

PETITE INTRODUCTION À LA COHOMOLOGIE DE DE RHAM

Aziz EL KACIMI ALAOU

Un des buts des mathématiques est la classification des objets dont elles font usage. C'est un problème non trivial et qui, certainement, restera toujours ouvert d'une façon ou d'une autre. À défaut de le résoudre individuellement pour chaque objet, on peut se contenter de le faire à *isomorphisme près*, notion qui dépend, bien sûr, de la catégorie dans laquelle on se situe. Un objet mathématique est un ensemble M supportant une ou plusieurs structures : c'est un espace topologique, un espace métrique, un espace mesurable, un groupe, un anneau, un espace vectoriel, un groupe topologique *etc.* Quand on se donne deux ensembles M et N sans structures supplémentaires, la notion d'équivalence consiste tout simplement à demander à M et N d'avoir le même "nombre d'éléments" ou, de façon plus précise, qu'il existe une bijection $\varphi : M \longrightarrow N$; on dit alors que M et N sont *équipotents*. Que se passe-t-il si en plus M et N supportent des structures respectives $\mathcal{S}_M$ et $\mathcal{S}_N$ (topologiques, algébriques ou autres) ? Il faut d'abord que M et N soient équivalents au sens esembliste *i.e.* il existe une bijection $\varphi : M \longrightarrow N$, ensuite il faut que $\mathcal{S}_M$ et $\mathcal{S}_N$ soient de même nature et que φ et φ^{-1} "respectent" ces structures. Si une telle application φ existe, on dira que les deux objets mathématiques $(M, \mathcal{S}_M)$ et $(N, \mathcal{S}_N)$ sont *isomorphes* ; l'application $\varphi : M \longrightarrow N$ est alors un *isomorphisme* : elle transporte tout ce qui se passe dans l'objet $(M, \mathcal{S}_M)$ vers l'objet $(N, \mathcal{S}_N)$ et φ^{-1} fait la même chose dans l'autre sens. Ceci permet de travailler indifféremment sur $(M, \mathcal{S}_M)$ ou $(N, \mathcal{S}_N)$ (suivant la nature du problème). On comprend donc à quel point il est important de chercher à établir un isomorphisme entre deux objets mathématiques.

Nous nous situerons dans la catégorie topologique. Deux espaces topologiques M et N sont dits *homéomorphes* s'il existe un *homéomorphisme* $\varphi : M \longrightarrow N$ *i.e.* φ est une bijection continue ainsi que son inverse φ^{-1} . Par exemple, dans le cas où M et N sont des ouverts de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$, un homéomorphisme peut s'interpréter comme un changement global de coordonnées : toute personne ayant fréquemment un peu les mathématiques a eu recours à ce type de procédé pour calculer une intégrale, résoudre une équation différentielle *etc.*

Le problème de l'homéomorphie s'avère donc être d'un intérêt incontestable mais en général difficile à résoudre. Une manière de l'aborder consiste à chercher des *invariants* dans une catégorie où le calcul est possible ; par exemple la *catégorie algébrique* : cela consiste à associer à chaque espace M un groupe, un anneau ou un espace vectoriel *etc.* qu'on notera $\pi(M)$ et qui sera tel que $\pi(M)$ est isomorphe à $\pi(N)$ si M est homéomorphe à N . Nous dirons que $\pi(M)$ est un *invariant topologique* de M .

Dans ce texte nous nous restreignons à des espaces topologiques particuliers pour simplifier l'exposé. Ce sont les *variétés différentiables*, sur lesquelles on peut dériver. À une variété différentiable M on peut associer un invariant topologique à l'aide des formes différentielles et l'opérateur de différentiation extérieure. C'est une suite d'espaces vectoriels $\{H^r(M)\}_{r \geq 0}$ naturellement associée à M et appelée *cohomologie de de Rham* de M . Son calcul n'est pas toujours immédiat mais plus la structure géométrique de M est fine plus on a d'outils pour le faire. Par exemple, si M est compacte, l'usage d'une *métrique riemannienne* permet de calculer $\{H^r(M)\}_{r \geq 0}$ par des formes différentielles plus jolies appelées *formes harmoniques*. Elles sont "peu nombreuses" (elles forment un espace vectoriel de dimension finie) et "sont déjà" la cohomologie de de Rham (c'est le *théorème de Hodge*) : *toute classe de cohomologie contient une forme harmonique et une seule*. La démonstration de ce théorème (bien qu'elle fasse actuellement partie du folklore) est hautement non triviale. Dans un autre volet nous définirons le cadre dans lequel il se situe et en exposerons les points essentiels avec quelques exemples.

1. Variétés différentiables

On se donne un espace topologique M qu'on suppose : i) *séparé* *i.e.* si $x, y \in M$ sont deux points distincts, il existe un voisinage U_x de x et un voisinage U_y tels que $U_x \cap U_y = \emptyset$; ii) *paracompact* *i.e.* tout recouvrement ouvert $\{U_i\}$ de M admet un recouvrement ouvert plus fin $\{V_j\}$ (chaque V_j est contenu dans un U_i) et localement fini (un compact de M ne rencontre qu'un nombre fini de V_j).

1.1. Définition. On dira que M est une **variété topologique** de dimension $n \in \mathbb{N}$ si tout point $x \in M$ possède un voisinage ouvert U homéomorphe à $\mathbb{R}^n$ *i.e.* il existe une application bijective $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow U$ telle que φ et son inverse φ^{-1} soient continues.

Un point $x \in U$ est repéré par les coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ dans $\mathbb{R}^n$ de son image réciproque $\varphi^{-1}(x)$. Pour cette raison on dira que U est un *ouvert de coordonnées locales* de M au voisinage de x . La paire (U, φ) est appelée *carte locale* et $(x_1, \dots, x_n)$ les *coordonnées* de x . Si (U, φ) et (V, ψ) sont deux cartes locales telles que l'intersection $U \cap V$ soit non vide alors un point $x \in U \cap V$ sera repéré par

ses coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ dans U et ses coordonnées $(x'_1, \dots, x'_n)$ dans V . Comme le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \varphi^{-1}(U \cap V) & \xrightarrow{\varphi} & U \cap V \\ \downarrow & & \parallel \\ \psi^{-1}(U \cap V) & \xrightarrow{\psi} & U \cap V \end{array}$$

est commutatif on doit avoir $(x'_1, \dots, x'_n) = \psi^{-1} \circ \varphi(x_1, \dots, x_n)$. L'application $\psi^{-1} \circ \varphi$ est appelée *changement de coordonnées* de la carte (U, φ) à la carte (V, ψ) .

On appelle *atlas* définissant M la donnée d'un recouvrement ouvert $\{U_i\}_{i \in I}$ et, pour chaque $i \in I$, d'un homéomorphisme $\varphi_i : \mathbb{R}^n \rightarrow U_i$; un tel objet sera toujours noté $\{U_i, \varphi_i\}_{i \in I}$. La régularité de la structure se lira sur celle des homéomorphismes $\varphi_j^{-1} \circ \varphi_i$ (pour $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ bien sûr). Désormais M sera une variété topologique de dimension n définie par un atlas $\{U_i, \varphi_i\}_{i \in I}$.

1.2. Définition. On dira que M est une **variété différentiable** si tous les homéomorphismes $\varphi_j^{-1} \circ \varphi_i$ (pour $U_i \cap U_j \neq \emptyset$) sont de classe C^∞ .

Tout ouvert non vide d'une variété différentiable de dimension n est une variété différentiable de même dimension.

Une variété différentiable M est dite *orientable* si tous les difféomorphismes $\varphi_j^{-1} \circ \varphi_i$ préservent l'orientation de $\mathbb{R}^n$ i.e. pour tout point $x \in U_i \cap U_j$, le déterminant de la différentielle de $\varphi_j^{-1} \circ \varphi_i$ au point $(\varphi_i^{-1}(x))$ est strictement positif.

Une variété différentiable est dite *compacte, connexe, etc.* si l'espace topologique sous-jacent est compact, connexe etc.

Dans toute la suite de ce paragraphe on ne considérera que les variétés de classe C^∞ connexes.

1.3. Exemples

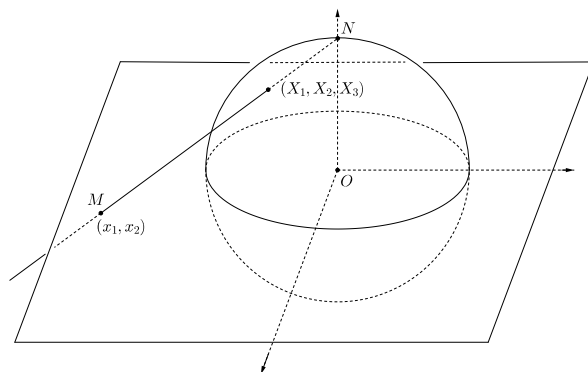
Ils sont abondants. Le premier à citer est bien sûr l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ lui-même (et tout ouvert de celui-ci) puisqu'il constitue le modèle local.

(1.3.1) - Soient k et ℓ deux entiers naturels et U un ouvert de $\mathbb{R}^k$. Une application différentiable $f : U \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ est dite de *rang constant* si le rang de l'application linéaire $d_x f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ (différentielle de f au point x) ne dépend pas de x . On dira que f est une *immersion* si, en tout point x de M , $d_x f$ est injective ; dans ce cas $k \leq \ell$. On dira que f est une *submersion* si, pour tout $x \in M$, $d_x f$ est surjective ; dans ce cas $k \geq \ell$. Supposons $k = n + q$, $\ell = q$ et, pour tout $c \in f(U)$, posons $M = \{x \in U : f(x) = c\}$. Si f est une submersion on montre, en utilisant le *théorème des fonctions implicites*, que M est une variété différentiable de dimension n . On dira que f est une *fonction définissant* M .

Beaucoup de variétés sont obtenues de cette manière ; par exemple la sphère de dimension n dans $\mathbb{R}^{n+1}$: $\mathbb{S}^{n+1} = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1\}$. C'est évidemment une sous-variété de $\mathbb{R}^{n+1}$ définie par une submersion ; mais on peut voir aussi sa structure de variété en exhibant explicitement un atlas. Faisons-le pour $\mathbb{S}^2$.

Considérons le recouvrement ouvert suivant $U_1 = \mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$ et $U_2 = \mathbb{S}^2 \setminus \{S\}$ où N et S sont respectivement le *pôle nord* et le *pôle sud* de la sphère. Alors l'application $\varphi_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow U_1 \subset \mathbb{R}^3$ définie par :

$$\varphi_1(x_1, x_2) = \left(\frac{2x_1}{1 + x_1^2 + x_2^2}, \frac{2x_2}{1 + x_1^2 + x_2^2}, \frac{-1 + x_1^2 + x_2^2}{1 + x_1^2 + x_2^2} \right)$$



est un homéomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur U_1 . Son inverse est : $\varphi_1^{-1}(X_1, X_2, X_3) = \left(\frac{X_1}{1-X_3}, \frac{X_2}{1-X_3} \right)$. De même l'application $\varphi_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow U_2$ donnée par :

$$\varphi_2(x_1, x_2) = \left(\frac{2x_1}{1+x_1^2+x_2^2}, \frac{2x_2}{1+x_1^2+x_2^2}, \frac{1-x_1^2-x_2^2}{1+x_1^2+x_2^2} \right)$$

est aussi un homéomorphisme ; l'inverse $\varphi_2^{-1} : U_2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ s'écrit $\varphi_2^{-1}(X_1, X_2, X_3) = \left(\frac{X_1}{1+X_3}, \frac{X_2}{1+X_3} \right)$. L'application de changement de cartes :

$$\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1 : \varphi_1^{-1}(U_1 \cap U_2) = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\} \longrightarrow \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\} = \varphi_2^{-1}(U_1 \cap U_2)$$

s'écrit alors $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1(x_1, x_2) = \left(\frac{x_1}{x_1^2+x_2^2}, \frac{x_2}{x_1^2+x_2^2} \right)$ qui est clairement différentiable ainsi que son inverse.

Nous avons donc exhibé de façon explicite un atlas de la sphère $\mathbb{S}^2$. Les applications φ_1^{-1} et φ_2^{-1} sont appelées *projections stéréographiques* de pôles respectifs N et S .

On appelle *sous-variété de dimension n* de $\mathbb{R}^k$ toute partie fermée M telle que, pour tout $x \in M$, il existe un voisinage ouvert U de x et une application différentiable $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^q$ définissant $M \cap U$.

En fait, toute variété différentiable M de dimension n peut être considérée comme sous-variété différentiable de $\mathbb{R}^k$ pour k suffisamment grand (c'est le *théorème de plongement* de Whitney dont on peut trouver une démonstration dans [3]).

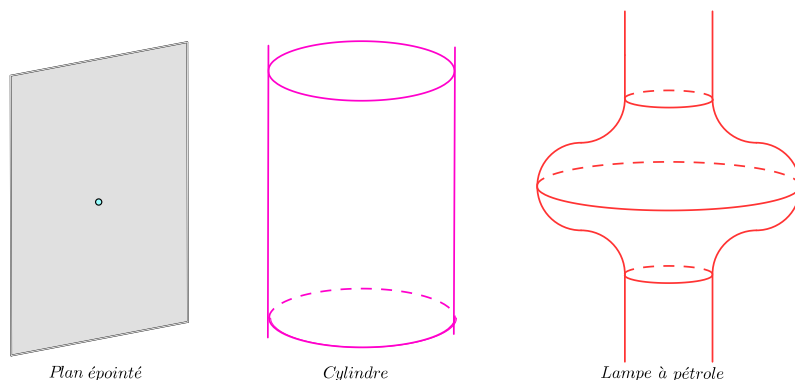
(1.3.2) - Soit $n \geq 1$ un entier. Sur $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ on considère la relation d'équivalence :

$$x \sim y \iff \text{il existe } \lambda \in \mathbb{R} \text{ non nul tel que } y = \lambda x.$$

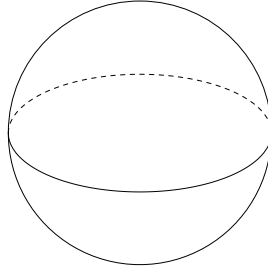
L'ensemble quotient $P^n(\mathbb{R}) = (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim$ est appelé *espace projectif réel* de dimension n . On peut montrer (c'est facile mais un peu long) que $P^n(\mathbb{R})$ est une variété différentiable compacte connexe de dimension n .

(1.3.3) - Soient M et N deux variétés différentiables de dimensions respectives n et q . Alors le produit cartésien $M \times N$ est une variété différentiable de dimension $n + q$. De manière générale le produit cartésien d'un nombre fini de variétés différentiables est une variété différentiable de dimension la somme des dimensions. Par exemple le produit de n exemplaires du cercle $\mathbb{S}^1$ est une variété de dimension n notée $\mathbb{T}^n$ et appelée *n -tore réel*. Le tore $\mathbb{T}^n$ possède en plus une structure de groupe et c'est une variété sur laquelle on peut mener beaucoup de calculs de manière plus aisée que sur d'autres.

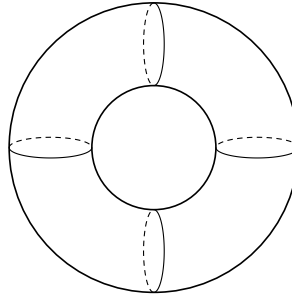
En voici d'autres. Les trois surfaces ci-dessous sont homéomorphes entre elles. Le lecteur est invité à trouver une démonstration géométrique. (Il pourrait aussi donner les expressions analytiques des différents homéomorphismes.)



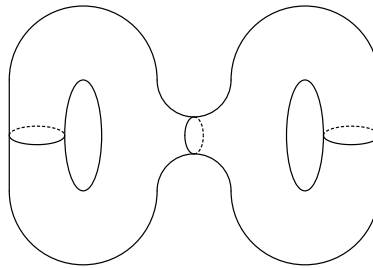
Par contre, deux quelconques parmi celles qui suivent ne sont pas homéomorphes. On le verra à la fin de cet exposé. Mais le lecteur un peu curieux peut déjà voir comment on peut démontrer le fait que la sphère $\mathbb{S}^2$ n'est pas homéomorphe au tore $\mathbb{T}^2$ en utilisant le théorème de Jordan (cf. Remarque 2.6.(iv)).



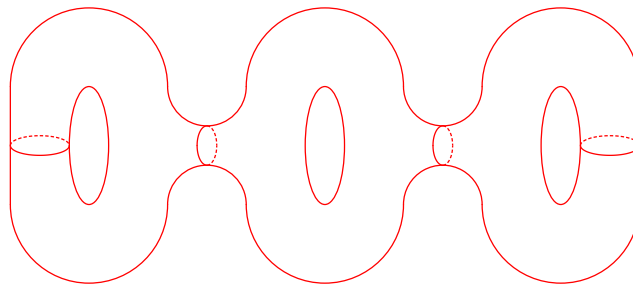
La sphère $\mathbb{S}^2$



Le tore $\mathbb{T}^2$



La surface de genre deux Σ_2



La surface de genre trois Σ_3

2. Cohomologie de de Rham

Soit M une variété différentiable définie à l'aide d'un atlas $\{U_i, \varphi_i\}_{i \in I}$ où $\{U_i\}$ est un recouvrement ouvert de M et $\varphi_i : \mathbb{R}^n \rightarrow U_i$ un difféomorphisme.

2.1. Les formes différentielles

Nous allons d'abord les introduire en supposant que M est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soit r un entier naturel et notons $\Lambda^r \mathbb{R}^n$ l'espace des r -formes extérieures sur $\mathbb{R}^n$. On appelle *forme différentielle de degré r* ou simplement *r -forme* sur M toute application $\alpha : M \rightarrow \Lambda^r \mathbb{R}^n$ de classe C^∞ . Pour chaque $x \in M$, α_x est une r -forme linéaire alternée sur $\mathbb{R}^n$. L'ensemble des r -formes différentielles sur M

est donc un espace vectoriel réel ; il sera noté $\Omega^r(M)$. On voit que $\Omega^r(M) = \{0\}$ si $r > n$; on pose $\Omega^r(M) = \{0\}$ pour $r < 0$. Toute r -forme α s'écrit dans les coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ sous la forme :

$$(1) \quad \alpha = \sum \alpha_{i_1 \dots i_r} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_r}.$$

où les $\alpha_{i_1 \dots i_r}$ sont des fonctions différentiables. Soient M et N deux ouverts respectivement de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$ et $\varphi : M \rightarrow N$ une application C^∞ . Alors, pour tout point $x \in M$, la différentielle $d_x \varphi$ est une application linéaire de l'espace $\mathbb{R}^n$ dans l'espace $\mathbb{R}^p$. Pour tout $r \in \mathbb{N}$, elle induit une application linéaire $\varphi^* : \Omega^r(N) \rightarrow \Omega^r(M)$ définie pour toute r -forme β sur N de la façon suivante : pour tout point $x \in M$ et tout système de r vecteurs $(u_1, \dots, u_r)$ de $\mathbb{R}^n$ on pose :

$$\varphi^*(\beta)(x)(u_1, \dots, u_r) = \beta(\varphi(x))(d_x \varphi(u_1), \dots, d_x \varphi(u_r)).$$

On dira que $\varphi^*(\beta)$ est l'*image réciproque* de β par φ .

Mettons-nous maintenant dans le cas général *i.e.* M n'est plus forcément un ouvert de $\mathbb{R}^n$ mais une variété quelconque définie comme on l'a dit par l'atlas $\{U_i, \varphi_i\}_{i \in I}$. On posera $\varphi_{ij} = \varphi_j^{-1} \circ \varphi_i$.

Une r -forme différentielle sur M est une collection $\alpha = (\alpha_i)_{i \in I}$ où α_i est une r -forme sur l'ouvert U_i (qui est difféomorphe à $\mathbb{R}^n$) telle que, sur toute intersection non vide $U_i \cap U_j$, on ait la condition de recollement $\alpha_i = \varphi_{ij}^*(\alpha_j)$. L'espace des r -formes différentielles sur M sera toujours noté $\Omega^r(M)$. Toutes les propriétés qu'on vient de donner de l'espace $\Omega^r(M)$ dans le cas où M est difféomorphe à $\mathbb{R}^n$ se transportent systématiquement au cas où M est une variété. On pose :

$$\Omega^*(M) = \bigoplus_{r=0}^n \Omega^r(M).$$

Deux formes différentielles $\alpha \in \Omega^r(M)$ et $\beta \in \Omega^s(M)$ s'écrivant : $\alpha = \sum \alpha_{i_1 \dots i_r} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_r}$ et $\beta = \sum \beta_{j_1 \dots j_s} dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_s}$ ont pour produit extérieur :

$$\alpha \wedge \beta = \sum \alpha_{i_1 \dots i_r} \beta_{j_1 \dots j_s} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_r} \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_s}$$

où la somme est étendue à tous les $(i_1, \dots, i_r)$ et $(j_1, \dots, j_s)$ tels que $1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n$ et $1 \leq j_1 < \dots < j_s \leq n$. On obtient ainsi une forme différentielle de degré $r + s$ sur M . On a bien sûr $\alpha \wedge \beta = (-1)^{rs} \beta \wedge \alpha$ et $\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) = (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma$. L'espace $\Omega^*(M)$ est ainsi muni d'une structure d'*algèbre graduée anticommutative*. Le produit extérieur d'une r -forme et d'une fonction (une 0-forme) est une r -forme différentielle. Chaque espace vectoriel $\Omega^r(M)$ admet donc une structure de *module* sur l'anneau des fonctions C^∞ sur M (qui n'est rien d'autre que $\Omega^0(M)$).

Dorénavant, on conviendra toujours que l'écriture dans une carte locale $(U, x_1, \dots, x_n)$ de n'importe quelle r -forme α sur M est celle donnée par une expression du type (1).

Soit $\varphi : M \rightarrow N$ une application différentiable. On définit de la même manière que pour les ouverts des espaces euclidiens, l'application image réciproque $\varphi^* : \Omega^*(N) \rightarrow \Omega^*(M)$. Elle vérifie les propriétés suivantes :

(2.1.1) - Si $M = N$ et φ est l'identité alors φ^* est l'identité de $\Omega^r(M)$ pour tout entier r . Si $M \xrightarrow{\varphi} N \xrightarrow{\psi} L$ sont deux applications C^∞ alors $(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^*$.

(2.1.2) - Si φ est un difféomorphisme alors φ^* est un isomorphisme entre les algèbres graduées $\Omega^*(N)$ et $\Omega^*(M)$ et on a $(\varphi^*)^{-1} = (\varphi^{-1})^*$.

2.2. La différentielle extérieure

À toute r -forme $\alpha = (\alpha_i)$ on associe la $(r + 1)$ -forme $d\alpha$ donnée (localement) par la formule :

$$(d\alpha)_i = \sum \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial \alpha_{i_1 \dots i_r}}{\partial x_k} dx_k \right) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_r}.$$

On définit ainsi, pour tout r , un opérateur linéaire $d : \Omega^r(M) \rightarrow \Omega^{r+1}(M)$ appelé *différentielle extérieure* sur M . Pour $\alpha \in \Omega^r(M)$ et $\beta \in \Omega^s(M)$ on a :

$$(2) \quad d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^r \alpha \wedge d\beta$$

i.e. d est une *dérivation* sur l'algèbre $\Omega^*(M)$. D'autre part, pour tout $r \in \mathbb{N}$, l'opérateur composé $d^2 = d \circ d : \Omega^r(M) \xrightarrow{d} \Omega^{r+1}(M) \xrightarrow{d} \Omega^{r+2}(M)$ est nul.

La différentielle d commute à φ^* pour toute application différentiable $\varphi : M \longrightarrow N$ *i.e.* pour tout $r \in \mathbb{N}$ le diagramme qui suit est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \Omega^r(N) & \xrightarrow{d} & \Omega^{r+1}(N) \\ \varphi^* \downarrow & & \downarrow \varphi^* \\ \Omega^r(M) & \xrightarrow{d} & \Omega^{r+1}(M). \end{array}$$

On dira que la r -forme α est *fermée* (ou un *cocycle*) si $d\alpha = 0$, *exacte* (ou un *cobord*) s'il existe $\beta \in \Omega^{r-1}(M)$, appelée *primitive* de α , telle que $\alpha = d\beta$. On pose :

$$Z^r(M) = \{r\text{-formes fermées sur } M\} \text{ et } B^r(M) = \{r\text{-formes exactes sur } M\}.$$

2.3. La cohomologie

D'après ce qu'on vient de voir, à toute variété M on peut associer une suite d'espaces vectoriels et d'opérateurs linéaires :

$$(3) \quad 0 \longrightarrow \Omega^0(M) \xrightarrow{d} \Omega^1(M) \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \Omega^{n-1}(M) \xrightarrow{d} \Omega^n(M) \longrightarrow 0$$

(où les première et dernière flèches sont bien sûr les applications nulles). On l'appelle *complexe de de Rham* de M . Comme $d^2 = 0$ on a, pour tout $r \in \mathbb{N}$, $B^r(M) \subset Z^r(M)$. On dira alors que la suite (3) est *semi-exacte*. Le défaut d'exactitude est mesuré par le quotient :

$$(4) \quad H^r(M) = Z^r(M)/B^r(M)$$

qu'on appelle $r^{\text{ème}}$ *espace de cohomologie de de Rham* de M . Deux r -formes fermées α et β sont dites *cohomologues* si elles définissent la même classe de cohomologie *i.e.* s'il existe une $(r-1)$ -forme γ telle que $\alpha - \beta = d\gamma$. L'espace vectoriel $H^r(M)$ est réduit à $\{0\}$ si, et seulement si, l'équation différentielle $\alpha = d\beta$ admet une solution pour toute r -forme fermée α . Ainsi, du point de vue de l'analyse, la cohomologie s'interprète comme une *obstruction* (on verra qu'elle sera topologique ou plus généralement *homotopique*) à l'existence de solutions de telles équations. Il est donc intéressant de chercher à comprendre cet objet, et à le calculer !

A priori, $H^*(M)$ n'est qu'un espace vectoriel mais on peut y mettre une structure multiplicative de la façon suivante. On sait que le produit extérieur de deux formes différentielles induit sur $\Omega^*(M)$ une structure multiplicative vérifiant $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^r \alpha \wedge d\beta$ pour $\alpha \in \Omega^r(M)$ et $\beta \in \Omega^s(M)$. Ceci montre clairement que $\alpha \wedge \beta$ est fermée si α et β le sont et que le produit extérieur induit un produit au niveau de la cohomologie $[\alpha] \wedge [\beta] = [\alpha \wedge \beta]$ pour toutes formes fermées α et β ; ici $[\omega]$ désigne la classe de cohomologie de la forme fermée ω . Ainsi, la cohomologie $H^*(M)$ d'une variété M est munie d'une structure d'algèbre.

2.4. Quelques propriétés

Voyons d'abord comment la cohomologie se transforme par une application différentiable. Soient M et N deux variétés et $\varphi : M \longrightarrow N$ une application C^∞ . Alors φ induit, pour tout $r \in \mathbb{N}$, une application linéaire $\varphi^* : \Omega^r(N) \longrightarrow \Omega^r(M)$ commutant à d . Il en résulte que φ^* transforme une forme fermée en forme fermée et forme exacte en forme exacte *i.e.* :

$$\varphi^*(Z^r(N)) \subset Z^r(M) \text{ et } \varphi^*(B^r(N)) \subset B^r(M).$$

Elle définit donc une application linéaire au niveau des espaces vectoriels de cohomologie :

$$\varphi^* : H^r(N) = Z^r(N)/B^r(N) \longrightarrow H^r(M) = Z^r(M)/B^r(M).$$

Soient maintenant M , N et L des variétés et $\varphi : M \longrightarrow N$, $\psi : N \longrightarrow L$ deux applications C^∞ . Comme au niveau des r -formes on a $(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^*$, le morphisme $(\psi \circ \varphi)^* : H^r(L) \longrightarrow H^r(M)$ n'est rien d'autre que le composé de $\psi^* : H^r(L) \longrightarrow H^r(N)$ et $\varphi^* : H^r(N) \longrightarrow H^r(M)$. D'autre part, il est immédiat que φ^* est l'identité de $H^r(M)$ si φ est l'identité de M . Il en résulte que si $\varphi : M \longrightarrow N$ est

un difféomorphisme alors $\varphi^* : H^r(N) \longrightarrow H^r(M)$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels d'inverse $(\varphi^{-1})^*$. Plus : φ^* est un isomorphisme d'algèbres entre $H^*(M)$ et $H^*(N)$. Ceci montre déjà une certaine invariance de l'objet $H^*(M)$.

En fait, la cohomologie est un invariant d'une propriété beaucoup plus faible que l'équivalence différentiable. Nous allons en dire un mot de façon très condensée.

(2.4.1) - Soient M et N deux variétés et $\varphi, \psi : M \longrightarrow N$ deux applications différentiables. On dira que φ et ψ sont *homotopes* s'il existe une application continue $H : M \times \mathbb{R} \longrightarrow N$ (appelée *homotopie* entre φ et ψ) telle que :

$$H(x, t) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{pour } t \leq 0 \\ \psi(x) & \text{pour } t \geq 1 \end{cases}$$

Si en plus H est différentiable, on dira que φ et ψ sont *différentiablement homotopes* ; dans ce cas on démontre que les morphismes $\varphi^*, \psi^* : H^*(M) \longrightarrow H^*(N)$ sont égaux.

(2.4.2) - A priori, une application continue $\varphi : M \longrightarrow N$ et qui n'est pas différentiable n'induit pas d'application linéaire en cohomologie : on a besoin de prendre les images réciproques des formes différentielles et cela doit utiliser la dérivée de φ dont on ne dispose pas. Toutefois une telle application est toujours homotope à une application $\widehat{\varphi} : M \longrightarrow N$ différentiable (*cf.* à cet effet [2]) ; le morphisme $\varphi^* : H^*(N) \longrightarrow H^*(M)$ sera celui induit par $\widehat{\varphi}$ par le résultat suivant dont on peut trouver une démonstration dans [2] et qui traduit explicitement l'*invariance topologique* de chacun des espaces $H^*(M)$:

Soient M et N deux variétés homéomorphes. Alors il existe une application $M \xrightarrow{\psi} N$, C^∞ induisant un isomorphisme d'algèbres $\psi^* : H^*(N) \longrightarrow H^*(M)$.

(2.4.3) - Deux applications $\varphi, \psi : M \longrightarrow N$ continues homotopes induisent les mêmes morphismes d'algèbres en cohomologie :

$$\varphi^*, \psi^* : H^*(N) \longrightarrow H^*(M)$$

(2.4.4) - On dira que deux variétés M et N ont même *type d'homotopie* s'il existe des applications continues $\varphi : M \longrightarrow N$ et $\psi : N \longrightarrow M$ telles que $\psi \circ \varphi$ et $\varphi \circ \psi$ soient homotopes respectivement à id_M et id_N ; ψ (resp. φ) est dite *inverse homotopique* de φ (resp. de ψ). Si $N \subset M$, on dira que N est un *rétracte par déformation* de M s'il existe une application continue $r : M \longrightarrow N$ telle que r soit l'identité sur N et $r \circ j$ et $j \circ r$ soient homotopes respectivement aux applications id_N et id_M (j étant l'inclusion de N dans M). Les variétés M et N ont donc même type d'homotopie. Si M se rétracte par déformation sur un point on dira que M est *contractile*.

Deux variétés qui ont même type d'homotopie ont des algèbres de cohomologie isomorphes.

2.5. Exemples de calcul

Il y a diverses méthodes pour calculer la cohomologie d'une variété. Quelquefois on peut le faire à la main de façon directe mais, en général, le calcul n'est pas du tout immédiat. On a toutefois quelques recettes. Par exemple, une manière de le faire serait de découper la variété en morceaux (ouverts) dont on peut déterminer la cohomologie de façon plus simple et ensuite essayer de "recoller la situation" ; c'est le but du *théorème de Mayer-Vietoris*. On peut aussi décomposer (quand cela est possible) la variété en produit cartésien de deux autres variétés ; la connaissance de la cohomologie de chacun des facteurs donne alors celle du produit ; c'est la *formule de Künneth*.

(2.5.1) - Le degré 0 et le degré maximum

La connaissance de la cohomologie à ces degrés est relativement importante. Soit M une variété différentiable connexe de dimension n .

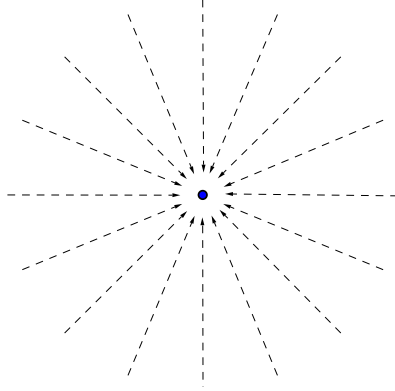
(i) L'espace vectoriel $H^0(M)$ est isomorphe à $\mathbb{R}$ engendré par la fonction constante égale à 1. En effet, une 0-forme fermée est une fonction constante qui n'admet aucune primitive si elle n'est pas nulle (puisque les formes de "degré négatif" sont toutes nulles).

(ii) Supposons M orientable. Alors l'espace vectoriel $H^n(M)$ est isomorphe à $\mathbb{R}$ si M est compacte (*i.e.* sans bord) et à $\{0\}$ sinon. La démonstration de ce fait n'est pas immédiate ; on en trouve une dans [2].

(2.5.2) - La cohomologie du point

Si M est un point $*$, l'algèbre des formes différentielles est $\Omega^r(*) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } r = 0 \\ 0 & \text{si } r \geq 1 \end{cases}$ munie de la différentielle nulle. Le seul espace de cohomologie non nul du point est donc $H^0(*)$ (qui est bien sûr isomorphe à $\mathbb{R}$).

Supposons que la variété M est l'espace $\mathbb{R}^n$. Alors elle a le type d'homotopie du point $\{0\}$. En effet l'application $H : \mathbb{R} \times M \longrightarrow M$ définie par $H(t, x) = \rho(t)x$ où $\rho(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t < 0 \\ 1-t & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{si } t > 1 \end{cases}$ est une homotopie entre l'identité de M et l'application constante qui à tout $x \in M$ associe 0.



Donc la cohomologie de $\mathbb{R}^n$ est celle du point. Et comme tout espace normé $(E, || \cdot ||)$ est homéomorphe à toute boule ouverte $B(x_0, \varepsilon) \subset E$ par l'application $x \in E \longmapsto \frac{\varepsilon x}{1+||x||} + x_0 \in B(x_0, \varepsilon)$, si $E = \mathbb{R}^n$ est muni de l'une quelconque de ses normes, on a :

$$H^r(B(x_0, \varepsilon)) = H^r(\mathbb{R}^n) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } r = 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(2.5.3) - La suite exacte de Mayer-Vietoris

On appelle *complexe différentiel* toute suite d'espaces vectoriels $\mathcal{E} = (E_r)_{r \in \mathbb{N}}$ (sur un corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et d'applications linéaires $d_r : E_r \longrightarrow E_{r+1}$ telles que $d_{r+1} \circ d_r = 0$. On écrit :

$$0 \longrightarrow E_0 \xrightarrow{d_0} E_1 \xrightarrow{d_1} \dots \xrightarrow{d_{r-1}} E_r \xrightarrow{d_r} E_{r+1} \xrightarrow{d_{r+1}} \dots$$

On a alors pour tout $r \in \mathbb{N}^*$:

$$B^r(\mathcal{E}) = \text{Im} d_{r-1} = \{d_{r-1}(x) : x \in E_{r-1}\} \subset Z^r(\mathcal{E}) = \text{Ker} d_r = \{x \in E_r : d_r x = 0\}.$$

Un élément du sous-espace $Z^r(\mathcal{E})$ est appelé *r-cocycle* et un élément de $B^r(\mathcal{E})$ est appelé *r-cobord*. Le quotient $H^r(\mathcal{E}) = Z^r(\mathcal{E})/B^r(\mathcal{E})$ est le $r^{\text{ème}}$ *espace vectoriel de cohomologie* du complexe $\mathcal{E}$.

Soient $\mathcal{E} = (E_r, d_r)$ et $\mathcal{F} = (F_r, \delta_r)$ deux complexes différentiels ; on appelle *morphisme* de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{F}$ la donnée, pour chaque $r \in \mathbb{N}$, d'une application linéaire $\varphi_r : E_r \longrightarrow F_r$ telle que le diagramme suivant soit commutatif.

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \xrightarrow{d_{r-1}} & E_r & \xrightarrow{d_r} & E_{r+1} & \xrightarrow{d_{r+1}} & \dots \\ & & \varphi_r \downarrow & & \downarrow \varphi_{r+1} & & \\ \dots & \xrightarrow{\delta_{r-1}} & F_r & \xrightarrow{\delta_r} & F_{r+1} & \xrightarrow{\delta_{r+1}} & \dots \end{array}$$

Il est clair qu'un tel morphisme envoie les cocycles et les cobords de $\mathcal{E}$ respectivement dans les cocycles et les cobords de $\mathcal{F}$; il induit donc un morphisme en cohomologie *i.e.* pour chaque $r \in \mathbb{N}$, on a une application linéaire $\varphi_r^* : H^r(\mathcal{E}) \longrightarrow H^r(\mathcal{F})$. On dira que $\varphi : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$ est un *quasi-isomorphisme* si, pour tout r , φ_r^* est un isomorphisme ; c'est le cas si tout φ_r est un isomorphisme.

Soient $\mathcal{E} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{F} \xrightarrow{\psi} \mathcal{G}$ deux morphismes de complexes différentiels. On vérifie facilement que $(\psi_r^* \circ \varphi_r^*)^* = \psi_r^* \circ \varphi_r^*$.

Soit $\varphi : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$ un morphisme ; le noyau et l'image de φ sont respectivement les suites d'espaces $\text{Ker} \varphi_r$ et $\text{Im} \varphi_r$ pour $r \in \mathbb{N}$.

À toute suite exacte de complexes différentiels $0 \longrightarrow \mathcal{E} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{F} \xrightarrow{\psi} \mathcal{G} \longrightarrow 0$ est associée une suite exacte longue de cohomologie :

$$\dots \longrightarrow H^r(\mathcal{E}) \xrightarrow{\varphi_r^*} H^r(\mathcal{F}) \xrightarrow{\psi_r^*} H^r(\mathcal{G}) \xrightarrow{\partial_r^*} H^{r+1}(\mathcal{E}) \longrightarrow \dots$$

L'application ∂_r^* est appelée *homomorphisme de connexion*.

Soient maintenant U_1 et U_2 deux ouverts d'une variété M tels que $M = U_1 \cup U_2$. Alors on a une suite exacte :

$$(5) \quad 0 \longrightarrow \Omega^*(M) \xrightarrow{\varphi} \Omega^*(U_1) \oplus \Omega^*(U_2) \xrightarrow{\psi} \Omega^*(U_1 \cap U_2) \longrightarrow 0$$

où $\varphi(\omega) = (\omega|_{U_1}, \omega|_{U_2})$ et $\psi(\alpha, \beta) = \alpha|_{U_1 \cap U_2} - \beta|_{U_1 \cap U_2}$. Seule la surjectivité de ψ n'est pas immédiate. Pour l'établir, soit (ρ_1, ρ_2) une partition de l'unité différentiable subordonnée à (U_1, U_2) . Pour toute forme $\theta \in \Omega^*(U_1 \cap U_2)$ on pose $\alpha = \rho_2 \theta$ et $\beta = -\rho_1 \theta$. On vérifie alors facilement que sur $U_1 \cap U_2$ on a $\psi(\alpha, \beta) = \theta$, ce qui montre bien que ψ est surjective. Le théorème de Mayer-Vietoris dit alors que cette suite induit une suite exacte longue de cohomologie :

$$(6) \quad \dots \longrightarrow H^r(M) \xrightarrow{\varphi_r^*} H^r(U_1) \oplus H^r(U_2) \xrightarrow{\psi_r^*} H^r(U_1 \cap U_2) \xrightarrow{\partial_r^*} H^{r+1}(M) \longrightarrow \dots$$

Ici l'homomorphisme de connexion ∂_r^* est défini par :

$$\partial_r^*([\theta]) = \begin{cases} [d(\rho_2 \theta)] & \text{sur } U_1 \\ [-d(\rho_1 \theta)] & \text{sur } U_2. \end{cases}$$

Nous utiliserons cette suite exacte pour le calcul effectif de la cohomologie de certaines variétés.

(2.5.4) - Formule de Künneth

Soient M et N deux variétés. Alors l'algèbre de cohomologie $H^*(M \times N)$ de $M \times N$ est le produit tensoriel des algèbres $H^*(M)$ et $H^*(N)$ i.e. pour tout $r \in \mathbb{N}$ on a :

$$H^r(M \times N) = \bigoplus_{p+q=r} H^p(M) \otimes H^q(N).$$

(2.5.5) - Cohomologie de $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

Nous ferons le calcul à la main. À cet effet il est nécessaire de connaître l'expression exacte des formes différentielles sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Elles s'écrivent, en coordonnées polaires (mieux adaptées au problème) :

$$h(\rho, \theta), \quad \alpha = a(\rho, \theta)d\rho + b(\rho, \theta)d\theta \quad \text{et} \quad \beta = c(\rho, \theta)d\rho \wedge d\theta$$

où h, a, b et c sont des fonctions C^∞ périodiques de période 2π en θ . La forme β est fermée (pour des raisons évidentes de degré) ; pour les autres leurs différentielles s'écrivent :

$$dh = \frac{\partial h}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial h}{\partial \theta} d\theta \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial b}{\partial \rho} - \frac{\partial a}{\partial \theta} \right) d\rho \wedge d\theta.$$

La 1-forme $\alpha = a(\rho, \theta)d\rho + b(\rho, \theta)d\theta$ est fermée si, et seulement si, $\frac{\partial b}{\partial \rho} = \frac{\partial a}{\partial \theta}$. Supposons cette condition satisfaite ; α sera exacte s'il existe une fonction h , C^∞ , périodique de période 2π en θ et telle que $\frac{\partial h}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial h}{\partial \theta} d\theta = a d\rho + b d\theta$. On est donc amené à résoudre le système d'équations aux dérivées partielles :

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial \rho} = a \\ \frac{\partial h}{\partial \theta} = b. \end{cases}$$

La résolution formelle donne $h(\rho, \theta) = \int_0^\theta b(\rho, u) du + \int_1^\rho a(\xi, 0) d\xi + \text{constante}$. Il est clair que la fonction h ainsi définie est C^∞ . Pour qu'elle donne une primitive de β sur M elle doit être en plus périodique de période 2π en θ . L'égalité $h(\rho, \theta + 2\pi) = h(\rho, \theta)$ équivaut à $\int_0^{2\pi} b(\rho, \theta) d\theta = 0$. Une forme fermée $\alpha = a(\rho, \theta)d\rho + b(\rho, \theta)d\theta$ dont le coefficient b vérifie cette condition est donc exacte. On montre facilement (utilisant la fermeture de α) que la fonction $\rho \mapsto \int_0^{2\pi} b(\rho, \theta) d\theta$ ne dépend pas de ρ . Ceci nous permet de définir une forme linéaire $Z^1(M) \xrightarrow{\Phi} \mathbb{R}$ dont la valeur sur la 1-forme $\alpha = a(\rho, \theta)d\rho + b(\rho, \theta)d\theta$ est $\Phi(\alpha) = \int_0^{2\pi} b(\rho, \theta) d\theta$. Alors $\text{Ker } \Phi = B^1(M)$. Par suite l'espace $B^1(M)$ est $Z^1(M)$ tout entier si Φ

est nulle ; dans le cas contraire il en est un hyperplan. On lève l'indétermination en constatant que la 1-forme :

$$\omega_0 = \frac{xdy - ydx}{2\pi(x^2 + y^2)}$$

qui s'écrit en coordonnées polaires $\omega_0 = d\theta$ est fermée et vérifie $\Phi(\omega_0) = 1$. Par suite l'espace vectoriel $H^1(M) = Z^1(M)/B^1(M)$ est de dimension 1 engendré par la classe de cohomologie de la forme ω_0 .

Un calcul similaire permet de montrer que $H^2(M) = \{0\}$. Pour des raisons de degré (qu'on a déjà évoquées) $H^r(M) = \{0\}$ pour $r \geq 3$.

(2.5.6) - Cohomologie de $M = \mathbb{R}^2$ privé de deux points

On note $z_1 = (x_1, y_1)$ et $z_2 = (x_2, y_2)$ les deux points dont on prive $\mathbb{R}^2$. Sur le segment $[z_1 z_2]$ on choisit deux points A et B tels que $z_1 A = AB = B z_2$. Par A (resp. par B) on mène une perpendiculaire Δ_2 (resp. Δ_1) au segment $[z_1 z_2]$; Δ_1 (resp. Δ_2) partage le plan en deux demi-plans ouverts ; soit U_1 (resp. U_2) celui contenant z_1 (resp. z_2). Alors $\{U_1, U_2\}$ est un recouvrement ouvert de M et l'intersection $U_1 \cap U_2$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^2$ donc sa cohomologie est celle d'un point. Le théorème de Mayer-Vietoris appliqué à ce recouvrement donne une suite exacte longue de cohomologie :

$$\dots \longrightarrow H^r(M) \xrightarrow{\varphi_r^*} H^r(U_1) \oplus H^r(U_2) \xrightarrow{\psi_r^*} H^r(U_1 \cap U_2) \xrightarrow{\gamma_r^*} H^{r+1}(M) \longrightarrow \dots$$

Comme on connaît la cohomologie de U_1 , U_2 et $U_1 \cap U_2$, l'examen de cette suite donne :

$$H^r(M) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } r = 0 \\ \mathbb{R}^2 & \text{si } r = 1 \\ 0 & \text{si } r \geq 2. \end{cases}$$

Le $H^1(M)$ est engendré par les classes de cohomologie des deux 1-formes fermées :

$$\omega_1 = \frac{(x - x_1)dy - (y - y_1)dx}{2\pi((x - x_1)^2 + (y - y_1)^2)} \quad \text{et} \quad \omega_2 = \frac{(x - x_2)dy - (y - y_2)dx}{2\pi((x - x_2)^2 + (y - y_2)^2)}.$$

Par le même type de raisonnement on montre que la cohomologie de la variété M obtenue en privant $\mathbb{R}^2$ de k points $z_i = (x_i, y_i)$ (avec $i = 1, \dots, k$) est :

$$H^r(M) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } r = 0 \\ \mathbb{R}^k & \text{si } r = 1 \\ 0 & \text{si } r \geq 2 \end{cases}$$

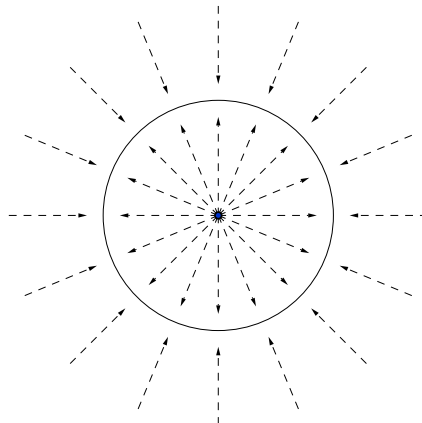
et le $H^1(M)$ est engendré par les classes de cohomologie des 1-formes fermées :

$$\omega_i = \frac{(x - x_i)dy - (y - y_i)dx}{2\pi((x - x_i)^2 + (y - y_i)^2)} \quad \text{avec } i = 1, \dots, k.$$

(2.5.7) - Cohomologie de la sphère $\mathbb{S}^n$

Le cas $n = 1$ est couvert par le calcul de l'exemple (2.5.5). En effet le cercle $\mathbb{S}^1$ a le type d'homotopie de $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ comme on le voit sur le dessin ci-dessous. Donc :

$$H^r(\mathbb{S}^1) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } r = 0, 1 \\ 0 & \text{si } r \geq 2. \end{cases}$$



Si $n = 2$, on considère le recouvrement ouvert $\{U_1, U_2\}$ de la sphère $\mathbb{S}^2$ où U_1 est $\mathbb{S}^2$ privée du pôle sud et U_2 est $\mathbb{S}^2$ privée du pôle nord. Chacun des ouverts U_1 et U_2 est difféomorphe à $\mathbb{R}^2$ et $U_1 \cap U_2$ est difféomorphe au cylindre $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ qui a le type d'homotopie du cercle $\mathbb{S}^1$. Le théorème de Mayer-Vietoris appliqué à ce recouvrement permet de calculer la cohomologie de la sphère $\mathbb{S}^2$:

$$H^r(\mathbb{S}^2) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } r = 0, 2 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La même démarche donne :

$$H^r(\mathbb{S}^n) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } r = 0, n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(2.5.8) - Cohomologie du tore $\mathbb{T}^n$

Par définition, le tore $\mathbb{T}^n$ est la variété de dimension n obtenue comme produit cartésien de n exemplaires du cercle $\mathbb{S}^1$. Pour $n = 2$, la formule de Künneth nous donne :

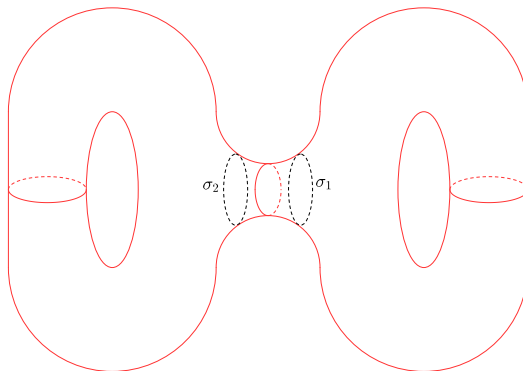
$$H^r(\mathbb{T}^2) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } r = 0, 2 \\ \mathbb{R}^2 & \text{si } r = 1. \end{cases}$$

Et par récurrence, on obtient :

$$H^r(\mathbb{T}^n) = \mathbb{R}^{C_n^r} \quad \text{où} \quad C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

(2.5.9) - Cohomologie de la surface Σ_g

Pour $g = 1$, $\Sigma_1 = \mathbb{T}^2$; le calcul a été fait. On suppose donc $g \geq 2$ et on commence par $g = 2$. On sectionne Σ_2 suivant le cercle σ_1 (cf. dessin ci-dessous) ; on récupère deux ouverts dont on notera U_1 celui de gauche (le plus grand). On fait la même chose suivant le cercle σ_2 et on obtient aussi deux ouverts dont on notera U_2 celui de gauche. On a donc un recouvrement ouvert $\{U_1, U_2\}$ de Σ_2 . Chacun des ouverts U_1 et U_2 est difféomorphe à $\mathbb{R}^2$ privé de deux points (le lecteur peut faire l'effort de vérifier cela !) ; quant à l'intersection $U_{12} = U_1 \cap U_2$, on voit clairement qu'elle est difféomorphe au produit $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ qui a le type d'homotopie de $\mathbb{S}^1$.



La suite exacte (6) appliquée à cette situation s'écrit :

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow H^0(\Sigma_2) \longrightarrow H^0(U_1) \oplus H^0(U_2) \longrightarrow H^0(U_{12}) \xrightarrow{\partial_0^*} \dots \\ \dots &\xrightarrow{\partial_0^*} H^1(\Sigma_2) \longrightarrow H^1(U_1) \oplus H^1(U_2) \longrightarrow H^1(U_{12}) \xrightarrow{\partial_1^*} \dots \\ \dots &\xrightarrow{\partial_1^*} H^2(\Sigma_2) \longrightarrow H^2(U_1) \oplus H^2(U_2) \longrightarrow H^2(U_{12}) \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Tous ces espaces sont connus sauf $H^1(\Sigma_2)$ qu'on doit calculer. En remplaçant chacun par ce qu'il vaut (à isomorphisme près bien sûr), la suite exacte devient :

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \xrightarrow{\partial_0^*} H^1(\Sigma_2) \longrightarrow \mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \xrightarrow{\partial_1^*} \mathbb{R} \longrightarrow 0.$$

Comme la somme alternée des dimensions des espaces de cette suite exacte est nulle, il en découle que $H^1(\Sigma_2)$ doit être de dimension 4, c'est-à-dire isomorphe à $\mathbb{R}^4$. Une application répétée du théorème de Mayer-Vietoris, donne finalement :

$$H^r(\Sigma_g) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } r = 0, 2 \\ \mathbb{R}^{2g} & \text{si } r = 1. \end{cases}$$

2.6. Remarques

- (i) On a bien souligné que la cohomologie de de Rham est un *invariant topologique* dans la catégorie des variétés différentiables : deux variétés homéomorphes ont des algèbres de cohomologie isomorphes. Toutefois ce n'est pas un *invariant complet* : deux variétés qui ont la même algèbre de cohomologie ne sont pas forcément homéomorphes ; c'est le cas de $M = \mathbb{R}$ et N réduite à un point par exemple.
- (ii) Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et M l'ouvert obtenu en ôtant k points de $\mathbb{R}^2$. On a vu que $H^1(M)$ est isomorphe à l'espace vectoriel $\mathbb{R}^k$. Ceci montre que deux variétés M et N obtenues en privant $\mathbb{R}^2$ respectivement de k points et de ℓ points ne sont pas homéomorphes si $k \neq \ell$.
- (iii) La structure multiplicative est aussi importante : on peut avoir deux variétés compactes (sans bord) ayant le même espace vectoriel de cohomologie de de Rham mais pas la même algèbre. Par exemple le produit $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^4$ et l'espace projectif complexe $P^3(\mathbb{C})$. Ces deux variétés ne sont donc pas homéomorphes.
- (iv) Toujours en usant de la cohomologie de de Rham, on peut montrer que deux surfaces distinctes quelconques de la collection $\mathcal{S} = \{\mathbb{S}^2, \mathbb{T}^2, \Sigma_g \text{ avec } g \geq 2\}$ (les surfaces compactes orientables) ne sont pas homéomorphes.
- (v) On peut montrer que $\mathbb{S}^2$ et $\mathbb{T}^2$ ne sont pas homéomorphes sans passer par la cohomologie de de Rham. Regardons $\mathbb{T}^2$ comme $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ et soit γ un cercle de la forme $\{*\} \times \mathbb{S}^1$. Supposons qu'il existe un homéomorphisme $\varphi : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$. Alors $\sigma = \varphi(\gamma)$ est une courbe simple fermée de $\mathbb{S}^2$. Posons $M = \mathbb{T}^2 \setminus \gamma$ et $N = \mathbb{S}^2 \setminus \varphi(\gamma)$. La restriction de φ à M est un homéomorphisme de M sur N , mais ceci n'est pas possible puisque M est connexe et N ne l'est pas (d'après le théorème de Jordan, N a deux composantes connexes).

On peut encore donner moult applications, beaucoup plus importantes, de la cohomologie de de Rham. Pas mal d'ouvrages lui consacrent une bonne partie de leur contenu. Voici par exemple trois références pour le lecteur désirant en savoir plus.

Références

- [1] BOTT, R. & TU, L. *Differential Forms in Algebraic Topology*. GTM 82, Springer-Verlag (1982).
- [2] GODBILLON, C. *Éléments de topologie algébrique*. Collection Méthodes, Hermann (1971).
- [3] DE RHAM, G. *Variétés différentiables*. Actualités scientifiques et industrielles, Hermann (1973).

A. El Kacimi Alaoui

Professeur émérite (UPHF)

<http://www.elkacimi.fr/>