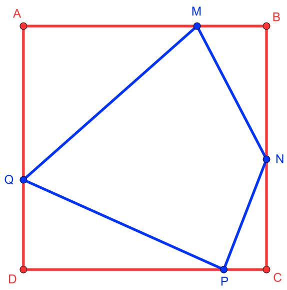
CIRCONSCRIRE UN CARRÉ À UN QUADRILATÈRE

Aziz El Kacimi

0. Le problème

On dira qu'un quadrilatère convexe $MNPQ$ est **inscrit** *dans un quadrilatère convexe $ABCD$ si $M \in [AB]$, $N \in [BC]$, $P \in [CD]$ et $Q \in [DA]$. On dira aussi que $ABCD$ est* **circonscrit** *à $MNPQ$ ou que $ABCD$* **encadre** *$MNPQ$ (cf. dessin ci-dessous).*

Soit $MNPQ$ un quadrilatère convexe. Peut-on l'inscrire dans un carré $ABCD$? Si oui, construire géométriquement tous les carrés $ABCD$ qui répondent à la question.



Dans tout le texte, notre quadrilatère $MNPQ$ a ses sommets distincts deux deux à deux. Mais on n'interdit pas à trois d'entre eux d'être alignés.

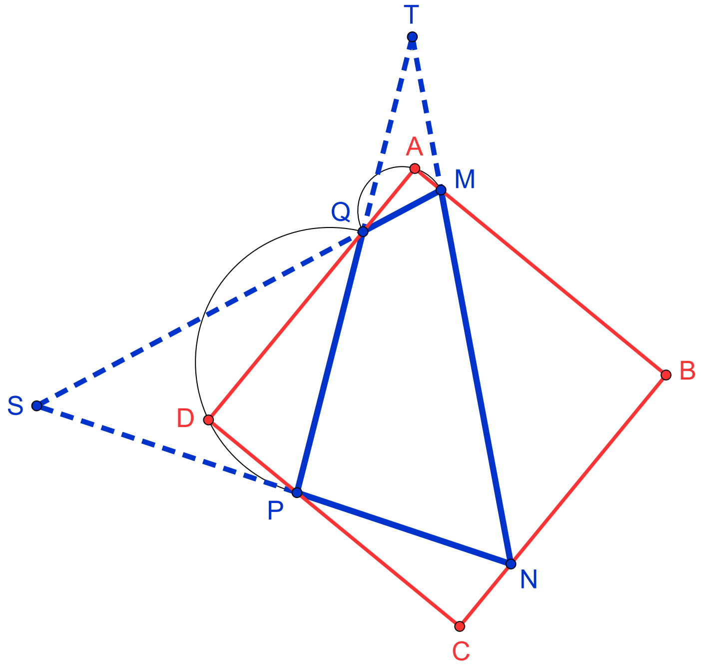
1. Conditions nécessaires d'existence

• La première

Chacun des points M, N, P et Q a deux positions limites dans le carré $ABCD$ (par exemple les points A et B pour M). Il n'est pas alors difficile de voir que les mesures des angles $(\overrightarrow{QP}, \overrightarrow{MN})$ et $(\overrightarrow{PN}, \overrightarrow{QM})$ doivent vérifier l'inégalité :

$$\max\left\{(\overrightarrow{QP}, \overrightarrow{MN}), (\overrightarrow{PN}, \overrightarrow{QM})\right\} \leq \frac{\pi}{2}. \tag{1}$$

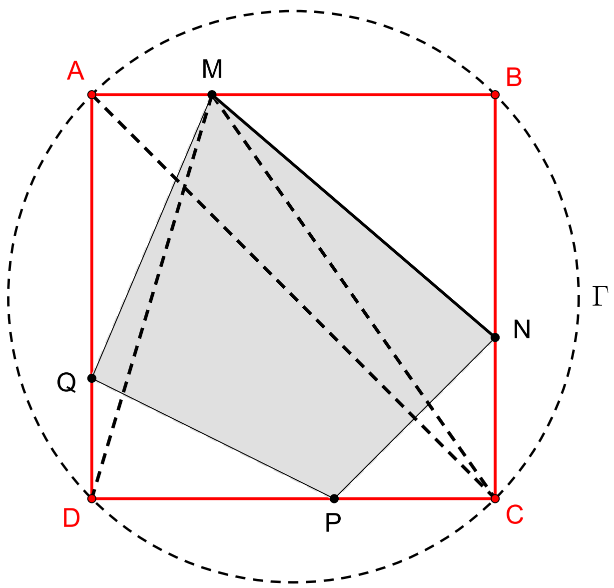
Notons S (resp. T) le point (éventuellement rejeté à l'infini) de rencontre des droites (PN) et (MQ) (resp. (PQ) et (MN)). Le point A doit être sur le demi-cercle $\mathcal{C}_+(MQ)$ de diamètre $[MQ]$ extérieur au quadrilatère $MNPQ$. Il est aussi sur la région $\mathcal{R}(MQT)$ délimitée par les côtés du triangle MQT ; sinon l'un des deux côtés du carré passant respectivement par M et Q traversera l'intérieur du quadrilatère $MNPQ$. La condition (1) nous dit alors que : $\mathcal{C}_+(MQ) \cap \mathcal{R}(MQT) \neq \emptyset$. De même, le point D doit être sur le demi-cercle $\mathcal{C}_+(PQ)$ de diamètre $[PQ]$ extérieur au quadrilatère $MNPQ$ et sur la région $\mathcal{R}(PQS)$ délimitée par les côtés du triangle PQS. La condition (1) nous dit aussi que $\mathcal{C}_+(PQ) \cap \mathcal{R}(PQS) \neq \emptyset$.



• <u>La deuxième</u>. On suppose le carré $ABCD$ construit. On trace le cercle Γ circonscrit à ce carré. Comme le point M varie sur le segment AB, il est intérieur au cercle Γ ; donc $\widehat{DMC} \geq \widehat{DAC}$. D'autre part, de façon évidente, on a $\widehat{QMN} \geq \widehat{DMC}$. Par suite $\widehat{QMN} \geq \widehat{DAC} = \frac{\pi}{4}$.

Notre deuxième condition nécessaire est donc :

$$\min\left\{\widehat{QMN}, \widehat{MNP}, \widehat{NPQ}, \widehat{PQM}\right\} \geq \frac{\pi}{4}. \tag{2}$$



2. Construction

Nous supposerons les conditions* (1) *et* (2) *remplies.

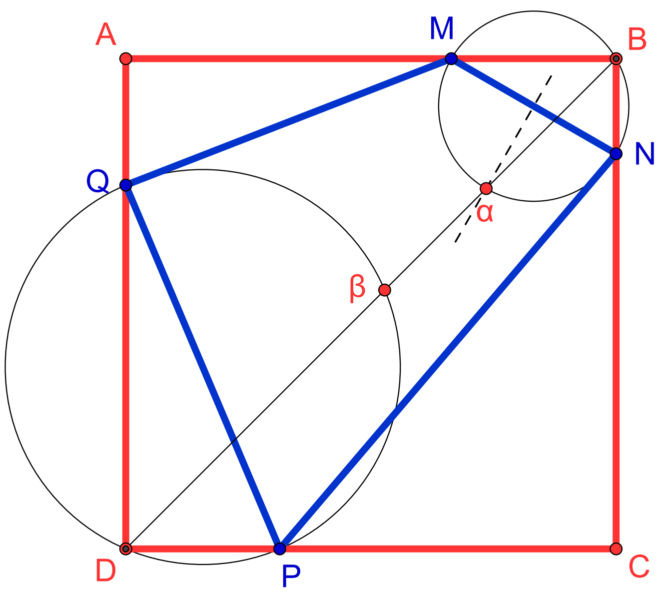
• Supposons $ABCD$ construit. On trace le cercle γ de diamètre $[MN]$; γ passe par le point B et coupe le segment $[BD]$ en un point α intérieur au quadrilatère (au sens large du terme : il peut être sur l'un des côtés) $MNPQ$. Comme les angles $\widehat{MB\alpha}$ et $\widehat{\alpha BN}$ sont égaux à $\frac{\pi}{4}$, le point α est sur la bissectrice de l'angle $\widehat{MBN}$, donc sur la médiatrice du segment $[MN]$ (c'est le milieu du demi-cercle γ qui est du côté du segment $[PQ]$).

Cette simple remarque mène vers le carré et sa construction !

• Maintenant nous ne disposons que du quadrilatère $MNPQ$ à encadrer. Soient α le milieu du demi-cercle γ_1 de diamètre $[MN]$ qui est du côté du segment $[PQ]$ et β le milieu du demi-cercle γ_2 de diamètre $[PQ]$ qui est du côté du segment $[MN]$. De même, soient α' le milieu du demi-cercle γ_1' de diamètre $[NP]$ qui est du côté du segment $[MQ]$ et β' le milieu du demi-cercle γ_2' de diamètre $[MQ]$ qui est du côté du segment $[NP]$.

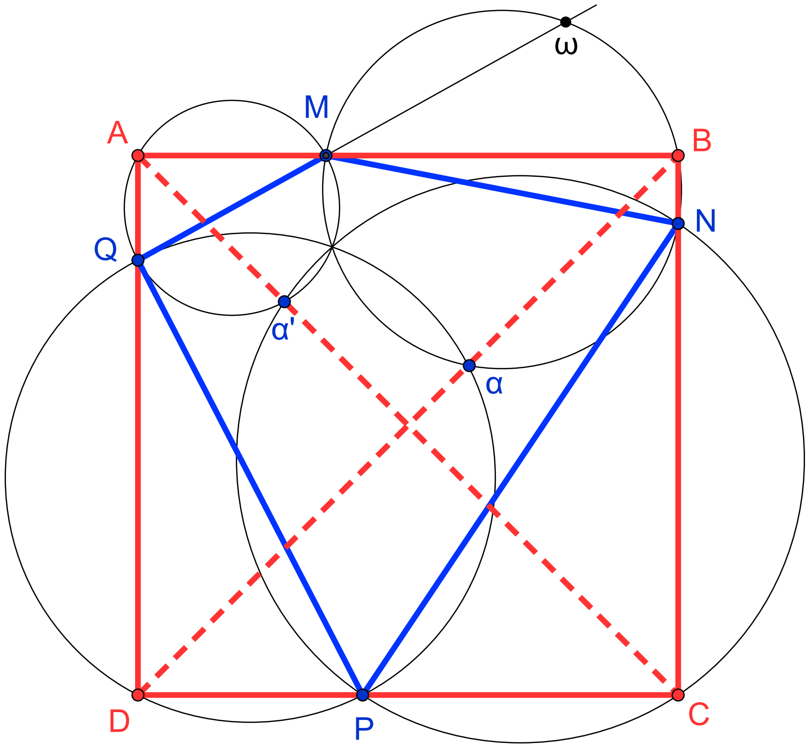
<u>Premier cas</u> : $\alpha \neq \beta$ (ou $\alpha' \neq \beta'$)

Les deux points α et β définissent une droite $(\alpha\beta)$. Celle-ci recoupe le cercle γ_1 en un point B et le cercle γ_2 en un point D. Soient A le point d'intersection des droites (BM) et (DQ) et C celui des droites (BN) et (DP). Comme les angles $\widehat{DBA}$, $\widehat{ADB}$, $\widehat{DBC}$ et $\widehat{CDB}$ valent $\frac{\pi}{4}$, les triangles DAB et DCB sont rectangles et isocèles respectivement en A et C. Par suite le quadrilatère $ABCD$ est un carré, celui précisément qui encadre le quadrilatère $MNPQ$. □



Deuxième cas : $\alpha = \beta$ (ou $\alpha' = \beta'$)

Sous-cas : $\alpha \neq \alpha'$

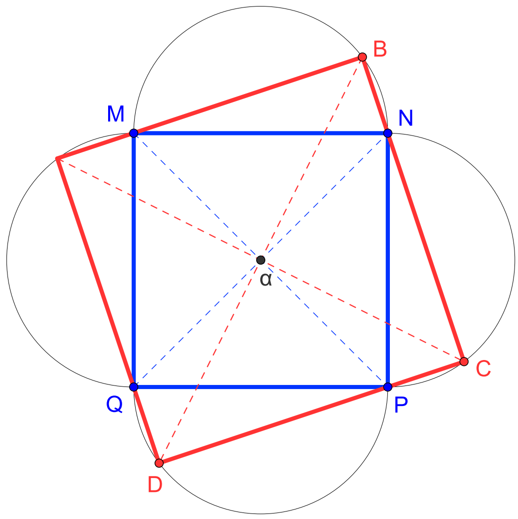


Les deux segments diagonaux $[BD]$ et $[AC]$ du carré $ABCD$ qu'on cherche doivent être perpendiculaires et passer respectivement par α et α'. En plus, le point B doit être sur le demi-cercle de diamètre $[MN]$ extérieur à $MNPQ$ et à l'intérieur de la région délimitée par les droites (NP) et (MQ) contenant le quadrilatère $MNPQ$; il doit donc être sur le plus petit des arcs joignant N à ω (*cf.* dessin ci-dessus). On choisit alors un point B sur cet arc. La droite (BM) intersecte le cercle de diamètre $[MQ]$ en A, (BN) le cercle de diamètre $[NP]$ en C et (CP) le cercle de diamètre $[PQ]$ en D.

Le pentagone $ABCDQ$ a quatre angles droits : $\widehat{QAB}$, $\widehat{ABC}$, $\widehat{BCD}$ et $\widehat{CDQ}$. Comme la somme de tous ses angles est 3π, le cinquième angle $\widehat{DQA}$ est nécessairement plat ; donc les points D, Q et A sont alignés. Ce pentagone est réduit alors au rectangle $ABCD$. Mais comme tout angle donné par un côté et une diagonale, par exemple $\widehat{\alpha BN}$, est égal à $\frac{\pi}{4}$ (car $[MN]$ est un diamètre et α est le milieu de l'arc d'extrémités M et N), ce quadrilatère est en fait un carré. $\square$

Sous-cas limite : $\alpha = \beta = \alpha' = \beta'$

Les quatre angles $\widehat{M\alpha N}$, $\widehat{N\alpha P}$, $\widehat{P\alpha Q}$ et $\widehat{Q\alpha M}$ sont droits. En plus, α est sur les médiatrices des segments $[MN]$, $[NP]$, $[PQ]$ et $[QM]$. Les quatre triangles αMN, αNP, αPQ et αQM sont donc rectangles et isocèles en α et égaux. Par suite le quadrilatère $MNPQ$ est un carré. C'est évidemment la situation la plus facile : on peut voir sur le dessin qui suit les carrés qui encadrent $MNPQ$.



Les points A, B, C et D varient sur les demi-cercles extérieurs au quadrilatère $MNPQ$ et ayant respectivement pour diamètres $[MQ]$, $[NM]$, $[PN]$ et $[QP]$.

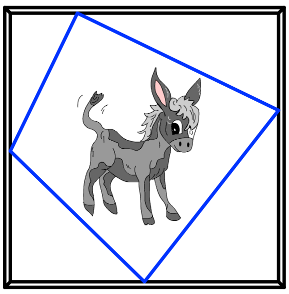
• **Note.** Dans [C.M. Hebbert, *The inscribed and circumscribed squares of a quadrilateral and their significance in kinematic geometry*, Annals of Mathematics Vol. 16 No. 1/4 (1914-1915), pp. 38-42.] l'auteur a établi le résultat qui suit :

Il existe une infinité de carrés circonscrits à un quadrilatère si, et seulement si, ce dernier a ses diagonales égales et perpendiculaires.

On peut démontrer (c'est simplement calculatoire) que la condition *diagonales égales et perpendiculaires* sur le quadrilatère $MNPQ$ est équivalente à celle de notre deuxième cas. Mais le premier cas (qui est générique) où le carré encadrant est unique n'a pas du tout été évoqué (et encore moins traité) dans ce papier.

3. Tout cela est-il inutile ?

À quoi sert-il d'expliciter les conditions d'existence d'un carré circonscrit à un quadrilatère et le construire ? C'est un exercice à énoncé simple certes mais sa solution n'est pas du tout immédiate. Outre le fait que chercher à le résoudre n'est pas plus qu'un challenge, il n'est sûrement pas inutile : il existe bien des gens dans la vie quotidienne qui pourraient en avoir drôlement besoin !



Imaginons une peinture faite sur une toile sous forme d'un quadrilatère et qu'on souhaite encadrer par un carré comme sur le dessin ci-dessus. Ce n'est pas si facile pour l'encadreur ! Dans un un premier temps, il pourrait penser que c'est toujours "théoriquement possible" si les angles ne sont pas trop écrasés : réellement, il n'y a pas de différence entre 44° et 45°, mesure en deçà de laquelle on sait que le carré encadrant n'existe pas. Mais un carré approximatif (qui ne se voit pas à l'œil nu) ferait l'affaire.

Mettons-nous dans la situation où tous les angles ont une mesure d'au moins 45° et que les deux angles formés par les côtés opposés n'excèdent pas 90°. Nous avons considéré divers cas dans la solution que nous avons donnée. L'encadreur a une infinité de choix dans le deuxième et la construction est facilement réalisable ; dans le troisième, le nombre de carrés est aussi infini et en tâtonnant un peu, il y arrivera. En revanche, dans le premier cas, la solution est unique, ce qui ne lui laisse guère de "marge d'erreur". Alors, comment fera-t-il ? La taille du carré peut s'avérer très utile. En admettant qu'il sache la calculer, reste quand même un problème : où placer un premier sommet du tableau sur un côté du cadre pour que ça fonctionne ? Évidemment, il peut commencer à le poser n'importe où et ensuite le faire glisser jusqu'à ce que tout s'ajuste. Mais c'est toujours frustrant pour un artisan de ne pas pouvoir construire les choses avec exactitude. Il est clair qu'on n'est pas plus à l'abri d'erreurs quand on construit un angle droit à la règle et au compas qu'avec une équerre. Seulement, l'erreur qu'on commet par la première méthode est conceptuellement plus acceptable. Malgré ce qu'on pourrait penser, les artisans ne font de l'approximatif que lorsqu'ils sont obligés de le faire : mon père était menuisier, ébéniste et charpentier et j'ai eu tant de fois à l'observer travailler le bois ; je me souviens qu'il préférait toujours, quand il avait le choix, reporter les longueurs à l'aide du compas plutôt que d'utiliser son mètre pliant.

Monsieur et Madame Tout le Monde, qui ont l'habitude de poser la même question "Mais à quoi cela sert-il ?", pourraient rétorquer en disant que l'exemple de la peinture a été inventé pour les besoins de la cause. Ce sera alors à l'encadreur de donner un avis. Peut-être arrivera-t-il à convaincre ces braves gens que la géométrie élémentaire plane, ça n'est pas si inutile que ça ! Il faudrait sûrement lui soumettre le problème un jour. Attendons la suite !

A. El Kacimi Alaoui
LAMATH, FR du CNRS 2956
ISTV2, Le Mont Houy
Université de Valenciennes
59313 Valenciennes Cedex 9 – France
Cité des Géométries – Gare numérique de Jeumont
aziz.elkacimi@univ-valenciennes.fr