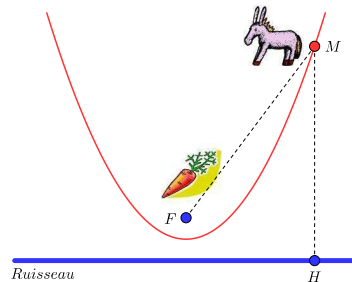


Les coniques comme lieux géométriques

AZIZ EL KACIMI ALAOU

<https://www.elkacimi.fr/>



Les coniques sont les courbes les plus élémentaires parmi les moins triviales. Elles sont planes, algébriques (définies par une équation polynomiale) et viennent juste après la droite (définie par une équation linéaire). C'est dans le secondaire qu'on les rencontre pour la première fois, après l'introduction des notions de limite et de dérivée. Elles apparaissent ensuite dans l'étude des fonctions $f(x) = ax^2 + bx + c$, $g(x) = \beta\sqrt{a^2 - x^2}$ et $h(x) = \frac{c}{x}$ (elles en sont les graphes). Mais jamais - dans ces dernières décennies du moins - on ne les voit comme objets géométriques intrinsèques. C'est sous cet aspect que nous nous proposons de les étudier ici en les présentant comme *lieux géométriques* définis par des contraintes. Nous exhiberons quelques-unes de leurs propriétés dont certaines ont de belles applications pratiques dans la vie quotidienne.

Ce texte est une leçon élémentaire sur les coniques, à l'intention de ceux qui en seraient intéressés et qui n'ont pas eu l'occasion de les voir dans leur parcours mathématique. L'aspect historique est délibérément occulté ; ainsi que la bibliographie : pour avoir plus que ce qui est exposé ici, le lecteur pourrait simplement « googler » par mots-clés.

0. Préambule

0.1. Une *courbe* est l'objet le plus « simple » de la géométrie différentielle. C'est un ensemble de points obéissant à des règles. Par exemple un *cercle* dans le plan est l'ensemble des points à égale distance d'un point fixé. C'est sous des contraintes de ce type qu'apparaissent les courbes en général. Des contraintes *géométriques* comme celle évoquée ou d'autres dites *analytiques* : les équations auxquelles doivent satisfaire les coordonnées d'un point de cette courbe. C'est un *lieu géométrique* : celui d'un mobile M contraint de se déplacer dessus comme sur le dessin du logo (1). Le cas de la droite et celui du cercle étant connus et assimilés, nous avons choisi de nous concentrer sur les premières courbes parmi celles qui sont « un peu plus compliquées » : les *coniques*.

0.2. Le mot « conique » (adjectif ou nom commun féminin) dérive du mot « cône ». Je ne savais pas ce que ce dernier avait comme sens mais j'en avais une image quand j'étais

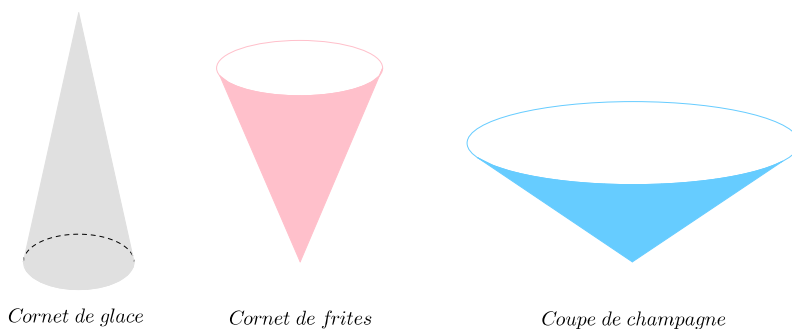
(1) L'âne de Buridan est à égale distance de la carotte et du ruisseau. Il a faim et soif. Va-t-il se diriger vers l'un ou vers l'autre ? Il choisit d'aller vers les deux à la fois. Il suit alors une courbe qui s'en rapproche, passe par le milieu et finit par s'en éloigner. Il n'aura donc pu ni boire ni manger ! Ce sont les contraintes qu'il s'est imposé à lui-même qui lui ont tracé ce chemin fatal. On nous le dit, et on nous le répète : « *En courant deux lièvres à la fois, on n'en attrape aucun.* » Un adage auquel quidam ne tend jamais l'oreille.

enfant : celle de l'*entonnoir* dont se servait un marchand d'huile d'olive en vrac de ma ville natale pour en verser dans les bouteilles de ses clients.



(Fig.1)

Bien des années plus tard, j'ai découvert d'autres images du cône tout aussi directement liées à la vie quotidienne.



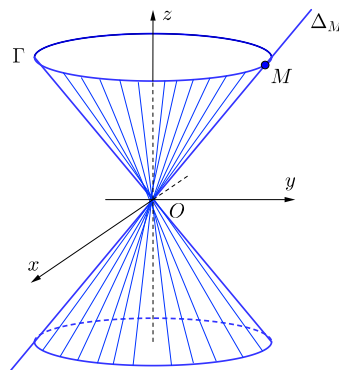
(Fig.2)

Bref !...

Pour commencer notre exposé, nous avons besoin de définir mathématiquement un cône. Nous ne le ferons pas formellement ; nous n'en donnerons qu'un exemple, le lecteur saura lui-même prendre la définition qui lui convient.

0.3. Nous nous situons dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, qui est aussi un espace affine : ses éléments peuvent être vus comme des points M ou des vecteurs $\vec{u}$. On le munit de son repère orthonormé direct canonique $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Un triplet (x, y, z) représente un point M mais aussi le vecteur $\vec{OM}$.

Soit Γ le cercle défini par les équations $x^2 + y^2 = 1$ et $z = 1$. Par définition, le *cône* Σ de *base* Γ et de *sommet* O est l'ensemble $\{\lambda(x, y, z) : (x, y, z) \in \Gamma \text{ et } \lambda \in \mathbb{R}\}$. (Bien sûr, on pourrait définir Σ directement par l'équation $x^2 + y^2 = z^2$.)



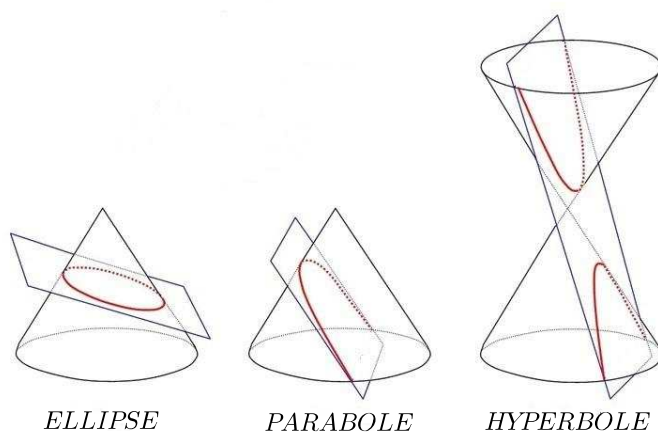
(Fig.3)

Pour tout $M \in \Gamma$, la droite $\Delta_M = \{\lambda \overrightarrow{OM} : \lambda \in \mathbb{R}\}$ est appelée *génératrice* de Σ ; la droite (Oz) est son *axe*. Les parties $\Sigma_+ = \{(x, y, z) \in \Sigma : z > 0\}$ et $\Sigma_- = \{(x, y, z) \in \Sigma : z < 0\}$ sont les *nappes ouvertes* du cône.

Une *conique* est la trace d'un plan affine (π) sur le cône Σ . C'est quoi précisément ? Tout dépend de la position de (π) relativement à Σ . Voici les diverses situations.

- (i) Le plan (π) contient le point O . La conique est alors réduite au point O , à une génératrice ou à deux génératrices symétriques par rapport à (Oz) .
- (ii) Le plan (π) ne contient pas O ; alors il intersecte forcément la réunion $\Sigma_+ \cup \Sigma_-$. Sous ces conditions et suivant la position de (π) , on obtient dans le reste des cas quatre formes différentes : une *parabole* si (π) est parallèle à une génératrice ; sinon un *cercle*, une *ellipse* ou une *hyperbole*.

C'est la situation (ii) que nous allons examiner dans ce texte (elle est illustrée par le dessin ci-dessous). Nous étudierons en détail la parabole, l'ellipse et l'hyperbole.



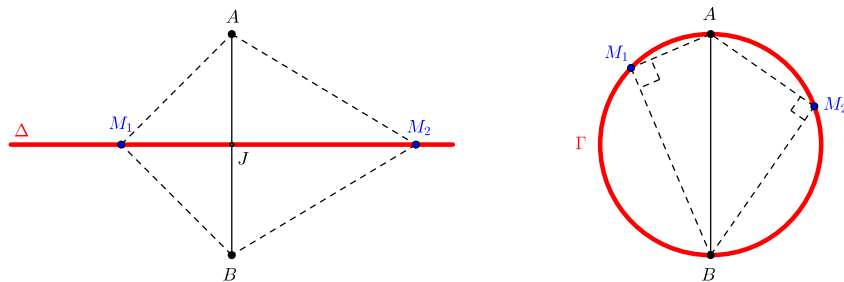
(Fig.4)

Les passionnés d'art - ou simplement ceux qui aimeraient voir du beau - trouveront dans cet article <https://images.math.cnrs.fr/freeze/Sections-coniques.html> des photos de ces mêmes sections coniques réalisées sur du bois par l'artisan-ébéniste Francisco Treceño.

Comme nous l'avons vu, les coniques sont des sections planes, et par suite des objets géométriques plans. Nous pouvons donc d'ores et déjà travailler directement dans un plan affine $(\mathcal{P}, \overrightarrow{\mathcal{V}})$, muni d'un produit scalaire et d'un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Si M et N sont deux points de $\mathcal{P}$, la norme $|\overrightarrow{MN}|$ du vecteur $\overrightarrow{MN}$ sera notée simplement MN (longueur du segment $[MN]$).

Comme nous en avons déjà parlé, imposer des contraintes à des points du plan les oblige à rester dans une partie bien déterminée. Voici encore deux exemples qui montrent bien cela de façon très simple. On se donne deux points A et B .

- (1) L'ensemble des points M tels que $MA = MB$ (la contrainte) est une droite Δ appelée *médiatrice* du segment $[AB]$. Elle est perpendiculaire à $[AB]$ et passe par son milieu.
- (2) L'ensemble des points M du plan tels que l'angle $\widehat{AMB}$ est droit (la contrainte) est le cercle Γ de diamètre $[AB]$.



(Fig.5)

Dans les deux cas, la droite Δ et le cercle Γ sont des *lieux géométriques*. Nous allons voir qu'il en sera de même pour les trois coniques que nous venons d'exhiber.

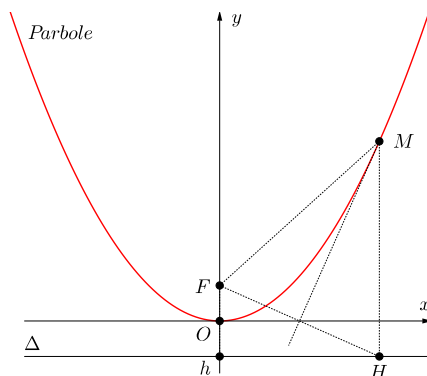
1. Parabole

1.1. Soient Δ une droite et F un point non situé sur Δ . On cherche à étudier l'ensemble $\mathcal{B}$ des points M de $\mathcal{P}$ équidistants de F et Δ , c'est-à-dire : si H est la projection orthogonale de M sur Δ , alors $MH = MF$.

L'ensemble $\mathcal{B}$ est non vide. En effet, si h est la projection orthogonale de F sur la droite Δ , le milieu O du segment $[Fh]$ est sur $\mathcal{B}$.

De façon évidente, si $M \in \mathcal{B}$, son symétrique par rapport à la droite (hF) est aussi sur $\mathcal{B}$; $\mathcal{B}$ possède donc la droite (hF) comme axe de symétrie.

Pour construire d'autres points, on procède comme suit. Soit H (distinct de h) un point quelconque de Δ . La perpendiculaire à Δ passant par H coupe la médiatrice du segment $[HF]$ en un point M tel que distance(M, Δ) = $MH = MF$. On vérifie facilement que tout autre point de $\mathcal{B}$ se construit de cette manière.



(Fig.6)

L'ensemble $\mathcal{B}$ est appelé *parabole* de *foyer* F et de *directrice* Δ : le point O est son *sommet*.

1.2. Équation cartésienne. Elle décrit analytiquement la courbe et permet d'avoir plus facilement ses propriétés du point de vue de la géométrie différentielle. Nous utiliserons le repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ en supposant que l'origine O est le milieu du segment $[Fh]$ et que le vecteur $\vec{i}$ est parallèle à la directrice Δ . On note p la longueur hF , qu'on appelle *paramètre* de $\mathcal{B}$. Le point F a donc pour coordonnées $(0, \frac{p}{2})$. L'équation cartésienne de $\mathcal{B}$ s'obtient alors comme suit.

Un point $M = (x, y)$ est sur $\mathcal{B}$ si, et seulement si, on a l'égalité $FM = HM$ c'est-à-dire $x^2 + (y - \frac{p}{2})^2 = (y + \frac{p}{2})^2$ qui donne, après calcul et simplification :

$$(1) \quad y = \frac{x^2}{2p}.$$

La parabole est donc le graphe d'une fonction polynôme du second degré. Elle admet la représentation paramétrique $\gamma : t \in \mathbb{R} \mapsto (x(t), y(t))$ avec :

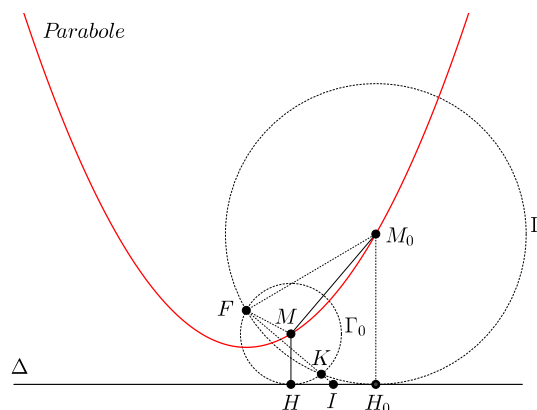
$$(2) \quad \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = \frac{t^2}{2p} \end{cases}.$$

C'est une courbe différentiable. En tout point $(x(t), y(t))$, elle a une tangente de vecteur directeur $\gamma'(t) = \left(1, \frac{t}{p}\right)$. Comme celui-ci ne s'annule jamais, cette représentation est *régulière*.

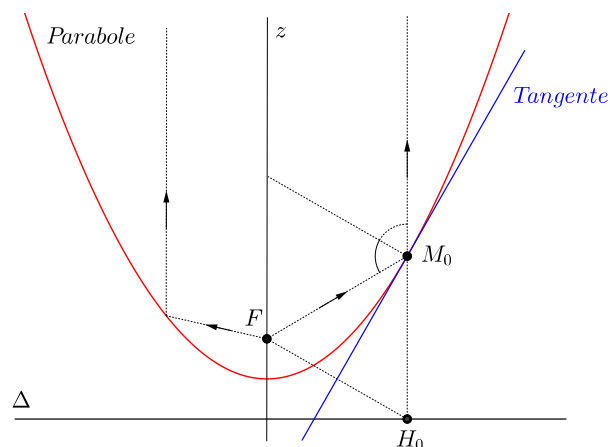
1.3. L'examen purement géométrique de la tangente permet de dégager une propriété remarquable qui a des applications pratiques très utiles.

Pour ce faire, remarquons d'abord que l'égalité $MH = MF$ nous dit que M est le centre du cercle passant par F et tangent à la droite Δ . On peut aussi vérifier que tout point qui est centre d'un cercle tangent à Δ et passant par F est sur la parabole $\mathcal{B}$. Ainsi on peut définir une parabole comme l'ensemble des centres des cercles qui sont tangents à une droite donnée et passant par un point fixé F .

Soient M_0 un point fixé sur $\mathcal{B}$ et $M \in \mathcal{B}$ un point variable. La tangente à la courbe $\mathcal{B}$ en M_0 (on sait qu'elle existe) est la limite, quand M tend vers M_0 , de la droite (MM_0) . Soient H_0 et H les projections orthogonales sur Δ respectivement des points M_0 et M . Les points M_0 et M sont les centres des cercles Γ_0 et Γ passant par F et tangents à Δ respectivement en H_0 et H . Soit K leur deuxième point d'intersection. La droite (FK) (axe radical de Γ_0 et Γ) coupe Δ au milieu I du segment $[HH_0]$ et (MM_0) est médiatrice du segment $[FK]$. Quand M tend vers M_0 , H tend vers H_0 et par suite les points I et K tendent aussi vers H_0 . La droite (MM_0) tend alors vers la médiatrice du segment $[FH_0]$. Comme le triangle FM_0H_0 est isocèle de base FH_0 , cette médiatrice limite (qui est la tangente en M_0 à $\mathcal{B}$) est aussi la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{FM_0H_0}$.

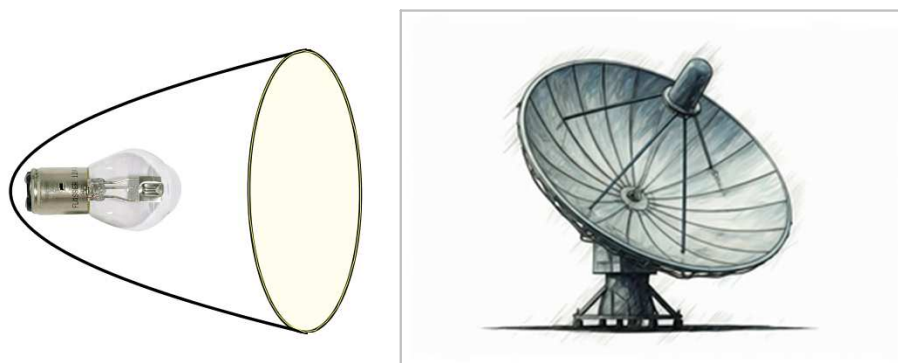


(Fig.7)



(Fig.8)

C'est cette propriété de la parabole qui est utilisée pour fabriquer les phares de voitures et les antennes paraboliques (*cf.* dessins ci-dessous).



(Fig.9)

On reprend les mêmes notations. On fait tourner une parabole $\mathcal{B}$ autour de son axe (Oz) ; on obtient une surface (dite de *révolution*) qu'on appelle *paraboloïde*. La trace sur ce paraboloid de tout plan contenant (Oz) est une parabole de même foyer et isométrique à $\mathcal{B}$. En coupant suivant un plan orthogonal à l'axe on obtient une calotte comme celles ci-dessus, le support du phare ou l'assiette de l'antenne.

Voici comment fonctionnent ces engins.

- (a) Une ampoule placée au foyer (dessin de gauche) envoie des rayons lumineux sur la surface du paraboloïde. Ils se réfléchissent en des rayons tous parallèles à l'axe (Oz) et sont donc renvoyés pour éclairer le plus loin possible ; en cas de besoin, le conducteur actionne le phare à cet effet.
- (b) Les ondes provenant du satellite (placé très loin) peuvent être considérées comme des droites parallèles à l'axe (Oz). Elles sont réceptionnées sur l'assiette (bien orientée à cet effet). Elles s'y réfléchissent en ondes convergeant vers la cellule placée au foyer ; celle-ci transmet alors l'image et le son au téléviseur.

1.4. Une question naturelle se pose souvent pour une courbe : *Par un point A extérieur, peut-on y mener une tangente ? Si oui, comment la construire géométriquement ?*

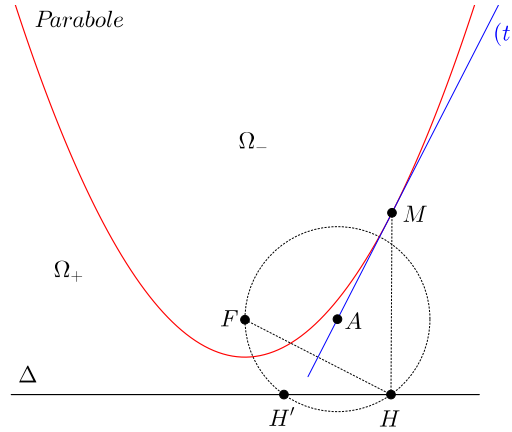
Nous allons répondre à cette question pour une parabole $\mathcal{B}$ (en gardant les mêmes notations que précédemment).

Voyons d'abord dans quelles conditions cela est possible. Le complémentaire Ω de la parabole $\mathcal{B}$ est constitué de deux parties ouvertes Ω_+ et Ω_- disjointes (cf. (Fig.10)) ; on peut le voir comme suit. Si on suppose que $\mathcal{B}$ a pour équation $y = \alpha x^2$ (dans le repère que nous avons déjà utilisé et qui identifie $\mathcal{P}$ à $\mathbb{R}^2$), l'application :

$$\phi : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) : y = 0\} \mapsto (X, Y) = (x, \alpha x^2 + y) \in \Omega$$

est bijective, continue et d'inverse $\phi^{-1}(X, Y) = (X, -\alpha X^2 + Y)$ continue, donc ϕ est un homéomorphisme. Il est alors facile de voir qu'un point M du plan est sur $\Omega_+ \cup \mathcal{B}$ si, et seulement si, la distance de M à Δ est inférieure ou égale à MF . La tangente cherchée n'existe que dans ce cas-là.

On suppose qu'une droite (t) tangente à $\mathcal{B}$ en un point M et passant par A est construite. Alors, d'après ce qu'on a vu en 1.3, le triangle HMF (H étant la projection orthogonale de M sur Δ) est isocèle de base HF et (t) est médiatrice du segment $[HF]$ (les symétriques du foyer F par rapport aux différentes tangentes sont donc les points de Δ). Pour construire les tangentes à $\mathcal{B}$ passant par A , il suffit donc d'avoir les points de contact $M \in \mathcal{B}$; ils ont leurs projetés sur Δ situés sur le cercle de centre A et passant par F ; il y en a deux en général (H et H' sur le dessin) et ils existent si, et seulement si, $A \in \Omega_+ \cup \mathcal{B}$.



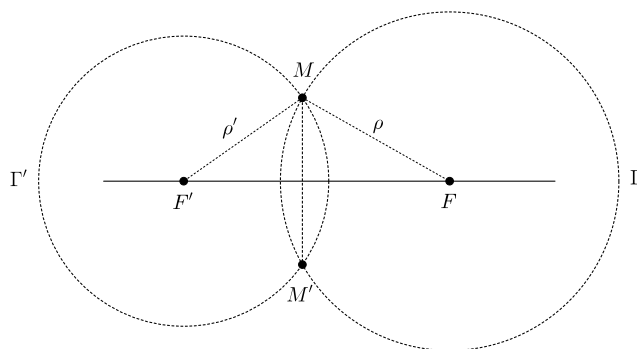
(Fig.10)

2. Ellipse

2.1. Soient F et F' deux points de $\mathcal{P}$ distant de $2c > 0$ et a un nombre réel tel que $a \geq c$. On cherche à étudier l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M de $\mathcal{P}$ tels que $MF + MF' = 2a$.

Si $a = c$, l'égalité $MF + MF' = 2a$ impose à M d'être sur le segment $[FF']$ et donc $\mathcal{E} = [FF']$. Nous supposons désormais $a > c$.

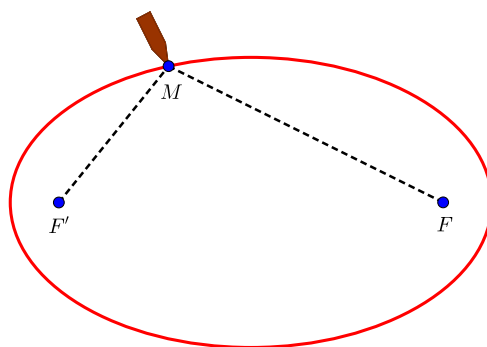
1 - On trace deux cercles Γ et Γ' de centres respectifs F et F' et de rayons respectifs ρ et ρ' tels que $\rho + \rho' = 2a$. Alors Γ et Γ' se coupent (car la somme des rayons est supérieure à la distance entre les centres) en deux points M et M' qui vérifient $MF + MF' = 2a$ et $M'F + M'F' = 2a$. Ceci prouve que l'ensemble $\mathcal{E}$ est non vide, donne un procédé de construction de ses points et montre que la droite (FF') en est un axe de symétrie. Le fait que la médiatrice Δ du segment $[FF']$ soit aussi axe de symétrie est immédiat. Il en découle que le milieu O de $[FF']$ est centre de symétrie de $\mathcal{E}$.



(Fig.11)

L'ensemble $\mathcal{E}$ est appelé *ellipse* de foyers F et F' et de *grand axe* $2a$. La droite (FF') est l'*axe focal*. Le point O (milieu de $[FF']$) est le *centre* de l'ellipse.

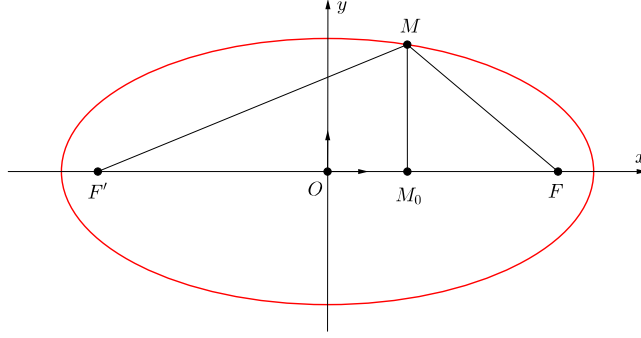
Tout le monde sait qu'on trace un cercle en utilisant un compas. Et qu'en-t-il d'une ellipse ? Une méthode existe à cet effet. Personnellement, je l'ai apprise dès mon très jeune âge. Une petite histoire que je me permets de conter en digression rapide.



(Fig.12)

« Jusqu'à un certain âge, je passais une partie de mon temps libre dans l'atelier d'ébénisterie de mon père. Je voyais donc comment il travaillait. Quand il a à fabriquer une table, il commence par le plateau dont le support est une planche de cèdre bien aplanie. Pour une table ronde, il utilise un grand compas métallique pour y tracer un cercle et découper ensuite à l'aide d'une scie mince et flexible permettant de suivre la courbure du trait. Pour une table ovale - dont le bord peut être assimilé à une ellipse - le traçage est un peu plus compliqué d'autant plus qu'il doit respecter les symétries escomptées. Mais il sait faire : il plante deux clous sur la planche et attache une ficelle à chacun d'eux ; puis il la tend avec son crayon de bois qu'il fait tourner autour des deux clous pour tracer le contour en question. "*C'est la forme de la table à fabriquer !*" me dit-il, larguant un sourire large sur lequel je lis son bonheur quand il sent qu'il m'a appris quelque chose. Cette façon de faire pour tracer artisanalement une ellipse n'est donc pas uniquement la *méthode du jardinier* comme tout monde le pense, c'est aussi celle de l'ébéniste. »

2.2. Équation cartésienne. Comme pour la parabole, nous allons déterminer l'équation de notre ellipse dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ que nous supposons tel que les points F et F' y aient respectivement comme coordonnées $(c, 0)$ et $(-c, 0)$.



(Fig.13)

Soit M un point du plan de coordonnées (x, y) . Sa projection orthogonale M_0 sur la droite (FF') a pour coordonnées $(x, 0)$. Par le théorème de Pythagore, on a :

$$MF^2 = MM_0^2 + M_0F^2 \quad \text{et} \quad MF'^2 = MM_0^2 + M_0F'^2.$$

En faisant la différence membre à membre, on obtient :

$$MF^2 - MF'^2 = \overline{M_0F}^2 - \overline{M_0F'}^2 = (\overline{M_0F} + \overline{M_0F'}) \cdot (\overline{M_0F} - \overline{M_0F'}) = -4cx$$

qui donne $(MF - MF') \cdot (MF + MF') = -4cx$. On a $MF + MF' = 2a$ si en plus $M \in \mathcal{E}$. On déduit alors de ce qui précède que $MF - MF' = -2\frac{c}{a}x$. Les deux égalités $MF + MF' = 2a$ et $MF - MF' = -2\frac{c}{a}x$ nous donnent $MF = a - \frac{c}{a}x$. On a donc :

$$MF^2 = \left(a - \frac{c}{a}x\right)^2 = (x - c)^2 + y^2.$$

En posant $b = \sqrt{a^2 - c^2}$, on obtient :

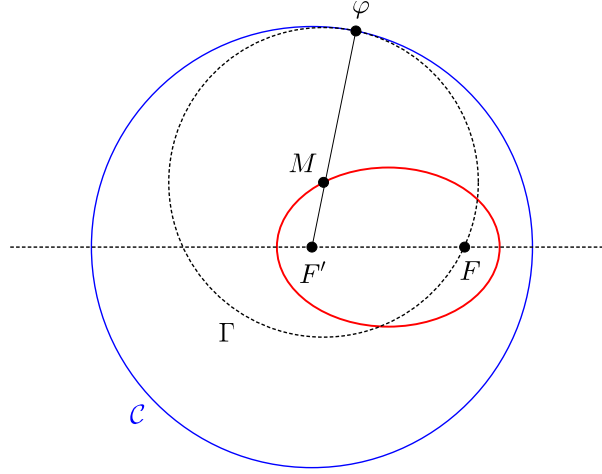
$$(3) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Cette équation montre que l'ellipse $\mathcal{E}$ a pour représentation paramétrique $x(t) = a \cos t$ et $y(t) = b \sin t$ avec $t \in \mathbb{R}$; c'est donc une courbe de classe C^∞ qui admet en tout point comme vecteur tangent celui ayant pour coordonnées $x'(t) = -a \sin t$ et $y'(t) = b \cos t$; il est partout non nul et donc $\mathcal{E}$ a une tangente en tout point.

Les points $A = (a, 0)$, $A'(-a, 0)$, $B = (0, b)$, $B' = (0, -b)$ sont les *sommets* de l'ellipse.

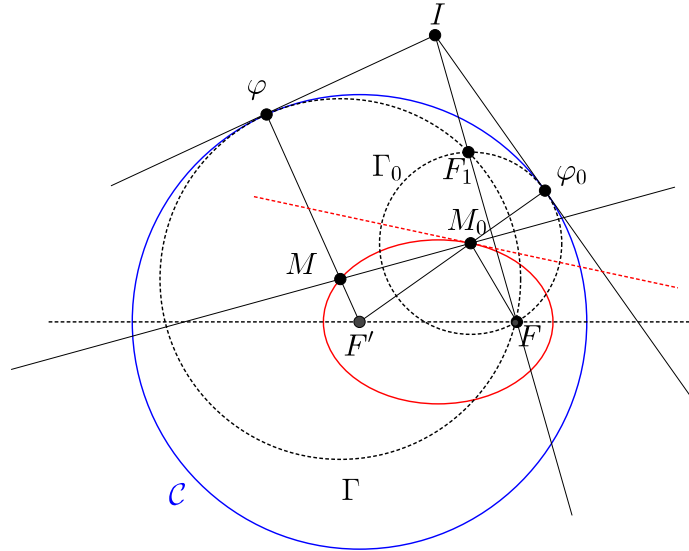
2.3. Comme pour la parabole, discutons géométriquement de la tangente à l'ellipse ainsi que de ses propriétés qui sont tout aussi remarquables. À cet effet, nous donnerons aussi une autre caractérisation de l'ellipse.

Soit M le centre d'un cercle Γ passant par F et tangent intérieurement en un point φ au cercle $\mathcal{C}$ de centre F' et de rayon $2a$ (qu'on appelle *cercle directeur* de l'ellipse). On a alors $F'M + M\varphi = 2a$; comme $M\varphi = MF$, on a $MF + MF' = 2a$ qui montre que M est sur l'ellipse $\mathcal{E}$. Inversement, soit M un point de l'ellipse $\mathcal{E}$. Soit φ le point de rencontre de la droite $(F'M)$ et du cercle $\mathcal{C}$. Alors des deux égalités $MF + MF' = 2a$ et $MF' + M\varphi = 2a$, on déduit $MF = M\varphi$ qui montre bien que $M\varphi = MF$. Le point M est donc le centre du cercle passant par F et tangent intérieurement à $\mathcal{C}$.



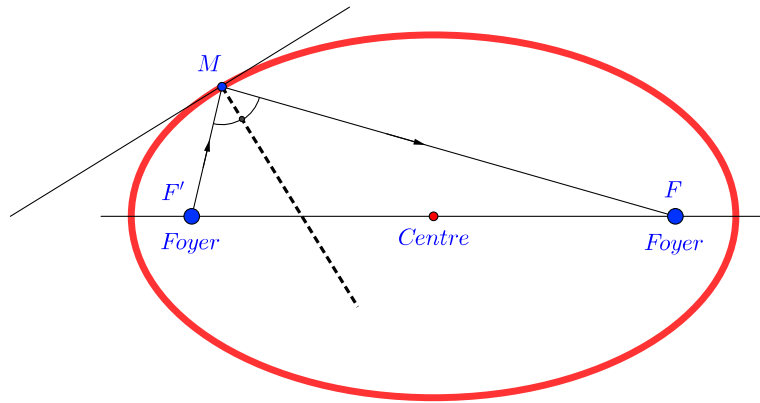
(Fig.14)

Soient M_0 un point fixé sur $\mathcal{E}$ et M un point variable sur $\mathcal{E}$. La tangente à la courbe $\mathcal{E}$ en M_0 (on sait qu'elle existe) est la limite, quand M tend vers M_0 , de la droite (MM_0) . Les points M_0 et M sont les centres respectifs de deux cercles Γ_0 et Γ passant par F et tangents intérieurement au cercle $\mathcal{C}$ respectivement en φ_0 et φ . Les deux cercles Γ_0 et Γ se recoupent en un autre point F_1 ; la droite (FF_1) en est leur axe radical et passe par le centre radical I des trois cercles Γ_0 , Γ et $\mathcal{C}$; on a alors $I\varphi = I\varphi_0$. Le point I est donc sur la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{\varphi_0 F' \varphi}$. Quand M tend vers M_0 , I tend vers φ_0 et la droite $(F'I)$ tend vers $(F'\varphi_0)$. La droite (MM_0) est médiatrice du segment $[FF_1]$ et tend donc vers la médiatrice de $[F\varphi_0]$ qui est aussi la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{FM_0\varphi_0}$ donc la bissectrice extérieure de l'angle $\widehat{FM_0F'}$.



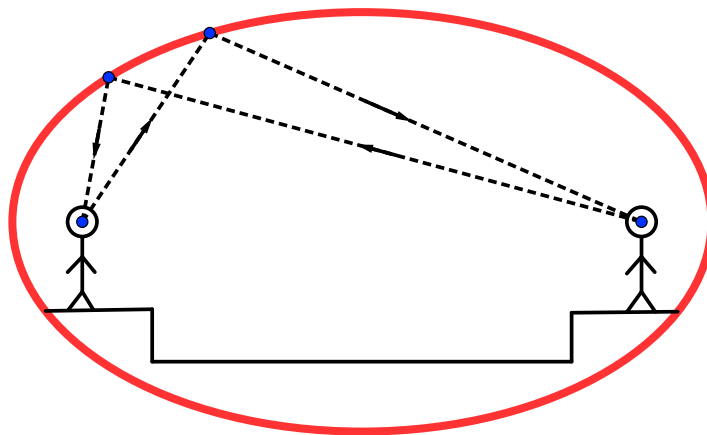
(Fig.15)

2.4. De façon presque similaire à ce qu'on a vu pour la parabole, un rayon lumineux ou sonore partant d'un foyer se réfléchit sur la paroi intérieure de l'ellipse et prend la direction de l'autre foyer.



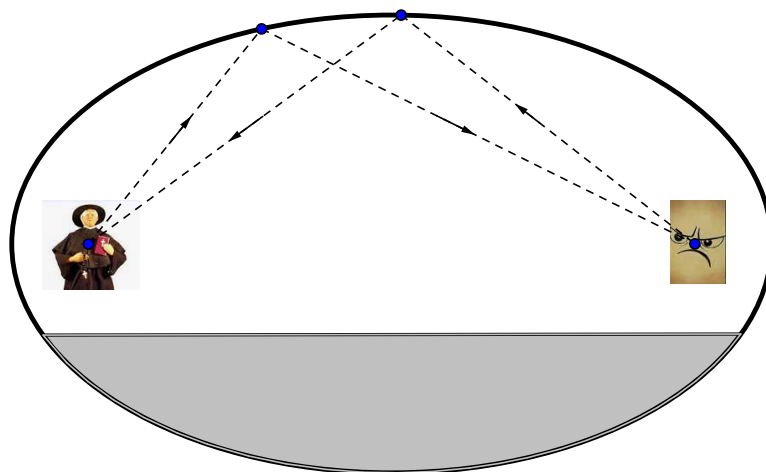
(Fig.16)

C'est sur ce principe que sont bâties certaines stations de métro à Paris : deux personnes sur les quais de part et d'autre de la voie ayant chacune la tête à peu près au foyer du plafond elliptique peuvent s'entendre en parlant (sans crier).



(Fig.17)

Ou encore le principe du *confessional des lépreux* (ou des criminels) : le prêtre et le confessé sont placés chacun à un foyer et peuvent échanger en toute discrétion.



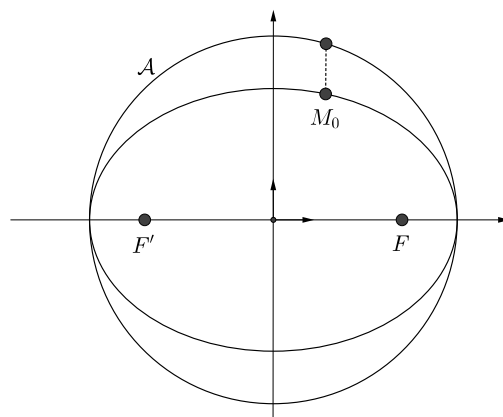
(Fig.18)

2.5. Le cercle $\mathcal{A}$ (dit *principal*) de diamètre les sommets $(a, 0)$ et $(-a, 0)$ et l'ellipse $\mathcal{E}$ ont respectivement pour équations :

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 & \text{pour } \mathcal{C} \\ \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1 & \text{pour } \mathcal{E}. \end{cases}$$

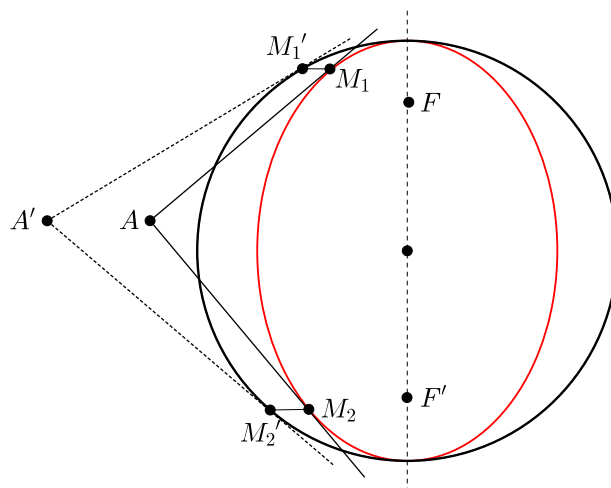
L'affinité orthogonale γ d'axe (FF') et de rapport $\rho = \frac{b}{a}$ transforme le cercle $\mathcal{A}$ en l'ellipse $\mathcal{E}$. Son expression analytique est donnée par :

$$\begin{cases} X = x \\ Y = \frac{b}{a}y. \end{cases}$$



(Fig.19)

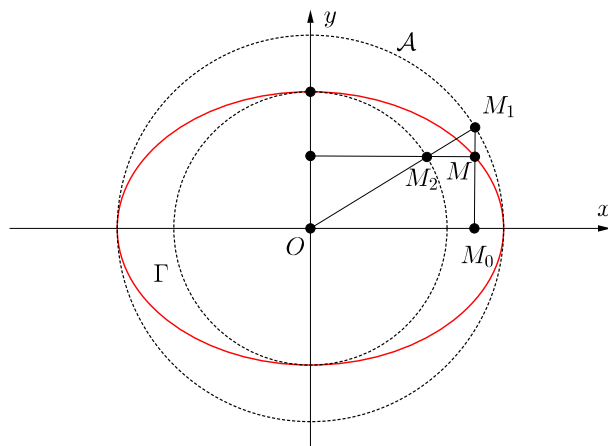
2.6. Pour construire la tangente à l'ellipse $\mathcal{E}$ par un point A extérieur, on va utiliser ce qui précède : $\mathcal{E}$ est la transformée de son cercle principal $\mathcal{A}$ par l'affinité γ . Soit A' le point de $\mathcal{A}$ tel que $\gamma(A') = A$; A' est extérieur à $\mathcal{A}$. Par A' on construit les deux tangentes au cercle $\mathcal{A}$ en les points M'_1 et M'_2 . Les perpendiculaires respectivement par M'_1 et M'_2 à la droite (FF') coupent l'ellipse respectivement en M_1 et M_2 qui sont les images respectives de M'_1 et M'_2 par γ . Il est alors facile de voir que les tangentes issues de A à l'ellipse ne sont rien d'autres que les droites (AM_1) et (AM_2) .



(Fig.20)

2.7. Construction d'un point. Notons toujours $\mathcal{A}$ le cercle principal de l'ellipse et Γ celui d'équation $x^2 + y^2 = b^2$ (qui est tangent intérieurement à l'ellipse aux points de coordonnées respectives $(0, b)$ et $(0, -b)$). L'ellipse s'obtient à partir de $\mathcal{A}$ par l'affinité orthogonale d'axe l'axe des abscisses et de rapport $\frac{b}{a}$; les coordonnées (x, y) de M sont données en fonction de celles de M_1 par $x = x_1$ et $y = \frac{b}{a}y_1$. Il est aussi facile de voir que le cercle Γ s'obtient à partir de l'ellipse par l'affinité orthogonale d'axe l'axe des ordonnées et de rapport $\frac{b}{a}$. Les coordonnées (x_2, y_2) de M_2 sont données en fonction de celles M par $x_2 = \frac{b}{a}x$ et $y_2 = y$. Ceci montre que $x_2 = \frac{b}{a}x_1$ et $y_2 = \frac{b}{a}y_1$ et donc que M_2 est le transformé de M_1 par l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{b}{a}$.

Pour construire le point M de l'ellipse, il suffit de tracer les deux cercles $\mathcal{A}$ (principal) et le cercle Γ , prendre un rayon qui coupe ces deux cercles respectivement en M_1 et M_2 ; le point M est alors l'intersection de la droite verticale passant par M_1 et la droite horizontale passant par M_2 .

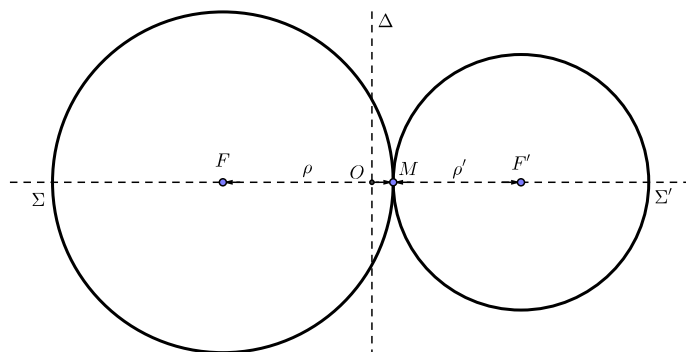


(Fig.21)

3. Hyperbole

3.1. Soient F et F' deux points de $\mathcal{P}$ distant de $2c > 0$ et a un nombre réel tel que $0 < a < c$. On cherche à étudier l'ensemble $\mathcal{H}$ des points M de $\mathcal{P}$ tels que $|MF - MF'| = 2a$.

L'ensemble $\mathcal{H}$ est non vide. En effet, les cercles Σ et Σ' de centres F et F' et de rayons $\rho = c + a$ et $\rho' = c - a$ sont tangents extérieurement en un point M qui vérifie clairement $|MF - MF'| = 2a$, et qui appartient donc à $\mathcal{H}$.



(Fig.22)

Par définition même l'ensemble $\mathcal{H}$ admet la droite (FF') et la médiatrice Δ du segment $[FF']$ comme axes de symétrie. Il en résulte que leur intersection, qui n'est rien d'autre que le milieu O de $[FF']$ est un centre de symétrie de $\mathcal{H}$. C'est le seul et on l'appelle *centre* de $\mathcal{H}$.

L'ensemble $\mathcal{H}$ est appelé *hyperbole de foyers F et F' et de paramètre $2a$* .

3.2. Équation cartésienne. Comme pour les coniques précédentes, nous allons donner l'équation cartésienne de l'hyperbole $\mathcal{H}$ dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Les points F et F' ont pour coordonnées respectives $(c, 0)$ et $(-c, 0)$. Soit M un point du plan de coordonnées (x, y) . Sa projection orthogonale M_0 sur la droite (FF') a pour coordonnées $(x, 0)$. Par le théorème de Pythagore, on a :

$$MF^2 = MM_0^2 + M_0F^2 \quad \text{et} \quad MF'^2 = MM_0^2 + M_0F'^2.$$

En faisant la différence membre à membre, on obtient :

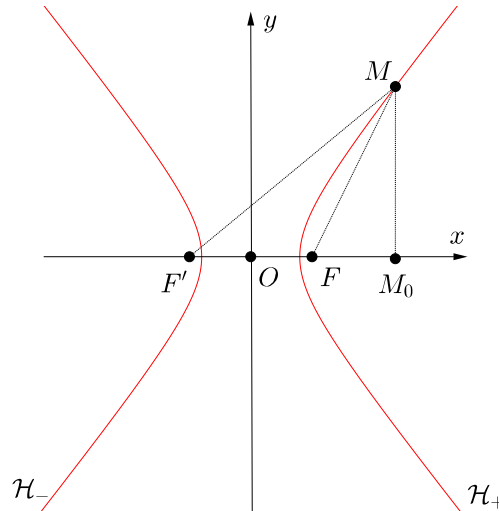
$$MF^2 - MF'^2 = \overline{M_0F}^2 - \overline{M_0F'}^2 = (\overline{M_0F} + \overline{M_0F'}) \cdot (\overline{M_0F} - \overline{M_0F'}) = -4cx$$

qui donne $(MF - MF') \cdot (MF + MF') = -4cx$. Supposons, pour fixer les idées, que $MF < MF'$; on a donc $MF - MF' = -2a$ si en plus $M \in \mathcal{H}$. On déduit alors de ce qui précède que $MF + MF' = 2\frac{c}{a}x$. Les deux égalités $MF - MF' = -2a$ et $MF + MF' = 2\frac{c}{a}x$ nous donnent $MF = \frac{c}{a}x - a$. On a donc :

$$MF^2 = \left(\frac{c}{a}x - a\right)^2 = (x - c)^2 + y^2$$

et, en posant $b = \sqrt{c^2 - a^2}$, on obtient l'équation :

$$(4) \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$



(Fig.23)

3.3. L'hyperbole $\mathcal{H}$ est constituée de deux branches $\mathcal{H}_+$ et $\mathcal{H}_-$, symétriques par rapport à l'axe (Oy) . Elles sont les graphes respectifs des fonctions $f_+, f_- : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définies par :

$$x = f_+(y) = \frac{a}{b} \sqrt{y^2 + b^2} \quad \text{et} \quad x = f_-(y) = -\frac{a}{b} \sqrt{y^2 + b^2}.$$

L'étude de ces deux fonctions montre qu'en tout point $\mathcal{H}$ admet un vecteur tangent non nul. C'est donc une courbe différentiable régulière. Elle admet deux asymptotes Δ_+ et Δ_- ayant pour équations respectives $y = \frac{b}{a}x$ et $y = -\frac{b}{a}x$.

3.4. Soit $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$ la mesure de l'angle formé par la droite (FF') et l'asymptote Δ_+ . Il est tel que $\operatorname{tg} \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{b}{a}$. Posons :

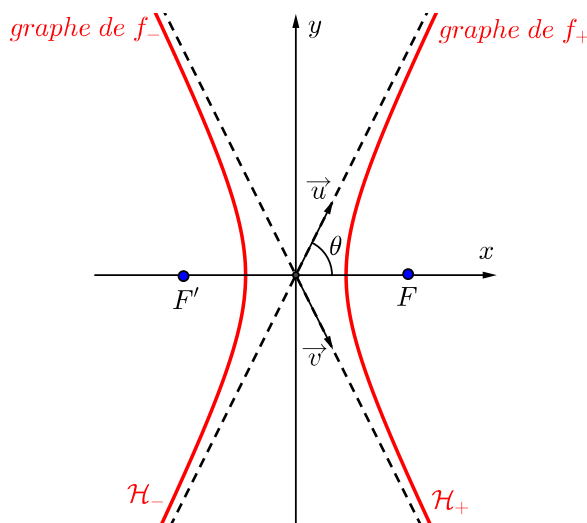
$$\begin{aligned}\vec{u} &= \cos \theta \vec{i} - \sin \theta \vec{j} \\ \vec{v} &= \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}.\end{aligned}$$

Notons (X, Y) les coordonnées de M dans le nouveau repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$; un calcul très facile nous donne de façon immédiate :

$$\begin{aligned}x &= (\cos \theta)(X + Y) \\ y &= (\sin \theta)(Y - X).\end{aligned}$$

Posons $\tau = \frac{a}{\cos \theta} = \frac{b}{\sin \theta}$. En remplaçant dans l'équation (4) x et y par leurs expressions respectives en fonction de X et Y , on obtient l'équation :

$$(5) \quad XY = \frac{\tau^2}{4}.$$



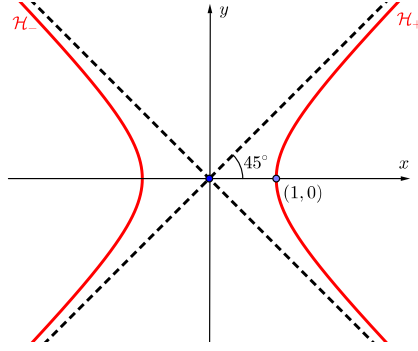
(Fig.24)

3.5. Lorsque l'angle θ vaut $\frac{\pi}{4}$, les deux asymptotes sont perpendiculaires ; on dira alors que l'hyperbole $\mathcal{H}$ est *équilatère*.

C'est le cas de l'hyperbole ayant pour équation cartésienne $x^2 - y^2 = 1$ qu'on appelle *hyperbole unité*. Sa branche $\mathcal{H}_+$ est à la *trigonométrie hyperbolique* ce qu'est le cercle unité à la *trigonométrie circulaire*. Le paramètre $t \in \mathbb{R}$ joue un « rôle similaire » à celui de l'angle en géométrie euclidienne. Le point correspondant sur la courbe $\mathcal{H}_+$ est donné par ses coordonnées :

$$\begin{cases} x(t) = \operatorname{ch}(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \\ y(t) = \operatorname{sh}(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \end{cases}$$

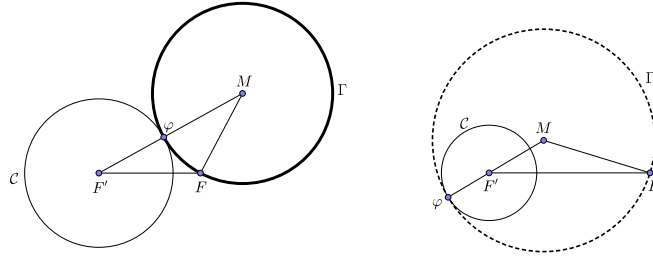
qui sont respectivement le *cosinus hyperbolique* et le *sinus hyperbolique* de t .



(Fig.25)

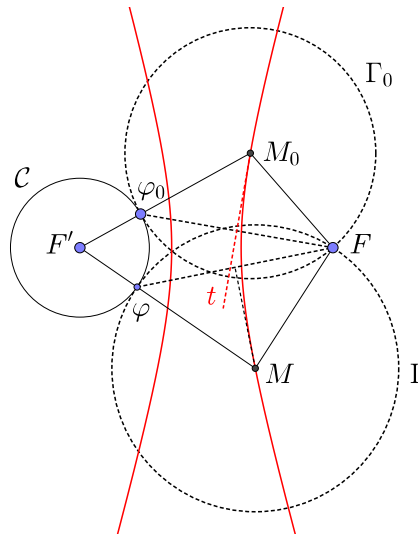
3.6. Comme pour les deux coniques précédentes, nous allons donner une caractérisation géométrique de la tangente en un point. Cela passe par une autre définition de l'hyperbole. À cet effet, on note $\mathcal{C}$ le cercle de centre F' et de rayon $2a$ (qu'on appelle *cercle directeur* de $\mathcal{H}$). Alors, comme on le voit sur le dessin ci-dessus, tout point de l'hyperbole est centre d'un cercle Γ passant par F et tangent extérieurement à $\mathcal{A}$. Cette tangence se présente sous deux formes :

- (a) Les cercles Γ et $\mathcal{C}$ sont extérieurs l'un à l'autre : cas où $MF' > MF$ et donc $M \in \mathcal{H}_+$.
- (b) Le cercle Γ est à l'intérieur du cercle $\mathcal{C}$: cas où $MF > MF'$ et $M \in \mathcal{H}_-$.



(Fig.26)

Pour la caractérisation géométrique de la tangente que nous avons annoncée, nous ne reprendrons pas les choses en détail comme nous l'avons fait pour la parabole et l'ellipse, nous laisserons ce travail au lecteur, il pourrait le mener sur le dessin qui suit.



(Fig.27)

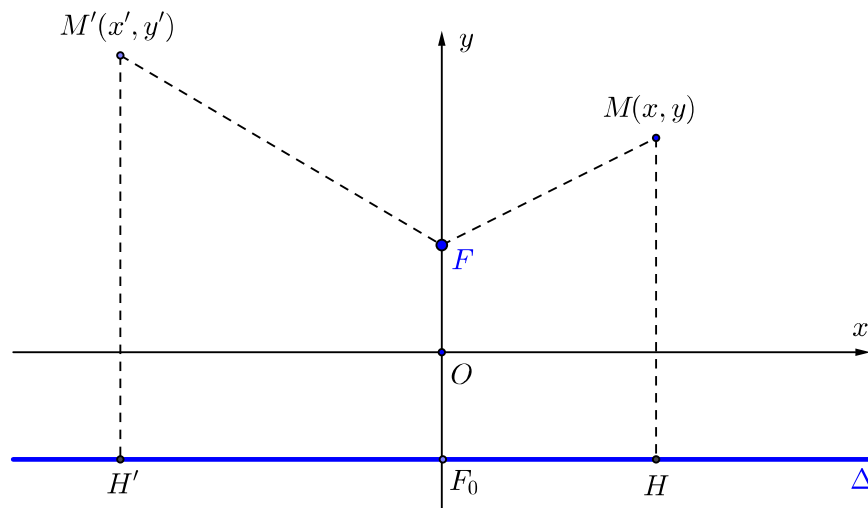
Le cercle $\mathcal{C}$ est centré en F' et a pour rayon $2a$; le cercle Γ_0 est centré en $M_0 \in \mathcal{H}$, passe par F et est tangent extérieurement en φ_0 à $\mathcal{C}$. On prend un autre point M sur l'hyperbole, centre d'un cercle Γ passant aussi par F et tangent extérieurement en φ à $\mathcal{C}$. On fait tendre M vers M_0 ; la droite (MM_0) tend alors vers la tangente à $\mathcal{H}$ en M_0 . Et comme dans le cas de l'ellipse, on montre que cette tangente est la bissectrice intérieure de l'angle géométrique $\widehat{FM_0F'}$.

4. Définition commune

On peut donner une définition commune aux trois coniques (la parabole, l'ellipse et l'hyperbole) de la façon suivante. Soient Δ une droite, F un point non situé sur Δ et e un nombre réel strictement positif.

4.1. On appelle *conique* de *directrice* Δ , de *foyer* F et d'*excentricité* e l'ensemble $\mathcal{K}$ des points M tels que $\frac{MF}{MH} = e$ où H est la projection orthogonale de M sur Δ .

Nous allons reconnaître la nature de la conique $\mathcal{K}$ en fonction du paramètre e . À cet effet, nous déterminerons son équation cartésienne (c'est ce qu'il y a de plus simple) dans un repère orthonormé adapté, choisi de façon à faciliter les calculs. L'origine O sera le milieu du segment $[FF_0]$ (cf. (Fig.28)), l'axe des abscisses sera parallèle à Δ et celui des ordonnées sera orthogonal à Δ .



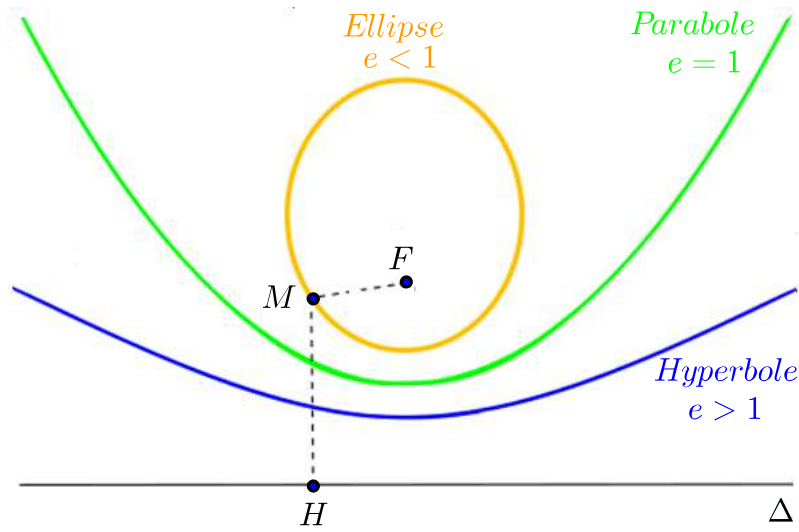
(Fig.28)

Les points F et F_0 ont respectivement pour coordonnées $(0, p)$ et $(0, -p)$. L'égalité $\frac{MF}{MH} = e$ équivaut à $MF^2 = e^2 MH^2$, qui nous donne l'équation $x^2 + (y - p)^2 = e^2(y + p)^2$, qui peut encore s'écrire $x^2 + (1 - e^2)y^2 - 4py + \delta = 0$ où δ est un réel dépendant de e et p .

- Si $e = 1$, l'équation se réduit à $y = \frac{x^2 + \delta}{4p}$. On reconnaît donc une parabole.
- Si $e < 1$, on peut mettre l'équation sous la forme $x^2 + (1 - e^2)y^2 = \alpha$ avec $\alpha > 0$. La conique $\mathcal{K}$ est donc une ellipse.
- Si $e > 1$, on peut la mettre sous la forme $x^2 - (e^2 - 1)y^2 = \beta$ avec $\beta > 0$, et donc la conique $\mathcal{K}$ est une hyperbole.

Pour l'ellipse et l'hyperbole, l'excentricité e vaut $\frac{c}{a}$ où a et c sont les constantes que nous avons utilisées pour les définir.

Le cercle (que nous n'avons pas traité) est aussi une conique dont les foyers sont confondus, ce qui se traduit par $c = 0$. Donc son excentricité vaut 0.



(Fig.29)

5. Coniques homofocales

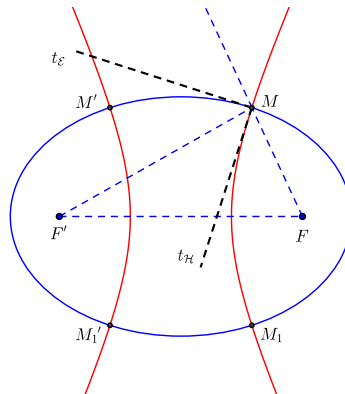
5.1. Deux coniques sont dites *homofocales* si elles ont les mêmes foyers. Évidemment là il ne s'agira que d'ellipses et d'hyperboles. Nous allons en dire un mot en traitant le problème suivant.

Problème. Soient F et F' deux points distant de $2c > 0$. Déterminer toutes les ellipses et toutes les hyperboles ayant F et F' comme foyers.

Soit M un point du plan. Si $M \in [FF']$, l'ellipse passant par M se réduit au segment $[FF']$. Une seule hyperbole passe par M s'il est le milieu de $[FF']$: sa médiatrice. Si $M \in [FF']$ et n'est pas le milieu, posons $|MF - MF'| = 2a > 0$; alors $a < c$. Il passe donc une unique hyperbole $\mathcal{H}$ de paramètre $2a$ (elle n'est pas une droite cette fois-ci et elle a deux branches).

Supposons maintenant $M \notin [FF']$. Il existe alors une unique (vraie) ellipse $\mathcal{E}$ et une unique (vraie) hyperbole $\mathcal{H}$ passant par M .

Au point M , la tangente à $\mathcal{E}$ et la tangente à $\mathcal{H}$ sont respectivement la bissectrice extérieure et la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{FMF'}$; elles sont donc orthogonales, et par suite les courbes $\mathcal{E}$ et $\mathcal{H}$ le sont aussi.



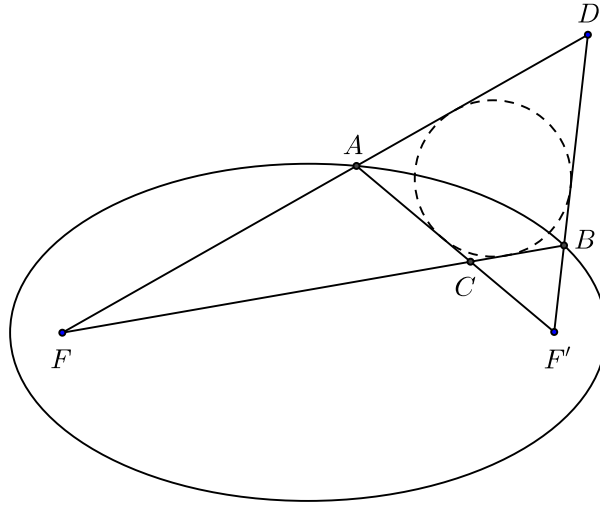
(Fig.30)

5.2. Une belle propriété. Soient $\mathcal{E}$ une ellipse de foyers F et F' et D un point extérieur à $\mathcal{E}$. Les droites (FD) et $(F'D)$ coupent $\mathcal{E}$ respectivement en A et B . Notons C le point d'intersection des droites (BF) et (AF') .

Alors il existe un cercle Γ inscrit dans le quadrilatère $ABCD$ et le point C est sur la branche de l'hyperbole passant par D et homofocale à $\mathcal{E}$.

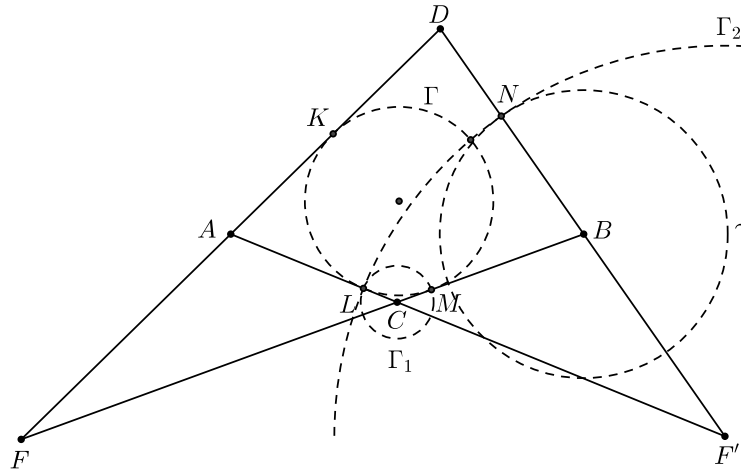
• Un calcul simple mené en regardant attentivement (Fig.32) donne l'égalité :
 $(CF - CF') - (DF - DF') = [(AC + BD) - (BC + DA)] - [(AF + AF') - (BF + BF')]$.
 Mais comme les points A et B sont sur l'ellipse $\mathcal{E}$, on a $AF + AF' = BF + BF'$ et l'égalité se réduit à :

$$(6) \quad (CF - CF') - (DF - DF') = (AC + BD) - (BC + DA).$$



(Fig.31)

• Soit Γ le cercle tangent aux côtés DA , AC et CB respectivement en K , L et M ; son centre est le point d'intersection des bissectrices des angles $\widehat{DAC}$ et $\widehat{ACB}$. Soit Γ_1 le cercle de centre C et passant par L et M (les segments CL et CM sont égaux) ; notons que Γ_1 est orthogonal à Γ . Et enfin soit Γ_2 le cercle centré en F' et passant par L ; Γ_1 est tangent à Γ_2 et est orthogonal à Γ . On note N le point d'intersection de Γ_2 avec le segment BD .



(Fig.32)

Les points A et B étant sur l'ellipse $\mathcal{E}$, on a :

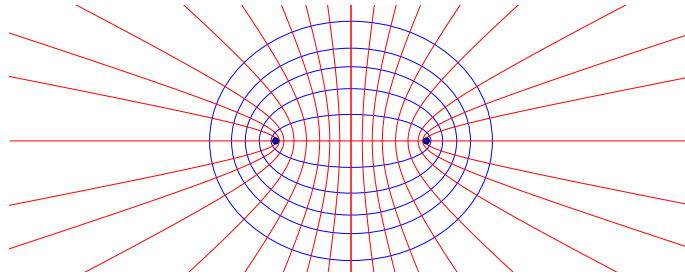
$$\begin{aligned} AF + AF' &= BF + BF' \\ (FK - AK) + (AL + LF') &= (BM + MF) + (NF' - BN) \end{aligned}$$

Mais comme $AK = AL$, $FK = FM$ et $LF = NF'$, la deuxième égalité donne $BM = BN$ qui dit que le point M est sur le cercle γ de centre B et passant par N . Par suite γ est tangent à Γ_1 en M et donc orthogonal à Γ .

- Le cercle γ est orthogonal à Γ , tangent à Γ_2 en N et orthogonal au segment BN . Cela implique que le cercle Γ est tangent au segment BD en N . Il est donc inscrit dans le quadrilatère $ABCD$.

- Comme Γ est inscrit dans le quadrilatère $ABCD$, les sommes des côtés opposés sont égales, c'est-à-dire $(AC + BD) - (BC + DA) = 0$. Injectant cela dans la relation (6), on obtient $(CF - CF') - (DF - DF') = 0$, ce qui signifie que les points C et D sont tous les deux sur la même branche d'une hyperbole homofocale à $\mathcal{E}$. $\square$

5.3. Une digression. Mettons-nous dans l'ouvert $\Omega = \mathcal{P} \setminus \{F, F'\}$ (le plan $\mathcal{P}$ privé des deux points F et F'). Quand on fait varier M dans Ω la famille des ellipses passant par M et ayant F et F' comme foyers forment un *feuilletage* $\mathfrak{S}$ (2). Ses feuilles sont les (vraies) ellipses passant par M auxquelles on rajoute le segment ouvert $]F, F'[,$ De même, la famille des hyperboles passant par M et ayant F et F' comme foyers forment un feuilletage $\mathfrak{T}$. Ces deux feuilletages sont orthogonaux : toute feuille du premier est orthogonale à toute feuille du second. On dit que le couple $(\mathfrak{S}, \mathfrak{T})$ est un *réseau orthogonal* de l'ouvert Ω .



(Fig.33)

Cette digression n'est pas inutile. Elle nous mène vers des remarques sur la façon dont l'enseignement des maths se fait quelquefois. J'ai personnellement vécu ce type d'expérience.

Au début de mon troisième cycle, je fréquentais le *Séminaire feuilletages*. Ça parlait entre autres de topologie, et certains exposants, des chercheurs bien confirmés, faisaient du découpage de variétés. Ils avaient - je m'en rappelle comme si c'était hier - un langage assez cool, du genre : « ... je découpe un disque par-ci, une boule par-là, je recolle par tel difféomorphisme, j'obtiens une autre variété, qui ressemble à ceci ou cela !... ». Pauvre de moi ! j'étais souvent largué car non habitué à ce type de raisonnement qui n'utilise pas

(2) Voir <https://images.math.cnrs.fr/le-feuilletage-de-reeb-et-quelques-autres/> pour une introduction élémentaire à la théorie des feuilletages.

explicitement les objets : la forme, l'expression de l'homéomorphisme sous-entendu !... Il m'a fallu quelques années pour rentrer dans les rangs. Pour illustrer cela, une :

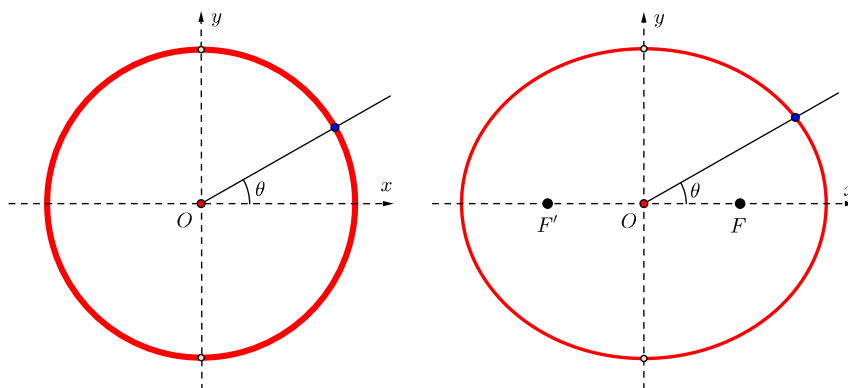
5.4. Question. *Considérons les deux ouverts $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ et $V = \mathbb{R}^2 \setminus [FF']$ avec $F = (c, 0)$ et $F' = (-c, 0)$, c étant un réel strictement positif. Sont-ils homéomorphes ? Parlant plus schématiquement, on prend deux copies du plan, on pique la première par une aiguille et on donne un coup de cutter à la seconde ; les deux parties obtenues sont-elles homéomorphes ?*

« Oui, bien sûr ! » répondrait le topologue habitué à cette chirurgie. Mais qu'en est-il pour l'étudiant débutant qui aime voir les choses plus explicitement ? Nous avons une réponse à lui proposer et qui, certainement, va lui convenir.

On regarde l'ouvert U comme le produit $]0, +\infty[\times \mathbb{S}^1$. Les coordonnées d'un point sont notées (r, θ) ($\mathbb{S}^1$ étant le cercle unité). Un point (r, θ) est donc un module r et un angle θ et les coordonnées (x, y) sont données par $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$. On définit l'application :

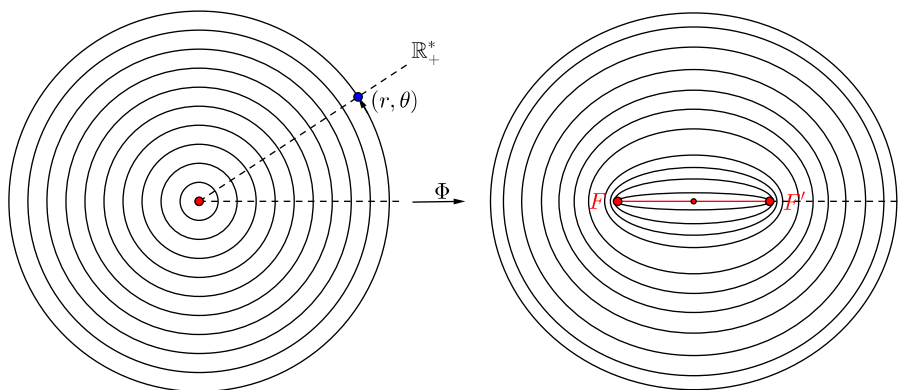
$$\Phi : (r, \theta) \in U \mapsto (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

par $x = (c + r) \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$. Alors Φ est injective et son image est l'ouvert V . C'est un difféomorphisme de U sur V ; il envoie le cercle de centre O et de rayon r sur l'ellipse de foyers F et F' et de grands sommets $(-r - c, 0)$ et $(r + c, 0)$.



(Fig.34)

L'ouvert U supporte un feuilletage $\mathfrak{U}$ dont les feuilles sont les cercles $\{r\} \times \mathbb{S}^1$ et V le feuilletage $\mathfrak{S}$ introduit précédemment (sous-section 5.3). Le difféomorphisme Φ envoie feuille du premier sur feuille du second. On dit que Φ est un *isomorphisme* de $\mathfrak{U}$ sur $\mathfrak{S}$.

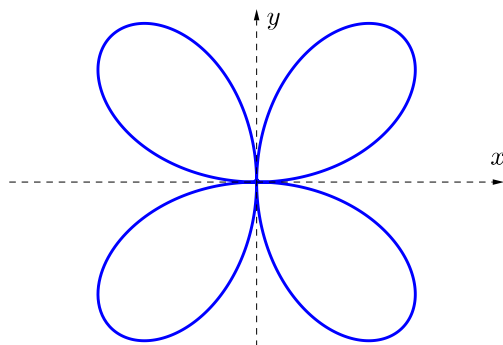


(Fig.35)

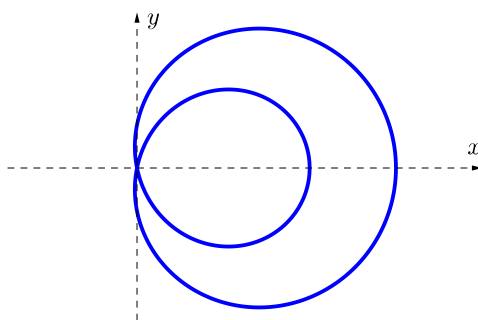
6. Trois courbes algébriques célèbres

Les coniques ne sont qu'une infime partie du monde infiniment vaste et varié des courbes algébriques. Nous en donnons quelques-unes - bien connues en géométrie - pour donner un peu plus de teinte au texte.

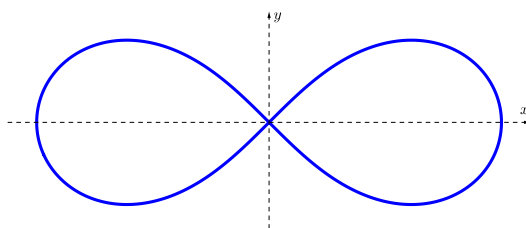
6.1. Rosace : $(x^2 + y^2)^3 = c^2 x^2 y^2$



6.2. Limaçon de Pascal : $(x^2 + y^2 - 5x)^2 = x^2 + y^2$



6.3. Lemniscate de Bernoulli : $(x^2 + y^2)^2 = 2c^2(x^2 - y^2)$



Cette courbe est aussi un lieu géométrique, qu'on peut décrire comme suit. Soient F et F' deux points distant de $2c > 0$, de milieu J . La *Lemniscate de Bernoulli* de foyers F et F' est l'ensemble des points M tels que $c = JF$ est la *moyenne géométrique* des deux grandeurs MF et MF' , c'est-à-dire $JF^2 = MF \cdot MF' = c^2$.

