Petite introduction à la géométrie complexe

AZIZ EL KACIMI
Université de Valenciennes
http://perso.numericable.fr/azizelkacimi/

Mini-cours à l'Université Internationale de Rabat
École Africaine de Mathématiques
Outils de topologie algébrique et géométrique
Du 25 juin au 6 juillet 2018

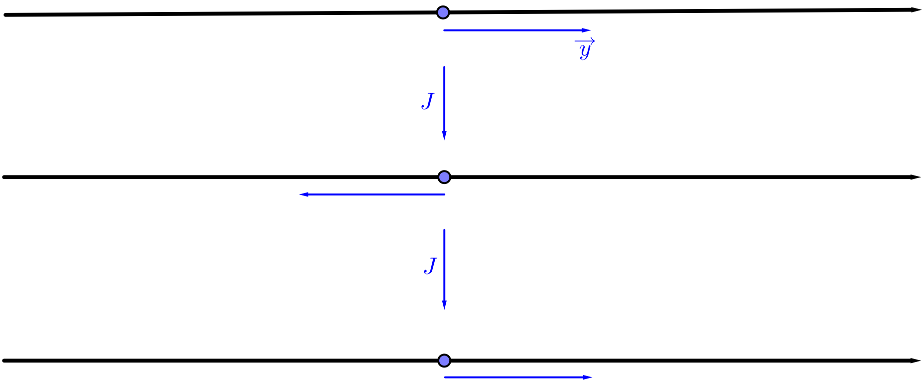
0.1. Préliminaires

Soient x et y deux nombres réels. On sait ce qu'est leur produit xy qui est aussi un nombre réel.

Mais on peut voir les choses géométriquement : on considère y comme un vecteur $\overrightarrow{y}$ sur lequel on fait opérer le nombre x (qu'on suppose non nul). On a donc une *action* :

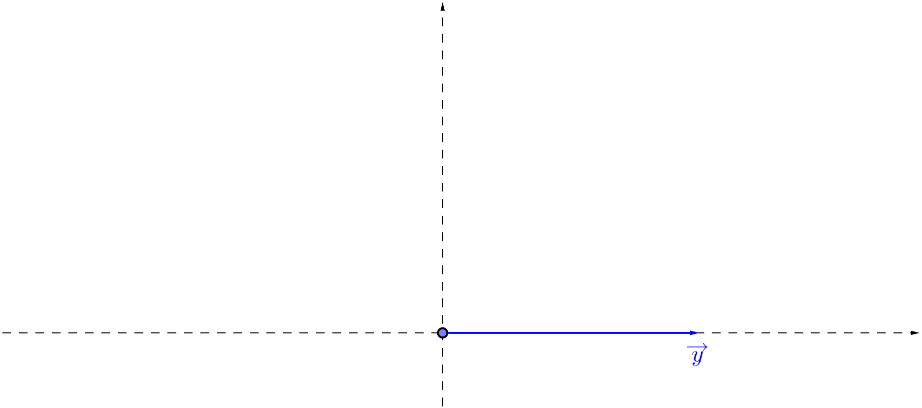
$$(x, \overrightarrow{y}) \in \mathbb{R}^* \times \overrightarrow{\mathbb{R}} \longmapsto x \cdot \overrightarrow{y} \in \overrightarrow{\mathbb{R}}$$

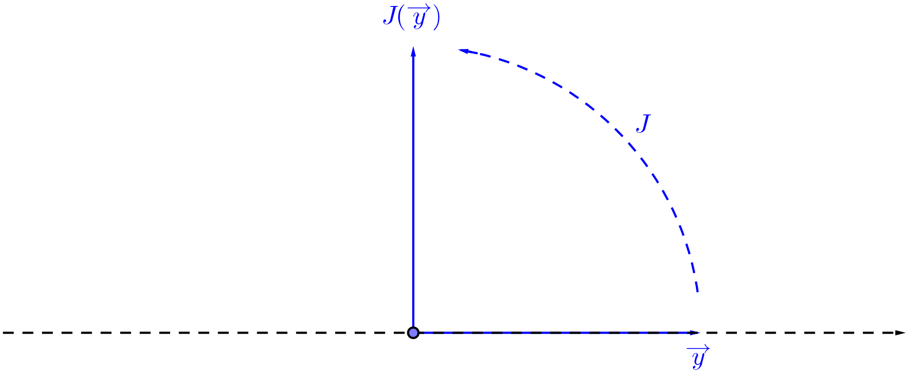
du groupe multiplicatif $\mathbb{R}^*$ sur le groupe additif $\mathbb{R}$. Si on prend $x = -1$ et on note J l'opérateur qui lui correspond par cette action, on voit donc que l'équation $J^2(\overrightarrow{y}) = -\overrightarrow{y}$ n'a jamais de solution non nulle : il est impossible, en restant dans $\mathbb{R}$ d'appliquer deux fois de suite J et de ramener $\overrightarrow{y}$ vers son opposé $-\overrightarrow{y}$!

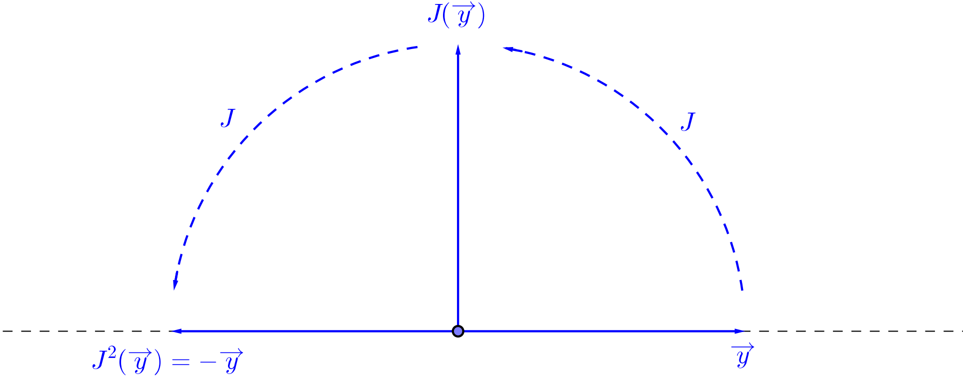


On voit donc qu'il n'y a pas assez d'espace pour permettre à l'opérateur J de tourner deux fois et inverser ainsi le sens du vecteur $\overrightarrow{y}$!

D'où l'idée de plonger la droite vectorielle $\color{red}{\overrightarrow{\mathbb{R}}}$ dans un espace plus grand à cet effet.




$J(\overrightarrow{y})$
J
$\overrightarrow{y}$



$J(\overrightarrow{y})$
J
J
$J^2(\overrightarrow{y}) = -\overrightarrow{y}$
$\overrightarrow{y}$

On voit donc qu'en sortant du corps $\mathbb{R}$ on peut trouver un nombre i (i comme *imaginaire*) dont le carré vaut -1. Le surcorps $\mathcal{K}$ dans lequel on pourrait résoudre notre équation $z^2 = -1$ (impossible dans $\mathbb{R}$) devrait être tel que :

1. *s'il contient x et y réels, il doit contenir $x + y$;*
2. *s'il contient y réel, il doit contenir iy ;*
3. *s'il contient x et y réels, il doit contenir $x + iy$.*

   Il est donc tout à fait clair que le corps $\mathcal{K}$ est constitué des éléments de la forme $z = x + iy$ se composant comme suit :

4. $(x + iy) + (x' + iy') = (x + x') + i(y + y')$;
5. $(x + iy) \cdot (x' + iy') = (xx' - yy') + i(xy' + x'y)$.

0.2. Propriétés algébriques

Le corps $\mathcal{K}$ ainsi construit est le plus petit dans lequel l'équation $z^2 + 1 = 0$ admet une solution. On le note $\mathbb{C}$ et on l'appelle *corps des nombres complexes*. Le corps des réels $\mathbb{R}$ s'y plonge par le morphisme injectif : $x \in \mathbb{R} \longmapsto (x, 0) = x + i0 \in \mathbb{C}$.

1. *La représentation $x + iy$ est unique. En effet si $z = x + iy = x' + iy'$, on a $x - x' = i(y' - y)$; donc $(x - x')^2 = -(y' - y)^2$, ce qui n'est possible que si $x = x'$ et $y = y'$.*
2. *L'application $z = x + iy \in \mathbb{C} \longmapsto \overline{z} = x - iy \in \mathbb{C}$ est appelée* ***conjugaison*** *: $\overline{z}$ est le* ***conjugué*** *de z. C'est un automorphisme du corps $(\mathbb{C}, +, \times)$, c'est-à-dire qu'on a :*

$$\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}, \qquad \overline{zz'} = \overline{z} \cdot \overline{z'}, \qquad \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}.$$

$\mathbb{C}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension 2. Pour $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ dans $\mathbb{C}$, on a :

$$z\overline{z'} = (xx' + yy') - i(xy' - yx').$$

La partie réelle de ce nombre définit une forme $\mathbb{R}$-bilinéaire symétrique $\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ par $\langle z, z' \rangle = xx' + yy'$; comme $\langle z, z \rangle = z\overline{z} = x^2 + y^2 > 0$ pour tout z non nul, cette forme est définie positive, c'est donc un produit scalaire sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$. Il donne alors lieu à une norme :

$$|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Le nombre réel positif ou nul $|z|$ est appelé *module* du nombre complexe $z = x + iy$. Ses principales propriétés sont :

$$|zz'| = |z| \cdot |z'|, \qquad \left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}, \qquad \big||z| - |z'|\big| \leq |z + z'| \leq |z| + |z'|.$$

0.3. L'aspect géométrique

Deux groupes sont en jeu : le groupe additif $(\mathbb{C}, +)$ et le groupe multiplicatif $(\mathbb{C}^*, \times)$. Nous allons les interpréter géométriquement.

Le groupe additif $(\mathbb{C}, +)$

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe. La transformation $\tau_z : u \in \mathbb{C} \longmapsto u + z \in \mathbb{C}$ s'écrit en coordonnées cartésiennes $\tau_z(\alpha, \beta) = (\alpha + x, \beta + y)$; elle correspond à la translation par le vecteur $z = (x, y)$.
Nous avons donc une application $\tau : z \in \mathbb{C} \longmapsto \tau_z \in \mathcal{T}$ où $\mathcal{T}$ est le groupe des translations du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.
Un calcul assez facile montre que τ est une bijection vérifiant $\tau_{z+z'} = \tau_{z'} \circ \tau_z$, autrement dit, τ est un isomorphisme du groupe additif $(\mathbb{C}, +)$ sur le groupe $(\mathcal{T}, \circ)$ où $\circ$ est la composition des applications.

Le groupe multiplicatif $(\mathbb{C}, \times)$

Nous avons vu que la partie réelle de l'application $(z, z') \longmapsto z\overline{z'}$ définit un produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$ sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ par $\langle z, z' \rangle = xx' + yy'$. On peut donc parler de *similitude linéaire directe*. La matrice Z d'une telle application par rapport à la base orthonormée $(1, i)$ a la forme $Z = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$ où x et y sont des nombres réels non simultanément nuls. Si : $Z = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$ et $Z' = \begin{pmatrix} x' & -y' \\ y' & x' \end{pmatrix}$ sont deux matrices de ce type, leur produit est encore de ce type :

$$Z \cdot Z' = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' & -y' \\ y' & x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xx' - yy' & -(xy' + x'y) \\ xy' + x'y & xx' - yy' \end{pmatrix}.$$

Bien évidemment, la matrice identité $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **en fait partie ainsi que l'inverse de** $Z = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$ **qui est :**

$$Z^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{x}{x^2+y^2} & \frac{y}{x^2+y^2} \\ \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}.$$

L'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$ **avec** $x^2 + y^2 \neq 0$ **muni de la multiplication habituelle est un groupe commutatif. Il est isomorphe au groupe** $(\mathbf{Sim}_0^+(\mathbb{C}), \circ)$ **des similitudes linéaires directes de l'espace euclidien** $(\mathbb{C}, \langle\ ,\ \rangle)$**.**

Comme en plus l'ensemble $\mathcal{H}$ **de toutes les matrices de la forme** $\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$ **est un groupe pour**

l'addition habituelle (des matrices), $(\mathcal{H},+,\cdot)$ est en fait un corps commutatif canoniquement isomorphe au corps $(\mathbb{C},+,\times)$ via l'application : $z=x+iy\in\mathbb{C}\overset{\simeq}{\longmapsto}\begin{pmatrix}x & -y\\ y & x\end{pmatrix}\in\mathcal{H}$. En conclusion :

1. *Le groupe $(\mathbb{C},+)$ est isomorphe au groupe des translations $(\mathcal{T},\circ)$: quand on rajoute un nombre complexe $z=x+iy$ à $u=\alpha+i\beta$, on translate le point (α,β) par (x,y).*

2. *Le groupe multiplicatif $(\mathbb{C},\cdot)$ est isomorphe à $(\mathcal{H}^*,\cdot)$ (où $\mathcal{H}^*$ est l'ensemble des matrices non nulles de la forme $\begin{pmatrix}x & -y\\ y & x\end{pmatrix}$: multiplier $w=a+ib$ par $z=x+iy$ revient à appliquer à (a,b) la matrice $\begin{pmatrix}x & -y\\ y & x\end{pmatrix}$.*

Nous venons donc d'identifier un nombre complexe non nul $z = x + iy$ à la matrice $Z = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$. Mais cette dernière peut s'écrire sous la forme :

$$Z = \sqrt{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{pmatrix}.$$

C'est la matrice de la similitude centrée à l'origine de rapport $r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$ et d'angle θ tel que $\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ et $\sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$. On a donc :

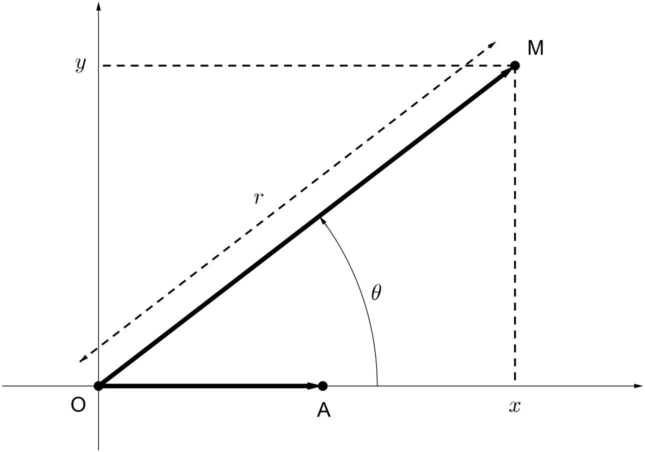
$$Z = r \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Le nombre complexe correspondant s'écrit alors $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$. L'angle θ (défini à un multiple entier de 2π près) est appelé ***argument*** de z et se note $\mathbf{Arg}(z)$. Le nombre compexe non nul z est donc entièrement déterminé par son module r et son argument θ ; on l'écrit $z = [r, \theta]$. Un calcul immédiat montre que $zz' = [r, \theta] \cdot [r', \theta'] = [rr', \theta + \theta']$.

L'application $\Phi : (r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \longmapsto [r, \theta] = z \in \mathbb{C}^*$ est donc un homomorphisme de groupes ; il est surjectif mais pas injectif, son noyau est $\{1\} \times 2\pi\mathbb{Z}$. Comme le quotient $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ n'est rien d'autre que le groupe $\mathbf{SO}(2)$ des rotations de centre l'origine (c'est aussi le ***groupe des angles*** de sommet l'origine), Φ induit un isomorphisme de groupes :

$$\Phi : \mathbb{R}_+^* \times \mathbf{SO}(2) \xrightarrow{\simeq} \mathbb{C}^*.$$

La similitude Z appliquée au point $A = 1 = (1, 0)$ donne $M = x + iy$ tel que $OM = r$ et $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}) = \theta$ (modulo 2π) (voir le dessin ci-dessous).



0.4. $\mathbb{R}$-linéarité et $\mathbb{C}$-linéarité

Une application linéaire $f : z \in \mathbb{C} \longmapsto f(z) \in \mathbb{C}$ est toujours de la forme $f(z) = \alpha z$ avec $\alpha = f(1)$. Si $\alpha = a + ib$, alors $f(z) = \alpha z = (a + ib)(x + iy) = (ax - by) + i(bx + ay)$. Donc, si on voit f comme application du $\mathbb{R}$-espace $\mathbb{C}$ dans lui-même, sa matrice par rapport à la base $\{1, i\}$ est nécessairement de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.
On peut vérifier facilement qu'une application $\mathbb{R}$-linéraire de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ dont la matrice par rapport à cette base est de cette forme est aussi $\mathbb{C}$-linéaire.

Par exemple, l'application conjugaison $z \in \mathbb{C} \longmapsto \overline{z} \in \mathbb{C}$ est $\mathbb{R}$-linéaire mais elle n'est pas $\mathbb{C}$-linéaire !

Soit $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ une application $\mathbb{C}$-linéaire (mais qu'on voit comme $\mathbb{R}$-linéaire) de matrice $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$; alors on peut toujours écrire :

$$A = \sqrt{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

où θ est un réel (donné modulo 2π). Par conséquent, du point de vue géométrique, une application $\mathbb{C}$-linéaire n'est rien d'autre qu'une similitude directe de centre l'origine : c'est la composée de l'homothétie de centre 0 et de rapport $\sqrt{a^2 + b^2}$ et de la rotation de centre 0 et d'angle θ.

0.5. Exercices

1. Soient A, M et P trois points du plan complexe ayant respectivement pour affixes 1, $z \neq 1$ et z^2.
   Pour quelles valeurs de z, le triangle AMP est-il rectangle et isocèle en A ?

2. Soient A, B et C trois points du plan complexe d'affixes respectives a, b et c.
   Montrer que le triangle ABC est équilatéral si, et seulement si, a, b et c vérifient $a + jb + j^2c = 0$ ou $a + j^2b + jc = 0$. Ici $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ (racine cubique de 1).

   Dans la mesure du possible, donner une preuve géométrique.

Dans toute la suite de ce chapitre U sera un ouvert de $\mathbb{C}$. On parlera de domaine s'il est en plus connexe.

1.1. Définition de l'holomorphie

Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction.

On dira que f est *holomorphe* au point $z_0 \in U$ si elle est dérivable en ce point, c'est-à-dire si la limite suivante existe :

$$\lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \neq z_0}} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Cette limite est notée $f'(z_0)$ et appelée *dérivée* de f au point z_0. On dira que f est holomorphe sur U si elle est holomorphe en tout point de U.

• On vérifie facilement (exactement comme on le fait pour les fonctions d'une variable réelle) que la somme $f+g$, le produit fg, le quotient $\frac{f}{g}$ (là où il est défini) de deux fonctions holomorphes sont des fonctions holomorphes.

• Si $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ et $g : V \longrightarrow \mathbb{C}$ sont des fonctions holomorphes avec $f(U) \subset V$ la composée $g \circ f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ est une fonction holomorphe et on a $(g \circ f)'(z) = f'(z)g'(f(z))$. Si $f : U \longrightarrow V$ est une bijection et f est holomorphe en z_0 avec $f'(z_0) \neq 0$, alors f^{-1} est holomorphe en $w_0 = f(z_0)$ et $(f^{-1})'(w_0) = \frac{1}{f'(z_0)}$.

• Une bijection $f : U \longrightarrow V$ (U et V des ouverts de $\mathbb{C}$) holomorphe avec inverse f^{-1} holomorphe est appelée **biholomorphisme** de U sur V. On dira aussi que U et V sont **biholomorphiquement équivalents**.

Par exemple $z \longmapsto \frac{z-i}{z+i}$ est un biholomorphisme du demi-plan $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \Im z > 0\}$ sur le disque unité ouvert $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

L'ensemble $\mathbf{Aut}(U)$ des biholomorphismes d'un ouvert U est un groupe pour la composition des applications. Il est toujours contenu dans le groupe $\mathbf{Diff}(U)$ des difféomorphismes de U et est beaucoup plus petit.

1.2. Conditions de Cauchy-Riemann

Dire que $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ est holomorphe en $z_0 \in U$, c'est dire qu'au voisinage de ce point on a :

$$(*) \qquad f(z) - f(z_0) = f'(z_0)(z - z_0) + \varepsilon(z)|z - z_0|$$

avec $\lim\limits_{z \to z_0} \varepsilon(z) = 0$. Écrivons $z = x + iy$, $z_0 = x_0 + iy_0$, $f(z) = u(z) + iv(z)$, $f'(z_0) = a + ib$, $z - z_0 = h + ik$ et $\varepsilon = \alpha + i\beta$.
Alors l'expression $(*)$ devient en coordonnées réelles :

$$(**)\quad \begin{cases} u(x_0+h, y_0+k) - u(x_0, y_0) = ah - bk + \alpha\sqrt{h^2+k^2} \\ v(x_0+h, y_0+k) - v(x_0, y_0) = bh + ak + \beta\sqrt{h^2+k^2} \end{cases}$$

Ceci montre que la fonction $f : (x, y) \in U \longmapsto u(x, y) + iv(x, y) \in \mathbb{C}$ **est différentiable au point** $z_0 = (x_0, y_0)$ **et de différentielle :**

$$d_{z_0}f = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial u}{\partial y}(z_0) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial v}{\partial y}(z_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

avec (comme on le voit sur la deuxième matrice) :

$$(\mathrm{CR}) \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(z_0) \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial y}(z_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(z_0).$$

Les relations (CR) sont appelées *conditions de Cauchy-Riemann*. Cela signifie que f est différentiable au point z_0 (au sens réel) et sa différentielle $d_{z_0}f$ (qui est une application $\mathbb{R}$-linéaire de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$) est en fait $\mathbb{C}$-linéaire.

Si on considère f comme fonction complexe des variables réelles x et y, les conditions (CR) s'écrivent aussi :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) + i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = 0.$$

Les deux assertions qui suivent sont donc équivalentes :

1. $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ *est holomorphe en* z_0.
2. f *est différentiable en* z_0 *et vérifie* (CR).

1.3. Exemples

1. Une fonction polynôme $P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$.
2. une fonction rationnelle (là où le dénominateur ne s'annule pas) :

$$f(z) = \frac{a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n}{b_0 + b_1 z + \cdots + b_m z^m}.$$

3. Toute série entière $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ à l'intérieur de son disque de convergence.
4. La fonction exponentielle $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{n!}$.
5. Les fonctions :

$$\mathrm{ch}(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \qquad \mathrm{sh}(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \qquad \sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \ldots$$

Exemple non holomorphe

La fonction $\phi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $\phi(z) = \overline{z}$ n'est holomorphe nulle part. Vérifions-le au point $z_0 = 0$ en calculant $\lim\limits_{\substack{z\to 0\\ z\neq 0}} \dfrac{\phi(z)-\phi(0)}{z} = \lim\limits_{\substack{z\to 0\\ z\neq 0}} \dfrac{\overline{z}}{z}$ lorsque z tend vers 0 par valeurs réelles et lorsque z tend vers 0 par valeurs imaginaires pures.

On a :

$$\lim_{\substack{z\to 0\\ z \text{ réel } \neq 0}} \frac{\overline{z}}{z} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{x}{x} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{z\to 0\\ z \text{ imaginaire } \neq 0}} \frac{\overline{z}}{z} = \lim_{\substack{y\to 0\\ y\neq 0}} \frac{-iy}{iy} = -1.$$

Les deux limites ne coïncident pas, donc ϕ n'est pas holomorphe en 0.

On peut le voir aussi par la matrice jacobienne en 0 :

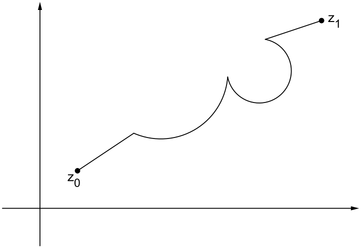
$$d\phi(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

qui ne vérifie pas les conditions de Cauchy-Riemann.

1.4. Intégration complexe

On appelle **chemin** dans U d'**origine** z_0 et d'**extrémité** z_1 toute application continue $\gamma : [0,1] \longrightarrow U$ telle que $\gamma(0) = z_0$ et $\gamma(1) = z_1$.

On dira qu'un chemin γ est C^1 par **morceaux** s'il existe une subdivision de l'intervalle $[0,1]$: $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = 1$ telle que γ soit C^1 sur chacun des intervalles ouverts $]t_i, t_{i+1}[$ (avec $i = 0, \cdots n-1$) et $\gamma'(t)$ admet une limite à droite de t_i et une limite à gauche de t_{i+1}.



Soit $\gamma : t \in [a,b] \longmapsto \gamma(t) = x(t) + iy(t) \in U$ **un chemin** C^1 **par morceaux donné comme précédemment. On définit intégrale de** f **sur** γ **comme l'intégrale ordinaire qui suit :**

$$\int_\gamma f(z)dz = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(\gamma(t))d\gamma(t)$$
$$= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(\gamma(t)) \left\{x'(t) + iy'(t)\right\} dt.$$

Cette intégrale ne dépend pas du paramétrage du chemin γ**. On a :**

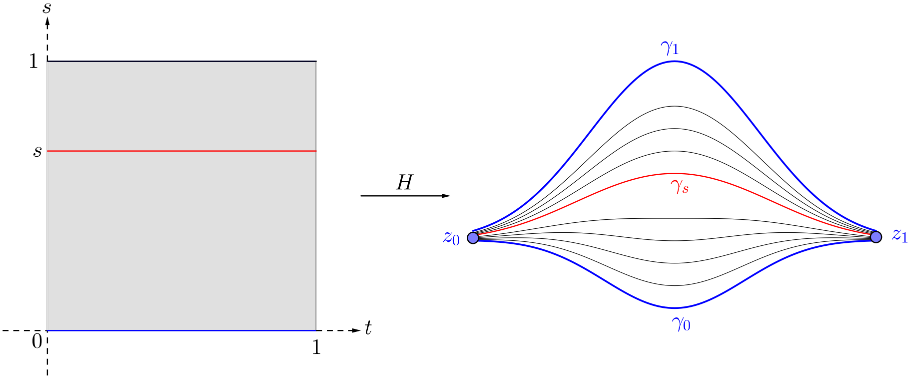
$$\int_\gamma (f(z) + g(z))dz = \int_\gamma f(z)dz + \int_\gamma g(z)dz$$

et

$$\int_\gamma \lambda f(z)dz = \lambda \int_\gamma f(z)dz \quad \text{pour tout } \lambda \in \mathbb{C}.$$

Définition

On dira que deux chemins γ_0 *et* γ_1 *(ayant même origine* z_0 *et même extrémité* z_1*) sont* ***homotopes*** *s'il existe une application continue* $H : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow U$*, appelée* ***homotopie*** *entre* γ_0 *et* γ_1*, telle que pour tout* $t \in [0,1]$ *on ait :* $H(0,t) = \gamma_0(t)$ et $H(1,t) = \gamma_1(t)$.

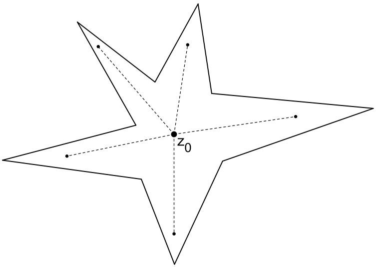


Un *lacet* est un chemin dont l'extrémité et l'origine sont confondues.

Définition

On dira que U est simplement connexe s'il est connexe et si tout lacet dedans est homotope à un point (lacet constant).

- Le plan complexe $\mathbb{C}$ lui-même, le disque unité $\mathbb{D}$ et le demi-plan supérieur $\mathbb{H}$ sont simplement connexes.
- On dira que U est **étoilé** par rapport au point z_0 si, pour tout $z_1 \in U$, le segment $[z_0 z_1] =\subset U$. Il est simplement connexe.



Ouvert étoilé

Proposition

Soient $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorphe et γ_0 et γ_1 deux chemins homotopes ayant même origine et même extrémité. Alors :

$$\int_{\gamma_0} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz.$$

Exemple fondamental

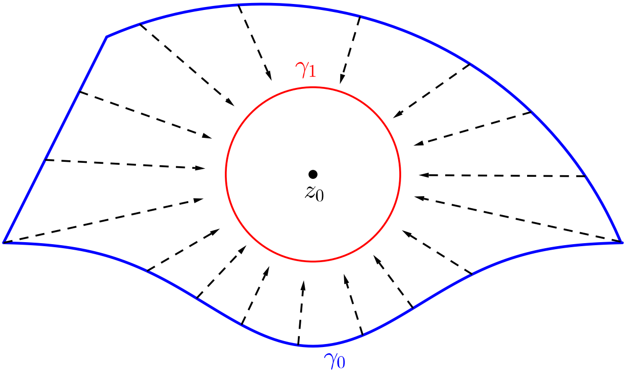
La fonction $f(z) = \frac{1}{z-z_0}$ est définie et holomorphe sur l'ouvert $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$. Calculons son intégrale sur le chemin $\gamma_n(t) = z_0 + re^{2i\pi nt}$ où $n \in \mathbb{Z}^*$ et r est un réel strictement positif; γ_n est tout simplement le cercle centré en z_0 et de rayon r parcouru $|n|$-fois dans le sens positif si $n > 0$ et dans le sens négatif si $n < 0$. On a :

$$\int_{\gamma_n} \frac{dz}{z - z_0} = \int_0^1 \frac{1}{re^{2i\pi nt}} d(z_0 + re^{2i\pi nt}) = 2i\pi n \int_0^1 dt = 2i\pi n.$$

En fait, pour tout chemin fermé γ_0 ne passant pas par z_0, le nombre :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_0}\frac{dz}{z-z_0}$$

est un entier relatif. On le note $\mathbf{Ind}(\gamma_0, z_0)$ et on l'appelle *indice* de γ_0 par rapport à z_0.



1.5. Formule intégrale de Cauchy

Soient $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe sur un ouvert U et $z_0 \in U \setminus \gamma$ où γ est un chemin fermé dans U homotope à un point. Alors :

$$\mathrm{Ind}(\gamma, z_0) f(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

En utilisant cette formule et le développement en série de Taylor :

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - z_0} \cdot \left\{ 1 + \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right) + \cdots + \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right)^n + \cdots \right\}$$

on obtient $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n (z - z_0)^n$ avec $f_n = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi.$

Ceci montre bien que f est une fonction analytique sur U.

1.6. Deux théorèmes fondamentaux

Théorème de Liouville

Soit f *une fonction holomorphe sur* $\mathbb{C}$ *tout entier (on dit que* f *est une fonction* *entière*). *On suppose que* f *est bornée. Alors* f *est constante.*

Principe du maximum

Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ *holomorphe non constante sur un ouvert connexe* U. *Alors il n'existe aucun point* $z_0 \in U$ *en lequel le module* $|f|$ *de* f *soit maximal. De façon précise, il n'existe pas de point* $z_0 \in U$ *tel que* $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ *pour tout* $z \in U$.

Corollaire

Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ *holomorphe non constante sur un ouvert connexe borné* U *et continue sur son adhérence* $\overline{U}$. *Alors* $|f|$ *ne peut atteindre son maximum que sur le bord* ∂U *de* U.

1.7. Singularités

Soient z_0 un point de $\mathbb{C}$ et f une fonction holomorphe sur un voisinage ouvert de z_0 sauf peut-être en z_0. On dira alors que z_0 est un *point singulier isolé* de f.

Pour r suffisamment petit, f admet un développement de Laurent sur la couronne $0 < |z - z_0| < r$: $f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} f_n(z - z_0)^n$. Il y a trois possibiltés :

• Les coefficients f_n sont nuls pour $n < 0$. Dans ce cas on dira que z_0 est une *singularité apparente*.

• Il n'y a qu'un nombre fini de coefficients f_n avec $n < 0$ qui sont non nuls. Dans ce cas on dira que z_0 est un *pôle* de f. Le plus grand $n \geq 1$ tel que $f_{-n} \neq 0$ est un entier naturel m appelé *ordre* du pôle z_0. Si $m = 1$ on dira que z_0 est un *pôle simple* de f.

• Il y a une infinité de coefficients f_n avec $n < 0$ qui sont non nuls. Dans ce cas on dira que z_0 est une *singularité essentielle*.

Définition

Une fonction $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ *est dite méromorphe s'il existe un ensemble discret* Σ *de* U *tel que* f *est holomorphe sur* $U \setminus \Sigma$ *et tout point de* Σ *est un pôle de* f.

Il n'y a aucune restriction sur les pôles comme le décrit le ***Théorème de Mittag-Leffler*** **qui a marqué un pas décisif dans la théorie des fonctions d'une variable complexe.**

Théorème de Mittag-Leffler

Soit $(z_k)_{k\geq 1}$ *une suite discrète dans* $\mathbb{C}$ *et* $(m_k)_{k\geq 1}$ *une suite d'entiers naturels. Alors il existe une fonction méromorphe sur* $\mathbb{C}$ *ayant* $z_1, \cdots, z_k, \cdots$ *comme pôles d'ordres respectifs* $m_1, \cdots, m_k, \cdots$.

On peut donc prescrire à l'avance les pôles et leurs multiplicités respectives.

L'importance de la notion de *singularité essentielle* est par exemple illustrée par les deux théorèmes qui suivent.

Théorème de Weierstrass

Soit $f : D(z_0, r) \longrightarrow \mathbb{C}$ *holomorphe sur le disque ouvert* $D(z_0, r)$ *sauf en* z_0 *qui est une singularité essentielle. Alors, pour tout* $\varepsilon > 0$ *(avec* $\varepsilon < r$*), l'image par* f *du disque épointé* $D(z_0, \varepsilon) \setminus \{z_0\}$ *est dense dans* $\mathbb{C}$.

Encore plus fort :

Théorème de Picard

Soit z_0 *une singularité essentielle d'une fonction* f *holomorphe sur un disque ouvert épointé* $D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$. *Alors, pour tout* $\varepsilon > 0$ *(avec* $\varepsilon < r$*), l'image par* f *du disque épointé* $D(z_0, \varepsilon) \setminus \{z_0\}$ *est* $\mathbb{C}$ *tout entier ou* $\mathbb{C}$ *privé d'un point.*

Exercice : *Tester le théorème de Weierstrass sur* $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$.

2. Homographie

2.1. Généralités

On complète le plan complexe en lui rajoutant le point à l'infini ∞ ; on obtient alors ce qu'on appelle la *sphère de Riemann* et qu'on note $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.
On prolonge une partie des opérations de l'addition et de la multiplication de $\mathbb{C}$ à $\widehat{\mathbb{C}}$ en posant :

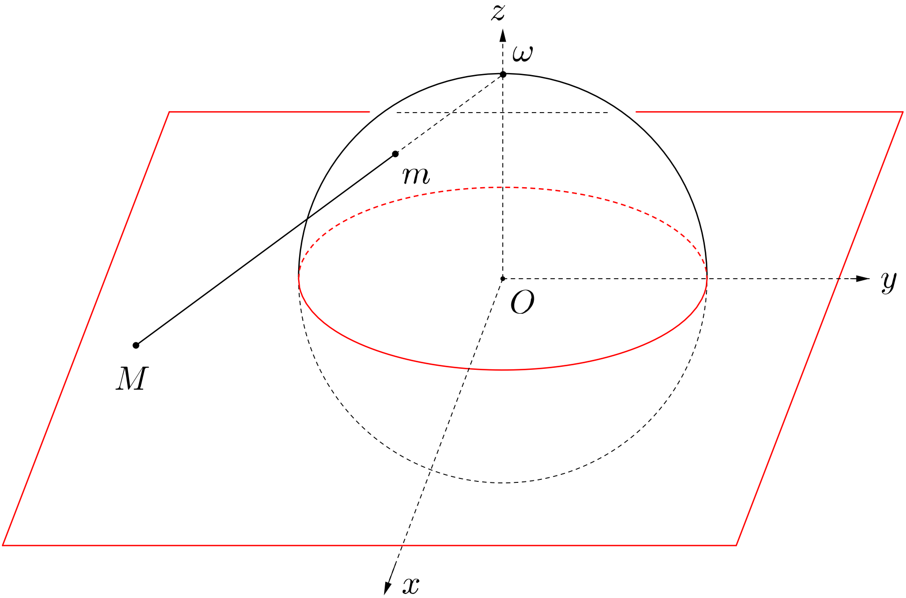
$$z + \infty = \infty + z = \infty \quad \infty \times \infty = \infty \quad \text{et} \quad \frac{z}{\infty} = 0 \quad \text{pour } z \in \mathbb{C}$$

$$z \times \infty = \infty \times z = \infty \quad \text{et} \quad \frac{z}{0} = \infty \quad \text{pour tout } z \in \mathbb{C}^*.$$

On peut montrer que, du point de vue topologique, $\widehat{\mathbb{C}}$ est la sphère unité $\mathbb{S}^2$ de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$. L'application $\psi : \mathbb{S}^2 \setminus \{\omega\} \longrightarrow \mathbb{C}$ qui suit est une bijection :

$$\psi(x, y, z) = \frac{x}{1-z} + i\frac{y}{1-z}$$

Quand m tend vers ω, M est rejeté à l'infini. Ainsi $\widehat{\mathbb{C}}$ s'identifie à la sphère $\mathbb{S}^2$, ce qui justifie l'appellation *sphère de Riemann* pour $\widehat{\mathbb{C}}$. ψ s'appelle *projection stéréographique.*



z
ω
m
y
O
M
x

Définition

Une ***homographie*** *de* $\widehat{\mathbb{C}}$ *est une transformation* h *qui à* M *d'affixe* z *associe le point* M' *d'affixe :*

$$z' = \begin{cases} \frac{az+b}{cz+d} & \text{si } z \in \mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\} \\ \infty & \text{si } z = -\frac{d}{c} \\ \frac{a}{c} & \text{si } z = \infty \end{cases}$$

où a, b, c, d *sont des nombres complexes.*

On vérifie immédiatement que, si $ad - bc = 0$, la transformation h est constante ; on supposera donc $ad - bc \neq 0$. Si $c = 0$ on a $a \neq 0$ et $d \neq 0$; h s'écrit alors $h(z) = \alpha z + \beta$ avec $\alpha = \frac{a}{d}$ et $\beta = \frac{b}{d}$.
Si on pose $\rho = |\alpha|$ et $\theta = \text{argument}(\alpha)$, h se décompose comme suit :

$$z \longmapsto \rho z \longmapsto \rho e^{i\theta} z = \alpha z \longmapsto \rho e^{i\theta} z + \beta = z'.$$

C'est donc une *similitude directe*.

2.2. Décomposition canonique

Rappelons qu'on appelle *inversion* de *pôle* O et de *puissance* κ, l'application notée $I(O,\kappa)$ qui, à tout point M distinct de O associe le point M' sur la droite (OM) tel que $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OM'}=\kappa$. On peut bien sûr la prolonger à toute la sphère de Riemann $\widehat{\mathbb{C}}$ en posant $I(O,\kappa)(O)=\infty$ et $I(O,\kappa)(\infty)=O$.

Soit $h(z)=\frac{az+b}{cz+d}$ une homographie avec $c\neq 0$ et $ad-bc\neq 0$. On peu l'écrire sous la forme : $h(z)=\alpha+\frac{\beta}{cz+d}$ avec $\alpha=\frac{a}{c}$ et $\beta=\frac{bc-ad}{c}$. On pose $Z=cz+d$ et on note s la similitude directe qui à z associe Z. On a la décomposition qui suit :

$$z\longmapsto Z=cz+d\longmapsto\frac{1}{\overline{Z}}\longmapsto\frac{1}{Z}\longmapsto\frac{\beta}{Z}\longmapsto\alpha+\frac{\beta}{Z}.$$

On voit donc qu'on passe de z à $z'=h(z)$ en appliquant la similitude s suivie de l'inversion de pôle l'origine 0 et de puissance 1, de la réflexion par rapport à l'axe $(0x)$, de l'homothétie de centre l'origine et de rapport $|\beta|$, de la rotation de centre 0 et d'angle l'argument de β et enfin la translation de vecteur α.

2.3. Les points fixes

Soit $h(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ une homographie qui n'est pas l'identité. Un point fixe de h vérifie l'équation $\frac{az+b}{cz+d} = z$.

• Si $c = 0$, on sait que h a un seul point fixe $=\infty$ si $\frac{a}{d} = 1$ et deux points fixes ∞ et $\frac{1}{1-\frac{a}{d}}$ si $\frac{a}{d} \neq 1$. Donc au plus deux points fixes.

• Supposons $c \neq 0$. Alors ∞ n'est pas un point fixe de h et $z \in \mathbb{C}$ en est un si, et seulement si, $cz^2 + (d-a)z - b = 0$. On résout cette équation en calculant le discriminant

$\Delta = (a+d)^2 - 4(ad-bc) = (a+d)^2 - 4$.

– Si $\Delta = 0$, cette équation a une solution double, c'est-à-dire h a un seul point fixe.

– Si $\Delta \neq 0$, l'équation a deux solutions distinctes c'est-à-dire h a deux points fixes différents.

Aussi bien dans le cas $c = 0$ que $c \neq 0$, si h a trois points fixes distincts dans $\widehat{\mathbb{C}}$ (l'un de ces points peut très bien être ∞), h est l'identité. Par suite deux homographies qui coïncident sur trois points distincts sont égales.

2.4. Le groupe des homographies

L'ensemble $\mathcal{H}$ des homographies de $\widehat{\mathbb{C}}$ muni de la loi de composition des applications est un groupe non commutatif.

Soient $h_1(z) = \frac{a_1 z+b_1}{c_1 z+d_1}$ et $h_2(z) = \frac{a_2 z+b_2}{c_2 z+d_2}$ deux homographies. Un calcul simple donne l'expression de la composée :

$$h_2 \circ h_1(z) = \frac{(a_2 a_1+b_2 c_1)z+(a_2 b_1+b_2 d_1)}{(c_2 a_1+d_2 c_1)z+(c_2 b_1+d_2 d_1)}$$

qui montre bien que $h_2 \circ h_1$ est une homographie. L'élément neutre est l'identité donnée par $a = d = 1$ et $b = c = 0$ ou $a = d = -1$ et $b = c = 0$.

Toute homographie $h(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ est inversible et a pour inverse $h^{-1}(z) = \frac{dz-b}{-cz+a}$.

Ainsi l'ensemble $\mathcal{H}$ des homographies muni de la composition des applications est un groupe. Il n'est pas commutatif car, si on prend $h_1(z) = z+1$ et $h_2(z) = \frac{1}{z}$, on a $h_1 \circ h_2(z) = \frac{z+1}{z}$ alors que $h_2 \circ h_1(z) = \frac{1}{z+1}$.

2.5. La forme matricielle de $\mathcal{H}$

Soit $\mathbf{GL}(2,\mathbb{C})$ le groupe des matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ à coefficients complexes et inversibles. L'application déterminant $\det : A \in \mathbf{GL}(2,\mathbb{C}) \longmapsto \det A \in \mathbb{C}^*$ est un morphisme de groupes. Son noyau est un sous-groupe normal de $\mathbf{GL}(2,\mathbb{C})$ qu'on note $\mathbf{SL}(2,\mathbb{C})$. Alors l'application :

$$\Theta : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbf{SL}(2,\mathbb{C}) \longmapsto \left(z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d}\right) \in \mathcal{H}$$

est un morphisme de groupes. Ceci découle du calcul du produit de deux homographies fait précédemment. Ce morphisme est en plus surjectif puisque toute homographie est associée à une matrice de $\mathbf{SL}(2,\mathbb{C})$.

Le noyau de Θ est constitué de toutes les matrices $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telles que, pour tout $z \in \widehat{\mathbb{C}}$, on ait $\frac{az+b}{cz+d} = z$ c'est-à-dire $cz^2 + (d-a)z - b = 0$. Ce qui implique $b = c = 0$ et $a = d$.

Mais comme $ad = 1$ (car $ad - bc = 1$) on doit avoir $a = d = 1$ ou $a = d = -1$. Par suite $\ker\Theta$ est réduit aux deux matrices :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Comme $\ker\Theta = \{I, -I\}$ est un sous-groupe normal de $\mathbf{SL}(2, \mathbb{C})$, le quotient de $\mathbf{SL}(2, \mathbb{C})$ par $\{I, -I\}$ est un groupe noté $\mathbf{PSL}(2, \mathbb{C})$. On a donc un ismorphisme :

$$\Theta : \mathbf{PSL}(2, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{H}$$

qui à tout élément de $\mathbf{PSL}(2, \mathbb{C})$ représenté par une matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ associe l'homographie :

$$h(z) = \frac{az+b}{cz+d}.$$

2.6. Exercices

1. Soient $z_1, z_2, z_3 \in \widehat{\mathbb{C}}$ distincts deux à deux. Montrer qu'il existe toujours une unique homographie $h \in \mathcal{H}$ telle que :
$$\begin{cases} h(z_1) = \infty \\ h(z_2) = 0 \\ h(z_3) = 1. \end{cases}$$

2. On appelle *birapport* de quatre points $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \widehat{\mathbb{C}}$ pris dans cet ordre, la quantité :
$$\rho(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} : \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2}.$$
i) Soit h une homographie qui envoie z_1 sur ∞, z_2 sur 0 et z_3 sur 1. Montrer que $h(z_4) = \rho(z_1, z_2, z_3, z_4)$.
ii) Montrer que toute homographie $\phi \in \mathcal{H}$ préserve le birapport de quatre points, c'est-à-dire, on a :
$$\rho(\phi(z_1), \phi(z_2), \phi(z_3), \phi(z_4)) = \rho(z_1, z_2, z_3, z_4)$$
pour tous $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \widehat{\mathbb{C}}$.

3.1. Généralités

Le problème de l'équivalence entre objets mathématiques est central.

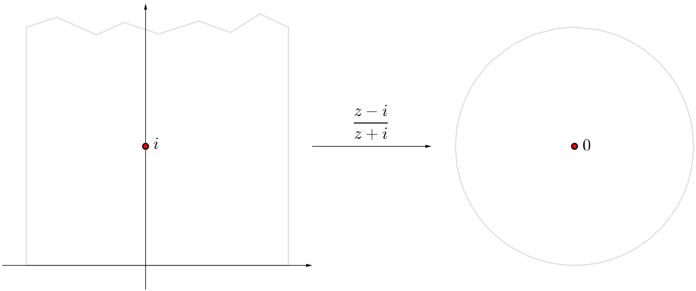
Soient U et V deux ouverts non vides de $\mathbb{C}$. On dira qu'une application $\phi : U \longrightarrow V$ est un ***biholomorphisme*** si ϕ est bijective, holomorphe et ϕ^{-1} holomorphe. On dira que U et V sont ***biholomorphiquement équivalents*** s'il existe un biholomorphisme de U sur V. Un biholomorphisme de U sur lui-même est appelé ***automorphisme*** de U. L'ensemble des automorphismes de U est un groupe noté $\mathbf{Aut}(U)$.

Notons que deux ouverts U et V biholomorphiquement équivalents ont des groupes d'automorphismes isomophes. En effet, si $h : U \longrightarrow V$ est un biholomorphisme, il est immédiat de vérifier que l'application $\phi \in \mathbf{Aut}(U) \longmapsto h \circ \phi \circ h^{-1} \in \mathbf{Aut}(V)$ est un isomorphisme de groupes.

Nous allons déterminer les groupes d'automorphismes du disque unité ouvert $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ et le demi-plan supérieur $\mathbb{H} = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : y > 0\}$. Mais avant cela nous donnerons l'un des théorèmes les plus puissants dans cette direction.

Théorème d'uniformisation

Soit U un ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$ différent de $\mathbb{C}$. Alors U est biholomorphiquement équivalent au disque unité ouvert $\mathbb{D}$.



3.2. Exemples de groupes d'automorphismes

Théorème

Tout biholomorphisme du disque unité ouvert $\mathbb{D}$ s'écrit sous la forme $f(z) = e^{i\theta}\frac{z-p}{\overline{p}z-1}$ où θ est un réel et $p \in \mathbb{D}$. De manière équivalente, on peut aussi écrire f sous la forme $\frac{\alpha z+\overline{\beta}}{\beta z+\overline{\alpha}}$ avec $|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1$.

Comme on vient de le signaler la transformation homographique $\phi(z) = \frac{z-i}{z+i}$ est un biholomorphisme de $\mathbb{H}$ sur $\mathbb{D}$. On a donc une application : $\zeta : \mathbf{Aut}(\mathbb{D}) \longrightarrow \mathbf{Aut}(\mathbb{H})$ définie par $\zeta(f) = \phi^{-1} \circ f \circ \phi$ et qui est en fait un isomorphisme de groupes. Ceci nous donne le :

Théorème

Tout automorphisme du demi-plan ouvert $\mathbb{H} = \{x + iy \in \mathbb{C} : y > 0\}$ est de la forme $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ où a, b, c, d sont des réels tels que $ad - bc = 1$.

Théorème

Tout automorphisme du plan complexe $\mathbb{C}$ est de la forme $f(z) = az + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

Preuve.

- On pose $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ et $V = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$.
- Un automorphisme f de $\mathbb{C}$ est avant tout une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ tout entier, donc une série entière $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ de rayon de convergence $R = +\infty$. Si le nombre de termes non nuls de cette série n'était pas fini, le point ∞ serait une singuarité essentielle ; par le théorème de Weierstrass l'ouvert $V' = f(V)$ serait dense dans $\mathbb{C}$, en particulier tout point de $U' = f(U)$ serait adhérent à V' ; mais ceci est impossible car les ouverts U' et V' sont disjoints et non vides. Par conséquent f est un polynôme $f(z) = \sum_{k=0}^{k} a_k z^k$.
- Comme l'application f est bijective, et donc a fortiori injective, ce polynôme doit être du premier degré, c'est-à-dire de la forme $f(z) = az + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

4.1. Préliminaires

Formellement la définition est la même que celle des variétés différentiables : la notion de difféomorphisme entre ouverts de $\mathbb{R}^n$ sera remplacée par celle d'application biholomorphe entre ouverts de $\mathbb{C}^n$. L'espace $\mathbb{C}^n$ sera identifié à $\mathbb{R}^{2n}$ à l'aide de l'application :

$$(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n) \in \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow (x_1 + iy_1, \cdots, x_n + iy_n) \in \mathbb{C}^n.$$

Soit U un ouvert de $\mathbb{C}^n$. Notons $(z_1, \ldots, z_n)$ les coordonnées complexes d'un point $z \in U$ et $(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n)$ ses coordonnées réelles où, pour tout $k = 1, \ldots, n$, $z_k = x_k + iy_k$. Pour toute fonction $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{C}$ de classe C^1, on pose :

$$\partial\varphi = \sum_{k=1}^n \frac{\partial\varphi}{\partial z_k} dz_k \quad \textbf{et} \quad \overline{\partial}\varphi = \sum_{k=1}^n \frac{\partial\varphi}{\partial \overline{z}_k} d\overline{z}_k$$

où

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial z_k} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x_k} - i\dfrac{\partial}{\partial y_k}\right) \\ \dfrac{\partial}{\partial \overline{z}_k} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x_k} + i\dfrac{\partial}{\partial y_k}\right). \end{cases}$$

Alors $d\varphi = \partial\varphi + \overline{\partial}\varphi$ où, pour tout point $z \in U$, $\partial_z\varphi$ et $\overline{\partial}_z\varphi$ sont des 1-formes complexes $\mathbb{R}$-linéaires sur $\mathbb{C}^n$. La première est $\mathbb{C}$-linéaire et la deuxième est $\mathbb{C}$-antilinéaire.

Définition

*On dira que φ est **holomorphe** si , pour tout point $z \in U$, la 1-forme $d_z\varphi$ est $\mathbb{C}$-linéaire i.e. si la partie antilinéaire $\overline{\partial}_z\varphi$ est nulle.*

Si $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m)$ est une fonction définie sur un ouvert $U \in \mathbb{C}^n$ et à valeurs dans $\mathbb{C}^m$, on dira que φ est ***holomorphe*** sur U si chacune de ses composantes φ_ℓ, $\ell = 1, \dots, m$ est holomorphe en tant que fonction définie sur U et à valeurs dans $\mathbb{C}$.
Une ***application biholomorphe*** d'un ouvert U de $\mathbb{C}^n$ sur un ouvert V de $\mathbb{C}^m$ est une application bijective $\varphi : U \longrightarrow V$ telle que φ et son inverse φ^{-1} soient holomorphes. Dans ce cas, on a nécessairement $n = m$. On dira que les deux ouverts U et V de $\mathbb{C}^n$ sont ***holomorphiquement équivalents***.

Nous sommes maintenant en mesure de donner la définition de *variété complexe*. Soit M un espace topologique séparé.

Définition

On dira que M est une variété complexe de dimension n si elle admet un recouvrement ouvert $\{U_k\}$ et pour tout k, un homéomorphisme φ_k d'un ouvert de $\mathbb{C}^n$ sur U_k de telle sorte que, si $U_k \cap U_\ell \neq \emptyset$ l'homéomorphisme qui suit soit biholomorphe :

$$\varphi_\ell^{-1} \circ \varphi_k : \varphi_k^{-1}(U_k \cap U_\ell) \subset \mathbb{C}^n \longrightarrow \varphi_\ell^{-1}(U_k \cap U_\ell) \subset \mathbb{C}^n$$

Par définition même, toute variété complexe est munie naturellement d'une structure de variété différentiable.

Tout ouvert d'une variété complexe (en particulier tout ouvert de $\mathbb{C}^n$) est une variété complexe de même dimension.

4.2. Exemples

- **Soient** $N = n + q$, $f : \mathbb{C}^N \longrightarrow \mathbb{C}^q$ **une application holomorphe et** $c \in f(\mathbb{C}^N)$. **On pose** $M = \{z \in \mathbb{C}^N : f(z) = c\}$.

Supposons qu'en tout point $z = (z_1, \ldots, z_N) \in M$, **la différentielle** $d_z f : \mathbb{C}^N \longrightarrow \mathbb{C}^q$ **(application** $\mathbb{C}$**-linéaire) soit de rang maximum.**
Alors la version complexe du théorème des fonctions implicites montre que M ***possède une structure de variété complexe de dimension*** n**.**
On dit que f **est une** ***fonction définissant*** M**.**

Contrairement au cas réel, il existe beaucoup de variétés complexes qui ne peuvent pas être obtenues de cette manière : il n'existe pas de version holomorphe du ***théorème de plongement de Whitney*****.**
Par exemple les variétés complexes compactes de dimension strictement positive ne peuvent jamais être plongées (de manière holomorphe bien sûr) dans un $\mathbb{C}^N$**.**

• On reprend la sphère de Riemann $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ et on pose $U_1 = \mathbb{C}$ et $U_2 = \mathbb{C}^* \cup \{\infty\}$. Alors $\{U_1, U_2\}$ est un recouvrement ouvert de $\widehat{\mathbb{C}}$. Soient $\varphi_1 : \mathbb{C} \longrightarrow U_1$ et $\varphi_2 : \mathbb{C} \longrightarrow U_2$ les applications définies respectivement par $\varphi_1(z) = z$ et $\varphi_2(z) = \frac{1}{z}$.

Alors :

$$U_1 \cap U_2 = \mathbb{C}^* = \varphi_1^{-1}(U_1 \cap U_2) = \varphi_2^{-1}(U_1 \cap U_2)$$

et $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1(z) = \frac{1}{z}$ qui est un biholomorphisme de $\mathbb{C}^*$.

Donc $\widehat{\mathbb{C}}$ est une variété complexe de dimension 1.

• Sur $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ on considère la relation d'équivalence :

$$z \sim w \iff \exists \lambda \in \mathbb{C}^* \text{ tel que } w = \lambda z.$$

Le quotient $P^n(\mathbb{C})$ de $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ par cette relation d'équivalence est une variété complexe appelée *espace projectif complexe* de dimension n.

4.3. Applications holomorphes

Soient M et N deux variétés complexes de dimensions respectives n et q.

Définition

On dira qu'une application $f : M \longrightarrow N$ est ***holomorphe*** *au point $z \in M$ si, pour toute carte locale de M, (U, φ) contenant z et toute carte locale (V, ψ) de N contenant $f(z)$ et tout voisinage ouvert W de z contenu dans U et tel que $f(W) \subset V$, l'application :*

$$\psi^{-1} \circ f \circ \varphi : \varphi^{-1}(W) \subset \mathbb{C}^n \longrightarrow \psi^{-1}(V) \subset \mathbb{C}^q$$

est holomorphe au point $\varphi^{-1}(z)$. On dira que f est ***holomorphe*** *si elle est holomorphe en tout point de M.*

Une fonction $f : M \longrightarrow \mathbb{C}$ est dite ***holomorphe*** si pour toute carte locale (U, φ) la fonction qui suit est holomorphe :

$$f \circ \varphi : \varphi^{-1}(U) \subset \mathbb{C}^n \longrightarrow U \longrightarrow \mathbb{C}$$

Si $f : M \longrightarrow N$ est holomorphe, bijective et f^{-1} holomorphe on dira que f est un *biholomorphisme* de M sur N. Dans ce cas les variétés M et N ont nécessairement la même dimension.

On notera $\mathcal{H}(M, N)$ l'ensemble des applications holomorphes de M dans N et simplement $\mathcal{H}(M)$ lorsque $N = \mathbb{C}$; ce dernier est une algèbre pour la multiplication des fonctions. L'ensemble des biholomorphismes (ou automorphismes) d'une variété complexe est un groupe (pour la composition des applications) noté $\mathbf{Aut}(M)$; c'est bien sûr un sous-groupe de $\mathbf{Diff}(M)$.

Une variété complexe est dite *connexe, compacte...* si elle est connexe, compacte... en tant qu'espace topologique. Par exemple $\widehat{\mathbb{C}}$, et $P^n(\mathbb{C})$ sont des variétés connexes compactes.

Dans la sous-section qui suit nous donnons un procédé de construction permettant de diversifier les exemples de variétés complexes.

4.4. Variétés complexes quotients

Soient Γ un groupe dénombrable (qu'on supposera muni de la topologie discrète) d'élément neutre noté e. On se donne une variété complexe M de groupe de biholomorphismes G.

Définition

*On appelle **action holomorphe** de Γ sur M toute application continue $\Phi : \Gamma \times M \longrightarrow M$ telle que :*

1. $\Phi(e, z) = z$ *pour tout* $z \in M$ *;*
2. $\Phi(\gamma\gamma', z) = \Phi(\gamma, \Phi(\gamma', z))$ *pour tous* $\gamma, \gamma' \in \Gamma$ *et tout point* $z \in M$ *;*
3. *pour tout* $\gamma \in \Gamma$*, l'application partielle* $\Phi(\gamma, \cdot) : z \in M \longmapsto \Phi(\gamma, z) \in M$ *est un élément de* G.

L'application $\rho : \gamma \in \Gamma \longmapsto \Phi(\gamma, \cdot) \in G$ est donc un morphisme de groupes. On dira que l'action Φ est *fidèle* si ρ est injectif. Dans ce cas on regardera toujours γ comme un automorphisme non trivial de M.

Soient M une variété complexe (connexe pour simplifier) munie d'une action holomorphe Φ d'un groupe discret Γ. Le point $\Phi(\gamma, z)$ sera noté $\gamma \cdot z$.

Définition

On dira que Φ est :

1. ***libre** si $\gamma \cdot z = z$ implique $\gamma = e$;*
2. ***propre** si, pour tout compact $K \subset M$, l'ensemble $\{\gamma \in \Gamma : \gamma \cdot K \cap K \neq \emptyset\}$ est fini .*

Pour tout point $z \in M$, $\Gamma(z)$ sera son orbite *i.e.* l'ensemble $\{\gamma \cdot z : \gamma \in \Gamma\}$. Les orbites partionnent M et forment un ensemble M/Φ qu'on appelle quotient de M par l'action Φ.
Deux actions (M, Φ) et (N, Ψ) sont dites *conjuguées* s'il existe un biholmorphisme $h : M \longrightarrow N$ tel que, pour tout $\gamma \in \Gamma$ et tout $z \in M$ on ait $h(\gamma \cdot z) = \gamma \cdot h(z)$. Cela signifie que le diagramme qui suit est commutatif pour tout $\gamma \in \Gamma$.

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{h} & N \\ \gamma \downarrow & & \downarrow \gamma \\ M & \xrightarrow{h} & N \end{array}$$

Théorème

Soient M une variété complexe de dimension n et Φ une action holomorphe, libre et propre de Γ sur M. Alors :

1. M/Φ *est une variété complexe de dimension* n.
2. *la projection canonique* $\pi : M \longrightarrow M/\Phi$ *est un* ***biholomorphisme local****, c'est-à-dire tout point* $z \in M$ *admet un voisinage ouvert* U *tel que la restriction* $\pi : U \longrightarrow \pi(U)$ *soit un biholomorphisme.*
3. *Si* Ψ *est une autre action sur* M *action holomorphiquement conjuguée à* Φ*, les variétés* M/Φ *et* M/Ψ *sont holomorphiquement équivalentes.*

4.5. Les tores complexes

Soient $M = \mathbb{C}^n$ et $\Gamma = \mathbb{Z}^{2n}$, $\tau = (\tau_1, \tau_1' \ldots, \tau_n, \tau_n')$ un vecteur de $\mathbb{R}^{2n}$ dont les composantes sont toutes non nulles. On définit une action $\Phi : \Gamma \times M \longrightarrow M$ par :

$$\Phi(q, z) = z + \tau q$$

où :

$$z = (z_1, \ldots z_n) \in \mathbb{C}^n \qquad \text{et} \qquad q = (q_1, {q'}_1 \cdots , q_n, {q'}_n) \in \mathbb{Z}^{2n}$$

et :

$$q\tau = (q_1\tau_1 + i{q'}_1{\tau'}_1, \cdots , q_n\tau_n + i{q'}_n{\tau'}_n).$$

Alors Φ est une action holomorphe, libre et propre ; le quotient M/Φ est une variété complexe de dimension n appelée *n-tore complexe* et est notée $\mathbb{T}^n_\tau$.

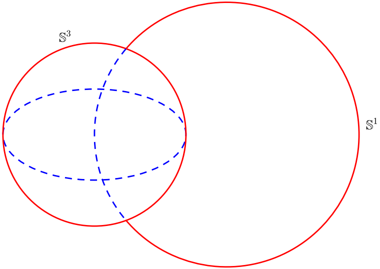
Contrairement au cas réel, sa structure complexe dépend du choix de $\tau \in \mathbb{R}^{2n}$.

4.6. Les variétés de Hopf

Soient $M = \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, $\Gamma = \mathbb{Z}$ et $a \in \mathbb{C}$ tel que $0 < |a| < 1$. On définit une action de Γ sur M de la façon suivante :

$$\Phi : (q, z) \in \Gamma \times M \longmapsto a^q z \in M.$$

Alors Φ est une action holomorphe, libre et propre. Le quotient M/Γ est une variété complexe de dimension n appelée *variété de Hopf*. Comme exercice le lecteur pourrait démontrer que cette variété est difféomorphe à $\mathbb{S}^{2n-1} \times \mathbb{S}^1$.

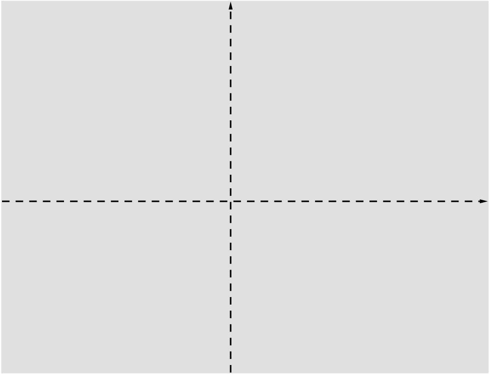


La variété de Hopf $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^1$

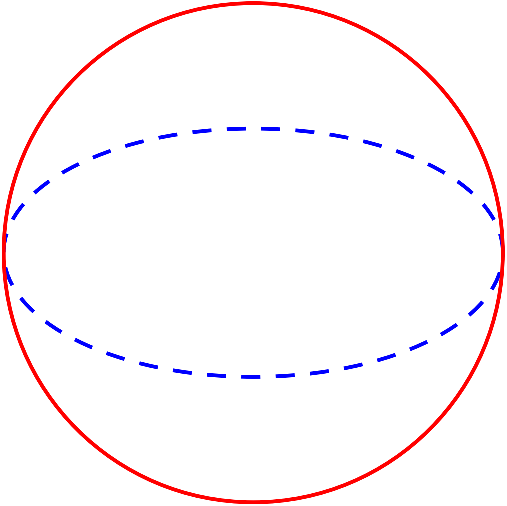
4.7. La dimension complexe 1

À équivalence biholomorphique près, il y a trois variétés complexes 1-connexes de dimension 1.

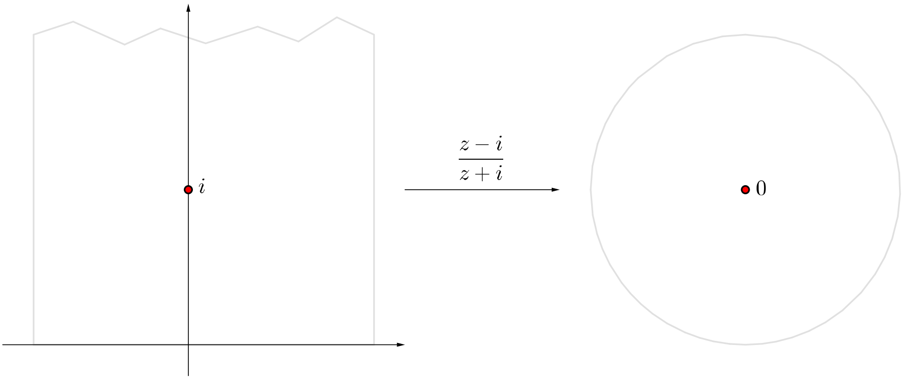
- **Le *plan complexe* $\mathbb{C}$: situation *parabolique*.**



- **La** *sphère de Riemann* $\widehat{\mathbb{C}}$ **: situation** *elliptique***.**

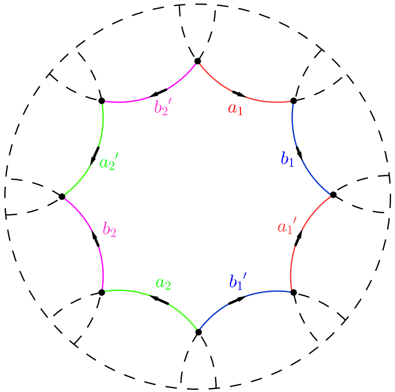


• **Le *disque unité* ouvert $\mathbb{D}$ ou le *demi-plan supérieur* $\mathbb{H}$: situation *hyperbolique*.**

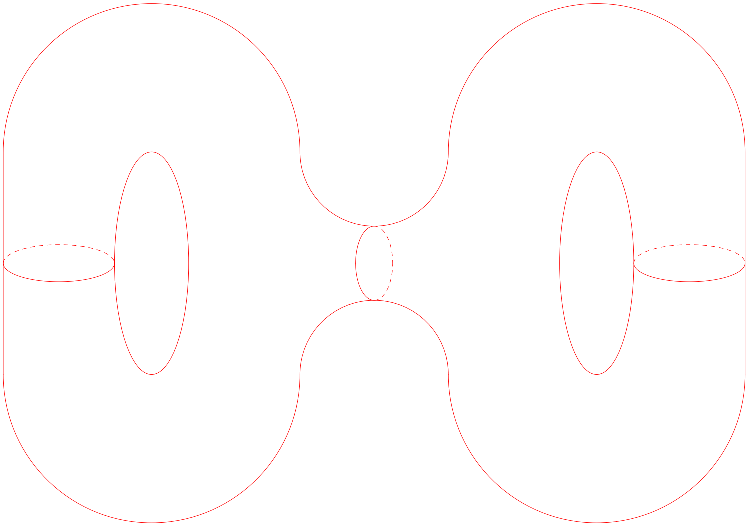


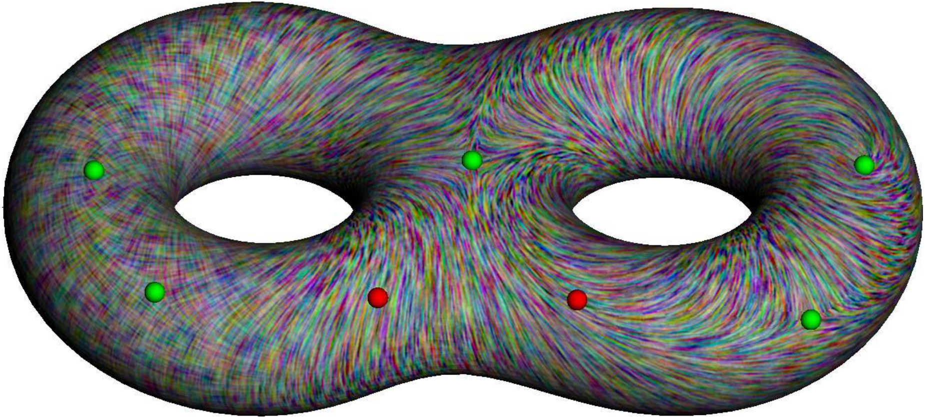
Dans le cas hyperbolique, un sous-groupe discret Γ, par exemple du groupe des automorphismes $\mathbf{Aut}(\mathbb{D})$ du disque $\mathbb{D}$ y agit proprement. Et lorsque l'action Φ est libre, le quotient $\mathbb{D}/\Phi$ est une variété complexe de dimension 1.

Domaine fondamental de Γ

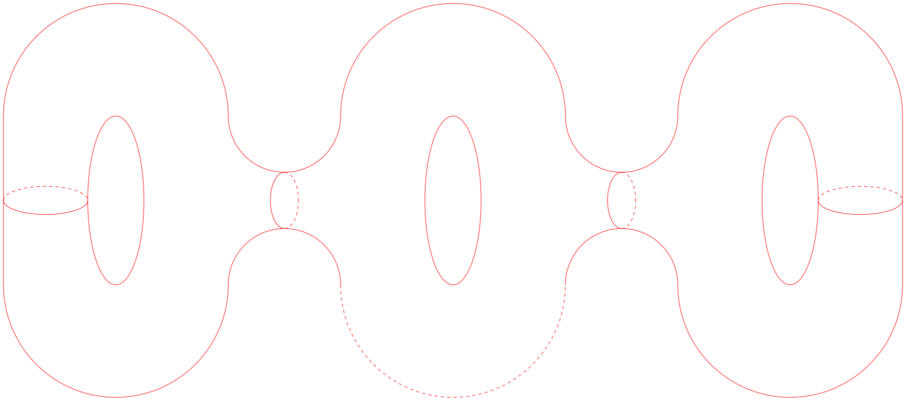


SURFACE DE GENRE 2

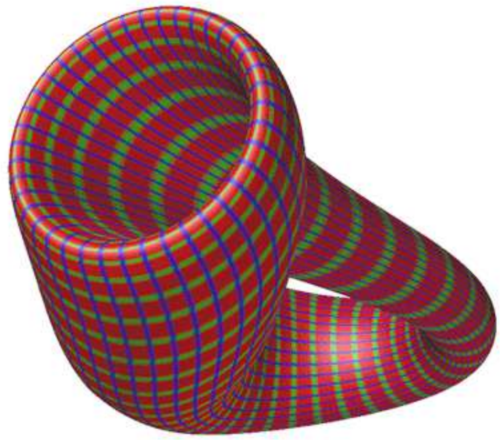




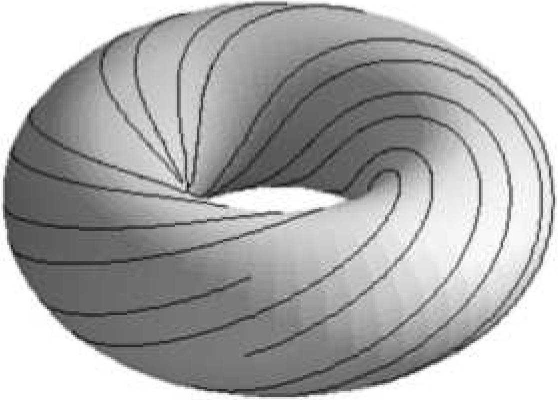
SURFACE DE GENRE 3



La bouteille de Klein n'est pas orientable.
Elle n'est donc pas une variété complexe !

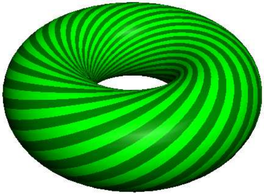


5. Les courbes elliptiques



Se larguant dans l'espace,
Tel un serpent, il s'enlace.
Ainsi, il peut être noué
Et drôlement floué.

Défiant toute norme,
Il respire et déforme
Sa magnifique carapace
En toute petite tasse.



Trois surfaces topologiquement équivalentes.

Un type singulier et inhabituel
de la beauté géométrique !

Le tore réel $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ possède une unique structure différentiable mais moult structures complexes. Nous allons voir comment elles sont fabriquées.

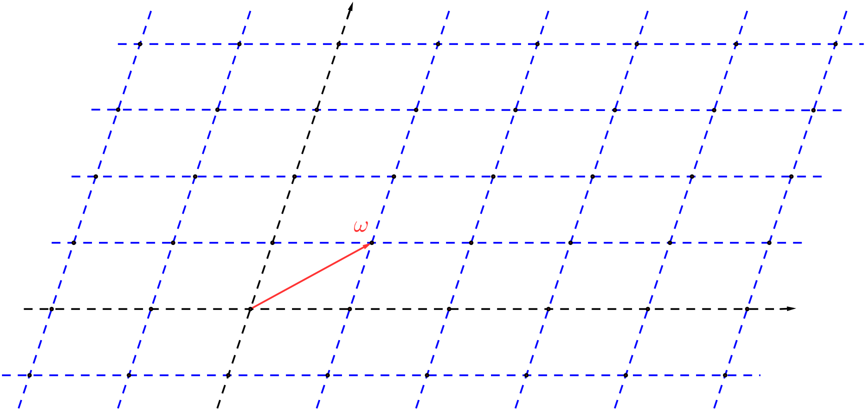
On sait que l'une des *variétés complexes* les plus simples est l'espace vectoriel $\mathbb{C}$. C'est même un *groupe de Lie complexe*. Soit $\omega \in \mathbb{H} = \{\omega = \omega_1 + i\omega_2 \in \mathbb{C} : \omega_2 > 0\}$. Alors $\omega = \omega_1 + i\omega_2$ définit un réseau :

$$\Gamma_\omega = \omega_1\mathbb{Z} \oplus i\omega_2\mathbb{Z}$$

dans $\mathbb{C}$. L'action naturelle de Γ_ω sur $\mathbb{C}$ (par translations) est évidemment holomorphe, propre et libre. Le quotient :

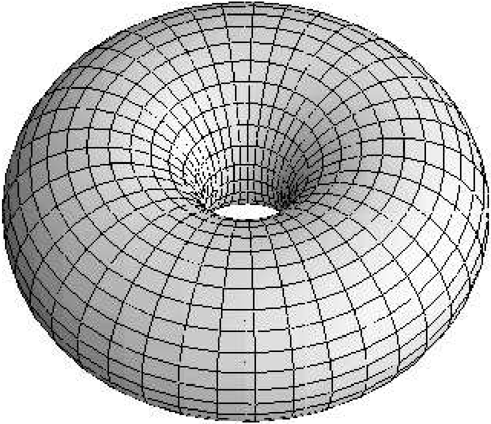
$$\Sigma_\omega = \mathbb{C}/\Gamma_\omega$$

est une variété complexe de dimension 1 qu'on appelle *courbe elliptique*.


ω

C'est un domaine fondamental du réseau.

Pour obtenir la courbe elliptique correspondante, on ferme le parallélogramme en identifiant les côtés opposés de même couleur.



Le quotient de C par le réseau Γ_ω

C'est une courbe elliptique Σ_ω

Toutes les courbes elliptiques Σ_ω sont difféomorphes au tore $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ mais elles n'ont pas la même structure complexe. En fait, on démontre facilement que :

$$\Sigma_\omega \text{ isomorphe à } \Sigma_{\omega'} \iff \exists \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbf{SL}(2,\mathbb{Z}) : \ \omega' = \frac{a\omega + b}{c\omega + d}.$$

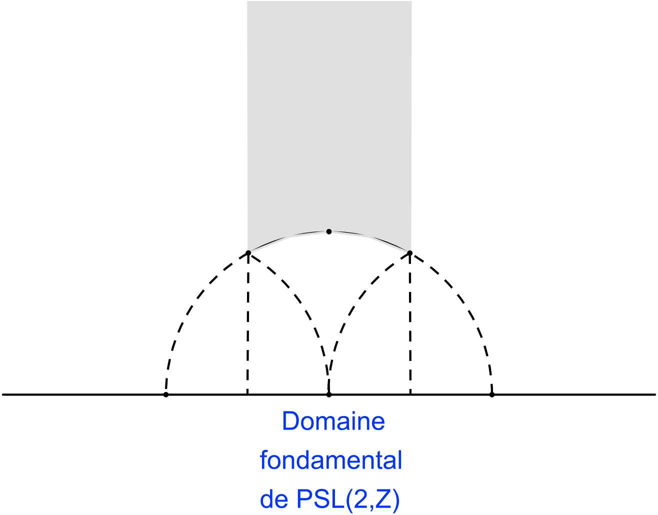
Ainsi, chaque classe d'isomorphie de structures complexes sur le tore $\mathbb{T}^2$ correspond à une orbite de l'action sur le demi-plan $\mathbb{H}$ du groupe modulaire :

$$\mathbf{PSL}(2,\mathbb{Z}) = \mathbf{SL}(2,\mathbb{Z})/\{I, -I\}$$

$$\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \omega\right) \in \mathbf{SL}(2,\mathbb{Z}) \times \mathbb{H} \longmapsto \frac{a\omega + b}{c\omega + d} \in \mathbb{H}.$$

Cette action est propre et le quotient $\mathcal{O} = \mathbb{H}/\mathbf{PSL}(2,\mathbb{Z})$ est une surface de Sataké appelée orbifold modulaire ; elle paramètre ces classes d'isomorphie de structures complexes sur $\mathbb{T}^2$.

Le groupe $\mathbf{PSL}(2,\mathbb{Z})$ est le produit libre $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3$ et est engendré par les matrices T et ST où $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Voici son domaine fondamental :



BIBLIOGRAPHIE

[1] Ahlfors, L.V. *Complex Analysis*. Collection *Mathematics Series*, McGraw-Hill (1979).

[2] Cartan, H. *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes*. Collection *Enseignement des Sciences*, Hermann (1985).

[3] Chern, S-s. *Complex Manifolds Without Potential Theory.* Universitext, Springer-Verlag (1979).

[4] Farkas, H.M. & Kra, I. *Riemann Surfaces.* GTM 71 (1980), Springer-Verlag.

[5] Forster, O. *Lectures on Riemann Surfaces.* GTM 81 (1981), Springer-Verlag.

[6] Freitag, E. *Hilbert Modular Forms.* Springer-Verlag, (1990).

[7] Hörmander, L. *An Introduction to Complex Analysis in Several Variables*. D. Van Nostrand Compagny. Inc. (1966).

[8] Jones, G. & Singerman, D. *Complex Functions. An algebraic and geometric viewpoint.* Cambridge University Press, (1987).

[9] Krantz, S. G. *Geometric Function Theory*. Birkhäuser (2006).

[10] Lavrentiev, M. & Chabat, B. *Méthodes de la théorie des fonctions d'une variable complexe*. Éditions Mir, Moscou (1972).

[11] Maass, H. *Lectures on Modular Functions of one Complex Variable.* Tata Institute of Fundamental Research, (1964).

[12] Saint-Gervais, H. P. *Uniformisation des surfaces de Riemann*. ENS Éditions, Lyon (2010).

[13] Schlichenmaier, M. *An Introduction to Riemann Surfaces, Algebraic Curves and Moduli Spaces*. Lecture Notes in Physics 322, Springer-Verlag (1979).

[14] Schwerdtfeger, H. *Geometry of Complex Numbers*. Dover Publications, INC New York (1979).

[15] Vidonne, R. *Groupe circulaire, rotations et quaternions*. Collections CAPES et Agrégation, Ellipses (2001).

Conter les premiers !

Les nombres premiers sont les blocs indivisibles qui composent les entiers naturels. Depuis qu'ils ont vu le jour, ils n'ont eu de cesse de fasciner les mathématiciens. Manprasad n'y a point échappé. Professeur de mathématiques et homme de culture, il était particulièrement épris de poésie et de musique. Il enseignait de façon singulière et sa pédagogie était hors norme : il ne manquait jamais de motiver ce qu'il racontait et aimait dire les choses avec simplicité, beaucoup de clarté et en les imprégnant souvent dune petite touche poétique. Un vendredi de printemps, la matinée s'étant annoncée belle et agréable, il a jugé plus plaisant de dispenser son cours en plein air. Il emmena alors ses élèves au bord de l'étang sur le plateau qui surplombe le village. La leçon portait sur les nombres premiers et, ce jour-là, il l'a voulue plus musicale !

Un, deux, trois, quatre, cinq...
Non ! Deux, trois, cinq... !

Pourquoi, cher Maître,
Ne peut-on tout mettre ?
Ces nombres en quantité,
N'ont-ils pas la même qualité ?

Chers enfants, c'est un blasphème
Que de croire qu'ils sont les mêmes !
Une nature héritée à la naissance,
A mis certains dans la bienséance.
Elle en a fait les briques
Qui bâtissent l'arithmétique.
Tout nombre est divisible par un
Point de cela n'est opportun.

Narcissique, il se regarde et s'aime,
Toujours multiple de lui-même.
Et si, par joie et bonheur,
Il n'a que ces diviseurs,
Il est des premiers de la classe
À qui on offre de la place,
Dans un monde intentionné
De mathématiciens passionnés.

Maître ! y en a-t-il encore ?
Pléthore, répondit le mentor.
Mais d'abord, une chansonnette
En guise d'amusette,
Qui nous révélera sans peine
Quels intrus nous gênent !

Et comme de bons vieux amis,
Maître et apprentis s'y sont mis :

Quatre est le double de deux :
Deux fois deux !

Six est un triplet de deux :
Trois fois deux !

Huit est un produit de trois :
Deux puissance trois !

Neuf est spécial :
C'est un carré impérial !

Dix est quintuple de deux :
Cinq fois deux !

Trois premiers attendent sur la pelouse :
Deux, trois et deux pour faire douze !

Quatorze a de la veine :
C'est une double semaine !

Les voix s'éteignent, silence,
Plus que le maître et sa sentence :

Pour éliminer cette suite,
Rien de tel qu'une poursuite,
Bien saccadée en scène
Par le crible d'Eratosthène !

Nos soldats resplendissants
Se rangent en croissant.
Alors, sans complaisance,
La rafle commence.

On garde deux et on cible
Le reste de ses multiples.

Effronté, trois se mêle à la fête
Et subit la même tempête.

Sans prendre de pause,
Cinq défend la même cause.
Et sous les coups de tonnerre,
Ceux où il niche sont mis à terre.

Dès que sept s’est positionné,
Ses multiples se sont fait sonner.

La bataille fait rage,
Et avec tout son courage,
Onze dresse ses deux piliers
Mais n’arrive guère à se multiplier.

Treize, le gentil porte malheur,
Demeura debout, la main au cœur.
D’un coup de soufflet, ceux qu’il divise,
Sont emportés par la brise !

Ainsi, nos soldats composés,
Finirent tous par agoniser.

Mais point de pitié, la mitraille continue
Son interminable chemin vers l'infini !

Ne restent plus en piste
Que les premiers de la liste :

2, 3, 5,..., 17...
29, 31,..., 47...
53, 61,..., 79...
89, 97,...,109...

Et beaucoup de tels nombres,
Sont encore dans l'ombre !