B^0(G,E) = 0$, d'où :

$$H^0(G,E) = Z^0(G,E)/B^0(G,E) \simeq Z^0(G,E) \subset E,$$

et si $x \in E$, alors :

$$x \in Z^0(G,E) \iff \forall\, g \in G,\ dx(g) = g.x - x = 0.$$

D'où, en notant E^G le sous-module de E des éléments G–invariants :

Proposition 1.2.3. *Si G est un groupe et E un G–module, alors :*

$$H^0(G, E) \simeq E^G.$$

En dimension $n = 1$, on constate que les 1–cocycles inhomogènes sont les applications $F : G \to E$ vérifiant :

$$\forall\ g_1, g_2 \in G,\ \ F(g_1 g_2) = F(g_1) + g_1.F(g_2)\ ;$$

c'est pourquoi ils sont également appelés **morphismes croisés** de G dans E. En particulier, si G opère trivialement sur E, $B^1(G, E) = 0$ et $Z^1(G, E)$ est l'ensemble $\mathrm{Hom}(G, E)$ des morphismes de groupes de G dans E, et donc :

Proposition 1.2.4. *Si G est un groupe agissant trivialement sur un module E, alors :*

$$H^0(G, E) \simeq E \ \text{et}\ H^1(G, E) \simeq \mathrm{Hom}(G, E).$$

Énonçons également un lemme qui sera utilisé dans la section 1.3 :

Lemme 1.2.5. *Soit E un G–module. Pour $n \geq 1$, tout n–cocycle constant est exact.*

Preuve. Soit $F \in Z^n(G, E)$, $n \geq 1$, tel que

$$\exists\ x \in E,\ \forall\ g_1, \ldots, g_n \in G,\ \ F(g_1, \ldots, g_n) = x.$$

Alors, pour tous $g_1, \ldots, g_{n+1} \in G$:

$$\begin{aligned}
0 &= dF(g_1, \ldots, g_{n+1}) \\
&= g_1.F(g_2, \ldots, g_{n+1}) + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i F(g_1, p_2, \ldots, g_{i-1}, g_i g_{i+1}, g_{i+2}, \ldots, g_{n+1}) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + (-1)^{n+1} F(g_1, \ldots, g_n) \\
&= g_1.x + (-x + x - \cdots + (-1)^n x + (-1)^{n+1} x) \\
&= \begin{cases} g_1.x & \text{si } n \text{ impair ;} \\ g_1.x - x & \text{si } n \text{ pair.} \end{cases}
\end{aligned}$$

D'où nécessairement $x_0 \in E^G$, et plus encore, $x = 0$ si n est impair.
Soit $\tilde{F} : G^{n-1} \to E$ tel que

$$\forall\ g_1, \ldots, g_{n-1} \in G,\ \ F(g_1, \ldots, g_n) = x.$$

On a pour tous $g_1, \ldots, g_n \in G$:

$$d\tilde{F}(g_1, \ldots, g_n) = \begin{cases} g_1.x - x = 0 = x & \text{si } n \text{ impair ;} \\ g_1.x = x & \text{si } n \text{ pair.} \end{cases}$$

D'où $d\tilde{F} = F$. □

1.2.2 Exemples

i) Cohomologie du groupe trivial $\mathbf{1}$

Proposition 1.2.6. *Pour tout* $\mathbf{1}$*–module* E*, :*

$$H^n(\mathbf{1}, E) \simeq \begin{cases} E & \text{si } n = 0 \ ; \\ 0 & \text{si } n \geq 1. \end{cases}$$

Preuve. L'action du groupe trivial $\mathbf{1}$ sur tout $\mathbf{1}$–module E étant évidemment triviale, la proposition 1.2.4 donne :

$$H^0(\mathbf{1}, E) \simeq E \text{ et } H^1(\mathbf{1}, E) \simeq \mathrm{Hom}(\mathbf{1}, E) = 0.$$

De plus, pour tout $n \geq 1$, on a $C^n(\mathbf{1}, E) \simeq E$, et pour tout n–cocycle F :

$$dF(1, \ldots, 1) = \begin{cases} F(1, \ldots, 1) & \text{si } n \text{ impair} \ ; \\ 0 & \text{si } n \text{ pair,} \end{cases}$$

de sorte que :

$$H^n(\mathbf{1}, E) = Z^n(\mathbf{1}, E)/B^n(\mathbf{1}, E) = \begin{cases} 0/0 \simeq 0 & \text{si } n \text{ impair} \ ; \\ E/E \simeq 0 & \text{si } n \text{ pair.} \end{cases}$$

On pouvait aussi tout simplement remarquer que le complexe des cochaînes inhomogènes normalisées se réduit à $0 \to E \to 0$. □

ii) Cohomologie du groupe $\mathbb{Z}$

Proposition 1.2.7. *Soient* E *un* $\mathbb{Z}$*–module et* Θ *l'automorphisme de* E *associé à l'élément 1 de* $\mathbb{Z}$*. Alors :*

$$H^n(\mathbb{Z}, E) \simeq \begin{cases} \mathrm{Ker}(\Theta - \mathrm{Id}_E) & \text{si } n = 0 \ ; \\ \mathrm{Coker}(\Theta - \mathrm{Id}_E) & \text{si } n = 1 \ ; \\ 0 & \text{si } n \geq 2. \end{cases}$$

Preuve. Toutes les cochaînes considérées ici sont supposées normalisées. D'après la proposition 1.2.3 :

$$H^0(\mathbb{Z}, E) \simeq E^{\mathbb{Z}} = \mathrm{Ker}(\Theta - \mathrm{Id}_E).$$

Par ailleurs, si F est un 1–cocycle inhomogène, alors :

$$\forall\ p, q \in \mathbb{Z},\ F(q + p) = F(q) + q.F(p) \ ;$$

ce qui, pour $p = q = 0$ donne $F(0) = 0$, et pour $q = 1$:

$$\forall\ p \in \mathbb{Z},\ F(p + 1) = \Theta(F(p)) + x_0,$$

où l'on a posé $F(1) = x_0$. D'où aussi :

$$\forall\ p \in \mathbb{Z},\ F(p - 1) = \Theta^{-1}(F(p) - x_0).$$

On montre alors aisément par récurrence que

$$F(p)=\begin{cases}\sum\limits_{k=0}^{p-1}\Theta^k(x_0) & \text{si } p\geq 0\ ;\\ -\sum\limits_{k=p}^{-1}\Theta^k(x_0) & \text{si } p\leq 0.\end{cases}\tag{1.2.1}$$

Inversement, on vérifie que pour tout $x_0\in E$, les formules (1.2.1) définissent bien un 1–cocycle. Ainsi, l'évaluation en 1 est un isomorphisme entre $Z^1(\mathbb{Z},E)$ et E, et via cet isomorphisme :

$$B^1(\mathbb{Z},E)\simeq \mathrm{Im}(\Theta-\mathrm{Id}_E).$$

D'où

$$H^1(\mathbb{Z},E)\simeq \mathrm{Coker}(\Theta-\mathrm{Id}_E).$$

Remarquons maintenant que pour $n\geq 2$, si un n–cocycle F est tel que $F(p_1,p_2,\ldots,p_n)=0$ dès que $p_1=1$ alors :

$$\begin{aligned}0&=dF(1,p_2,\ldots,p_{n+1})\\ &=1.F(p_2,\ldots,p_{n+1})-F(1+p_2,p_3,\ldots,p_{n+1})\\ &\quad+\sum_{i=2}^{n}(-1)^i\underbrace{F(1,p_2,\ldots,p_{i-1},p_i+p_{i+1},p_{i+2},\ldots,p_{n+1})}_{0}+(-1)^{n+1}\underbrace{F(1,p_2,\ldots,p_n)}_{0}.\end{aligned}$$

D'où

$$F(p_2+1,p_3,\ldots,p_{n+1})=1.F(p_2,p_3,\ldots,p_{n+1}),$$

et par récurrence sur p_2 :

$$F(p_2,p_3,\ldots,p_{n+1})=0 \text{ pour tous } p_2,p_3,\ldots,p_{n+1}\in\mathbb{Z},$$

et donc F est nul.

Cela dit, à tout n–cocycle F, $n\geq 2$, on associe une $(n-1)$–cochaîne $\hat{F}$ définie par :

$$\hat{F}(p_1,\ldots,p_{n-1})=\begin{cases}-\sum\limits_{k=1}^{p_1-1}\Theta^{p_1-k-1}F(1,k,p_2,\ldots,p_{n-1}) & \text{si } p_1\geq 1\ ;\\ \sum\limits_{k=p_1}^{-1}\Theta^{p_1-k-1}F(1,k,p_2,\ldots,p_{n-1}) & \text{si } p_1\leq 0.\end{cases}$$

et en vérifiant que $(d\hat{F}-F)(p_1,\ldots,p_n)=0$ dès que $p_1=1$, on prouve que $F=d\hat{F}$, et donc que F est exact. □

1.3 Cohomologie des extensions de groupes

Définition 1.3.1. *Soient H et Q deux groupes. Une **extension de H par Q** est la donnée d'une suite exacte de groupes*

$$1\longrightarrow H\xrightarrow{i}G\xrightarrow{\pi}Q\longrightarrow 1.\tag{1.3.1}$$

On a alors $H \simeq i(H) = \operatorname{Ker}\pi$ *sous-goupe normal de* G*, et à isomorphisme près, on pourra donc toujours considérer que* H *est un sous-groupe normal de* G *et que* i *est l'injection canonique de* H *dans* G*. Comme de ce fait* $Q \simeq G/H$*, on notera parfois* $Q = \{\dot{g} \mid g \in G\}$ *où* $\dot{g} = \pi(g)$*.*

Deux extensions de H *par* Q

$$1 \longrightarrow H \xrightarrow{i} G \xrightarrow{\pi} Q \longrightarrow 1 \ \textit{et} \ 1 \longrightarrow H \xrightarrow{i'} G' \xrightarrow{\pi'} Q \longrightarrow 1$$

sont dites ***équivalentes*** *s'il existe un isomorphisme de groupes* $w : G \to G'$ *tel que* $w \circ i = i'$ *et* $\pi' \circ w = \pi$*.*

L'extension (1.3.1) *est dite* ***scindée*** *s'il existe une* ***section multiplicative*** *de* π*, c'est-à-dire un morphisme de groupes* $s : Q \to G$ *tel que* $\pi \circ s = \mathrm{Id}_Q$*.*

Proposition 1.3.2. *Soient* H *et* Q *deux groupes et* $\phi : Q \to \mathrm{Aut}(H)$ *un morphisme de groupes. On note* $G = H \rtimes_\phi Q$ *l'ensemble* $G = H \times Q$ *muni de la loi de groupe :*

$$(h, q)(h', q') = (h\phi(q)(h'), qq'). \tag{1.3.2}$$

On a alors une extension scindée de H *par* Q *:*

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & H & \xrightarrow{i} & G = H \rtimes Q & \xrightarrow{\pi} & Q & \longrightarrow & 1 \\ & & h & \longmapsto & (h,1) & & & & \\ & & & & (h,q) & \longmapsto & q & & \end{array} \tag{1.3.3}$$

Preuve. L'application ϕ définit une action de Q sur H si l'on note $q.h = \phi(q)(h)$. On vérifie alors aisément que la loi (1.3.2) est associative, que $(1_H, 1_Q)$ est élément neutre, et que $(h, q)^{-1} = (q^{-1}.h^{-1}, q^{-1})$. Il n'est également pas très difficile de montrer que la suite (1.3.3) est exacte et que $s : Q \to H \rtimes Q$, $q \mapsto (1, q)$ est une section multiplicative de π. □

Définition 1.3.3. *On appelle* ***produit semi-direct de H par Q relativement à*** $\boldsymbol{\phi}$ *le groupe* $G = H \rtimes_\phi Q$ *(plus simplement noté* $G = H \rtimes Q$ *lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté) défini ci-dessus.*

1.3.1 Exemples

i) Le produit direct de deux groupes est bien évidemment un produit semi-direct. En fait, tout produit semi-direct abélien est nécessairement un produit direct.

ii) Un entier $n \geq 2$ et une matrice $A \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$ étant fixés, on peut considérer le produit semi-direct noté $\mathbb{Z}^n \rtimes_A \mathbb{Z}$ dans lequel la multiplication s'écrit :

$$\big((u^1, \ldots, u^n), s\big)\,\big((v^1, \ldots, v^n), t\big) = \big((u^1, \ldots, u^n) + A^s(v^1, \ldots, v^n), s + t\big)\,.$$

Clairement, ce groupe n'est abélien que si la matrice A est la matrice identité.

N.B. par commodité d'écriture, on utilisera souvent la notation horizontale pour désigner les n-uplets dans $\mathbb{R}^n$.

Proposition 1.3.4. *Soient* H *et* Q *deux groupes. Une extension de* H *par* Q *est équivalente à un produit semi-direct* $H \rtimes Q$ *si, et seulement si, elle est scindée.*

Preuve. Toute extension équivalente à un produit semi-direct étant clairement scindée, il s'agit de montrer que l'extension scindée

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & H \arrow[r, "i"] & G \arrow[r, shift left, "\pi"] & Q \arrow[l, shift left, dashed, "s"] \arrow[r] & 1 \end{tikzcd}$$

est équivalente à un produit semi-direct $H \rtimes Q$.
Posons pour tout $(h,q) \in H \times Q$:

$$q.h = \phi(q)(h) = s(q)hs(q^{-1})$$

et considérons le produit semi-direct $G' = H \rtimes_\phi Q$. Soit $w : G' \to G, (h,q) \mapsto hs(q)$, application qui est bien un morphisme de groupes puisque :

$$\begin{aligned} w((h,q)(h',q')) &= w(h(q.h'), qq') \\ &= hs(q)h's(q^{-1})s(qq') \\ &= hs(q)h's(q^{-1})s(q)s(q') \\ &= hs(q)h's(q') \\ &= w(h,q)w(h',q'). \end{aligned}$$

De plus :

$$(w \circ i')(h) = w(h, 1_Q) = hs(1_Q) = h = i(h);$$

$$(\pi \circ w)(h,q) = \pi(hs(q)) = \pi(h)(\pi \circ s)(q) = 1_Q \operatorname{Id}_Q(q) = q = \pi'(h,q).$$

D'où le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & H \arrow[r, "i'"] \arrow[dr, "i"'] & G' = H \rtimes Q \arrow[r, "\pi'"] \arrow[d, "w"] & Q \arrow[r] & 1 \\ & & G \arrow[ur, "\pi"'] & & \end{tikzcd}$$

Reste à montrer que w est un isomorphisme :

w est injective car si $w(h,q) = 1_G$, alors $q = (\pi \circ w)(h,q) = \pi(1_G) = 1_Q$, et de fait $w(h,q) = hs(1_Q) = h = 1_G$.

w est surjective car $\pi(gs(\pi(g^{-1}))) = \pi(g)(\pi \circ s)(\pi(g^{-1})) = \pi(g)\pi(g^{-1}) = 1_Q$, d'où $gs(\pi(g^{-1})) \in \operatorname{Ker} \pi = H$, et donc $g = gs(\pi(g^{-1}))s(\pi(g)) = w(gs(\pi(g^{-1})), \pi(g))$. □

Remarque 1.3.5. Ne manquons pas de signaler ici une application de la cohomologie des groupes à l'étude des extensions : dans le cas où le groupe H est abélien, toute extension (1.3.1) définit une action de G sur H par automorphismes intérieurs :

$$\forall\ (g,h) \in G \times H,\ g.h = ghg^{-1},$$

pour laquelle H agit trivialement, et donc une action de $Q \simeq G/H$ sur H. On montre qu'étant donnés un groupe Q et un Q–module H, il existe une correspondance bijective entre $H^2(Q,H)$ et l'ensemble des classes d'extensions de H par Q telles que l'action de Q sur H que chacune de ces extensions définit coïncide avec l'action initialement donnée. On trouvera une preuve de ce fait par exemple dans [Gui80], pages 34-35.

Soient G un groupe et E un G–module. Étant donnée une extension

$$1 \longrightarrow H \xrightarrow{i} G \xrightarrow{\pi} Q \longrightarrow 1, \tag{1.3.4}$$

l'action de G sur E induit naturellement sur E une structure de H–module, et par conséquent une structure de Q–module sur le sous-module E^H des invariants de E :

$$\forall\, g \in G,\ \forall\, x \in E^H,\ \dot{g}.x = g.x.$$

On peut donc considérer les complexes en cochaînes inhomogènes :

$$0 \longrightarrow E \xrightarrow{d_{G,0}} C^1(G,E) \xrightarrow{d_{G,1}} C^2(G,E) \xrightarrow{d_{G,2}} \cdots\ ; \tag{1.3.5}$$

$$0 \longrightarrow E \xrightarrow{d_{H,0}} C^1(H,E) \xrightarrow{d_{H,1}} C^2(H,E) \xrightarrow{d_{H,2}} \cdots\ ; \tag{1.3.6}$$

$$0 \longrightarrow E^H \xrightarrow{d_{Q,0}} C^1(Q,E^H) \xrightarrow{d_{Q,1}} C^2(Q,E^H) \xrightarrow{d_{Q,2}} \cdots\ . \tag{1.3.7}$$

Nous allons dans ce qui suit chercher à relier entre elles les cohomologies $H^*(H,E)$, $H^*(G,E)$ et $H^*(Q,E^H)$ en basses dimensions ($n = 0, 1, 2$).

Proposition 1.3.6.

i) Par restriction des éléments de $C^n(G,E)$ à H^n pour chaque entier n, on obtient un morphisme de complexes de (1.3.5) *dans* (1.3.6) *pour lequel le morphisme induit en cohomologie est appelé **restriction** et noté res : $H^*(G,E) \to H^*(H,E)$.*

ii) Les applications $C^n(Q,E^H) \to C^n(G,E)$, $F \mapsto j \circ F \circ \pi_n$, où j est l'injection canonique de E^H dans E et $\pi_n : G^n \to Q^n, (g_1,\dots,g_n) \mapsto (\dot{g}_1,\dots,\dot{g}_n)$, définissent un morphisme de complexes de (1.3.7) *dans* (1.3.5), *pour lequel le morphisme induit en cohomologie est appelé **inflation** et noté inf : $H^*(Q,E^H) \to H^*(G,E)$.*

Preuve. La démonstration de cette proposition est en grande partie triviale ; contentons nous simplement de vérifier que, pour tout $F \in C^n(Q,E^H)$:

$$d_G(j \circ F \circ \pi_n) = j \circ d_Q F \circ \pi_{n+1}.$$

En effet, pour tous $g_1,\dots,g_{n+1} \in G$:

$$\begin{aligned}
d_G(j \circ F \circ \pi_n)(g_1,\dots,g_{n+1}) = {} & g_1.(j \circ F \circ \pi_n)(g_2,\dots,g_{n+1}) \\
& + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i (j \circ F \circ \pi_n)(g_1,\dots,g_{i-1},g_i g_{i+1},g_{i+2},\dots,g_{n+1}) \\
& \qquad + (-1)^{n+1} (j \circ F \circ \pi_n)(g_1,\dots,g_n) \\
= {} & g_1.F(\dot{g}_2,\dots,\dot{g}_{n+1}) + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i F(\dot{g}_1,\dots,\dot{g}_{i-1},\dot{g}_i\dot{g}_{i+1},\dot{g}_{i+2},\dots,\dot{g}_{n+1}) \\
& \qquad + (-1)^{n+1} F(\dot{g}_1,\dots,\dot{g}_n) \\
= {} & \dot{g}_1.F(\dot{g}_2,\dots,\dot{g}_{n+1}) + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i F(\dot{g}_1,\dots,\dot{g}_{i-1},\dot{g}_i\dot{g}_{i+1},\dot{g}_{i+2},\dots,\dot{g}_{n+1}) \\
& \qquad + (-1)^{n+1} F(\dot{g}_1,\dots,\dot{g}_n) \\
= {} & (j \circ d_Q F \circ \pi_{n+1})(g_1,\dots,g_{n+1}).
\end{aligned}$$

□

Proposition 1.3.7.

i) $\operatorname{Im} inf \subset \operatorname{Ker} res$;

ii) $\operatorname{Im} inf_{|H^1(Q,E^H)} = \operatorname{Ker} res_{|H^1(G,E)}$;

iii) $\operatorname{Ker} inf_{|H^1(Q,E^H)} = 0$.

Preuve. i) Soient n un entier fixé et $F \in Z^n(Q, E^H)$. Alors $j \circ F \circ \pi_n \in Z^n(G, E)$, et pour tous $h_1, \ldots, h_n \in H$:

$$(j \circ F \circ \pi_n)_{|H}(h_1, \ldots, h_n) = F(1_Q, \ldots, 1_Q).$$

Ainsi $(j \circ F \circ \pi_n)_{|H}$ est un n–cocycle constant, donc est exact d'après le lemme 3.1.3.

ii) On sait déjà d'après i) que $\operatorname{Im} inf_{|H^1(Q,E^H)} \subset \operatorname{Ker} res_{|H^1(G,E)}$. Si maintenant $F \in Z^1(G, E)$ est tel que $F_{|H} \in B^1(H, E)$, alors il existe $x \in E$ tel que

$$\forall\ h \in H,\ F_{|H}(h) = d_H x(h) = h.x - x.$$

Posons $F' = F - d_G x \in Z^1(G, E)$; alors $F'_{|H} = 0$. D'où, pour tous $g \in G$, $h \in H$:

$$\begin{aligned} F'(gh) = F'(g) + g.F'(h) = F'(g) &= F'(g(g^{-1}hg)) \\ &= F'(hg) = F'(h) + h.F'(g) = h.F'(g). \end{aligned} \tag{1.3.8}$$

Aussi, pour $g_1, g_2 \in G$:

$$\dot{g}_1 = \dot{g}_2 \Leftrightarrow {g_1}^{-1} g_2 \in \operatorname{Ker} \pi = H \Leftrightarrow \exists\ h \in H,\ g_2 = g_1 h\ .$$

On peut donc définir $F'' : Q \to E$, $\dot{g} \mapsto F'(g)$. On remarque que, d'après (1.3.8),

$$\forall\ g \in G,\ \forall\ h \in H,\ h.F''(\dot{g}) = h.F'(g) = F'(g),$$

d'où $F'' : Q \to E^H$, et

$$\begin{aligned} d_Q F''(\dot{g}_1, \dot{g}_2) &= \dot{g}_1.F''(\dot{g}_2) - F''(\dot{g}_1 \dot{g}_2) + F''(\dot{g}_1) \\ &= g_1.F'(g_2) - F'(g_1 g_2) + F'(g_1) \\ &= d_G F'(g_1, g_2) = 0. \end{aligned}$$

Par conséquent $F'' \in Z^1(Q, E^H)$, et $[F] = [F'] \in inf(H^1(Q, E^H))$ car $F' = j \circ F'' \circ \pi$.

iii) Soit $F \in Z^1(Q, E^H)$ tel que $j \circ F \circ \pi$ soit exact. Alors il existe $x \in E$ tel que

$$\forall\ g \in G,\ F(\dot{g}) = g.x - x.$$

En particulier, pour tout $h \in H$, on a :

$$0 = F(1_Q) = F(\dot{h}) = h.x - x.$$

D'où $x \in E^H$ et $F = d_Q x$ est exact. □

Remarque 1.3.8. En toute généralité, les points ii) et iii) de la proposition ci-dessus, vrais pour $n = 1$, ne le sont pas pour $n \geq 2$.

1.3.2 Action de G sur $H^*(H,E)$

Pour $F \in C^n(H,E)$, $n \geq 0$, on pose :

$$(g.F)(h_1,\ldots,h_n) = g.F(g^{-1}h_1g,\ldots,g^{-1}h_ng).$$

Cette action de G sur les $C^n(H,E)$ commute à la différentielle d_H du complexe (1.3.6), et définit donc un automorphisme de ce complexe :

$$\begin{aligned}
&(g.d_HF)(h_1,\ldots,h_{n+1})\\
&\qquad = g.d_HF(g^{-1}h_1g,\ldots,g^{-1}h_{n+1}g)\\
&\qquad = g.\Big((g^{-1}h_1g).F(g^{-1}h_2g,\ldots,g^{-1}h_{n+1}g)\\
&\qquad\qquad + \sum_{i=1}^{n}(-1)^iF(g^{-1}h_1g,\ldots,g^{-1}h_{i-1}g,g^{-1}h_igg^{-1}h_{i+1}g,g^{-1}h_{i+1}g,\ldots,g^{-1}h_{n+1}g)\\
&\qquad\qquad\qquad + (-1)^{n+1}F(g^{-1}h_1g,\ldots,g^{-1}h_ng)\Big)\\
&\qquad = h_1.(g.F(g^{-1}h_2g,\ldots,g^{-1}h_{n+1}g))\\
&\qquad\qquad + \sum_{i=1}^{n}(-1)^ig.F(g^{-1}h_1g,\ldots,g^{-1}h_{i-1}g,g^{-1}h_ih_{i+1}g,g^{-1}h_{i+1}g,\ldots,g^{-1}h_{n+1}g)\\
&\qquad\qquad\qquad + (-1)^{n+1}g.F(g^{-1}h_1g,\ldots,g^{-1}h_ng)\\
&\qquad = h_1.(g.F)(h_2,\ldots,h_{n+1}) + \sum_{i=1}^{n}(-1)^i(g.F)(h_1,\ldots,h_{i-1},h_ih_{i+1},h_{i+1},\ldots,h_{n+1})\\
&\qquad\qquad\qquad + (-1)^{n+1}(g.F)(h_1,\ldots,h_n)\\
&\qquad = d_H(g.F)(h_1,\ldots,h_{n+1}).
\end{aligned}$$

D'où une structure de G–module sur les $H^n(H,E)$ si, pour $F \in Z^n(H,E)$, on pose :

$$g.[F] = [g.F].$$

L'ensemble des n–classes de cohomologie invariantes pour cette action est naturellement noté $H^n(H,E)^G$.

Remarque 1.3.9. Dans le cas particulier où $H = G$, on obtient une action de G sur sa cohomologie $H^*(G,E)$.

Lemme 1.3.10. *Soit E un G–module. Alors pour tout 1–cocycle $F : G \to E$:*

$$g.F - F = d_G(F(g)).$$

Preuve. Pour tous $g, g' \in G$, on a :

$$\begin{aligned}
g.F(g^{-1}g'g) - F(g') &= g.\big(F(g^{-1}) + g^{-1}.F(g'g)\big) - F(g')\\
&= g.F(g^{-1}) + F(g'g) - F(g')\\
&= g.F(g^{-1}) + g'.F(g)\\
&= g'.F(g) - F(g)\\
&\qquad\qquad \text{car } 0 = F(1_G) = F(gg^{-1}) = F(g) + g.F(g^{-1}).
\end{aligned}$$

□

Proposition 1.3.11. *Pour tout $n \geq 0$, $res(H^n(G,E)) \subset H^n(H,E)^G$.*

Preuve. Pour $n = 0$, on a $H^0(G,E) \simeq E^G$, $H^0(H,E) \simeq E^H$, et via ces isomorphismes, la restriction de l'application *res* à E^G est tout simplement l'injection canonique de E^G dans E^H, et l'action de G sur E^H n'est autre que la restriction de l'action de G sur E (on vérifie sans peine que E^H est stable dans E sous l'action de G). Ceci étant dit, on a :

$$res(E^G) = E^G = (E^H)^G.$$

Pour $n \geq 1$, $F \in Z^n(G,E)$ et $g \in G$, on considère $F_g : H^{n-1} \to E$ définie par :

$$F_g(h_1,\dots,h_{n-1}) = \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i F(h_1,\dots,h_i,g,g^{-1}h_{i+1}g,\dots,g^{-1}h_{n-1}g).$$

On vérifie que $d_H F_g = g.F_{|H} - F_{|H}$, si bien que $g.[F_{|H}] = [g.F_{|H}] = [F_{|H}]$, et donc

$$res[F] \in H(H,E)^G.$$

On peut trouver une preuve détaillée de ceci dans [Gui80], pages 38-39, mais pour la suite, seul le cas $n = 1$ sera utile, et celui-ci découle immédiatement du lemme 1.3.10. □

Remarque 1.3.12. Lorsque $H = G$, $res = \mathrm{Id}_{H^*(G,E)}$ et on en conlut par la proposition précédente que l'action de G sur $H^*(G,E)$ est triviale.

1.3.3 Où l'on se permet de transgresser

Soient $F \in Z^1(H,E)$ tel que $[F] \in H^1(H,E)^G$ et $s : Q \to G$ une section (ensembliste) de π dans l'extension (1.3.4) telle que $s(1_Q) = 1_G$ (ce qui est toujours possible puisque $\pi(1_G) = 1_Q$). Alors pour tout $q \in Q$, $s(q).[F] = [F]$ *i.e.* $s(q).F - F \in B^1(H,E)$, d'où :

$$\forall\, q \in Q,\ \exists\, \eta(q) \in E,\ s(q).F - F = d_H(\eta(q)). \tag{1.3.9}$$

On pourra en outre convenir que $\eta(1_Q) = 0$ puisque $s(1_Q).F - F = 0$.

Les applications $F \in Z^1(H,E)$, $s : Q \to G$ et $\eta : Q \to E$ étant ainsi fixées, on pose pour tout $g \in G$:

$$\xi(g) = F(gs(\dot{g})^{-1}) + (gs(\dot{g})^{-1}).\eta(\dot{g}).$$

Proposition 1.3.13. *L'application $\xi : G \to E$ définie ci-dessus vérifie les propriétés suivantes :*

i) $\forall\, h \in H,\ \xi(h) = F(h)$;

ii) $\forall\, q \in Q,\ \xi(s(q)) = \eta(q)$;

iii) $\forall\, g \in G,\ g.F - F = d_H(\xi(g))$;

iv) $\forall\, g \in G,\ \forall\, h \in H,\ \xi(gh) = \xi(g) + g.F(h)$.

Preuve. Les propriétés i) et ii) sont immédiates étant donné que $s(1_Q) = 1_G$, $\eta(1_Q) = 0$ et $F(1_G) = 0$. Pour ce qui est de iii), on a :

$$\begin{aligned} d_H(\xi(g)) &= d_H(F(gs(\dot{g})^{-1})) + (gs(\dot{g})^{-1}).d_H(\eta(\dot{g})) \\ &= (gs(\dot{g})^{-1}).F - F + (gs(\dot{g})^{-1}).(s(\dot{g}).F - F) \\ &\qquad\qquad \text{d'après le lemme 1.3.10 et (1.3.9)} \\ &= g.F - F. \end{aligned}$$

Enfin, en ce qui concerne iv) :

$$\begin{aligned}\xi(gh) &= F(ghs(\dot{g})^{-1}) + (ghs(\dot{g})^{-1}).\eta(\dot{g}) \\ &= F(ghg^{-1}gs(\dot{g})^{-1}) + (ghg^{-1}).((gs(\dot{g})^{-1}).\eta(\dot{g})).\end{aligned}$$

Or

$$F(ghg^{-1}gs(\dot{g})^{-1}) = F(ghg^{-1}) + (ghg^{-1}).F(gs(\dot{g})^{-1})$$

et

$$(gs(\dot{g})^{-1}).\eta(\dot{g}) = \xi(g) - F(gs(\dot{g})^{-1}),$$

d'où

$$\begin{aligned}\xi(gh) &= F(ghg^{-1}) + (ghg^{-1}).\xi(g) \\ &= F(ghg^{-1}) + d_H(\xi(g))(ghg^{-1}) + \xi(g) \\ &= F(ghg^{-1}) + (g.F - F)(ghg^{-1}) + \xi(g) \text{ d'après iii)} \\ &= g.F(h) + \xi(g).\end{aligned}$$

□

Compte tenu de tout ceci, on définit $\chi : Q^2 \to E$ par :

$$\begin{aligned}\chi(q,q') &= d_G\xi(s(q),s(q')) \\ &= s(q).\eta(q') - \xi(s(q)s(q')) + \eta(q).\end{aligned}$$

Proposition 1.3.14.

i) *χ prend ses valeurs dans E^H ;*

ii) *$\chi \in Z^2(Q, E^H)$;*

iii) *La classe de χ dans $H^2(Q, E^H)$ ne dépend que de celle de F dans $H^1(H, E)$.*

Preuve. i) On a, pour tous $h \in H$ et $q, q' \in Q$:

$$\begin{aligned}(hs(q)).\eta(q') &= s(q).((s(q)^{-1}hs(q)).\eta(q')) \\ &= s(q).\left(\eta(q') + s(q').F(s(q')^{-1}s(q)^{-1}hs(q)s(q')) - F(s(q)^{-1}hs(q))\right) \\ &\qquad \text{d'après (1.3.9)} \\ &= s(q).\eta(q') + (s(q)s(q')).F(((s(q)s(q'))^{-1}hs(q)s(q')) - s(q).F(s(q)^{-1}hs(q)).\end{aligned}$$

Or, selon (1.3.9) :

$$s(q).F(s(q)^{-1}hs(q)) = F(h) + h.\eta(q) - \eta(q),$$

et d'après la proposition 1.3.13 iii) :

$$(s(q)s(q')).F(((s(q)s(q'))^{-1}hs(q)s(q')) = F(h) + h.\xi(s(q)s(q')) - \xi(s(q)s(q')).$$

D'où

$$(hs(q)).\eta(q') = s(q).\eta(q') + h.\xi(s(q)s(q')) - \xi(s(q)s(q')) - h.\eta(q) + \eta(q),$$

c'est-à-dire :

$$h.\chi(q,q') = \chi(q,q').$$

ii) Soient $g_1, g_2 \in G$ et $h_1 = {g_1}^{-1}s(\dot{g_1})$, $h_2 = {g_2}^{-1}s(\dot{g_2})$ de sorte que

$$s(\dot{g_1}) = g_1h_1 \text{ et } s(\dot{g_2}) = g_2h_2.$$

Alors :

$$d_G\xi(s(\dot{g_1}), s(\dot{g_2})) = d_G\xi(g_1h_1, g_2h_2) = (g_1h_1).\xi(g_2h_2) - \xi(g_1h_1g_2h_2) + \xi(g_1h_1).$$

Aussi :

$$(g_1h_1).\xi(g_2h_2) = (g_1h_1).(\xi(g_2) + g_2.F(h_2)) = (g_1h_1).\xi(g_2) + (g_1h_1g_2).F(h_2)\ ;$$

$$\begin{aligned}
\xi(g_1h_1g_2h_2) &= \xi(g_1g_2{g_2}^{-1}h_1g_2h_2) \\
&= \xi(g_1g_2) + (g_1g_2).F({g_2}^{-1}h_1g_2h_2) \\
&= \xi(g_1g_2) + (g_1g_2).(F({g_2}^{-1}h_1g_2) + ({g_2}^{-1}h_1g_2).F(h_2)) \\
&= \xi(g_1g_2) + g_1.(g_2.F({g_2}^{-1}h_1g_2)) + (g_1h_1g_2).F(h_2) \\
&= \xi(g_1g_2) + g_1.(F(h_1) + h_1.\xi(g_2) - \xi(g_2)) + (g_1h_1g_2).F(h_2) \\
&= \xi(g_1g_2) - g_1.\xi(g_2) + g_1.F(h_1) + (g_1h_1).\xi(g_2) + (g_1h_1g_2).F(h_2)\ ;
\end{aligned}$$

$$\xi(g_1h_1) = \xi(g_1) + g_1.F(h_1).$$

D'où

$$d_G\xi(s(\dot{g_1}), s(\dot{g_2})) = g_1.\xi(g_2) - \xi(g_1g_2) + \xi(g_1) = d_G\xi(g_1, g_2).$$

Ainsi $j \circ \chi \circ \pi_2 = d_G\xi$, et donc

$$j \circ d_Q\chi \circ \pi_3 = d_G(j \circ \chi \circ \pi_2) = d_G^2\xi = 0,$$

d'où finalement $d_Q\chi = 0$.

iii) Consisérons dans un premier temps la section s et le cocycle $F : H \to G$ fixés. Si deux applications $\eta, \eta' : Q \to E$, donnant respectivement naissance à ξ et ξ', puis χ et χ', sont telles que

$$\forall\ q \in Q,\ \ s(q).F - F = d_H(\eta(q)) = d_H(\eta'(q)),$$

alors l'application $\eta - \eta'$ prend ses valeurs dans E^H, et il s'ensuit $\xi - \xi' = j \circ (\eta - \eta') \circ \pi$. D'où

$$j \circ (\chi - \chi') \circ \pi_2 = d_G(\xi - \xi') = d_G(j \circ (\eta - \eta') \circ \pi) = j \circ d_Q(\eta - \eta') \circ \pi_2.$$

Ainsi $\chi - \chi' = d_Q(\eta - \eta')$ et donc $[\chi] = [\chi']$.

Si maintenant, toujours avec s fixée, F et F' dans $Z^1(H, E)$ sont tels que $[F] = [F']$ dans $H^1(H, E)^G$, alors $F' = F + d_Hx$ avec $x \in E$. Soient η et η' vérifiant (1.3.9) respectivement pour F et F', et donnant respectivement naissance à ξ et ξ'. D'après ce qui précède, pour n'importe quelle autre application η'_0 associée à F' qui convient, on aura $[\chi'] = [\chi'_0]$. Prenons $\eta'_0 = \eta + d_Gx \circ s$; on a bien pour tout $q \in Q$:

$$\begin{aligned}
s(q).F' - F' &= s(q).(F + d_Hx) - (F + d_Hx) \\
&= s(q).F - F + s(q).d_Hx - d_Hx \\
&= d_H(\eta(q)) + d_H(s(q).x - x) \\
&= d_H((\eta + d_Gx \circ s)(q)) \\
&= d_H(\eta'_0(q)),
\end{aligned}$$

et bien sûr $\eta'_0(1_Q) = 0$. Mais alors

$$\begin{aligned}\xi'_0(g) &= F'(gs(\dot{g})^{-1}) + (gs(\dot{g})^{-1}).\eta'_0(\dot{g}) \\ &= F(gs(\dot{g})^{-1}) + d_H x(gs(\dot{g})^{-1}) + (gs(\dot{g})^{-1}).(\eta(\dot{g}) + d_G x(s(\dot{g}))) \\ &= \xi(g) + (gs(\dot{g})^{-1}).x - x + (gs(\dot{g})^{-1}).(s(\dot{g}).x - x) \\ &= \xi(g) + d_G x(g).\end{aligned}$$

Ainsi $\xi'_0 - \xi = d_G x$, d'où $\chi'_0 - \chi = d_G^2 x = 0$ et $[\chi'] = [\chi'_0] = [\chi]$.

Il ne reste plus qu'à montrer que, F étant fixé, $[\chi]$ ne dépend pas de la section s choisie. Soient η et η' vérifiant (1.3.9) respectivement pour s et s' et donnant naissance respectivement à ξ et ξ'. D'après la proposition 1.3.13 iii), on peut considérer $\eta'_0 = \xi \circ s'$ qui donnera χ'_0 tel que $[\chi'_0] = [\chi']$, et on a :

$$\begin{aligned}\xi'_0(g) &= F(gs'(\dot{g})^{-1}) + (gs'(\dot{g})^{-1}).\xi(s'(\dot{g})) \\ &= F(gs(\dot{g})^{-1}s(\dot{g})s'(\dot{g})^{-1}) + (gs'(\dot{g})^{-1}).(F(s'(\dot{g})s(\dot{g})^{-1}) + (s'(\dot{g})s(\dot{g})^{-1}).\eta(\dot{g})) \\ &= \xi(g) + (gs(\dot{g})^{-1}).F(s(\dot{g})s'(\dot{g})^{-1}) + (gs'(\dot{g})^{-1}).F(s'(\dot{g})s(\dot{g})^{-1}) \\ &= \xi(g) + (gs(\dot{g})^{-1}).(F(s(\dot{g})s'(\dot{g})^{-1}) + (s(\dot{g})s'(\dot{g})^{-1}).F(s'(\dot{g})s(\dot{g})^{-1})) \\ &= \xi(g) + (gs(\dot{g})^{-1}).(F(s(\dot{g})s'(\dot{g})^{-1}) + F(1_G) - F(s(\dot{g})s'(\dot{g})^{-1})) \\ &= \xi(g).\end{aligned}$$

Par conséquent $\chi'_0 = \chi$, et donc $[\chi'] = [\chi]$. □

Définition 1.3.15. *On appelle* ***transgression*** *l'application $\mathcal{T}$ de $H^1(H,E)^G$ dans $H^2(Q,E^H)$ définie par $\mathcal{T}[F] = [\chi]$; on vérifie aisément que c'est un morphisme de $H^1(H,E)^G$ dans $H^2(Q,E^H)$.*

Théorème 1.3.16. *La suite suivante, dite de* ***Hochschild-Serre****, est exacte :*

$$0 \longrightarrow H^1(Q,E^H) \xrightarrow{inf} H^1(G,E) \xrightarrow{res} H^1(H,E)^G \xrightarrow{\mathcal{T}} H^2(Q,E^H) \xrightarrow{inf} H^2(G,E).$$

Preuve. Il ne reste à établir que l'exactitude en $H^1(G,E)^G$ et en $H^2(Q,E^H)$.

i) Exactitude en $H^1(G,E)^G$:

Soit $F \in Z^1(G,E)$ tel que $[F] \in \operatorname{Im} res$; alors il existe $\hat{F} \in Z^1(G,E)$ tel que $[F] = [\hat{F}_{|H}]$. Or, pour déterminer χ tel que $\mathcal{T}[\hat{F}_{|H}] = [\chi]$, on peut, d'après le lemme 1.3.10, prendre $\eta = \hat{F} \circ s$. Mais alors $\xi = \hat{F}$ et donc $\chi = 0$, d'où $\mathcal{T}[F] = \mathcal{T}[\hat{F}_{|H}] = 0$.

Réciproquement, si $F \in Z^1(H,E)$ est tel que $[F] \in \operatorname{Ker} \mathcal{T}$, il existe $\zeta \in C^1(Q,E^H)$ tel que $\chi = d_Q\zeta$, et on a :

$$d_G\xi = j \circ \chi \circ \pi_2 = j \circ d_Q\zeta \circ \pi_2 = d_G(j \circ \zeta \circ \pi),$$

et si on pose $\hat{F} = \xi - j \circ \zeta \circ \pi$, alors $\hat{F} \in Z^1(G,E)$, $\hat{F}_{|H} = F$, et donc $[F] = res[\hat{F}]$.

ii) Exactitude en $H^2(Q,E^H)$:

Soit $[\chi] = \mathcal{T}[F] \in \operatorname{Im} \mathcal{T}$. Alors $inf[\chi] = [d_G\xi] = 0$.

Réciproquement, si $\chi \in Z^2(Q,E^H)$ est tel que $inf[\chi] = 0$, il existe $\lambda \in C^1(G,E)$ tel que

$j \circ \chi \circ \pi_2 = d_G\lambda$. Quitte à remplacer χ par $\chi + d_Q\kappa$, avec $\kappa(q) = -\chi(1, q)$, on peut en outre supposer que $\chi(1_Q, 1_Q) = 0$. Mais alors χ est normalisé puisque $d_Q\chi(1_Q, 1_Q, q) = 0$ et $d_Q\chi(q, 1_Q, 1_Q) = 0$ donnent respectivement :

$$\chi(1_Q, q) = \chi(1_Q, 1_Q) = 0 \text{ et } \chi(q, 1_Q) = q.\chi(1_Q, 1_Q) = 0.$$

Posons $F = \lambda_{|H}$; alors $F \in Z^1(H, E)$ car

$$d_H F(h, h') = (d_G\lambda)_{|H^2}(h, h') = \chi(1_Q, 1_Q) = 0.$$

Par ailleurs, pour tous $g \in G$ et $h \in H$, on a :

$$g.\lambda(g^{-1}hg) - \lambda(hg) + \lambda(g) = d_G\lambda(g, g^{-1}hg) = \chi(\dot{g}, 1_Q) = 0,$$

et donc

$$\begin{aligned} g.\lambda(g^{-1}hg) - \lambda(h) &= -\lambda(g) + \lambda(hg) - \lambda(h) \\ &= h.\lambda(g) - \lambda(g) - (h.\lambda(g) - \lambda(hg) + \lambda(h)) \\ &= d_H(\lambda(g)) - d_G\lambda(h, g) \\ &= d_H(\lambda(g)) - \chi(1_Q, \dot{g}) \\ &= d_H(\lambda(g)). \end{aligned}$$

Ainsi $g.F - F = d_H(\lambda(g))$ pour tout $g \in G$, donc $[F] \in H^1(H, E)^G$, et de plus, une section s étant fixée, on peut poser $\eta = \lambda \circ s$. Mais alors $\xi = \lambda$ et

$$d_G\xi(s(g_1), s(g_2)) = d_G\lambda(s(g_1), s(g_2)) = \chi(g_1, g_2).$$

D'où $[\chi] = \mathcal{T}[F]$. $\square$

1.3.4 Cas particuliers

i) Si H agit trivialement sur E, alors $H^1(H, E) \simeq \mathrm{Hom}(H, E)$ (*cf* proposition 1.2.4) et $H^1(H, E)^G \simeq \mathrm{Hom}_G(H, E)$, ensemble des morphismes de G–modules de H dans E, c'est-à-dire l'ensemble des morphismes de H dans E tels que

$$\forall\ g \in G,\ \forall\ h \in H,\ \ F(ghg^{-1}) = g.F(h).$$

Aussi, pour tout $F \in \mathrm{Hom}_G(H, E)$, $g.F - F = 0$ pour tout $g \in G$, et on peut donc prendre $\eta = 0$. Par suite $\xi(g) = F(gs(\dot{g})^{-1})$ et

$$\chi(q, q') = -\xi(s(q)s(q')) = -F(s(q)s(q')s(qq')^{-1}).$$

ii) Si G est un produit semi-direct $H \rtimes_\phi Q$, alors on a une section multiplicative s, et pour tout F :

$$\chi(q, q') = s(q).\eta(q') - \eta(qq') + \eta(q).$$

Si $\mathcal{S}$ est une section de l'application $d_H : E \to B^1(H, E)$ telle que $\mathcal{S}(0) = 0$, alors on peut prendre $\eta(q) = \mathcal{S}(s(q).F - F)$, et donc

$$\chi(q, q') = s(q).\mathcal{S}(s(q').F - F) - \mathcal{S}(s(qq').F - F) + \mathcal{S}(s(q).F - F).$$

iii) Si on est à la fois dans les cas i) et ii), on a $\chi = 0$ pour tout $F \in \mathrm{Hom}_G(H, E)$, d'où $\mathcal{T} = 0$ et la suite exacte :

$$0 \longrightarrow H^1(Q, E) \xrightarrow{inf} H^1(G, E) \xrightarrow{res} \mathrm{Hom}_G(H, E) \longrightarrow 0. \tag{1.3.10}$$

1.3.5 Exemple

Considérons à nouveau le groupe $G = \mathbb{Z}^n \rtimes_A \mathbb{Z}$ de l'exemple ii) page 22, en supposant de plus que 1 et -1 ne sont pas valeurs propres de la matrice $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$. Ce groupe G est engendré par un système de trois générateurs : $\tau_1 = ((1,0),0)$, $\tau_2 = ((0,1),0)$ générateurs de $H \simeq \mathbb{Z}^2$, et $\sigma = ((0,0),1)$ générateur de $Q \simeq \mathbb{Z}$ vérifiant les relations

$$\sigma\tau_1\sigma^{-1} = {\tau_1}^a{\tau_2}^c,\ \ \sigma\tau_2\sigma^{-1} = {\tau_1}^b{\tau_2}^d \text{ et } \tau_1\tau_2 = \tau_2\tau_1.$$

On considère l'action suivante de G sur $E = \mathbb{R}^2$ par le biais de sa seule composante sur $\mathbb{Z}$:

$$((p,q),k).(x,y) = A^k(x,y). \tag{1.3.11}$$

On se trouve dans la situation iii) décrite ci-dessus, et on a donc la suite exacte (1.3.10), avec $H^1(Q,E) \simeq \mathrm{Coker}(A - \mathrm{Id}_E) = 0$; d'où $\mathrm{Ker}\, res = \mathrm{Im}\, inf = 0$ et

$$H^1(G,E) \simeq \mathrm{Im}\, res = \mathrm{Hom}_G(H,E).$$

Aussi, l'ensemble $\mathrm{Hom}(H,E)$ des morphismes de groupes de H dans E est isomorphe en tant que $\mathbb{R}$–espace vectoriel à l'ensemble $\mathrm{M}(2,\mathbb{R})$ des matrices réelles 2×2 via l'application $f \mapsto \left(f_j^i\right)_{1\le i,j\le 2}$, où $f(\tau_j) = (\tau_j^1, \tau_j^2)$, $j = 1,2$, dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$, et on a :

$$\begin{aligned} f \in \mathrm{Hom}_G(H,E) &\Leftrightarrow f(\sigma\tau_j\sigma^{-1}) = \sigma.f(\tau_j),\ \ j = 1,2 \\ &\Leftrightarrow \left(f_j^i\right) A = A\left(f_j^i\right) \\ &\Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & c & -b & 0 \\ b & d-a & 0 & -b \\ -c & 0 & a-d & c \\ 0 & -c & b & 0 \end{pmatrix}}_{M} \begin{pmatrix} f_1^1 \\ f_2^1 \\ f_1^2 \\ f_2^2 \end{pmatrix} = 0. \end{aligned}$$

Vu les conditions imposées sur la matrice A, ni b ni c ne peuvent être nuls ; on constate alors aisément que la matrice M est de rang 2, donc que son noyau est de dimension 2, et que les vecteurs $(1,0,0,1)$ et $(0,b,c,d-a)$ en constituent une base. Ainsi, l'espace $H^1(G,E)$ est de dimension 2, et on peut en prendre pour base $([F_0],[F_1])$, avec :

$$F_0((p,q),k) = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \text{ et } F_1((p,q),k) = (A - a\,\mathrm{Id})\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}.$$

1.4 Et pour aller plus loin : la suite spectrale de Lyndon-Hochschild-Serre

Comme nous venons de le voir, la suite exacte de Hochschild-Serre est un moyen d'accès au H^1 d'une extension de groupes. On peut dans certains cas tenter de la généraliser pour obtenir les groupes de cohomologie suivants, mais Serre lui-même ([Ser68], remarque au bas de la page 126) pense que c'est "assez pénible". En fait, cette suite exacte peut-être vue comme conséquence d'une suite spectrale dite de **Lyndon-Hochschild-Serre** (dans [HS53], Hochschild et Serre reformulent dans le langage des suites spectrales les relations entre la cohomologie d'un groupe et celle d'un sous-groupe normal découverte plus tôt par Lyndon [Lyn46]) qui relie les cohomologies $H^*(G,E)$, $H^*(H,E)$ et $H^*(Q,E^H)$. Nous allons dans ce qui suit présenter rapidement cette suite spectrale (le lecteur intéressé par les preuves et les détails pouvant notamment consulter [Gui80], pages 50-55 et 253-256 et évidemment [HS53]) afin de l'utiliser ensuite pour le calcul de toute la cohomologie $H^*(G,E)$ de l'exemple 1.3.5.

1.4.1 Généralités à propos des suites spectrales

Une **suite spectrale** est une suite $(E_r, d_r)_{r\in\mathbb{N}}$ de modules $E_r = \bigoplus_{p,q\in\mathbb{Z}} E_r^{p,q}$ et d'endomorphismes d_r de E_r de carré nul vérifiant :

- $E_r^{p,q} = 0$ si $p < 0$ ou $q < 0$;
- $d_r E_r^{p,q} \subset E_r^{p+r,q-r+1}$;
- $E_{r+1}^{p,q} \simeq \operatorname{Ker} d_r^{p,q} / \operatorname{Im} d_r^{p-r,q+r-1}$ où $d_r^{p,q} = d_{r|E_r^{p,q}}$.

Remarque 1.4.1. La première de ces conditions définit à vrai dire les suites spectrales dites **de premier quadrant** (là où les $E_r^{p,q}$ ne sont pas nécessairement nuls) ; leur définition est plus simple et elles suffiront à l'utilisation qu'on veut en faire.

Pour chaque entier r, on considère le complexe

$$\cdots \xrightarrow{d_r} E_r \xrightarrow{d_r} E_r \xrightarrow{d_r} \cdots$$

dont la cohomologie est constante, et les sous-complexes

$$\cdots \xrightarrow{d_r^{p-r,q+r-1}} E_r^{p,q} \xrightarrow{d_r^{p,q}} E_r^{p+r,q-r+1} \xrightarrow{d_r^{p+2r,q-2r+2}} \cdots$$

Ces sous-complexes sont finis, au sens où ils ne comportent qu'un nombre fini de termes non nuls, sauf peut-être pour $r = 0$ et $r = 1$ pour lesquels ils sont respectivement de la forme

$$0 \longrightarrow E_0^{p,0} \longrightarrow E_0^{p,1} \longrightarrow E_0^{p,2} \longrightarrow \cdots$$

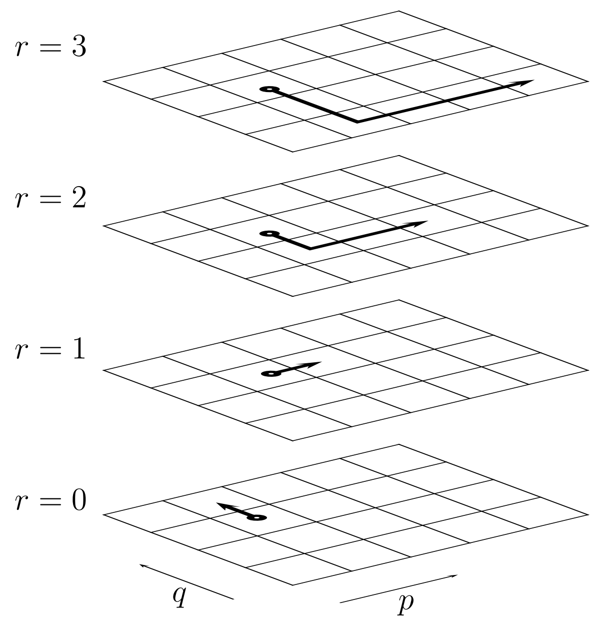
et

$$0 \longrightarrow E_1^{0,q} \longrightarrow E_1^{1,q} \longrightarrow E_1^{2,q} \longrightarrow \cdots$$

On pose $Z_r = \operatorname{Ker} d_r$, $B_r = \operatorname{Im} d_r$, $Z_r^{p,q} = \operatorname{Ker} d_r^{p,q}$ et $B_r^{p,q} = \operatorname{Im} d_r^{p-r,q+r-1}$; on a donc :

$$E_{r+1} = \bigoplus_{p,q\in\mathbb{Z}} E_{r+1}^{p,q} \simeq \bigoplus_{p,q\in\mathbb{Z}} Z_r^{p,q}/B_r^{p,q} \simeq Z_r/B_r.$$

Une suite spectrale peut en fait être visualisée comme un empilement de feuilles quadrillées E_r dont les cases sont repérées par $(p,q) \in \mathbb{Z}^2$. Sur chacune de ces feuilles, le déplacement effectué pour aller d'une case à une autre en empruntant d_r est une généralisation du déplacement d'un cavalier sur un échiquier. La feuille E_{r+1} représente la cohomologie de la feuille E_r, le module de cohomologie associé à chaque case $E_r^{p,q}$ dans l'unique sous-complexe auquel elle appartient se trouvant sur la case $E_{r+1}^{p,q}$ située au-dessus d'elle. On peut voir que pour tous p,q fixés, il existe un rang $r_{p,q}$, à partir duquel la suite $(E_r^{p,q})_{r\in\mathbb{N}}$ devient stationnaire, avec une valeur qu'on note $E_\infty^{p,q}$. On dit que $E_\infty = \bigoplus_{p,q\in\mathbb{Z}} E_\infty^{p,q}$ est la **feuille à l'infini** de la suite spectrale.



On dit qu'un complexe différentiel

$$K : 0 \longrightarrow K^0 \xrightarrow{d_0} K^1 \xrightarrow{d_1} \cdots \xrightarrow{d_{p-1}} K^p \xrightarrow{d_p} K^{p+1} \xrightarrow{d_{p+1}} \cdots$$

est **filtré** lorsqu'on s'est donné pour tout $p \in \mathbb{N}$ une **filtration** de K^p, c'est-à-dire une suite de sous-modules de K^p :

$$K^p = K_0^p \supset K_1^p \supset \ldots \supset K_p^p \supset K_{p+1}^p = 0,$$

vérifiant par ailleurs $d_p(K_q^p) \subset K_q^{p+1}$ pour tout $q \in \{0, \ldots, p+1\}$. On obtient ainsi pour tout $q \in \mathbb{N}$ un complexe K_q :

$$K_q : 0 \longrightarrow K_q^0 \xrightarrow{d_0} K_q^1 \xrightarrow{d_1} \cdots \xrightarrow{d_{p-1}} K_q^p \xrightarrow{d_p} K_q^{p+1} \xrightarrow{d_{p+1}} \cdots$$

avec $K_0 = K$ et K_q sous-complexe de K_{q+1}. Dans ces conditions, on peut construire pour tout $p \in \mathbb{N}$ une **filtration** de $H^p(K)$:

$$H^p(K) = H^p(K)_0 \supset H^p(K)_1 \supset \ldots \supset H^p(K)_p \supset H^p(K)_{p+1} = 0,$$

et une suite spectrale (E_r) de sorte que

$$E_0^{p,q} = K_p^{p+q}/K_{p+1}^{p+q} \ ;$$
$$E_\infty^{p,q} \simeq H^{p+q}(K)_p/H^{p+q}(A)_{p+1}.$$

On dit alors que la suite spectrale (E_r) **converge** vers la cohomologie $H^*(K)$ de K, et on note :

$$E_2^{p,q} \Longrightarrow H^{p+q}(K).$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\bigoplus_{p+q=n} E_\infty^{p,q} \simeq \bigoplus_{p+q=n} H^{p+q}(K)_p / H^{p+q}(K)_{p+1}. \tag{1.4.1}$$

De façon générale, une suite spectrale convergeant vers $H^*(K)$ permet d'obtenir des suites exactes reliant les termes à l'infini à la cohomologie de K. Dans le cas particulier où le complexe gradué K est un espace vectoriel, en considérant pour chaque entier n une base de $H^n(K)$ adaptée à sa filtration, on déduit de (1.4.1) :

$$H^n(K) \simeq \bigoplus_{p+q=n} E_\infty^{p,q}. \tag{1.4.2}$$

1.4.2 La suite spectrale de Lyndon-Hochschild-Serre

Nous avons vu dans la section 1.3.2 que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'action de G sur $C^n(H,E)$ définie par :

$$(g.F)(h_1,\dots,h_n) = g.F(g^{-1}h_1g,\dots,g^{-1}h_ng)$$

induit une action de G sur $H^n(H,E)$. Or, par le biais de cette action, H agit trivialement sur $H^n(H,E)$. On vérifie en effet que, pour tout $h \in H$ et tout n–cocycle F, $h.F - F = d_H F_h$ où

$$F_h(h_1,\dots,h_{n-1}) = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i F(h_1,\dots,h_i,h,h^{-1}h_{i+1}h,\dots,h^{-1}h_{n-1}h).$$

D'où une structure de Q–module sur $H^n(H,E)$ par passage au quotient, en posant pour tout $g \in G$:

$$\dot{g}.[F] = [g.F]. \tag{1.4.3}$$

Posons, pour tous $p,q \in \mathbb{N}$:

$$E_2^{p,q} = H^p(Q, H^q(H,E)).$$

On montre que les termes $E_2^{p,q}$ ainsi définis forment le terme E_2 d'une suite spectrale, dite de **Lyndon-Hochschild-Serre** et que cette suite spectrale converge vers $H^*(G,E)$:

$$E_2^{p,q} \Longrightarrow H^{p+q}(G,E).$$

1.4.3 Un premier exemple d'utilisation

La suite spectrale de Lyndon-Hochschild-Serre nous permet de prouver aisément la proposition suivante :

Proposition 1.4.2. *Si V est un $\mathbb{Z}^n$–module vectoriel, $n \geq 1$, sur lequel $\mathbb{Z}^n$ agit trivialement, alors :*

$$\forall\ k \in \mathbb{N}\ , \quad H^k(\mathbb{Z}^n, V) \simeq V^{\binom{n}{k}}\ ; \tag{1.4.4}$$

où l'on convient que $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$ est nul si $k > n$.

Preuve. Procédons par récurrence sur n. Il découle de la proposition 1.2.7 que (1.4.4) est vérifié pour $n = 1$. Par ailleurs $\mathbb{Z}^{n+1}$ peut être vu comme le produit semi-direct $\mathbb{Z}^n \rtimes_\phi \mathbb{Z}$, où pour tout $r \in \mathbb{Z}$, $\phi(r) = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}^n}$. La suite spectrale associée à cette extension est définie par :

$$E_2^{p,q} = H^p(\mathbb{Z}, H^q(\mathbb{Z}^n, V))$$

avec des actions triviales de $\mathbb{Z}$ et de $\mathbb{Z}^n$. Par conséquent, si (1.4.4) est vérifié au rang n, on a :

$$E_2^{p,q} \simeq H^p(\mathbb{Z}, V^{\binom{n}{q}}) \simeq \begin{cases} 0 & \text{si } p \geq 2 \\ V^{\binom{n}{q}} & \text{sinon} \end{cases}$$

Comme seules les colonnes $p = 0$ et $p = 1$ du terme E_2 ne sont pas entièrement nulles, on a $E_\infty^{p,q} = E_2^{p,q}$ pour tous p, q (car pour $r \geq 2$, le complexe auquel appartient $E_r^{p,q}$ est réduit à $0 \to E_r^{p,q} \to 0$). Il est clair que $H^0(\mathbb{Z}^{n+1}, V) = V = V^{\binom{n+1}{0}}$; et lorsque $n \geq 1$, on a d'après (1.4.2) :

$$H^k(\mathbb{Z}^{n+1}, V) \simeq \bigoplus_{p+q=k} E_2^{p,q} = E_2^{0,k} \oplus E_2^{1,k-1} \simeq V^{\binom{n}{k}} \oplus V^{\binom{n}{k-1}} \simeq V^{\binom{n+1}{k}}.$$

□

1.4.4 Un exemple un peu moins "trivial"

Reprenons l'exemple abordé en 1.3.5. La suite spectrale de Lyndon-Hochschild-Serre associée est définie par :

$$E_2^{p,q} = H^p(Q, H^q(H, E)) = H^p(\mathbb{Z}, H^q(\mathbb{Z}^2, E))$$

où $\mathbb{Z}^2$ agit trivialement sur $E = \mathbb{R}^2$, et donc suivant la proposition 1.4.2 :

$$E_2^{p,q} \simeq H^p(\mathbb{Z}, E^{\binom{2}{q}}),$$

où l'action de $\mathbb{Z}$ sur $E^{\binom{2}{q}}$ provient par transport de l'action (1.4.3). Comme dans l'exemple précédent, les colonnes $p \geq 2$ de la feuille E_2 sont nulles, si bien que $E_\infty^{p,q} = E_2^{p,q}$. De plus $E^{\binom{2}{q}} = 0$, et donc $E_2^{p,q} = 0$ pour $q \geq 3$, de sorte que finalement la feuille E_2 ne comporte pas plus de six cases non nulles :

q			
3			
2	$E_2^{0,2}$	$E_2^{1,2}$	
1	$E_2^{0,1}$	$E_2^{1,1}$	
0	$E_2^{0,0}$	$E_2^{1,0}$	
	0	1	2 p

- Les cases $E_2^{0,0}$ et $E_2^{1,0}$:

On a $E_2^{0,0} = H^0(\mathbb{Z}, E)$ et $E_2^{1,0} = H^1(\mathbb{Z}, E)$ où l'action de $\mathbb{Z}$ sur E est tout simplement l'action initialement donnée par (1.3.11), et pour cette action :

$$\begin{aligned} H^0(\mathbb{Z}, E) &\simeq \operatorname{Ker}(A - \operatorname{Id}_E) = 0 \ ; \\ H^1(\mathbb{Z}, E) &\simeq \operatorname{Coker}(A - \operatorname{Id}_E) = 0. \end{aligned}$$

- Les cases $E_2^{0,1}$ et $E_2^{1,1}$:

Puisque $\mathbb{Z}^2$ agit trivialement sur E, on a, d'après la proposition 1.2.4 page 19 et la section 1.3.5 :

$$H^1(\mathbb{Z}^2, E) \simeq \operatorname{Hom}(\mathbb{Z}^2, E) \simeq \mathrm{M}(2, \mathbb{R}),$$

et via ces isomorphismes, l'action de $\mathbb{Z}$ sur $H^1(\mathbb{Z}^2, E)$ devient celle de $\mathbb{Z}$ sur $\mathrm{M}(2, \mathbb{R})$ suivant la conjugaison par la matrice A :

$$1.B = \Theta(B) = ABA^{-1} \text{ pour tout } B \in \mathrm{M}(2, \mathbb{R}).$$

D'où

$$\begin{aligned} E_2^{0,1} &= H^0(\mathbb{Z}, H^1(\mathbb{Z}^2, E)) \simeq \operatorname{Ker}(\Theta - \operatorname{Id}_{\mathrm{M}(2,\mathbb{R})}) \ ; \\ E_2^{1,1} &= H^0(\mathbb{Z}, H^1(\mathbb{Z}^2, E)) \simeq \operatorname{Coker}(\Theta - \operatorname{Id}_{\mathrm{M}(2,\mathbb{R})}). \end{aligned}$$

Aussi, $\operatorname{Ker}(\Theta - \operatorname{Id}_{\mathrm{M}(2,\mathbb{R})})$ n'est rien d'autre que l'espace $\operatorname{Hom}_G(H, E)$ déteminé à la section 1.3.5 et dont on a montré qu'il est de dimension 2, d'où

$$E_2^{0,1} \simeq E_2^{1,1} \simeq \mathbb{R}^2.$$

- Les cases $E_2^{0,2}$ et $E_2^{1,2}$:

Tâchons de donner une représentation de l'espace $H^2(\mathbb{Z}^2, E)$ qui nous permettra de déterminer

$$E_2^{0,2} = H^0(\mathbb{Z}, H^2(\mathbb{Z}^2, E)) \text{ et } E_2^{1,2} = H^0(\mathbb{Z}, H^2(\mathbb{Z}^2, E)).$$

Un 2–cocycle inhomogène est une application $F : \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R}^2$ qui vérifie :

$$\forall\ u, v, w \in \mathbb{Z}^2 \ , \quad F(v, w) - F(u + v, w) + F(u, v + w) - F(u, v) = 0.$$

En particulier, les applications $\mathbb{Z}$–bilinéaires de $\mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ sont donc des cocycles. De plus, toute application $\mathbb{Z}$–bilinéaire symétrique F est le cobord de l'application $u \mapsto -\frac{1}{2}F(u, u)$, et une application $\mathbb{Z}$–bilinéaire alternée est un cobord si et seulement si elle est nulle. Par ailleurs toute application $\mathbb{Z}$–bilinéaire F s'écrit de manière unique comme la somme $F_s + F_a$ d'une application $\mathbb{Z}$–bilinéaire symétrique F_s et d'une application $\mathbb{Z}$–bilinéaire alternée F_a :

$$F(u, v) = \underbrace{\frac{1}{2}(F(u, v) + F(v, u))}_{F_s(u,v)} + \underbrace{\frac{1}{2}(F(u, v) - F(v, u))}_{F_a(u,v)},$$

si bien que $[F] = [F_a]$. On en déduit qu'une application $\mathbb{Z}$–bilinéaire est un cobord si et seulement si elle est symétrique. Désignons par $\mathcal{L}^2$ le $\mathbb{R}$–espace vectoriel des applications $\mathbb{Z}$–bilinéaires de $\mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2$ dans $\mathbb{R}^2$, et par $\mathcal{L}_s^2$ le sous-espace de $\mathcal{L}^2$ constitué des applications

$\mathbb{Z}$–bilinéaires symétriques. D'après ce qui précède, il existe un morphisme injectif ψ de $\mathcal{L}^2/\mathcal{L}^2_s$ dans $H^2(\mathbb{Z}^2,\mathbb{R}^2)$ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}^2 & \xrightarrow{\subset} & Z^2(\mathbb{Z}^2,E) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{L}^2/\mathcal{L}^2_s & \xrightarrow{\psi} & H^2(\mathbb{Z}^2,E) \end{array}$$

Aussi, l'espace vectoriel $\mathcal{L}^2$ est de dimension 8 : chaque élément de $\mathcal{L}^2$ est représentable par une matrice 2×2 à coefficients dans $\mathbb{R}^2$, et l'une de ses bases est constituée des applications qui à $(\left(\begin{smallmatrix} u_1 \\ u_2 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} v_1 \\ v_2 \end{smallmatrix}\right)) \in \mathbb{Z}^2\times\mathbb{Z}^2$ associent respectivement :

$$\left(\begin{smallmatrix} u_1v_1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} u_1v_2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} u_2v_1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} u_2v_2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ u_1v_1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ u_1v_2 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ u_2v_1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ u_2v_2 \end{smallmatrix}\right).$$

De même, l'espace $\mathcal{L}^2_s$ est de dimension 6 (chacun de ses éléments peut être représenté par une matrice 2×2 à coefficients dans $\mathbb{R}^2$ avec des termes anti-diagonaux égaux). Par conséquent l'espace $\mathcal{L}^2/\mathcal{L}^2_s$ est de dimension 2, et le morphisme injectif ψ est en fait un isomorphisme (car on sait déjà d'après la proposition 1.4.2 que $H^2(\mathbb{Z}^2,\mathbb{R}^2)$ est de dimension 2). On vient ainsi de montrer que si $\mathbb{Z}^2$ agit trivialement sur $\mathbb{R}^2$, alors

$$H^2(\mathbb{Z}^2,\mathbb{R}^2) \simeq \mathcal{L}^2/\mathcal{L}^2_s.$$

Les espaces $\mathcal{L}^2$ et $\mathcal{L}^2_s$, sous-espaces de l'espace $C^2(\mathbb{Z}^2,\mathbb{R}^2)$ des 2–cochaînes homogènes, sont stables sous l'action de G, puisque pour tous $u,v\in\mathbb{Z}^2$:

$$(\sigma.F)(u,v) = \sigma.F(\sigma^{-1}u\sigma, \sigma^{-1}v\sigma) = AF(A^{-1}u, A^{-1}v).$$

De façon analogue à celle selon laquelle l'action 1.4.3 définit une structure de $\mathbb{Z}$–module sur $H^2(\mathbb{Z}^2,E)$, on a une structure de $\mathbb{Z}$–module sur $\mathcal{L}^2/\mathcal{L}^2_s$, et il est clair que l'application ψ est alors un isomorphisme de $\mathbb{Z}$–modules entre $\mathcal{L}^2/\mathcal{L}^2_s$ et $H^2(\mathbb{Z}^2,E)$. On peut donc chercher les éléments de $E_2^{0,2}$, c'est-à-dire les éléments de $H^2(\mathbb{Z}^2,E)$ invariants sous l'action de $\mathbb{Z}^2$, sous la forme $[F]$ où F est une application $\mathbb{Z}$–bilinéaire de $\mathbb{Z}^2\times\mathbb{Z}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que l'expression

$$AF(A^{-1}u, A^{-1}v) - F(u,v)$$

soit symétrique en $u,v\in\mathbb{Z}^2$. Une telle application F vérifie pour tous $u = \left(\begin{smallmatrix} u_1 \\ u_2 \end{smallmatrix}\right), v = \left(\begin{smallmatrix} v_1 \\ v_2 \end{smallmatrix}\right)$ la relation

$$AF(A^{-1}u, A^{-1}v) - F(u,v) = AF(A^{-1}v, A^{-1}u) - F(v,u),$$

ou encore, après avoir appliqué celle-ci aux éléments Au et Av de $\mathbb{Z}^2$:

$$A(F(u,v) - F(v,u)) = F(Au,Av) - F(Av,Au). \tag{1.4.5}$$

Aussi, avec $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$, et du fait de la bilinéarité de F, la relation (1.4.5) s'écrit :

$$A(F(u,v) - F(v,u)) = (u_1v_2 - v_1u_2)\left(F(\left(\begin{smallmatrix} a \\ c \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} b \\ d \end{smallmatrix}\right)) - F(\left(\begin{smallmatrix} b \\ d \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} a \\ c \end{smallmatrix}\right)\right).$$

Or avec $u = \left(\begin{smallmatrix} a \\ c \end{smallmatrix}\right)$ et $v = \left(\begin{smallmatrix} b \\ d \end{smallmatrix}\right)$, ceci donne :

$$A\left(F(\left(\begin{smallmatrix} a \\ c \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} b \\ d \end{smallmatrix}\right)) - F(\left(\begin{smallmatrix} b \\ d \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} a \\ c \end{smallmatrix}\right)\right) = \left(F(\left(\begin{smallmatrix} a \\ c \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} b \\ d \end{smallmatrix}\right)) - F(\left(\begin{smallmatrix} b \\ d \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} a \\ c \end{smallmatrix}\right)\right),$$

et donc, puisque 1 n'est pas valeur propre de A :

$$F(\left(\begin{smallmatrix} a \\ c \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} b \\ d \end{smallmatrix}\right)) - F(\left(\begin{smallmatrix} b \\ d \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} a \\ c \end{smallmatrix}\right) = 0.$$

D'où $A(F(u,v) - F(v,u)) = 0$, et par conséquent $F(u,v) = F(v,u)$ pour tous $u, v \in \mathbb{Z}^2$. Ainsi, l'application bilinéaire F est symétrique, et donc $[F] = 0$. On en conclut que l'application $\Phi : [F] \mapsto \sigma.[F] - [F]$ est un endomorphisme injectif, et donc bijectif, de $H^2(\mathbb{Z}^2, \mathbb{R}^2)$, et que :

$$E_2^{0,2} \simeq \operatorname{Ker}\Phi = 0 \ ;$$
$$E_2^{1,2} \simeq \operatorname{Coker}\Phi = 0.$$

- En définitive, seules les cases $E_2^{0,1}$ et $E_2^{1,1}$ sont non nulles, et elles prennent la valeur commune $\mathbb{R}^2$, et donc d'après la relation (1.4.2) :

$$H^n(G,E) \simeq \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \ ; \\ \mathbb{R}^2 & \text{si } n = 1,\ 2 \ ; \\ 0 & \text{si } n \geq 3. \end{cases}$$

Chapitre 2

Groupes de Lie

Les variétés différentiables considérées dans ce chapitre seront toutes réelles et de classe au moins C^∞.

2.1 Champs de vecteurs : quelques rappels

Soit M une variété de dimension m. On rappelle qu'un **champ de vecteurs** (tangents) X **de classe** C^k $(k \geq 0)$ **sur** M est une section de classe C^k de son fibré tangent TM, c'est-à-dire une application de classe $C^k : M \to TM, x \mapsto (x, X(x))$ telle que $X(x) \in T_xM$ pour tout $x \in M$.

On fera souvent l'abus de langage consistant à appeler champ de vecteurs sur M la seule application $x \mapsto X(x)$.

Si en coordonnées locales, $X(x) = \sum_{i=1}^m X^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}$, on vérifie que X est de classe C^k si, et seulement si, chacune des fonctions X^i est de classe C^k dans le domaine de carte où elle est définie.

Considérons maintenant deux variétés M et N, de dimensions respectives m et n, X un champ de vecteurs de classe C^k sur M et $\phi : M \to N$ un difféomorphisme de classe C^{k+1}.

Définition 2.1.1. *On appelle **image de** X **par** ϕ le champ de vecteurs ϕ_*X de classe C^k sur N défini par $\phi_*X = d\phi \circ X \circ \phi^{-1}$ i.e.*

$$\forall\ y \in N,\ \ \phi_*X(y) = d_{\phi^{-1}(y)}\phi\ \left(X(\phi^{-1}(y))\right).$$

*Dans le cas où $M = N$, le champ X est dit **invariant par** ϕ si $\phi_*X = X$, c'est-à-dire si*

$$\forall\ x \in M,\ \ X(\phi(x)) = d_x\phi\ (X(x)).$$

Soient X un champ de vecteurs sur une variété M et $f : M \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 sur M.

Définition 2.1.2. *On appelle **dérivée de Lie de** f **suivant** X la fonction $\mathcal{L}_X f : M \to \mathbb{R}$ définie par :*

$$\mathcal{L}_X f(x) = d_x f\ \ (X(x)).$$

Remarquons que si X est de classe C^k et f de classe C^{k+1}, alors $\mathcal{L}_X f$ est de classe C^k.

Si X et Y sont deux champs de vecteurs de classe C^1 sur M, on montre qu'il existe un unique champ de vecteurs, noté $[X,Y]$, tel que pour toute fonction f de classe C^2 sur M :

$$\mathcal{L}_{[X,Y]}f = \mathcal{L}_X(\mathcal{L}_Y f) - \mathcal{L}_Y(\mathcal{L}_X f).$$

Définition 2.1.3. *On appelle* ***crochet (de Lie) des champs de vecteurs*** X ***et*** Y *le champ de vecteurs* $[X,Y]$ *défini ci-dessus.*

Localement, si $X = \sum_{i=1}^m X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ et $X = \sum_{i=1}^m Y^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, on a $[X,Y] = \sum_{i=1}^m [X,Y]^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ avec

$$[X,Y]^i = \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial Y^i}{\partial x^j} X^j - \frac{\partial X^i}{\partial x^j} Y^j \right).$$

Cette expression laisse apparaître que si X et Y sont de classe C^k, alors $[X,Y]$ est de classe C^{k-1}.

On vérifie aisément que le crochet de Lie est une application bilinéaire alternée, et que pour des champs de classe C^2, on a l'identité suivante, dite de Jacobi :

$$[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0. \tag{2.1.1}$$

Si par ailleurs $\phi : M \to N$ est un difféomorphisme de classe C^2, alors :

Proposition 2.1.4.

i) $(\mathcal{L}_{\phi_* X} f) \circ \phi = \mathcal{L}_X(f \circ \phi)$, *pour toute fonction* f *de classe* C^1 *sur* N *;*

ii) $\phi_*[X,Y] = [\phi_* X, \phi_* Y]$.

Preuve. i) Pour toute fonction f de classe C^1 sur N, on a :

$$\begin{aligned} ((\mathcal{L}_{\phi_* X} f) \circ \phi)(x) &= d_{\phi(x)} f \ (\phi_* X(\phi(x))) \\ &= d_{\phi(x)} f \ (d_x \phi \ (X(x))) \\ &= d_x(f \circ \phi) \ (X(x)) \\ &= \mathcal{L}_X(f \circ \phi)(x). \end{aligned}$$

ii) Le point i) donne, pour toute fonction f de classe C^1 sur N :

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_{\phi_*[X,Y]} f) \circ \phi &= \mathcal{L}_{[X,Y]}(f \circ \phi) \\ &= \mathcal{L}_X(\mathcal{L}_Y(f \circ \phi)) - \mathcal{L}_Y(\mathcal{L}_X(f \circ \phi)) \\ &= \mathcal{L}_X((\mathcal{L}_{\phi_* Y} f) \circ \phi) - \mathcal{L}_Y((\mathcal{L}_{\phi_* X} f) \circ \phi) \\ &= (\mathcal{L}_{\phi_* X}(\mathcal{L}_{\phi_* Y} f)) \circ \phi - (\mathcal{L}_{\phi_* Y}(\mathcal{L}_{\phi * X} f)) \circ \phi \\ &= (\mathcal{L}_{[\phi_* X, \phi_* Y]} f) \circ \phi. \end{aligned}$$

D'où, puisque ϕ est un difféomorphisme :

$$\mathcal{L}_{\phi_*[X,Y]} f = \mathcal{L}_{[\phi_* X, \phi_* Y]} f$$

pour toute fonction f, et donc

$$\phi_*[X,Y] = [\phi_* X, \phi_* Y].$$

□

2.2 Groupes de Lie

Définition 2.2.1. *Un* ***groupe de Lie*** *G est un espace topologique séparé muni d'une structure de groupe et d'une structure de variété analytique telles que l'application $G \times G \to G$, $(x, y) \mapsto xy^{-1}$ soit analytique. La* ***dimension*** *d'un groupe de Lie est sa dimension en tant que variété différentiable réelle.*

2.2.1 Exemples

i) Les variétés $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$ sont des groupes de Lie, respectivement de dimensions n et $2n$.

ii) Le groupe $\mathbb{R}^n \rtimes_A \mathbb{R}$, où $A \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$, $n \geq 2$, est un groupe de Lie de dimension $n+1$.

2.2.2 Algèbre de Lie d'un groupe de Lie

On remarquera que les translations à droite et à gauche suivant un élément s d'un groupe de Lie G, notées respectivement R_s et L_s, sont des automorphismes analytiques de G. Étant donné un champ de vecteurs X sur G, on notera sX son image par la translation à gauche suivant s.

Définition 2.2.2. *Un champ de vecteurs X sur un groupe de Lie G est dit* ***invariant à gauche*** *si*

$$\forall\ s \in G,\ sX = X.$$

Proposition 2.2.3. *Les champs de vecteurs invariants à gauche sur un groupe de Lie G forment un $\mathbb{R}$–espace vectoriel $\mathfrak{g}$ isomorphe à l'espace tangent en l'élément neutre $T_{1_G}G$.*

Preuve. Pour tout champ de vecteurs X invariant à gauche, on a :

$$\forall\ x \in G,\ X(x) = xX(x) = d_{x^{-1}x}L_x\ (X(x^{-1}x)) = d_{1_G}L_x\ (X(1_G)). \tag{2.2.1}$$

De là, on conclut que l'application $X \mapsto X(1_G)$ est un isomorphisme entre $\mathfrak{g}$, sous-espace de l'espace des champs de vecteurs sur G, et l'espace tangent $T_{1_G}G$. □

Remarque 2.2.4. On pourra donc identifier $\mathfrak{g}$ à l'espace tangent $T_{1_G}G$.

L'égalité (2.2.1) montre que :

Corollaire 2.2.5. *Tout champ de vecteurs invariant à gauche sur un groupe de Lie est analytique.*

Quant à la proposition 2.1.4 i), elle donne :

Proposition 2.2.6. *Le crochet de deux champs de vecteurs invariants à gauche sur un groupe de Lie est un champ de vecteurs invariant à gauche.*

Définition 2.2.7. *Muni du crochet de Lie, l'espace $\mathfrak{g}$ est une* ***algèbre de Lie réelle*** i.e. *une $\mathbb{R}$–algèbre dont le produit est bilinéaire alterné et vérifie l'identité de Jacobi* (2.1.1)*. On dit que $\mathfrak{g}$ est l'****algèbre de Lie du groupe de Lie*** *G.*

Remarque 2.2.8. L'espace $\mathfrak{g}$ est de dimension finie égale à celle du groupe de Lie G.

2.2.3 L'application exponentielle

Pour plus de détails et les preuves des faits énoncés ici, on pourra par exemple consulter [Pic73], chapitre II.

Soient G un groupe de Lie et $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie.

Théorème 2.2.9. *Pour tout* $X \in \mathfrak{g}$*, il existe une unique application différentiable* $\gamma_X : \mathbb{R} \to G$ *telle que*

$$\begin{cases} \gamma'_X(0) = X \ ; \\ \forall\ s,t \in \mathbb{R},\ \gamma_X(s+t) = \gamma_X(s)\gamma_X(t). \end{cases}$$

Définition 2.2.10. *L'**application exponentielle** est l'application* $\exp : \mathfrak{g} \to G$ *définie par* $\exp X = \gamma_X(1)$.

Théorème 2.2.11. *L'application* $\exp$ *est un difféomorphisme analytique d'un voisinage de 0 dans* $\mathfrak{g}$ *dans un voisinage de* 1_G *dans* G.

Proposition 2.2.12. *Soient* G*,* H *deux groupes de Lie et* h *une représentation analytique (c'est-à-dire un morphisme de groupes qui est une application analytique) de* G *dans* H*. Le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "h"] & H \\ \mathfrak{g} \arrow[u, "\exp"] \arrow[r, "d_{1_G}h"'] & \mathfrak{h} \arrow[u, "\exp"'] \end{tikzcd}$$

Coordonnées canoniques

Au vu de ce qui précède, on peut considérer que l'application exp est une carte locale de G au voisinage de 1_G. Une carte locale au voisinage d'un point quelconque g_0 s'obtient alors simplement à partir de cette carte au moyen de la translation $g \mapsto gg_0$.

Une base $X_1, \ldots, X_n$ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ étant fixée, il existe un voisinage V de 1_G dans G tel que :

$$\forall\ x \in V,\ \exists!\ (x^1, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n,\ x = \exp(\sum_{i=1}^{n} x^i X_i).$$

Le système $(x^1, \ldots, x^n)$ est appelé **système de coordonnées canoniques** relatif à la base $X_1, \ldots, X_n$.

2.2.4 La représentation adjointe

À tout élément y de G on peut associer l'automorphisme intérieur $\rho_y : x \mapsto yxy^{-1}$; chacun de ces automorphismes induit sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ l'automorphisme $d_{1_G}\rho_y$, qui sera noté $\mathrm{Ad}\, y$.

Définition 2.2.13. *On appelle **représentation adjointe** de* G *l'application* $\mathrm{Ad} : y \mapsto \mathrm{Ad}\, y$.

La représentation adjointe de G étant un morphisme de groupes de G dans $\mathrm{Aut}\, \mathfrak{g}$, elle définit une action de G sur son algèbre de Lie.

2.2.5 Groupes de Lie linéaires

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le groupe $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ muni de sa topologie habituelle est un groupe de Lie dont l'algèbre de Lie est isomorphe à l'espace vectoriel $\mathrm{M}(n, \mathbb{K})$ muni du crochet :

$$\forall\, X, Y \in \mathrm{M}(n, \mathbb{K}),\ [X, Y] = XY - YX.$$

L'application exponentielle de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ est alors l'application de $\mathrm{M}(n, \mathbb{K})$ dans $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ bien connue :

$$\exp : X \longmapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^k}{k!}. \tag{2.2.2}$$

Quant à la représentation adjointe de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$, c'est tout simplement la conjugaison des matrices dans $\mathrm{M}(n, \mathbb{K})$:

$$\forall\, X \in \mathrm{M}(n, \mathbb{K}),\ \forall\, Y \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K}),\ \mathrm{Ad}\, Y(X) = YXY^{-1}.$$

Définition 2.2.14. *On appelle* ***groupe de Lie linéaire*** *tout sous-groupe fermé d'un groupe $GL(n, \mathbb{K})$.*

Il résulte de cette définition qu'un groupe de Lie linéaire est une sous-variété immergée de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$; l'application exp (2.2.2) en est une carte locale au voisinage de l'identité et son algèbre de Lie peut être identifiée à une sous-algèbre de Lie de $\mathrm{M}(n, \mathbb{K})$.

Exemples fondamentaux

i) Le groupe linéaire spécial $\mathrm{SL}(n, \mathbb{K})$ admet pour algèbre de Lie l'espace $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{K})$ des matices $n \times n$ de trace nulle.

ii) Le groupe orthogonal $\mathrm{O}(n, \mathbb{K}) = \{M \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K}) |\ {}^{t}MM = I\}$ admet pour algèbre de Lie l'espace $\mathfrak{o}(n, \mathbb{K})$ des matrices $n \times n$ antisymétriques.

iii) Le groupe des rotations $\mathrm{SO}(n, \mathbb{K}) = \mathrm{O}(n, \mathbb{K}) \cap \mathrm{SL}(n, \mathbb{K})$ admet également l'espace $\mathfrak{o}(n, \mathbb{K})$ pour algèbre de Lie.

Partie II

Déformations d'actions hyperboliques sur $\mathbb{T}^2$ et de réseaux dans certains groupes de Lie résolubles

Chapitre 3

Rigidité infinitésimale de Sobolev d'actions hyperboliques sur $\mathbb{T}^2$

Comme annoncé dans l'introduction, l'objet du présent chapitre est l'étude de la rigidité infinitésimale de l'action d'un "petit" sous-groupe de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ sur le tore $\mathbb{T}^2$. On considère une matrice $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ b & c \end{smallmatrix}\right)$ de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ hyperbolique (c'est-à-dire que A n'a pas de valeur propre complexe de module 1, ce qui dans notre situation équivaut à $|\operatorname{tr} A| > 2$) et symétrique. Cette matrice a deux valeurs propres réelles irrationnelles ; on note λ celle de module supérieur à 1. Le sous-groupe monogène Γ que A engendre dans $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ est d'indice infini, et comme pour la plupart des actions sur les tores étudiées jusqu'alors (voir notamment [Hur92]), c'est une action d'Anosov sur $M = \mathbb{T}^2$. La question de la rigidité infinitésimale de cette action, c'est-à-dire le calcul de l'espace $H^1(\Gamma, \mathrm{Vect}^\infty(M))$, ne concerne que les champs de vecteurs réels sur M, cependant, le cas particulier du tore nous permettant d'utiliser les séries de Fourier, nous pourrons nous intéresser plus largement à la cohomologie de Γ agissant sur les champs de vecteurs complexes sur M. Dans toute la suite de ce chapitre (excepté dans la définition 3.2.5), la notation $\mathrm{Vect}(M)$ désignera donc l'ensemble des champs de vecteurs complexes sur M. Dans cette situation, nous pourrons aussi aisément définir et utiliser la notion de rigidité infinitésimale de Sobolev et montrer finalement que l'action de Γ sur M n'est pas C^∞–infinitésimalement rigide.

3.1 L'espace des champs de vecteurs L^2 Γ–invariants

Les coordonnées locales d'un point z de M seront notées (x, y). Tout champ de vecteur X sur M se relève en un champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^2$, encore noté X, de la forme :

$$X(z) = f(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + g(x,y)\frac{\partial}{\partial y} \ ,$$

où f et g sont des fonctions $\mathbb{Z}^2$-périodiques. Le champ X est dit L^2 si les fonctions f et g sont de carré intégrable sur M. Dans ce cas, f et g ont pour développement en série de Fourier :

$$f(x,y) = \sum_{m,n} f_{m,n} e^{2\imath\pi(mx+ny)} \ , \ g(x,y) = \sum_{m,n} g_{m,n} e^{2\imath\pi(mx+ny)} \ ,$$

où $(f_{m,n})$ et $(g_{m,n})$ appartiennent à l'espace de Hilbert $\ell^2(\mathbb{Z}^2, \mathbb{C})$ des familles de carré sommable indexées sur $\mathbb{Z}^2$. Lorsque X est un champ de vecteurs réel, les coefficients $f_{m,n}$

et $g_{m,n}$ vérifient les relations supplémentaires :

$$f_{-m,-n} = \overline{f_{m,n}} \quad \text{et} \quad g_{-m,-n} = \overline{g_{m,n}}.$$

Dorénavant, les fonctions L^2 sur M seront identifiées avec les éléments de $\ell^2(\mathbb{Z}^2, \mathbb{C})$. L'espace des champs de vecteurs L^2 sur M sera noté $\mathrm{Vect}_{L^2}(M)$.

Puisque A est symétrique, elle est diagonalisable dans une base orthogonale de $\mathbb{R}^2$. Il existe donc une matrice P telle que :

$$A = P \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} P^{-1} \text{ avec } P = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \in \mathrm{SO}(2, \mathbb{R}).$$

L'action de A sur un champ X s'écrit :

$$A_* X(Az) = (af(z) + bg(z)) \frac{\partial}{\partial x} + (bf(z) + cg(z)) \frac{\partial}{\partial y}.$$

Les champs propres $X_\lambda = \cos\theta \frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta \frac{\partial}{\partial y}$ et $X_{\lambda^{-1}} = -\sin\theta \frac{\partial}{\partial x} + \cos\theta \frac{\partial}{\partial y}$ respectivement associés à λ et λ^{-1} (c'est-à-dire tels que $A_* X_\lambda = \lambda X_\lambda$ et $A_* X_{\lambda^{-1}} = \lambda^{-1} X_{\lambda^{-1}}$) forment une base de $\mathrm{Vect}_{L^2}(M)$ dans laquelle tout champ X s'écrit $X(z) = u(z) X_\lambda + v(z) X_{\lambda^{-1}}$, où u et v sont des fonctions L^2 sur M. On a alors :

$$A_* X\,(Az) = \lambda u(z) X_\lambda + \lambda^{-1} v(z) X_{\lambda^{-1}}. \tag{3.1.1}$$

Pour des raisons de commodité, on pose pour tout $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$:

$$\begin{pmatrix} \overline{m} \\ \overline{n} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \underline{m} \\ \underline{n} \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}.$$

Si (m_0, n_0) est un couple fixé de $\mathbb{Z}^2$, on pose pour tout $k \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{pmatrix} m_k \\ n_k \end{pmatrix} = A^k \begin{pmatrix} m_0 \\ n_0 \end{pmatrix}.$$

On peut maintenant montrer que

Théorème 3.1.1. *L'espace $H^0(\Gamma, \mathrm{Vect}_{L^2}(M))$ des champs de vecteurs L^2 et Γ–invariants sur M est trivial.*

Preuve. Soit X un champ de vecteurs L^2 sur M ; X est invariant si, et seulement si, $A_* X = X$, ce qui revient à :

$$\forall\ z \in M,\ u(Az) = \lambda u(z) \text{ et } v(Az) = \lambda^{-1} v(z).$$

En remplaçant u par son développement en série de Fourier, on obtient :

$$\sum_{p,q} u_{p,q} e^{2\imath\pi((ap+bq)x + (bp+cq)y)} = \sum_{m,n} \lambda\ u_{m,n} e^{2\imath\pi(mx+ny)}$$

i.e.

$$\sum_{p,q} u_{p,q} e^{2\imath\pi(\overline{p}x + \overline{q}y)} = \sum_{m,n} \lambda\ u_{m,n} e^{2\imath\pi(mx+ny)}.$$

Par identification des coefficients, et en faisant de même pour v, on obtient :

$$u_{\underline{m,n}} = \lambda u_{m,n} \text{ et } v_{\underline{m,n}} = \lambda^{-1} v_{m,n}.$$

De ces relations, on tire en premier lieu que $u_{0,0} = v_{0,0} = 0$.
Supposons qu'il existe un couple $(m_0, n_0) \neq 0$ tel que $u_{m_0,n_0} \neq 0$. Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_{m_{-k},n_{-k}} = \lambda^k u_{m_0,n_0}$; d'où $\lim_{k\to-\infty} |u_{m_k,n_k}| = +\infty$. Mais ceci contredit le fait que l'orbite sous l'action de A de tout point de $\mathbb{Z}^2$ différent de 0 est infinie (voir le lemme 3.1.3 plus loin), et que les coefficients de Fourier $u_{m,n}$ de la fonction u tendent vers 0 quand (m,n) tend vers l'infini. On a donc $u_{m,n} = 0$ (et de manière analogue $v_{m,n} = 0$) pour tout $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$. Ainsi $u = v = 0$ *i.e.* $X = 0$. □

Donnons dès maintenant deux lemmes simples concernant les orbites dans $\mathbb{Z}^2$ pour l'action de A, et qui seront plus particulièrement utilisés à la fin de ce chapitre. Le premier précise le nombre de ces orbites, et le second leur comportement asymptotique.

Lemme 3.1.2. *Il y a une infinité dénombrable d'orbites pour l'action de A sur $\mathbb{Z}^2$.*

Preuve. Il suffit de remarquer que deux couples d'entiers dans la même orbite ont le même pgcd, donc chaque point de la forme (p,p), où p est un nombre premier, appartient à une seule orbite. □

Lemme 3.1.3. *Pour tout couple $(m_0, n_0) \neq 0$ fixé, il existe deux constantes strictement positives c_+ et c_- telles que*

$$m_k^2 + n_k^2 \underset{+\infty}{\sim} c_+ \lambda^{2k} \ \textit{et}\ m_k^2 + n_k^2 \underset{-\infty}{\sim} c_- \lambda^{-2k}$$

Preuve. Puisque $A = P \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} P^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, on a :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} m_k \\ n_k \end{pmatrix} &= P \begin{pmatrix} \lambda^k & 0 \\ 0 & \lambda^{-k} \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} m_0 \\ n_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda^k \cos\theta(m_0\cos\theta + n_0\sin\theta) + \lambda^{-k}\sin\theta(-m_0\sin\theta + n_0\cos\theta) \\ -\lambda^k \sin\theta(m_0\cos\theta + n_0\sin\theta) + \lambda^{-k}\cos\theta(-m_0\sin\theta + n_0\cos\theta) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

D'où

$${m_k}^2 + {n_k}^2 = \lambda^{2k}(m_0\cos\theta + n_0\sin\theta)^2 + \lambda^{-2k}(-m_0\sin\theta + n_0\cos\theta)^2.$$

Ainsi

$$m_k^2 + n_k^2 \underset{+\infty}{\sim} c_+\lambda^{2k}\ ,\ m_k^2 + n_k^2 \underset{-\infty}{\sim} c_-\lambda^{-2k},$$

où

$$c_+ = (m_0\cos\theta + n_0\sin\theta)^2 \text{ et } c_- = (-m_0\sin\theta + n_0\cos\theta)^2.$$

Comme par ailleurs $(\cos\theta, \sin\theta)$ est un vecteur propre de A, on peut montrer que $\cos\theta$ et $\sin\theta$ sont rationnellement indépendants. Les constantes c_+ et c_- sont donc strictement positives. □

3.2 Rigidité W^s-infinitésimale pour $0 \leq s < 1$

Définition 3.2.1. *Pour tout réel $s \geq 0$, considérons*

$$W^s(M) = \Big\{ f : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{C} \ \Big| \ \sum_{(m,n)\neq 0} \left(m^2+n^2\right)^s |f_{m,n}|^2 < +\infty \Big\}.$$

On dira qu'un champ de vecteur X est dans $\mathrm{Vect}_{W^s}(M)$, l'espace des champs de vecteurs s-Sobolev sur M, si ses coefficients sont dans $W^s(M)$.

De cette définition, il découle que pour $0 \leq s \leq s'$:

$$C^\infty(M) = \bigcap_{s\geq 0} W^s(M) = W^\infty(M) \subset W^{s'}(M) \subset W^s(M) \subset W^0(M) = L^2(M).$$

Pour tout $s < \infty$, $W^s(M)$ est un espace de Hilbert muni du produit hermitien $\langle \bullet, \bullet \rangle_s$:

$$\langle f, g \rangle_s = f_{0,0}\overline{g_{0,0}} \ + \sum_{(m,n)\neq 0} \left(m^2+n^2\right)^s f_{m,n}\overline{g_{m,n}}.$$

Soit $\{\delta^{m,n}\}_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$ la base hilbertienne canonique de $\ell^2(\mathbb{Z}^2, \mathbb{C})$, c'est-à-dire :

$$\delta^{m,n}_{p,q} = \begin{cases} 1 & \text{si } (p,q) = (m,n), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Évidemment, $\{\delta^{m,n}\}$ est une base hilbertienne de $W^s(M)$ pour tout $s \geq 0$.

Soit $X \in \mathrm{Vect}_{W^s}(M)$ avec $X(Z) = u(z)X_\lambda + v(z)Y_{\lambda^{-1}}$. D'après l'égalité (3.1.1), on a $A_*X(z) = U(z)X_\lambda + V(z)X_{\lambda^{-1}}$, avec

$$\begin{aligned} U(z) &= \lambda u(A^{-1}z) = \lambda \sum_{m,n} u_{m,n} e^{2\imath\pi(m(cx-by)+n(-bx+ay))} \\ &= \lambda \sum_{m,n} u_{m,n} e^{2\imath\pi(\underline{m}x+\underline{n}y)} = \lambda \sum_{m,n} u_{\overline{m},\overline{n}} e^{2\imath\pi(mx+ny)}; \\ V(z) &= \lambda^{-1} v(A^{-1}z) = \lambda^{-1} \sum_{m,n} v_{\overline{m},\overline{n}} e^{2\imath\pi(mx+ny)}. \end{aligned}$$

Ainsi $U = \lambda T_A u$ et $V = \lambda^{-1} T_A v$, où T_A est l'opérateur linéaire de $\ell^2(\mathbb{Z}^2, \mathbb{C})$ consistant à permuter les indices des coefficients de Fourier par A :

$$\forall\, f \in L^2(M),\ (T_A f)_{m,n} = f_{\overline{m},\overline{n}}.$$

Il est clair que T_A est une isométrie bijective de $\ell^2(\mathbb{Z}^2, \mathbb{C})$ et que ${T_A}^{-1} = T_{A^{-1}}$; plus précisément, on établit la :

Proposition 3.2.2. *Pour tout $s \geq 0$, T_A et $T_{A^{-1}}$ sont des opérateurs inversibles continus de $W^s(M)$ et $|||T_{A^{-1}}|||_s = |||T_A|||_s = |\lambda|^s$.*

Preuve. Soit $f = \sum_{m,n} f_{m,n}\delta^{m,n} \in W^s(M)$; alors $T_A f = \sum_{m,n} f_{\overline{m},\overline{n}}\delta^{m,n}$ et

$$\begin{aligned} ||T_A f||_s^2 &= |f_{0,0}|^2 + \sum_{(m,n)\neq 0} (m^2+n^2)^s |f_{\overline{m},\overline{n}}|^2 \\ &= |f_{0,0}|^2 + \sum_{(m,n)\neq 0} (\underline{m}^2+\underline{n}^2)^s |f_{m,n}|^2. \end{aligned}$$

Comme A^{-1} se diagonalise dans une base orthogonale, on peut facilement constater que, en tant qu'endomorphisme de l'espace euclidien usuel $\mathbb{R}^2$, $|||A^{-1}||| = |\lambda| > 1$. Par conséquent

$$||T_A f||_s^2 \leq |f_{0,0}|^2 + \sum_{(m,n)\neq 0} |||A^{-1}|||^{2s} (m^2+n^2)^s |f_{m,n}|^2 \leq \lambda^{2s} ||f||_s^2,$$

et ceci pour tout $f \in W^s(M)$, d'où $|||T_A|||_s \leq |\lambda|^s$.
Soit $\epsilon > 0$; la fonction $x \mapsto x^s$ étant continue en $|\lambda|$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall\ x > 0,\ |x - |\lambda|| \leq \eta \Rightarrow |x^s - |\lambda|^s| \leq \epsilon.$$

De ce fait, pour $\eta > 0$ suffisamment petit :

$$|\lambda|^s - \epsilon \leq (|\lambda| - \eta)^s.$$

Puis, comme $|||A^{-1}||| = |\lambda|$, il existe un couple $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que

$$|\lambda| - \eta \leq ||A^{-1}(p(p^2+q^2)^{-\frac{1}{2}}, q(p^2+q^2)^{-\frac{1}{2}})|| \leq |\lambda|,$$

et qui vérifie donc :

$$(p^2+q^2)^s (|\lambda| - \eta)^{2s} \leq (\underline{p}^2 + \underline{q}^2)^s \leq (p^2+q^2)^s \lambda^{2s}.$$

Soit $g = (p^2+q^2)^{-\frac{s}{2}} \delta^{p,q} \in W^s(M)$, de sorte que $||g||_s = 1$ et

$$(|\lambda| - \eta)^{2s} \leq ||T_A g||_s^2 = (\underline{p}^2 + \underline{q}^2)^s (p^2+q^2)^{-s} \leq \lambda^{2s}.$$

Alors g vérifie :

$$|\lambda|^s - \epsilon \leq (|\lambda| - \eta)^s \leq ||T_A g||_s \leq |\lambda|^s.$$

Ainsi :

$$\forall\ \epsilon > 0,\ \exists\ g \in W^s(M),\ ||g||_s = 1 \text{ et } |\lambda|^s - \epsilon \leq ||T_A g||_s \leq |\lambda|^s,$$

d'où $|||T_A|||_s = |\lambda|^s$. De plus, tout ceci étant également vrai pour A^{-1} au lieu de A, on a aussi $|||T_{A^{-1}}|||_s = |\lambda|^s$. □

Suite à cette proposition, on peut donc affirmer que :

Corollaire 3.2.3. *Pour tout $s \geq 0$, $\mathrm{Vect}_{W^s}(M)$ est un sous–Γ–module de $\mathrm{Vect}_{L^2}(M)$.*

On peut dès lors s'intéresser à la cohomologie du groupe Γ agissant sur $\mathrm{Vect}_{W^s}(M)$. Comme Γ est isomorphe à $\mathbb{Z}$, suivant la proposition 1.2.7 page 20, on a :

$$H^1(\Gamma, \mathrm{Vect}_{W^s}(M)) \simeq \mathrm{Vect}_{W^s}(M) \big/ \{A_*X - X \mid X \in \mathrm{Vect}_{W^s}(M)\}.$$

Prouver que cet espace de cohomologie est nul revient donc à montrer que, pour tout champ de vecteurs Y dans $\mathrm{Vect}_{W^s}(M)$, il existe un champ de vecteurs X dans $\mathrm{Vect}_{W^s}(M)$ tel que $A_*X - X = Y$.

Soient $X(z) = u(z)X_\lambda + v(z)X_{\lambda^{-1}}$ et $Y(z) = U(z)X_\lambda + V(z)X_{\lambda^{-1}}$; l'équation $A_*X - X = Y$ est équivalente au système :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} (\lambda T_A - \mathrm{Id})u &=& U \\ (\lambda^{-1}T_A - \mathrm{Id})v &=& V \end{array} \right. \tag{3.2.1}$$

ou, de manière équivalente, à :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} (T_{A^{-1}} - \lambda\,\mathrm{Id})u &=& -T_{A^{-1}}U \\ (T_A - \lambda\,\mathrm{Id})v &=& \lambda V \end{array} \right. \tag{3.2.2}$$

Posons $S_A = T_A - \lambda\,\mathrm{Id}$ et $S_{A^{-1}} = T_{A^{-1}} - \lambda\,\mathrm{Id}$. On peut maintenant facilement prouver que :

Proposition 3.2.4. $H^1(\Gamma, \mathrm{Vect}_{W^s}(M)) = 0$ *si* $0 \leq s < 1$.

Preuve. Si $0 \leq s < 1$, alors $|||T_{A^{-1}}|||_s = |||T_A|||_s = |\lambda|^s < |\lambda|$, et le rayon spectral de tout opérateur linéaire continu d'un espace de Hilbert (et plus généralement d'un espace de Banach) ne pouvant dépasser la norme de cet opérateur, λ est par conséquent une valeur régulière à la fois de T_A et de $T_{A^{-1}}$, c'est-à-dire que S_A et $S_{A^{-1}}$ sont des opérateurs inversibles de $W^s(M)$. Il existe donc un unique couple de fonctions u et v vérifiant le système (3.2.2), autrement dit une unique solution dans $\mathrm{Vect}_{W^s}(M)$ à l'équation $A_*X - X = Y$. □

On vérifie par ailleurs facilement que T_A et $T_{A^{-1}}$, et donc S_A et $S_{A^{-1}}$, transforment les fonctions à valeurs réelles en fonctions à valeurs réelles ; il en est de même de leurs inverses S_A^{-1} et $S_{A^{-1}}^{-1}$. D'où la définition (pour laquelle on ne considère cette fois dans $\mathrm{Vect}_{W^s}(M)$ que les champs réels) et le théorème qui suivent :

Définition 3.2.5. *Si, pour* $s \geq 0$ *fixé,* $H^1(\Gamma, \mathrm{Vect}_{W^s}(M)) = 0$*, on dira que l'action de* Γ *sur* M *est* W^s*–**infinitésimalement rigide**.*

Théorème 3.2.6. *Pour* $0 \leq s < 1$*, l'action de* Γ *sur* M *est* W^s*-infinitésimalement rigide.*

3.3 L'espace $H^1(\Gamma, \mathrm{Vect}_{W^s}(M))$ pour $s \geq 1$

Montrons maintenant que pour $s \geq 1$, l'espace $H^1(\Gamma, \mathrm{Vect}_{W^s}(M))$ n'est pas réduit à 0. Pour ce faire, il nous faut simplement exhiber un champ de vecteurs Y dans $\mathrm{Vect}_{W^s}(M)$ tel que l'unique solution X dans $\mathrm{Vect}_{L^2}(M)$ de l'équation $A_*X - X = Y$ ne soit pas dans $\mathrm{Vect}_{W^s}(M)$. De ce fait, il paraît utile de déterminer les antécédents par $S_{A^{-1}}$ des éléments de la base canonique $\{\delta^{m,n}\}$.

Proposition 3.3.1. *Pour tout couple* $(m_0, n_0) \in \mathbb{Z}^2$ *fixé, on pose* $\eta^{m_0,n_0} = S_{A^{-1}}^{-1} \delta^{m_0,n_0}$. *Alors :*

$$\eta^{0,0} = \frac{1}{1-\lambda}\delta^{0,0} \ \textit{et}\ \eta^{m_0,n_0} = -\sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^{-k-1}\delta^{m_k,n_k} \ \textit{si}\ (m_0, n_0) \neq 0.$$

Preuve. En utilisant la relation $\eta^{m_0,n_0}_{\underline{m},\underline{n}} - \lambda\eta^{m_0,n_0}_{m,n} = \delta^{m_0,n_0}_{m,n}$, on obtient :

• Si $(m_0, n_0) = 0$:

$$\begin{cases} \eta^{0,0}_{0,0} - \lambda\eta^{0,0}_{0,0} = 1 \ ; \\ \eta^{0,0}_{\underline{m},\underline{n}} - \lambda\eta^{0,0}_{m,n} = 0 \quad \text{si } (m,n) \neq 0. \end{cases}$$

D'où

$$\begin{cases} \eta^{0,0}_{0,0} = \dfrac{1}{1-\lambda} \ ; \\ \eta^{0,0}_{\underline{m},\underline{n}} = \lambda\eta^{0,0}_{m,n} \qquad \text{si } (m,n) \neq 0. \end{cases}$$

On sait d'après la preuve du théorème 3.1.1 que pour $(m, n) \neq 0$, on a nécéssairement $\eta^{0,0}_{m,n} = 0$, d'où

$$\eta^{0,0} = \frac{1}{1-\lambda}\delta^{0,0}.$$

• Si $(m_0, n_0) \neq 0$:

$$\begin{cases} \eta^{m_0,n_0}_{m_{-1},n_{-1}} - \lambda\eta^{m_0,n_0}_{m_0,n_0} = 1 \ ; \\ \eta^{m_0,n_0}_{\underline{m},\underline{n}} - \lambda\eta^{m_0,n_0}_{m,n} = 0 \qquad \text{si } (m,n) \neq (m_0,n_0). \end{cases}$$

Donc

$$\begin{aligned} \eta^{m_0,n_0}_{m_{-1},n_{-1}} &= 1 + \lambda\eta^{m_0,n_0}_{m_0,n_0} \ ; \\ \eta^{m_0,n_0}_{m_{-2},n_{-2}} &= \lambda\eta^{m_0,n_0}_{m_{-1},n_{-1}} = \lambda(1 + \lambda\eta^{m_0,n_0}_{m_0,n_0}) \ ; \\ &\ \vdots \\ \eta^{m_0,n_0}_{m_{-k},n_{-k}} &= \lambda^{k-1}(1 + \lambda\eta^{m_0,n_0}_{m_0,n_0}) \qquad \text{pour tout } k \geq 1. \end{aligned}$$

De façon similaire, dans la direction opposée, on a aussi :

$$\begin{aligned} \eta^{m_0,n_0}_{m_1,n_1} &= \lambda^{-1}\eta^{m_0,n_0}_{m_0,n_0} \ ; \\ \eta^{m_0,n_0}_{m_2,n_2} &= \lambda^{-2}\eta^{m_0,n_0}_{m_0,n_0} \ ; \\ &\ \vdots \\ \eta^{m_0,n_0}_{m_k,n_k} &= \lambda^{-k}\eta^{m_0,n_0}_{m_0,n_0} \qquad \text{pour tout } k \geq 0. \end{aligned}$$

Une fois encore, comme $\lim_{k\to+\infty} \eta^{m_0,n_0}_{m_{-k},n_{-k}} = 0$, on a nécessairement $1 + \lambda\eta^{m_0,n_0}_{m_0,n_0} = 0$, et par conséquent :

$$\eta^{m_0,n_0}_{m_k,n_k} = \begin{cases} 0 & \text{if } k < 0 \ ; \\ -\lambda^{-k-1} & \text{si } k \geq 0. \end{cases}$$

Quand le point (m, n) n'est pas dans l'orbite de (m_0, n_0), on utilise à nouveau le même argument pour affirmer que $\eta^{m_0,n_0}_{m,n} = 0$. Finalement, pour tout couple $(m_0, n_0) \neq 0$:

$$\eta^{m_0,n_0} = -\sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^{-k-1}\delta^{m_k,n_k}.$$

On vérifie de fait que η^{m_0,n_0} est bien dans $W^0(M) = L^2(M)$ et que

$$||\eta^{m_0,n_0}||_0 = \frac{|\lambda|}{\sqrt{1-\lambda^{-2}}}.$$

□

Pour tout couple (m_0, n_0), il est clair que δ^{m_0,n_0} est dans $W^s(M)$ pour tout s. Qu'en est-il de η^{m_0,n_0} (dans le cas bien sûr où $(m_0, n_0) \neq 0$, puisque $\eta^{0,0}$ est évidemment dans tous les $W^s(M)$) ?

Proposition 3.3.2. *Pour tout couple $(m_0, n_0) \neq 0$, η^{m_0,n_0} n'est pas dans $W^s(M)$ si $s \geq 1$.*

Preuve. On doit établir que la série $\sum_{k\geq 0}(m_k^2 + n_k^2)^s \lambda^{-2k-2}$ est divergente. Or du lemme 3.1.3 on tire :

$$(m_k^2 + n_k^2)^s \lambda^{-2k-2} \underset{+\infty}{\sim} \lambda^{-2} c_+{}^s \lambda^{2(s-1)k},$$

et donc que la série $\sum_{k\geq 0}(m_k^2 + n_k^2)^s \lambda^{-2k-2}$ converge si, et seulement si, $s < 1$. □

Finalement, nous sommes en mesure de donner une famille dénombrable $\{Y_p\}$ de champs de vecteurs réels sur M telle que $Y_p \in W^s(TM)$ pour tout $s \geq 1$ et pour laquelle l'unique champ de vecteurs X_p dans $\mathrm{Vect}_{L^2}(M)$ tel que $A_* X_p - X_p = Y_p$ n'est pas dans $W^s(TM)$ si $s \geq 1$.

Proposition 3.3.3. *Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers. Posons pour tout $p \in \mathcal{P}$,*

$$Y_p(z) = 2\cos((a+b)px + (b+c)py)X_\lambda.$$

Alors, pour tout $p \in \mathcal{P}$, l'unique champ de vecteurs $X_p \in \mathrm{Vect}_{L^2}(M)$ tel que

$$A_* X_p - X_p = Y_p$$

n'est pas dans $\mathrm{Vect}_{W^s}(M)$ pour $s \geq 1$.

Preuve. Évidemment, $Y_p = U_p X_\lambda$ avec $U_p = \delta^{-\overline{p},-\overline{p}} + \delta^{\overline{p},\overline{p}}$ est dans $\mathrm{Vect}_{W^s}(M)$ pour tout $s \geq 0$. Aussi $X_p = u_p X_\lambda$ avec $u_p = -S_{A^{-1}}^{-1} T_{A^{-1}} U_p = -(\eta^{-p,-p} + \eta^{p,p})$, et si on pose $(m_0, n_0) = (p, p)$, on a :

$$u_p = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^{-k-1} \delta^{-m_k,-n_k} + \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^{-k-1} \delta^{m_k,n_k},$$

d'où

$$||u_p||_s^2 = 2\sum_{k=0}^{+\infty} (m_k^2 + n_k^2)^s \lambda^{-2k-2} = 2||\eta^{p,p}||_s^2 = +\infty.$$

Ainsi $u_p \notin W^s(M)$ et donc $X_p \notin \mathrm{Vect}_{W^s}(M)$. □

Proposition 3.3.4. *La famille $\{[Y_p]\}_{p\in\mathcal{P}}$ est linéairement indépendante dans $H^1(\Gamma, \mathrm{Vect}_{W^s}(M))$ lorsque $s \geq 1$.*

Preuve. Soient J une partie finie de $\mathcal{P}$ et $(\mu_p)_{p\in J} \in \mathbb{C}^J$ telle que

$$\sum_{p\in J} \mu_p[Y_p] = 0 \text{ dans } \mathrm{Vect}_{W^s}(M), s \geq 1.$$

Il existe alors un champ $X = uX_\lambda \in \mathrm{Vect}_{W^s}(M)$ tel que $\sum_{p\in J} \mu_p Y_p = A_*X - X$ avec $u = \sum_{p\in J} \mu_p u_p$ et

$$||u||_s^2 = \sum_{p\in J} |\mu_p|^2 ||u_p||_s^2 \geq |\mu_q|^2 ||u_q||_s^2 \text{ pour tout } q \in J.$$

Or $||u||_s^2 < +\infty$ et $||u_q||_s^2 = +\infty$, d'où nécessairement $\mu_q = 0$ pour tout $q \in J$. □

En résumé, on obtient donc l'énoncé suivant :

Théorème 3.3.5. *L'action de Γ sur $M = \mathbb{T}^2$ est W^s-infinitésimalement rigide si, et seulement si, $0 \leq s < 1$. De plus, lorsque $1 \leq s \leq \infty$, l'espace $H^1(\Gamma, \mathrm{Vect}_{W^s}(M))$ est de dimension infinie.*

On pourrait espérer, en utilisant la même méthode, obtenir des résultats analogues pour $A \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$ agissant sur $\mathbb{T}^n$ avec $n > 2$. Cependant, le fait qu'en dimension 2 les deux valeurs propres de A sont inverses l'une de l'autre y apparaît comme essentiel. Il semble donc difficile de généraliser aux dimensions supérieures, excepté peut-être lorsque n est pair, car il existe dans ce cas des matrices hyperboliques A dans $\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$ telles que A et A^{-1} aient les mêmes valeurs propres.

Chapitre 4

Déformations de réseaux : un exemple dans les groupes de Lie résolubles non nilpotents

On se propose d'étudier un exemple non trivial de calcul de cohomologie pour un réseau résoluble. Cet exemple fait intervenir une fois encore l'hyperbolicité puisqu'il s'agit du produit semi-direct $\Gamma = \mathbb{Z}^n \rtimes_A \mathbb{Z}$ avec $\mathbb{Z}$ agissant sur $\mathbb{Z}^n$ (où $n \geq 2$) à l'aide d'une matrice hyperbolique $A \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$ diagonalisable et à valeurs propres réelles strictement positives. Si $A = PDP^{-1}$, on peut définir pour tout réel t la puissance A^t en posant $A^t = PD^tP^{-1}$, où D^t est la matrice diagonale des valeurs propres élevées à la puissance t et ainsi construire le produit semi-direct $G = \mathbb{R}^n \rtimes_A \mathbb{R}$ dans lequel la multiplication s'écrit :

$$(U, x)\,(V, y) = (U + A^x V, x + y)\,.$$

Le groupe G, muni de sa structure canonique de groupe de Lie, est résoluble et $\Gamma = \mathbb{Z}^n \rtimes_A \mathbb{Z}$ en est un réseau cocompact. On montrera dans un premier temps que l'espace $H^1(\Gamma, \mathfrak{g})$ n'est pas nul ; on pourra même donner sa dimension en fonction des multiplicités des valeurs propres de A. À défaut de rigidité locale, on se posera dans un second temps la question d'une rigidité locale relative au sens de la définition qui suit :

Définition 4.0.6. *Soient Γ un groupe de type fini, H un groupe topologique et G un sous-groupe de H. Un morphisme $r : \Gamma \to G$ est dit **localement H−rigide** si tout morphisme $r' : \Gamma \to G$ suffisamment proche de r est conjugué à r par un élément de H, c'est-à-dire s'il existe un voisinage V de r dans $R(\Gamma, G)$ tel que :*

$$\forall\ r' \in V,\ \exists\ h \in H,\ \forall\ \gamma \in \Gamma,\ r'(\gamma) = hr(\gamma)h^{-1}.$$

*Si Γ est un sous-groupe de G, on dira que Γ est **localement H−rigide dans** G si l'injection canonique de Γ dans G est localement H−rigide.*

Dans notre situation, le groupe $G = \mathbb{R}^n \rtimes_A \mathbb{R}$ et son réseau $\Gamma = \mathbb{Z}^n \rtimes_A \mathbb{Z}$ peuvent être considérés comme sous-groupes de $H = \mathrm{SL}(n+1, \mathbb{R})$ (d'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$) par le biais du plongement $u : (U, x) \mapsto \left(\begin{smallmatrix} A^x & U \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. On peut alors se poser la question de la rigidité locale de Γ dans H en remarquant que H est un groupe de Lie semi-simple mais dans lequel Γ n'est pas un réseau, et donc que cette situation ne remplit pas les hypothèses du théorème 1 (page 10). Malheureusement, le calcul de l'espace $H^1(\Gamma, \mathfrak{h})$ ainsi que la détermination directe des déformations de Γ dans H semblent loin d'être faciles. Néanmoins on établira que l'application linéaire $H^1(\Gamma, \mathfrak{g}) \to H^1(\Gamma, \mathfrak{h})$ induite par l'injection $G \hookrightarrow H$ est nulle, ceci laissant penser que Γ est localement H–rigide dans G. En passant par la détermination directe des déformations de Γ dans G relativement à H, on montrera pour finir que c'est effectivement le cas, ce qui par ailleurs nous permettra de préciser dans quelle mesure le réseau Γ n'est pas localement rigide dans G.

4.1 Calcul de l'espace $H^1(\Gamma, \mathfrak{g})$

4.1.1 La représentation adjointe de G et les champs invariants

Tâchons de décrire l'action de Γ sur G par la représentation adjointe et d'en déterminer les invariants. Pour tout $h \in G$, $\mathrm{Ad}_G(h)$ est l'application induite sur $\mathfrak{g}$, espace canoniquement isomorphe à l'espace tangent $T_0 G$ (l'élément neutre de G étant noté 0), par la dérivée de l'automorphisme intérieur $\rho_h : g \mapsto hgh^{-1}$ (voir section 2.2.4 page 44). Aussi, pour tous $h = (U, x)$ et $g = (V, y)$ dans G, on a :

$$\begin{aligned}\rho_h(g) &= (U, x)(V, y)(U, x)^{-1} \\ &= (U + A^x V, x + y)(-A^{-x} U, -x) \\ &= (U + A^x V - A^y U, y).\end{aligned}$$

La structure de variété de G peut être définie par la seule carte de G dans $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$((x_1, \dots, x_n), x_{n+1}) \longmapsto (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}).$$

Dans les repères naturels des espaces tangents $\mathrm{T}_g G$ et $\mathrm{T}_{\rho_h(g)} G$, la différentielle $d_g \rho_h$ est représentée par la matrice par blocs :

$$d_g \rho_h = \begin{pmatrix} A^x & -\dfrac{dA^y}{dy} U \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

De $A^y = PD^yP^{-1}$, on tire $\dfrac{dA^y}{dy} = PD^y(\ln D)P^{-1}$, où :

$$D^y = \begin{pmatrix} {\mu_1}^y & & \\ & \ddots & \\ & & {\mu_n}^y \end{pmatrix}, \ln D = \begin{pmatrix} \ln \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \ln \mu_n \end{pmatrix}.$$

D'où

$$d_g \rho_h = \begin{pmatrix} A^x & -PD^y(\ln D)P^{-1}U \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

et en l'élément neutre 0 de G :

$$d_0 \rho_h = \begin{pmatrix} A^x & -P(\ln D)P^{-1}U \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Considérons les champs de vecteurs tangents $X_1, \ldots, X_n, X_{n+1}$ sur G définis par :

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \\ X_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D^{x_{n+1}}{}^{t}P & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial/\partial x_1 \\ \vdots \\ \partial/\partial x_n \\ \partial/\partial x_{n+1} \end{pmatrix}, \tag{4.1.1}$$

c'est-à-dire, si $P = (p_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$, les champs qui en $g = ((x_1, \ldots, x_n), \ldots, x_{n+1})$ prennent la valeur :

$$\begin{cases} X_i(g) = {\mu_i}^{x_{n+1}} \left(p_{1i} \dfrac{\partial}{\partial x_1}(g) + \cdots + p_{ni} \dfrac{\partial}{\partial x_n}(g) \right) & \text{si } 1 \leq i \leq n \; ; \\ X_{n+1}(g) = \dfrac{\partial}{\partial x_{n+1}}(g). \end{cases}$$

On vérifie aisément que ces champs forment une base de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G et que de plus, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on a :

$$[X_i, X_j] = \begin{cases} 0 & \text{si } 1 \leq j \leq n \; ; \\ -(\ln \mu_i) X_i & \text{si } j = n+1. \end{cases}$$

On travaillera par la suite exclusivement dans cette base, dans laquelle $d_0\rho_h$, c'est-à-dire $\mathrm{Ad}_G(h)$, a pour matrice :

$$\begin{aligned} \mathrm{Ad}_G(h) &= \begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^x & -P(\ln D)P^{-1}U \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} D^x & -(\ln D)P^{-1}U \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On remarquera que, en tant que sous-groupes de Γ, d'une part $\mathbb{Z}$ agit trivialement sur $\mathbb{R}X_{n+1}$, et d'autre part $\mathbb{Z}^n$ agit trivialement sur $\mathfrak{g}_0 = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{R}X_i$.
On établit alors de manière immédiate la proposition suivante :

Proposition 4.1.1.

(i) $H^0(\mathbb{Z}^n, \mathfrak{g}) = \mathfrak{g}_o \simeq \mathbb{R}^n$;

(ii) $H^0(\mathbb{Z}, \mathfrak{g}) = \mathbb{R}X_{n+1} \simeq \mathbb{R}$;

(iii) $H^0(\Gamma, \mathfrak{g}) = 0$.

4.1.2 Les espaces $H^1(\mathbb{Z}^n, \mathfrak{g})$, $H^1(\mathbb{Z}, \mathfrak{g})$ et $H^1(\Gamma, \mathfrak{g})$

Toujours considérés comme sous-groupes de Γ, $\mathbb{Z}^n$ et $\mathbb{Z}$ agissent sur $\mathfrak{g}$. Déterminer leur cohomologie à valeurs dans $\mathfrak{g}$, et plus précisément la forme des 1–cocycles pour ces actions, nous sera utile pour calculer $H^1(\Gamma, \mathfrak{g})$.
Pour toute 1–cochaîne inhomogène $F : \mathbb{Z}^n \to \mathfrak{g}$ et tout $U \in \mathbb{Z}^n$, on pose :

$$F(U) = \begin{pmatrix} W_F(U) \\ w_{n+1,F}(U) \end{pmatrix} \text{ avec } W_F(U) = \begin{pmatrix} w_{1,F}(U) \\ \vdots \\ w_{n,F}(U) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Rappelons que $\mathrm{M}(n, \mathbb{R})$ désigne l'espace des matrices carrées réelles de dimension n.

Proposition 4.1.2.

(*i*) *Les 1–cocycles* $F : \mathbb{Z}^n \to \mathfrak{g}$ *sont les applications de la forme :*

$$F(U) = \begin{pmatrix} M_F U \\ 0 \end{pmatrix} \text{ où } M_F \in M(n, \mathbb{R}).$$

(*ii*) *Un 1–cocycle* $F : \mathbb{Z}^n \to \mathfrak{g}$ *est exact si, et seulement si, il existe* $w \in \mathbb{R}$ *tel que*

$$\forall\ U \in \mathbb{Z}^n,\ \ F(U) = \begin{pmatrix} -w(\ln D)P^{-1}U \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(*iii*) *L'espace* $H^1(\mathbb{Z}^n, \mathfrak{g})$ *est de dimension* $n^2 - 1$.

Preuve. (i) Notons $(c_j)_{1 \leq j \leq n}$ le sytème canonique de générateurs de $\mathbb{Z}^n$. Soit $F : \mathbb{Z}^n \to \mathfrak{g}$ un 1–cocycle, de l'égalité $F(c_i + c_j) = F(c_j + c_i)$ pour tous $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, on tire :

$$F(c_i) + (c_i, 0).F(c_j) = F(c_j) + (c_j, 0).F(c_i),$$

et donc :

$$(c_j, 0).F(c_i) - F(c_i) = (c_i, 0).F(c_j) - F(c_j)$$
$$\text{i.e. } \begin{pmatrix} 0 & -(\ln D)P^{-1}c_j \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_F(c_i) \\ w_{n+1,F}(c_i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -(\ln D)P^{-1}c_i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_F(c_j) \\ w_{n+1,F}(c_j) \end{pmatrix}.$$

D'où $w_{n+1,F}(c_i)c_j = w_{n+1,F}(c_j)c_i$, et comme c_i et c_j sont linéairement indépendants dans $\mathbb{R}^n$ lorsque $i \neq j$, $w_{n+1,F}(c_i) = 0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Soit J la projection de $\mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{g}_0$; comme $\mathbb{Z}^n$ agit trivialement sur $\mathfrak{g}_0$, $J \circ F$ est un morphisme de groupes de $\mathbb{Z}^n$ dans $\mathfrak{g}_0$, donc est de la forme $(J \circ F)(U) = M_F U$, avec $M_F \in \mathrm{M}(n, \mathbb{R})$. Ainsi F est nécessairement de la forme :

$$F(U) = \begin{pmatrix} M_F U \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, toute application $F : \mathbb{Z}^n \to \mathfrak{g}$ de cette forme est un 1–cocycle car alors :

$$\begin{aligned} F(U + V) &= \begin{pmatrix} M_F(U + V) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_F U \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} M_F V \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} M_F U \\ 0 \end{pmatrix} + (U, 0). \begin{pmatrix} M_F V \\ 0 \end{pmatrix} = F(U) + (U, 0).F(V). \end{aligned}$$

(ii) Les 1–cobords $F : \mathbb{Z}^n \to \mathfrak{g}$ s'écrivent : $F(U) = (U, 0).X - X$, avec $X \in \mathfrak{g}$. Si $X = \begin{pmatrix} W \\ w \end{pmatrix}$, alors :

$$F(U) = \begin{pmatrix} 0 & -(\ln D)P^{-1}U \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -w(\ln D)P^{-1}U \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(iii) découle immédiatement de (i) et (ii). □

Pour ce qui est de l'action de $\mathbb{Z}$, on a la proposition qui suit :

Proposition 4.1.3.

(*i*) *Les 1–cocycles $F : \mathbb{Z} \to \mathfrak{g}$ sont les applications de la forme :*

$$F(s) = \begin{pmatrix} (D^s - I)(D - I)^{-1} X_F(1) \\ s x_F(1) \end{pmatrix} \quad \text{avec } X_F(1) \in \mathbb{R}^n, x_F(1) \in \mathbb{R}.$$

(*ii*) *L'espace $H^1(\mathbb{Z}, \mathfrak{g})$ est de dimension 1.*

Preuve. (i) D'après la relation (1.2.1) page 21 donnant la forme des 1–cocycles dans un $\mathbb{Z}$–module ; on voit que dans notre situation les 1–cocycles $F : \mathbb{Z} \to \mathfrak{g}$ s'écrivent :

$$F(s) = \begin{pmatrix} X_F(s) \\ x_F(s) \end{pmatrix} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=0}^{s-1} (0,k).F(1) & \text{si } s \geq 0 \ ; \\ \displaystyle -\sum_{k=s}^{-1} (0,k).F(1) & \text{si } s \leq 0. \end{cases}$$

Donc ici :

$$F(s) = \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{k=0}^{s-1} D^k X_F(1) \\ s x_F(1) \end{pmatrix} \ \text{si } s \geq 0 \text{ et } F(s) = \begin{pmatrix} \displaystyle -\sum_{k=s}^{-1} D^k X_F(1) \\ s x_F(1) \end{pmatrix} \ \text{si } s \leq 0.$$

Aussi, pour tout entier $s \geq 0$: $D^s - I = \left(\sum_{k=0}^{s-1} D^k\right)(D - I)$, et

$$D^{-s} - I = -D^{-s}(D^s - I) = -D^{-s}\left(\sum_{k=0}^{s-1} D^k\right)(D - I) = -\left(\sum_{k=-s}^{-1} D^k\right)(D - I),$$

d'où la forme annoncée pour $F(s)$.
(ii) Soit $\sigma = (0, 1)$ le générateur de $\mathbb{Z}$ dans Γ. On sait que (*cf.* proposition 1.2.7 page 20) :

$$H^1(\mathbb{Z}, \mathfrak{g}) \simeq \mathrm{Coker}(\mathrm{Ad}_G(\sigma) - \mathrm{Id}_{\mathfrak{g}}),$$

espace vectoriel clairement de dimension 1 étant donné que $\mathrm{Ad}_G(\sigma) - \mathrm{Id}_{\mathfrak{g}}$ a pour matrice :

$$\begin{pmatrix} D - I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

Ces deux dernières propositions nous permettent de décrire les 1–cocycles de Γ dans $\mathfrak{g}$:

Proposition 4.1.4. *Les 1–cocycles $F : \Gamma \mapsto \mathfrak{g}$ sont les applications de la forme :*

$$F(U, s) = \begin{pmatrix} M_F U + (D^s - I)(D - I)^{-1} X_F(1) \\ 0 \end{pmatrix},$$

où $X_F(1) \in \mathbb{R}^n$ et $M_F \in M(n, \mathbb{R})$ est telle que $M_F A = D M_F$.

Preuve. Soit $F:\Gamma\mapsto\mathfrak{g}$ un 1–cocycle. Les restrictions $F_{|\mathbb{Z}^n}$ et $F_{|\mathbb{Z}}$ sont alors des 1–cocycles respectivement de $\mathbb{Z}^n$ et $\mathbb{Z}$ à valeurs dans $\mathfrak{g}$ et qui s'écrivent donc :

$$F_{|\mathbb{Z}^n}(U)=\begin{pmatrix}M_FU\\0\end{pmatrix}\ \text{ et }\ F_{|\mathbb{Z}}(s)=\begin{pmatrix}(D^s-I)(D-I)^{-1}X_F(1)\\ sx_F(1)\end{pmatrix},$$

avec $M_F\in\mathrm{M}(n,\mathbb{R})$, $X_F(1)\in\mathbb{R}^n$ et $x_F(1)\in\mathbb{R}$. Aussi, pour tout $(U,s)\in\Gamma$:

$$\begin{aligned}F(U,s)&=F((U,0)(0,s))=F_{|\mathbb{Z}^n}(U)+(U,0).F_{|\mathbb{Z}}(s),\\ &=F((0,s)(A^{-s}U,0))=F_{|\mathbb{Z}}(s)+(0,s).F_{|\mathbb{Z}^n}(A^{-s}U).\end{aligned}\tag{4.1.2}$$

D'où l'égalité

$$(U,0).F_{|\mathbb{Z}}(s)-F_{|\mathbb{Z}}(s)=(0,s).F_{|\mathbb{Z}^n}(A^{-s}U)-F_{|\mathbb{Z}^n}(U),$$

ce qui, pour $s=1$, donne :

$$\begin{pmatrix}0&-(\ln D)P^{-1}U\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X_F(1)\\x_F(1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}D&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}M_FA^{-1}U\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}M_FU\\0\end{pmatrix},$$

et donc

$$-x_F(1)(\ln D)P^{-1}U=(DM_FA^{-1}-M_F)U=(DM_FPD^{-1}-M_FP)P^{-1}U.$$

Ceci étant pour tout $U\in\mathbb{Z}^n$, en posant $N_F=M_FP=(n_{ij})_{1\le i,j\le n}$ on a :

$$DN_FD^{-1}-N_F=-x_F(1)\ln D.$$

Or cette dernière égalité signifie que, pour tous $i,j\in\{1,\dots,n\}$:

$$(\mu_i\mu_j^{-1}-1)n_{ij}=-x_F(1)\delta_{ij}\ln\mu_i,\tag{4.1.3}$$

où δij est le symbole de Kronecker, ce qui lorsque $i=j$ force $x_F(1)$ à être nul, si bien que $DN_FD^{-1}=N_F$. Ainsi $DM_FP=M_FPD$, ou encore :

$$DM_F=M_FPDP^{-1}=M_FA.\tag{4.1.4}$$

Finalement, suivant (4.1.2), F est de la forme :

$$F(U,s)=\begin{pmatrix}M_FU+(D^s-I)(D-I)^{-1}X_F(1)\\0\end{pmatrix}.$$

Réciproquement, on montre sans peine que toute application $F:\Gamma\to\mathfrak{g}$ de cette forme avec la condition (4.1.4) est un 1–cocycle. □

Proposition 4.1.5. *Les 1–cobords $F:\Gamma\mapsto\mathfrak{g}$ sont de la forme :*

$$F(U,s)=\begin{pmatrix}-w(\ln D)P^{-1}U+(D^s-I)W\\0\end{pmatrix}\ \ \textit{où } W\in\mathbb{R}^n, w\in\mathbb{R}.$$

Preuve. Les 1–cobords $F : \Gamma \to \mathfrak{g}$ sont les applications qui s'écrivent :

$$F(U, s) = (U, s).X - X, \text{ avec } X \in \mathfrak{g}.$$

Si $X = \begin{pmatrix} W \\ w \end{pmatrix}$, alors $F(U, s) = \begin{pmatrix} D^s - I & -(\ln D)P^{-1}U \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W \\ w \end{pmatrix}$
$$= \begin{pmatrix} -w(\ln D)P^{-1}U + (D^s - I)W \\ 0 \end{pmatrix}.$$

□

Nous sommes dès lors en mesure de déterminer la dimension de l'espace $H^1(\Gamma, \mathfrak{g})$:

Théorème 4.1.6. *Si A admet k valeurs propres distinctes, $k \leq n$, et si $m_1, \dots, m_k$ sont leurs multiplicités respectives, alors dim $H^1(\Gamma, \mathfrak{g}) = \sum_{i=1}^k {m_i}^2 - 1$.*

Preuve. La relation (4.1.3) qui, en définitive, s'écrit :

$$\forall\ i, j \in \{1, ..., n\},\ (\mu_i {\mu_j}^{-1} - 1)n_{ij} = 0,$$

montre que l'ensemble $\mathcal{M}_A$ des matrices N_F telles que $N_F D = D N_F$ est le sous-espace de $\mathrm{M}(n, \mathbb{R})$ engendré par l'ensemble des matrices élémentaires E_{ij} telles que $\mu_i = \mu_j$. La dimension de ce sous-espace est donc égale au cardinal de l'ensemble $\Delta_A = \left\{(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2 \middle| \mu_i = \mu_j\right\}$, c'est-à-dire à :

$$n + 2 \sum_{\substack{i=1 \\ m_i \geq 2}}^k \binom{m_i}{2} = n + \sum_{i=1}^k m_i(m_i - 1)$$
$$= n + \sum_{i=1}^k {m_i}^2 - \sum_{i=1}^k m_i = \sum_{i=1}^k {m_i}^2.$$

On déduit alors de la proposition 4.1.4 que l'application $\phi : F \mapsto (X_F(1), M_F P)$ est un isomorphisme entre l'espace $Z^1(\Gamma, \mathfrak{g})$ des 1–cocycles et $\mathbb{R}^n \oplus \mathcal{M}_A$, d'où dim $Z^1(\Gamma, \mathfrak{g}) = n + \sum_{i=1}^k {m_i}^2$. D'après la proposition 4.1.5, l'image par cet isomorphisme de l'ensemble $B^1(\Gamma, \mathfrak{g})$ des 1–cobords est :

$$\phi(B^1(\Gamma, \mathfrak{g})) = \{((D - I)W, -w \ln D) | W \in \mathbb{R}^n, w \in \mathbb{R}\},$$

et par conséquent dim $B^1(\Gamma, \mathfrak{g}) = n + 1$, d'où :

$$\dim\ H^1(\Gamma, \mathfrak{g}) = \dim\ Z^1(\Gamma, \mathfrak{g}) - \dim\ B^1(\Gamma, \mathfrak{g}) = \sum_{i=1}^k {m_i}^2 - 1.$$

□

4.2 Le morphisme induit $H^1(\Gamma, \mathfrak{g}) \to H^1(\Gamma, \mathfrak{h})$ est nul

Comme il a été dit dans l'introduction, on peut considérer G comme un sous-groupe de $H = \mathrm{SL}(n+1, \mathbb{R})$ au moyen du plongement

$$u : (U, x) \hookrightarrow \begin{pmatrix} A^x & U \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On peut restreindre ce morphisme au groupe Γ et s'intéresser à ses déformations, autrement dit à l'espace de cohomologie $H^1(\Gamma, \mathfrak{h})$, Γ agissant sur $\mathfrak{h} = \mathfrak{sl}(n+1, \mathbb{R})$ au moyen de $\mathrm{Ad}_H \circ u$, où la représentation adjointe Ad_H de H est simplement la conjugaison dans $\mathfrak{h}$. D'autre part, u est une application analytique de G dans H et on montre aisément (en utilisant le fait que $u \circ \rho_\gamma = \rho_{u(\gamma)} \circ u$ pour tout $\gamma \in \Gamma$) que sa différentielle $du : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ induit un morphisme entre les complexes de cochaînes $(C^k(\Gamma, \mathfrak{g}))_{k \in \mathbb{N}}$ et $(C^k(\Gamma, \mathfrak{h}))_{k \in \mathbb{N}}$, et donc un morphisme, encore noté du, entre les espaces de cohomologie $H^k(\Gamma, \mathfrak{g})$ et $H^k(\Gamma, \mathfrak{h})$, $du : [F] \mapsto [du \circ F]$. Dans ce qui suit, nous allons nous attacher à montrer que ce morphisme est nul.

4.2.1 L'application exponentielle de G

Afin d'obtenir l'expression de la différentielle $du : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$, on aura besoin de celle de l'application exponentielle de G pour exploiter le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "u"] & H \\ \mathfrak{g} \arrow[u, "\exp"] \arrow[r, "du"'] & \mathfrak{h} \arrow[u, "\exp"'] \end{tikzcd}$$

Les applications exponentielles étant des difféomorphismes locaux, la différentielle du est bien l'unique application de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{h}$ qui fait commuter ce diagramme.
Rappelons que nous nous sommes fixés dans $\mathfrak{g}$ la base $X_1, \ldots, X_n, X_{n+1}$ suivante :

$$\begin{cases} X_i(g) = {\mu_i}^{x_{n+1}} \left(p_{1i} \dfrac{\partial}{\partial x_1}(g) + \cdots + p_{ni} \dfrac{\partial}{\partial x_n}(g) \right) & \text{si } 1 \le i \le n \ ; \\ X_{n+1}(g) = \dfrac{\partial}{\partial x_{n+1}}. \end{cases}$$

Proposition 4.2.1. *L'application exponentielle* $\exp : \mathfrak{g} \to G$ *est définie par*

$$\exp : \textstyle\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i X_i \mapsto (P\Phi(\lambda_{n+1})\Lambda, \lambda_{n+1}),$$

où $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$, $\Phi(t) = \begin{pmatrix} \phi_1(t) & & \\ & \ddots & \\ & & \phi_n(t) \end{pmatrix}$ *avec* $\phi_i(t) = \dfrac{{\mu_i}^t - 1}{t \ln \mu_i}$, $1 \le i \le n$.

Preuve. Pour toute fonction numérique f analytique sur G, on a :

$$f(\exp tX) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} (X^k f)(0).$$

Considérons pour chaque entier $j \in \{1,\dots,n+1\}$ la fonction numérique

$$f_j : g = ((x_1,\dots,x_n),x_{n+1}) \mapsto x_j.$$

Soit $j \in \{1,\dots,n\}$ fixé ; on a :

$$\begin{cases} (X_i f_j)(g) = {\mu_i}^{x_{n+1}} \left(p_{1i}\dfrac{\partial f_j}{\partial x_1}(g) + \cdots + p_{ni}\dfrac{\partial f_j}{\partial x_n}(g) \right) = p_{ji}{\mu_i}^{x_{n+1}} \text{ si } 1 \le i \le n \ ; \\ (X_{n+1}f_j)(g) = 0. \end{cases}$$

D'où

$$\begin{cases} (X_i' X_i f_j)(g) = 0 & \forall\, i \in \{1,\dots,n+1\}, \forall\, i' \in \{1,\dots,n\} \ ; \\ (X_{n+1}X_i f_j)(g) = (\ln\mu_i)p_{ji}{\mu_i}^{x_{n+1}} & \forall\, i \in \{1,\dots,n\} \ ; \\ ({X_{n+1}}^2 f_j)(g) = 0. \end{cases}$$

Et pour tout entier k :

$$({X_{n+1}}^k X_i f_j)(g) = (\ln\mu_i)^k p_{ji}{\mu_i}^{x_{n+1}} \text{ pour tout } i \in \{1,\dots,n\}.$$

Ainsi, si $X = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i X_i$, on a :

$$(X^k f_j)(g) = \begin{cases} f_j(g) = x_j & \text{si } k = 0 \ ; \\ {\lambda_{n+1}}^{k-1} \sum_{i=1}^n \lambda_i p_{ji}(\ln\mu_i)^{k-1}{\mu_i}^{x_{n+1}} & \text{si } k \ge 1. \end{cases}$$

D'où, si $\lambda_{n+1} \neq 0$:

$$\begin{aligned} f_j(\exp X) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{{\lambda_{n+1}}^{k-1}}{k!} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i p_{ji}(\ln\mu_i)^{k-1} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i p_{ji}}{\lambda_{n+1}\ln\mu_i} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda_{n+1}\ln\mu_i)^k}{k!} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i p_{ji} \frac{e^{\lambda_{n+1}\ln\mu_i} - 1}{\lambda_{n+1}\ln\mu_i} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i p_{ji}\phi_i(\lambda_{n+1}), \end{aligned}$$

expression qui reste valable lorsque $\lambda_{n+1} = 0$ en considérant les fonctions ϕ_i prolongées par continuité en 0. On vérifie de manière immédiate que

$$\begin{pmatrix} f_1(\exp X) \\ \vdots \\ f_n(\exp X) \end{pmatrix} = P\Phi(\lambda_{n+1})\Lambda.$$

Pour ce qui est de la dernière composante, on a :

$$\begin{cases} (X_i f_{n+1})(g) = 0 \text{ pour } 1 \le i \le n \ ; \\ (X_{n+1}f_{n+1})(g) = 1. \end{cases}$$

Par conséquent :

$$f_{n+1}(\exp X) = \lambda_{n+1}.$$

□

Dans la section 4.1.1, nous n'avons pas eu recours à l'application exponentielle pour déterminer la représentation adjointe de G. On peut vérifier que l'expression que l'on vient de trouver est bien celle cherchée en constatant la commutativité du diagramme :

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\rho_\gamma"] & G \\ \mathfrak{g} \arrow[u, "\exp"] \arrow[r, "\mathrm{Ad}_G(\gamma)"'] & \mathfrak{g} \arrow[u, "\exp"'] \end{tikzcd}$$

En effet, si $\gamma = (U, s) \in \Gamma$ est fixé, on a :

$$\begin{aligned} \rho_\gamma(\exp \textstyle\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i X_i) &= (U, s)(P\Phi(\lambda_{n+1})\Lambda, \lambda_{n+1})(-A^{-s}U, -s) \\ &= ((I - A^{\lambda_{n+1}})U + A^s P\Phi(\lambda_{n+1})\Lambda, \lambda_{n+1}) \\ &= (P(I - D^{\lambda_{n+1}})P^{-1}U + PD^s\Phi(\lambda_{n+1})\Lambda, \lambda_{n+1}) \end{aligned}$$

Or $I - D^{\lambda_{n+1}} = -\lambda_{n+1}\Phi(\lambda_{n+1}) \ln D$, si bien que

$$\rho_\gamma(\exp \textstyle\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i X_i) = (P\Phi(\lambda_{n+1})(-\lambda_{n+1}(\ln D)P^{-1}U + D^s\Lambda), \lambda_{n+1})$$

Aussi :

$$\begin{pmatrix} -\lambda_{n+1}(\ln D)P^{-1}U + D^s\Lambda \\ \lambda_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D^s & -(\ln D)P^{-1}U \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda \\ \lambda_{n+1} \end{pmatrix}$$

sont les coordonnées de $\mathrm{Ad}_G(\gamma)(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i X_i)$, et donc

$$\rho_\gamma(\exp \textstyle\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i X_i) = \exp(\mathrm{Ad}_G(\gamma) \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i X_i).$$

4.2.2 La différentielle du

Proposition 4.2.2. *La différentielle de l'application* $u : G \to H$ *est l'application* $du : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ *telle que*

$$du(\textstyle\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i X_i) = \begin{pmatrix} \lambda_{n+1}P(\ln D)P^{-1} & P\Lambda \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \textit{avec } \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Preuve. Soit $X = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i X_i$ tel que $\lambda_{n+1} \neq 0$, alors

$$u(\exp X) = \begin{pmatrix} A^{\lambda_{n+1}} & P\Phi(\lambda_{n+1})\Lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = K \begin{pmatrix} D^{\lambda_{n+1}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} K^{-1}$$

avec

$$K = \begin{pmatrix} P & -P(D^{\lambda_{n+1}} - I)^{-1}\Phi(\lambda_{n+1})\Lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

et donc

$$\begin{aligned} u(\exp X) &= K \left(\exp \begin{pmatrix} \lambda_{n+1} \ln D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) K^{-1} \\ &= \exp \left(\lambda_{n+1} K \begin{pmatrix} \ln D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} K^{-1} \right). \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$du(X) = \lambda_{n+1} K \begin{pmatrix} \ln D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} K^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_{n+1} P(\ln D) P^{-1} & P\Lambda \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.2.1}$$

Dans le cas où $\lambda_{n+1} = 0$, on a :

$$u(\exp X) = \begin{pmatrix} I & P\Lambda \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \exp \begin{pmatrix} 0 & P\Lambda \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

et l'égalité (4.2.1) reste donc valable. □

4.2.3 Nullité du morphisme induit $du : H^1(\Gamma,\mathfrak{g}) \to H^1(\Gamma,\mathfrak{h})$

Proposition 4.2.3. *Pour tout 1–cocycle $F : \Gamma \to \mathfrak{g}$ le 1–cocycle $du \circ F : \Gamma \to \mathfrak{h}$ est exact. Plus précisément, F étant de la forme donnée à la proposition 4.1.4, on a pour tout $\gamma = (U,s) \in \Gamma$:*

$$(du \circ F)(\gamma) = \mathrm{Ad}_H(u(\gamma))\Theta_F - \Theta_F$$

$$\textit{avec } \Theta_F = \begin{pmatrix} \left(\dfrac{\operatorname{tr} PM_F}{n+1}\right) I - PM_F & P(D-I)^{-1} X_F(1) \\ 0 & \dfrac{\operatorname{tr} PM_F}{n+1} \end{pmatrix}.$$

Preuve. Un 1–cocycle F et un élément γ étant fixés, on a :

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Ad}_H(u(\gamma))\Theta_F - \Theta_F = \\
&\begin{pmatrix} A^s & U \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(\dfrac{\operatorname{tr} PM_F}{n+1}\right) I - PM_F & P(D-I)^{-1} X_F(1) \\ 0 & \dfrac{\operatorname{tr} PM_F}{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{-s} & -A^{-s}U \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&\qquad - \begin{pmatrix} \left(\dfrac{\operatorname{tr} PM_F}{n+1}\right) I - PM_F & P(D-I)^{-1} X_F(1) \\ 0 & \dfrac{\operatorname{tr} PM_F}{n+1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -A^s PM_F A^{-s} + PM_F & A^s PM_F A^{-s} U + (A^s - I)P(D-I)^{-1} X_F(1) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Aussi :

$$\begin{aligned}
APM_F A^{-1} &= PDM_F PD^{-1} P^{-1} \\
&= PM_F APD^{-1} P^{-1} \quad \text{car } M_F A = DM_F \\
&= PM_F.
\end{aligned}$$

Donc, pour tout $s \in \mathbb{Z}$, $A^s PM_F A^{-s} = PM_F$, et par conséquent :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ad}_H(u(\gamma))\Theta_F - \Theta_F &= \begin{pmatrix} 0 & PM_F U + P(D^s - I)(D-I)^{-1} X_F(1) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= (du \circ F)(\gamma).
\end{aligned}$$

□

Par analogie avec l'énoncé du théorème de Weil, la proposition 4.2.3 nous amène à penser que Γ est localement H–rigide dans G. C'est ce qu'on va effectivement montrer dans la partie qui suit.

4.3 Le groupe Γ est localement H–rigide dans G

Dans cette dernière partie les groupes Γ et G seront toujours considérés comme des sous-groupes de H. On montre que, avec $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$, le groupe Γ admet pour présentation :

$$\Gamma = \left\langle \gamma_1, \ldots, \gamma_n, \gamma_{n+1} \;\middle|\; \begin{array}{rl} \gamma_{n+1}\gamma_j{\gamma_{n+1}}^{-1}{\gamma_n}^{-a_{nj}} \ldots {\gamma_1}^{-a_{1j}}, & 1 \leq j \leq n \\ \gamma_i\gamma_j{\gamma_i}^{-1}{\gamma_j}^{-1}, & 1 \leq i < j \leq n \end{array} \right\rangle .$$

Cette donnée de Γ en termes de générateurs et relations va nous permettre d'expliciter les morphismes de groupes de Γ dans G, les générateurs de Γ dans H étant :

$$\begin{aligned} r(\gamma_j) &= \begin{pmatrix} I & U_j \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{pour } j \in \{1, \ldots, n\}, \\ r(\gamma_{n+1}) &= \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Proposition 4.3.1. *Les éléments de $R(\Gamma, G)$ sont les morphismes r qui vérifient :*

$$\begin{aligned} r(\gamma_j) &= \begin{pmatrix} I & RU_j \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \textit{pour } j \in \{1, \ldots, n\}, \\ r(\gamma_{n+1}) &= \begin{pmatrix} A^{t_{n+1}} & R_{n+1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

où $R \in M(n, \mathbb{R})$, $R_{n+1} \in \mathbb{R}^n$, $t_{n+1} \in \mathbb{R}$ sont tels que $A^{t_{n+1}}R = RA$.

Preuve. Soit $r : \Gamma \to G$ un morphisme de groupes. Posons $g_j = r(\gamma_j)$ pour tout $j \in \{1, \ldots, n+1\}$; alors

$$g_j = \begin{pmatrix} A^{t_j} & R_j \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{avec } t_j \in \mathbb{R} \text{ et } R_j = (r_{ij})_{1\leq i\leq n} \in \mathbb{R}^n,$$

et il faut que

$$\forall\, j \in \{1, \ldots, n\},\ g_{n+1}g_j{g_{n+1}}^{-1} = {g_1}^{a_{1j}} \ldots {g_n}^{a_{nj}}, \tag{4.3.1}$$

$$\forall\, i, j \in \{1, \ldots, n\},\ g_ig_j = g_jg_i. \tag{4.3.2}$$

Or pour tout $j \in \{1, \ldots, n+1\}$:

$$g_{n+1}g_j{g_{n+1}}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{t_j} & (I - A^{t_j})R_{n+1} + A^{t_{n+1}}R_j \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

et, en ne s'intéressant pour l'instant qu'au premier bloc :

$$\begin{aligned} {g_1}^{a_{1j}} \ldots {g_n}^{a_{nj}} &= \begin{pmatrix} A^{t_1} & R_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{a_{1j}} \cdots \begin{pmatrix} A^{t_n} & R_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{a_{nj}} \\ &= \begin{pmatrix} A^{\sum_{i=1}^n a_{ij}t_i} & \text{---} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La condition (4.3.1) entraîne donc : $\forall\, j \in \{1,\dots,n\},\ t_j = \sum_{i=1}^n a_{ij}t_i$, c'est-à-dire

$$({}^{\mathrm{t}}\!A - I)\begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix} = 0.$$

Par conséquent $t_j = 0$ pour tout $j \in \{1,\dots,n\}$ et la condition (4.3.2) s'en trouve vérifiée. Ceci étant, on a :

$$g_1{}^{a_{1j}} \dots g_n{}^{a_{nj}} = \begin{pmatrix} A^{t_{n+1}} & \sum_{i=1}^n a_{ij}R_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

et donc $A^{t_{n+1}}R_j = \sum_{i=1}^n a_{ij}R_i$ pour tout $j \in \{1,\dots,n\}$, c'est-à-dire, en posant $R = (r_{ij})_{1\le i,j\le n}$:

$$RA = A^{t_{n+1}}R.$$

$\square$

De là, on peut également décrire assez aisément les déformations de Γ dans G :

Proposition 4.3.2. *Les déformations du sous-groupe Γ dans le groupe G sont les sous-groupes $\Gamma_{(\varepsilon)}$ de H engendrés par les éléments $\gamma_{(\varepsilon)1},\dots,\gamma_{(\varepsilon)n},\gamma_{(\varepsilon)n+1}$ de la forme*

$$\gamma_{(\varepsilon)j} = \begin{pmatrix} I & PI_{(\varepsilon)}P^{-1}U_j \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \textit{si } 1 \le j \le n,$$
$$\gamma_{(\varepsilon)n+1} = \begin{pmatrix} A & \sum_{i=1}^n \epsilon_i U_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

où $I_{(\varepsilon)} = I + \sum_{(i,j)\in\Delta_A} \epsilon_{ij}E_{ij}$, en rappelant que $\Delta_A = \left\{(i,j) \in \{1,\dots,n\}^2 \middle|\, \mu_i = \mu_j\right\}$.

Preuve. Les déformations $\Gamma_{(\varepsilon)}$ de Γ sont les sous-groupes de H engendrés par les éléments $\gamma_{(\varepsilon)1},\dots,\gamma_{(\varepsilon)n},\gamma_{(\varepsilon)n+1}$ qui a priori peuvent être mis sous la forme

$$\gamma_{(\varepsilon)j} = \begin{pmatrix} I & P(I + \sum_{1\le i,j\le n} \epsilon_{ij}E_{ij})P^{-1}U_j \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{si } 1 \le j \le n,$$
$$\gamma_{(\varepsilon)n+1} = \begin{pmatrix} A^{1+\epsilon} & \sum_{i=1}^n \epsilon_i U_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

et qui, d'après la proposition 4.3.1, doivent de plus vérifier

$$A^{1+\epsilon}P(I + \sum_{1\le i,j\le n} \epsilon_{ij}E_{ij})P^{-1} = P(I + \sum_{1\le i,j\le n} \epsilon_{ij}E_{ij})P^{-1}A,$$

c'est à dire

$$D^{1+\epsilon}(I + \sum_{1\le i,j\le n} \epsilon_{ij}E_{ij}) = (I + \sum_{1\le i,j\le n} \epsilon_{ij}E_{ij})D.$$

Puisque $D = \sum_{1\le i,j\le n} \delta_{ij}\mu_i E_{ij}$, cette relation s'écrit :

$$\sum_{1\le i,j\le n} \mu_i{}^{1+\epsilon}(\delta_{ij} + \epsilon_{ij})E_{ij} = \sum_{1\le i,j\le n} \mu_j(\delta_{ij} + \epsilon_{ij})E_{ij},$$

et donc

$$\forall\, i,j \in \{1,\dots,n\},\ \mu_i^{1+\epsilon}(\delta_{ij}+\epsilon_{ij}) = \mu_j(\delta_{ij}+\epsilon_{ij}). \tag{4.3.3}$$

Pour $i=j$, ceci donne :

$$\forall\, i \in \{1,\dots,n\},\ \mu_i^{1+\epsilon}(1+\epsilon_{ii}) = \mu_i(1+\epsilon_{ii}),$$

et les ϵ_{ii} étant suffisamment petits pour que $1+\epsilon_{ii}\neq 0$, on a $\mu_i^{1+\epsilon}=\mu_i$ pour tout i, et donc $\epsilon=0$. La condition (4.3.3) devient ainsi :

$$\forall\, i,j \in \{1,\dots,n\},\ \mu_i\epsilon_{ij} = \mu_j\epsilon_{ij},$$

d'où

$$\forall\, i,j \in \{1,\dots,n\},\ \mu_i \neq \mu_j \Rightarrow \epsilon_{ij}=0.$$

□

Théorème 4.3.3. *Le sous-groupe Γ est localement H–rigide dans G. Plus précisément, étant donnée une déformation $\Gamma_{(\varepsilon)}$ de Γ dans G telle que décrite dans la proposition 4.3.2 il existe un unique élément K de H tel que $\Gamma_{(\varepsilon)} = K\Gamma K^{-1}$, à savoir :*

$$K = \begin{pmatrix} \det I_{(\varepsilon)}{}^{-\frac{1}{n+1}} P I_{(\varepsilon)} P^{-1} & \det I_{(\varepsilon)}{}^{-\frac{1}{n+1}} (A-I)^{-1}\sum_{i=1}^n \epsilon_i U_i \\ 0 & \det I_{(\varepsilon)}{}^{-\frac{1}{n+1}} \end{pmatrix}.$$

Preuve. Soit $\Gamma_{(\varepsilon)}$ une déformation de Γ dans G ; supposons qu'il existe $K\in H$ tel que $\Gamma_{(\varepsilon)} = K\Gamma K^{-1}$ *i.e.* $K\Gamma = \Gamma_{(\varepsilon)}K$. On pose :

$$K = \begin{pmatrix} \tilde K & K_C \\ K_L & \kappa \end{pmatrix} \quad \text{avec } \tilde K \in \mathrm{M}(n,\mathbb{R}).$$

Alors, pour tout $j\in\{1,\dots,n\}$:

$$\begin{pmatrix} \tilde K & K_C \\ K_L & \kappa \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & U_j \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & PI_{(\varepsilon)}P^{-1}U_j \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde K & K_C \\ K_L & \kappa \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} \tilde K & \tilde K U_j + K_C \\ K_L & K_L U_j + \kappa \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde K + PI_{(\varepsilon)}P^{-1}U_jK_L & K_C + \kappa PI_{(\varepsilon)}P^{-1}U_j \\ K_L & \kappa \end{pmatrix},$$

d'où on tire :

$$\forall\, j\in\{1,\dots,n\},\ \begin{cases} PI_{(\varepsilon)}P^{-1}U_jK_L = 0, \\ (\tilde K - \kappa PI_{(\varepsilon)}P^{-1})U_j = 0, \\ K_LU_j = 0. \end{cases}$$

et donc $K_L = 0$ et $\tilde K = \kappa PI_{(\varepsilon)}P^{-1}$. En outre, on a :

$$\begin{pmatrix} \tilde K & K_C \\ 0 & \kappa \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & \sum_{i=1}^n \epsilon_i U_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde K & K_C \\ 0 & \kappa \end{pmatrix},$$

i.e.

$$\begin{pmatrix} \tilde K A & K_C \\ 0 & \kappa \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\tilde K & AK_C + \kappa\sum_{i=1}^n \epsilon_i U_i \\ 0 & \kappa \end{pmatrix},$$

d'où $\tilde{K}A = A\tilde{K}$, égalité qui est bien vérifiée avec $\tilde{K} = \kappa P I_{(\varepsilon)} P^{-1}$, et $K_C = -\kappa(A-I)^{-1}\sum_{i=1}^n \epsilon_i U_i$. Ainsi :

$$K = \begin{pmatrix} \kappa P I_{(\varepsilon)} P^{-1} & \kappa(A-I)^{-1}\sum_{i=1}^n \epsilon_i U_i \\ 0 & \kappa \end{pmatrix},$$

et la condition $\det K = 1$ donne $\kappa = \det I_{(\varepsilon)}{}^{-\frac{1}{n+1}}$ (les ϵ_{ij} étant suffisamment petits pour que $I_{(\varepsilon)}$ soit inversible). □

Le théorème 4.1.6 nous laissait à penser que le réseau Γ n'est pas localement rigide dans G, ce que l'on on peut maintenant affirmer :

Proposition 4.3.4. *Le réseau Γ n'est pas localement rigide dans G. Plus précisément, les seules déformations de Γ qui sont conjuguées à Γ dans G sont les sous-groupes $\Gamma_{(\varepsilon)}$ engendrés par les éléments $\gamma_{(\epsilon)1}, \ldots, \gamma_{(\epsilon)n}, \gamma_{(\epsilon)n+1}$ de la forme*

$$\gamma_{(\varepsilon)j} = \begin{pmatrix} I & A^{\epsilon}U_j \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad si\ 1 \leq j \leq n,$$
$$\gamma_{(\varepsilon)n+1} = \begin{pmatrix} A & \sum_{i=1}^n \epsilon_i U_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Preuve. Etant donnée une déformation $\Gamma_{(\varepsilon)}$ de Γ dans G, il s'agit de voir si l'élément K donné par le théorème 4.3.3 est dans G. Or ceci est le cas si, et seulement si, il existe un réel ϵ tel que $PI_{(\varepsilon)}P^{-1} = A^{\epsilon}$ *i.e.* $I_{(\varepsilon)} = D^{\epsilon}$ et $\det I_{(\varepsilon)} = 1$, cette deuxième condition étant superflue car découlant de la première. □

Bibliographie

[Ano67] D. V. Anosov, *Geometric flows on closed Riemann manifolds with negative curvature*, Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, no. 90, 1967, Translated from the Russian by S. Feder, AMS, Providence, R.I., 1969.

[Cal61] E. Calabi, *On compact, Riemannian manifolds with constant curvature I*, Proc. Sympos. Pure Math., vol. III, AMS, Providence, R.I., 1961, pp. 155–180.

[CV60] E. Calabi et E. Vesentini, *On compact, locally symmetric Kälher manifolds*, Ann. Math. (2) **71** (1960), 472–507.

[Fis04] D. Fisher, *Local rigidity of group actions : past, present, future*, preprint, à paraître chez Cambridge Univ. Press, 2004.

[Fis05] ______, *First cohomology, rigidity and deformations of isometric group actions*, 2005.

[FM05] D. Fisher et G.A. Margulis, *Almost isometric actions, property* (T) *and local rigidity*, Invent. Math. **162** (2005), no. 1, 19–80.

[Gui80] A. Guichardet, *Cohomologie des groupes topologiques et des algèbres de Lie*, Collection "Textes mathématiques", CEDIC/Fernand Nathan, 1980.

[Hit03] T.J. Hitchman, *Rigidity theorems for large dynamical systems with hyperbolic behavior*, Ph.D. thesis, University of Michigan, 2003.

[HS53] G. Hochschild et J.P. Serre, *Cohomology of group extensions*, Transactions AMS **74** (1953), 110–134.

[Hur92] S. Hurder, *Rigidity for Anosov actions of higher rank lattices*, Ann. Math. **135** (1992), 361–410.

[Hur95] ______, *Infinitesimal rigidity for hyperbolic actions*, J. Differential Geom. **41** (1995), 515–527.

[Kan96] M. Kanai, *A new approach to the rigidity of discrete group actions*, Geom. Funct. Anal. **6** (1996), no. 6, 943–1056.

[KL91] A. Katok et J. W. Lewis, *Local rigidity for certain groups of toral automorphisms*, Israel Journ. Math. **75** (1991), 203–241.

[Kok99] A. Kokonenko, *Infinitesimal rigidity of boundary lattice actions*, Ergodic Theory Dynam. Systems **19** (1999), no. 1, 35–60.

[Lew91] J. W. Lewis, *Infinitesimal rigidity for the action of* $SL(n, \mathbb{Z})$ *on* $\mathbb{T}^n$, Transactions AMS **324** (1991), 421–445.

[Lyn46] R.C. Lyndon, *The cohomology theory of group extensions*, Harvard Univ., 1946.

[LZ89] A. Lubotzky et R. J. Zimmer, *Variants of Kazhdan's property for subgroups of semisimple groups*, Israel Journ. Math. **66** (1989), no. 1-3.

[MM63] Y. Matsushima et S. Murakami, *On vector bundle valued harmonic forms and automorphic forms on symmetric riemannian manifolds*, Ann. Math. (2) **78** (1963), 365–416.

[Pic73] G. Pichon, *Groupes de Lie. représentations linéaires et applications*, Collection Méthodes, Hermann, Paris, 1973.

[Pol95] M. Pollicott, *Infinitesimal rigidity of group actions with hyperbolic generators*, Dynamical systems and applications, World Sci. Ser. Appl. Anal., vol. 4, World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 1995, pp. 589–599.

[Qia96] N. Qian, *Infinitesimal rigidity of higher rank lattice actions*, Comm. Anal. Geom. **4** (1996), no. 3, 495–524.

[Rag65] M. S. Raghunathan, *On the first cohomology of discrete subgroups of semisimple Lie groups*, Amer. Journ. Math. **41** (1965), 103–139.

[Rag72] ______, *Discrete subgroups of Lie groups*, Springer, New-York, 1972.

[Rou05] C. Rousseau, *On Sobolev infinitesimal rigidity of linear hyperbolic actions on the 2–torus*, Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.) **36** (2005), no. 3, 379–391.

[Rou06] ______, *Déformations de réseaux dans certains groupes résolubles*, preprint, 2006.

[Sel60] A. Selberg, *On discontinuous groups in higher-dimensional symmetric spaces*, Contibutions to function theory, Tata Institute of Fundamental Research, 1960, pp. 147–164.

[Ser68] J.P. Serre, *Corps locaux*, Hermann, Paris, 1968.

[Sma67] S. Smale, *Differentiable dynamical systems*, Bull. Amer. Math. Soc. **73** (1967), 747–817.

[Spa95] R.J. Spatzier, *Harmonic analysis in rigidity theory*, Ergodic theory and its connections with harmonic analysis (Alexandria, 1993), London Math. Soc. Lecture Note Ser., 205, Cambridge Univ. Press, 1995, pp. 153–205.

[Spa04] ______, *An invitation to rigidity theory*, Modern dynamical systems and applications, Cambridge Univ. Press, 2004, pp. 211–231.

[Wei60] A. Weil, *On discrete subgroups of Lie groups*, Ann. Math. **72** (1960), 369–384.

[Wei62] ______, *On discrete subgroups of Lie groups II*, Ann. Math. **75** (1962), 578–602.

[Wei64] ______, *Remarks on the cohomology of groups*, Ann. Math. **80** (1964), 149–157.

[Zim86] R.J. Zimmer, *Actions of semisimple groups and discrete subgroups*, Proc. Internat. Cong. Math. (Berkeley), 1986, pp. 1247–1258.

[Zim90] R. J. Zimmer, *Infinitesimal rigidity for smooth actions of discrete subgroups of Lie groups*, J. Differential Geom. **31** (1990), 301–322.

Résumé

Le critère de rigidité locale donné par Weil en 1964 est à l'origine de nombreux calculs de cohomologie des groupes appliqués à l'étude des déformations de réseaux dans les groupes de Lie. En introduisant par analogie la notion de rigidité infinitésimale, Zimmer suggère le même type de calcul pour les déformations d'actions de groupes sur les variétés différentiables. On traite dans ce travail de situations peu étudiées jusqu'alors pour ces deux notions de rigidité :

- l'action standard sur le tore $\mathbb{T}^2$ d'un sous-groupe d'indice infini de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ engendré par une matrice hyperbolique. On définira la notion de rigidité W^s–infinitésimale de Sobolev pour cette action et on montrera que cette dernière n'est W^s–infinitésimalement rigide que si s est strictement inférieur à 1, et de là, que cette action n'est pas différentiablement infinitésimalement rigide.
- les déformations d'un réseau Γ dans un groupe de Lie G résoluble non nilpotent. On déterminera la dimension de l'espace de cohomologie $H^1(\Gamma,\mathfrak{g})$ censé « mesurer » le défaut de rigidité de ce réseau, puis, par la description précise de ses déformations, on montrera que, bien que n'étant pas localement rigide dans G, le groupe Γ, considéré comme sous-groupe de $\mathrm{SL}(n+1,\mathbb{R})$, est localement $\mathrm{SL}(n+1,\mathbb{R})$–rigide dans G dans le sens où toute déformation suffisamment petite de Γ dans G est conjuguée à Γ par un élément de $\mathrm{SL}(n+1,\mathbb{R})$.

Discipline

Mathématiques

Mots-clés

Rigidité locale, Rigidité infinitésimale, Actions de groupes, Réseaux, Cohomologie des groupes

Adresse du laboratoire

Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis
LAMAV
Le Mont Houy
59313 Valenciennes Cedex 9