Géométrie complexe en dimension 1
Partie I : Fonctions holomorphes

AZIZ EL KACIMI
Université Polytechnique Hauts-de-France
http://perso.numericable.fr/azizelkacimi/

Mini-cours au
Séminaire Inter-Universitaire de Géométrie - Maroc
Samedi 15 janvier 2022

0. Nombres complexes

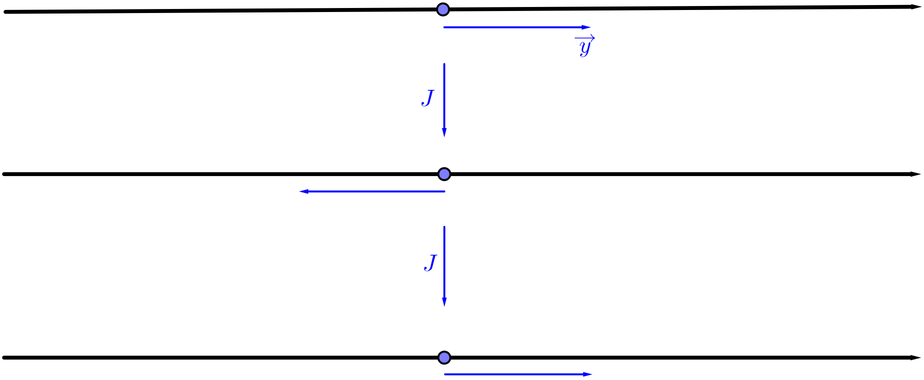
0.1. Préliminaires

Soient x et y deux nombres réels. On sait ce qu'est leur produit xy qui est aussi un nombre réel.

Mais on peut voir les choses géométriquement : on considère y comme un vecteur $\overrightarrow{y}$ sur lequel on fait opérer le nombre x (qu'on suppose non nul). On a donc une *action* :

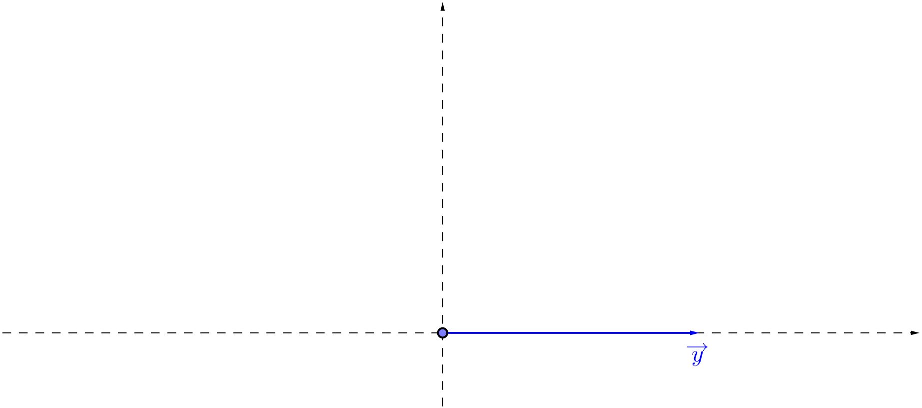
$$(x, \overrightarrow{y}) \in \mathbb{R}^* \times \overrightarrow{\mathbb{R}} \longmapsto x \cdot \overrightarrow{y} \in \overrightarrow{\mathbb{R}}$$

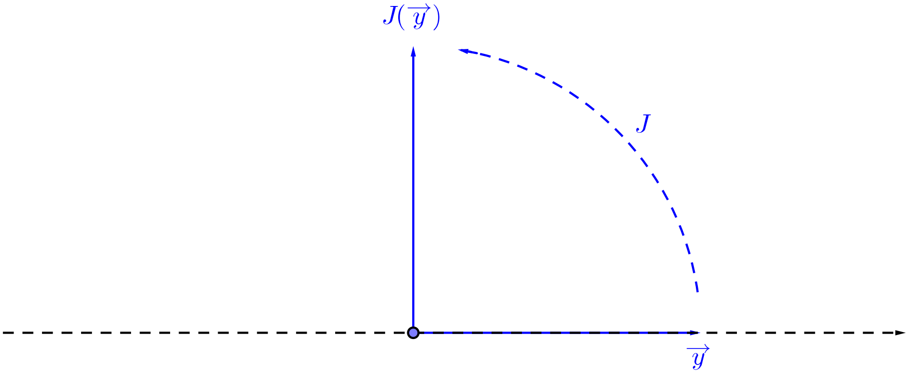
du groupe multiplicatif $\mathbb{R}^*$ sur le groupe additif $\mathbb{R}$. Si on prend $x = -1$ et on note J l'opérateur qui lui correspond par cette action, on voit donc que l'équation $J^2(\overrightarrow{y}) = -\overrightarrow{y}$ n'a jamais de solution non nulle : il est impossible, en restant dans $\mathbb{R}$ d'appliquer deux fois de suite J et de ramener $\overrightarrow{y}$ vers son opposé $-\overrightarrow{y}$!

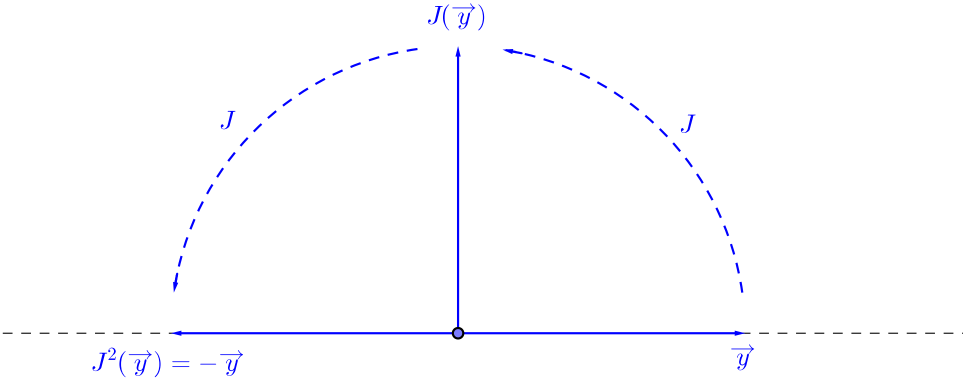


On voit donc qu'il n'y a pas assez d'espace pour permettre à l'opérateur J de tourner deux fois et inverser ainsi le sens du vecteur $\overrightarrow{y}$!

D'où l'idée de plonger la droite vectorielle $\overrightarrow{\mathbb{R}}$ dans un espace plus grand à cet effet.




$J(\overrightarrow{y})$
J
$\overrightarrow{y}$


$J(\overrightarrow{y})$
J
J
$J^2(\overrightarrow{y}) = -\overrightarrow{y}$
$\overrightarrow{y}$

On voit donc qu'en sortant du corps $\mathbb{R}$ on peut trouver un nombre i (i comme *imaginaire*) dont le carré vaut -1. Le surcorps $\mathcal{K}$ dans lequel on pourrait résoudre notre équation $z^2 = -1$ (impossible dans $\mathbb{R}$) devrait être tel que :

1. ***s'il contient x et y réels, il doit contenir $x + y$;***
2. ***s'il contient y réel, il doit contenir iy ;***
3. ***s'il contient x et y réels, il doit contenir $x + iy$.***

   Il est donc tout à fait clair que le corps $\mathcal{K}$ est constitué des éléments de la forme $z = x + iy$ se composant comme suit :

4. $(x + iy) + (x' + iy') = (x + x') + i(y + y')$;
5. $(x + iy) \cdot (x' + iy') = (xx' - yy') + i(xy' + x'y)$.

0.2. Propriétés algébriques

Le corps $\mathcal{K}$ ainsi construit est le plus petit dans lequel l'équation $z^2+1=0$ admet une solution. On le note $\mathbb{C}$ et on l'appelle *corps des nombres complexes*. Le corps des réels $\mathbb{R}$ s'y plonge par le morphisme injectif : $x \in \mathbb{R} \longmapsto (x,0) = x + i0 \in \mathbb{C}$.

1. ***La représentation $x+iy$ est unique. En effet si $z = x+iy = x'+iy'$, on a $x - x' = i(y'-y)$; donc $(x-x')^2 = -(y'-y)^2$, ce qui n'est possible que si $x = x'$ et $y = y'$.***
2. ***L'application $z = x+iy \in \mathbb{C} \longmapsto \overline{z} = x - iy \in \mathbb{C}$ est appelée conjugaison : $\overline{z}$ est le conjugué de z. C'est un automorphisme du corps $(\mathbb{C}, +, \times)$, c'est-à-dire qu'on a :***

$$\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}, \qquad \overline{zz'} = \overline{z}\cdot\overline{z'}, \qquad \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}.$$

$\mathbb{C}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension 2. Pour $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ dans $\mathbb{C}$, on a :

$$z\overline{z'} = (xx' + yy') - i(xy' - yx').$$

La partie réelle de ce nombre définit une forme $\mathbb{R}$-bilinéaire symétrique $\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ par $\langle z, z' \rangle = xx' + yy'$; comme $\langle z, z \rangle = z\overline{z} = x^2 + y^2 > 0$ pour tout z non nul, cette forme est définie positive, c'est donc un produit scalaire sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$. Il donne alors lieu à une norme :

$$|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Le nombre réel positif ou nul $|z|$ est appelé *module* du nombre complexe $z = x + iy$. Ses principales propriétés sont :

$$|zz'| = |z| \cdot |z'|, \qquad \left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}, \qquad \big||z| - |z'|\big| \leq |z + z'| \leq |z| + |z'|.$$

0.3. L'aspect géométrique

Deux groupes sont en jeu : le groupe additif $(\mathbb{C}, +)$ et le groupe multiplicatif $(\mathbb{C}^*, \times)$. Nous allons les interpréter géométriquement.

Le groupe additif $(\mathbb{C}, +)$

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe. La transformation $\tau_z : u \in \mathbb{C} \longmapsto u + z \in \mathbb{C}$ s'écrit en coordonnées cartésiennes $\tau_z(\alpha, \beta) = (\alpha + x, \beta + y)$; elle correspond à la translation par le vecteur $z = (x, y)$.

Nous avons donc une application $\tau : z \in \mathbb{C} \longmapsto \tau_z \in \mathcal{T}$ où $\mathcal{T}$ est le groupe des translations du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.

Un calcul assez facile montre que τ est une bijection vérifiant $\tau_{z+z'} = \tau_{z'} \circ \tau_z$, autrement dit, τ est un isomorphisme du groupe additif $(\mathbb{C}, +)$ sur le groupe $(\mathcal{T}, \circ)$ où $\circ$ est la composition des applications.

Le groupe multiplicatif $(\mathbb{C}, \times)$

Nous avons vu que la partie réelle de l'application $(z, z') \longmapsto z\overline{z'}$ définit un produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$ sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ par $\langle z, z' \rangle = xx' + yy'$. On peut donc parler de *similitude linéaire directe*. La matrice Z d'une telle application par rapport à la base orthonormée $(1, i)$ a la forme $Z = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$ où x et y sont des nombres réels non simultanément nuls. Si : $Z = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$ et $Z' = \begin{pmatrix} x' & -y' \\ y' & x' \end{pmatrix}$ sont deux matrices de ce type, leur produit est encore de ce type :

$$Z \cdot Z' = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' & -y' \\ y' & x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xx' - yy' & -(xy' + x'y) \\ xy' + x'y & xx' - yy' \end{pmatrix}.$$

Bien évidemment, la matrice identité $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ en fait partie ainsi que l'inverse de $Z = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$ qui est :

$$Z^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{x}{x^2+y^2} & \frac{y}{x^2+y^2} \\ \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}.$$

L'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$ avec $x^2 + y^2 \neq 0$ muni de la multiplication habituelle est un groupe commutatif. Il est isomorphe au groupe $(\mathbf{Sim}_0^+(\mathbb{C}), \circ)$ des similitudes linéaires directes de l'espace euclidien $(\mathbb{C}, \langle\ ,\ \rangle)$.

Comme en plus l'ensemble $\mathcal{H}$ de toutes les matrices de la forme $\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$ est un groupe pour

l'addition habituelle (des matrices), $(\mathcal{H}, +, \cdot)$ est en fait un corps commutatif canoniquement isomorphe au corps $(\mathbb{C}, +, \times)$ via l'application : $z = x + iy \in \mathbb{C} \overset{\simeq}{\longmapsto} \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \in \mathcal{H}$. En conclusion :

1. ***Le groupe $(\mathbb{C}, +)$ est isomorphe au groupe des translations $(\mathcal{T}, \circ)$: quand on rajoute un nombre complexe $z = x + iy$ à $u = \alpha + i\beta$, on translate le point (α, β) par (x, y).***

2. ***Le groupe multiplicatif $(\mathbb{C}, \cdot)$ est isomorphe à $(\mathcal{H}^*, \cdot)$ (où $\mathcal{H}^*$ est l'ensemble des matrices non nulles de la forme $\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$: multiplier $w = a + ib$ par $z = x + iy$ revient à appliquer à (a, b) la matrice $\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$.***

Nous venons donc d'identifier un nombre complexe non nul $z = x + iy$ à la matrice $Z = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$. Mais cette dernière peut s'écrire sous la forme :

$$Z = \sqrt{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{pmatrix}.$$

C'est la matrice de la similitude centrée à l'origine de rapport $r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$ et d'angle θ tel que $\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ et $\sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$. On a donc :

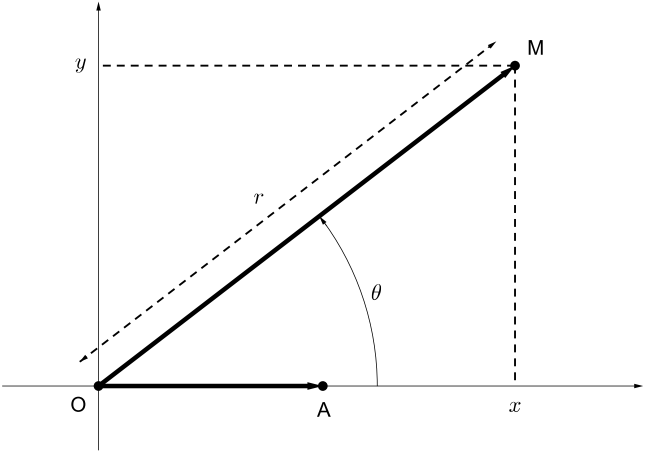
$$Z = r \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Le nombre complexe correspondant s'écrit alors $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$. L'angle θ (défini à un multiple entier de 2π près) est appelé *argument* de z et se note $\mathrm{Arg}(z)$. Le nombre compexe non nul z est donc entièrement déterminé par son module r et son argument θ ; on l'écrit $z = [r, \theta]$. Un calcul immédiat montre que $zz' = [r, \theta] \cdot [r', \theta'] = [rr', \theta + \theta']$.

L'application $\Phi : (r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \longmapsto [r, \theta] = z \in \mathbb{C}^*$ est donc un homomorphisme de groupes ; il est surjectif mais pas injectif, son noyau est $\{1\} \times 2\pi\mathbb{Z}$. Comme le quotient $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ n'est rien d'autre que le groupe $\mathbf{SO}(2)$ des rotations de centre l'origine (c'est aussi le *groupe des angles* de sommet l'origine), Φ induit un isomorphisme de groupes :

$$\Phi : \mathbb{R}_+^* \times \mathbf{SO}(2) \xrightarrow{\simeq} \mathbb{C}^*.$$

La similitude Z appliquée au point $A = 1 = (1, 0)$ donne $M = x + iy$ tel que $OM = r$ et $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}) = \theta$ (modulo 2π) (voir le dessin ci-dessous).



0.4. $\mathbb{R}$-linéarité et $\mathbb{C}$-linéarité

Une application linéaire $f : z \in \mathbb{C} \longmapsto f(z) \in \mathbb{C}$ est toujours de la forme $f(z) = \alpha z$ avec $\alpha = f(1)$. Si $\alpha = a + ib$, alors $f(z) = \alpha z = (a + ib)(x + iy) = (ax - by) + i(bx + ay)$. Donc, si on voit f comme application du $\mathbb{R}$-espace $\mathbb{C}$ dans lui-même, sa matrice par rapport à la base $\{1, i\}$ est nécessairement de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.

On peut vérifier facilement qu'une application $\mathbb{R}$-linéraire de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ dont la matrice par rapport à cette base est de cette forme est aussi $\mathbb{C}$-linéaire.

Par exemple, l'application conjugaison $z \in \mathbb{C} \longmapsto \overline{z} \in \mathbb{C}$ est $\mathbb{R}$-linéaire mais elle n'est pas $\mathbb{C}$-linéaire !

Soit $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ une application $\mathbb{C}$-linéaire (mais qu'on voit comme $\mathbb{R}$-linéaire) de matrice $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$; alors on peut toujours écrire :

$$A = \sqrt{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

où θ est un réel (donné modulo 2π). Par conséquent, du point de vue géométrique, une application $\mathbb{C}$-linéaire n'est rien d'autre qu'une similitude directe de centre l'origine : c'est la composée de l'homothétie de centre 0 et de rapport $\sqrt{a^2 + b^2}$ et de la rotation de centre 0 et d'angle θ.

0.5. Exercices

1. Soient A, M et P trois points du plan complexe ayant respectivement pour affixes 1, $z \neq 1$ et z^2.
   Pour quelles valeurs de z, le triangle AMP est-il rectangle et isocèle en A ?

2. Soient A, B et C trois points du plan complexe d'affixes respectives a, b et c.
   Montrer que le triangle ABC est équilatéral si, et seulement si, a, b et c vérifient $a + jb + j^2c = 0$ ou $a + j^2b + jc = 0$. Ici $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ (racine cubique de 1).

   Dans la mesure du possible, donner une preuve géométrique.

1. Fonctions d'une variable complexe

Dans toute la suite de ce chapitre U sera un ouvert de $\mathbb{C}$. On parlera de domaine s'il est en plus connexe.

1.1. Définition de l'holomorphie

Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction.

On dira que f est *holomorphe* au point $z_0 \in U$ si elle est dérivable en ce point, c'est-à-dire si la limite suivante existe :

$$\lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \neq z_0}} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Cette limite est notée $f'(z_0)$ et appelée *dérivée* de f au point z_0. On dira que f est holomorphe sur U si elle est holomorphe en tout point de U.

• On vérifie facilement (exactement comme on le fait pour les fonctions d'une variable réelle) que la somme $f+g$, le produit fg, le quotient $\frac{f}{g}$ (là où il est défini) de deux fonctions holomorphes sont des fonctions holomorphes.

• Si $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ et $g : V \longrightarrow \mathbb{C}$ sont des fonctions holomorphes avec $f(U) \subset V$ la composée $g \circ f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ est une fonction holomorphe et on a $(g \circ f)'(z) = f'(z)g'(f(z))$. Si $f : U \longrightarrow V$ est une bijection et f est holomorphe en z_0 avec $f'(z_0) \neq 0$, alors f^{-1} est holomorphe en $w_0 = f(z_0)$ et $(f^{-1})'(w_0) = \frac{1}{f'(z_0)}$.

• Une bijection $f : U \longrightarrow V$ (U et V des ouverts de $\mathbb{C}$) holomorphe avec inverse f^{-1} holomorphe est appelée biholomorphisme de U sur V. On dira aussi que U et V sont biholomorphiquement équivalents.

Par exemple $z \longmapsto \frac{z-i}{z+i}$ est un biholomorphisme du demi-plan $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \Im z > 0\}$ sur le disque unité ouvert $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

L'ensemble $\mathbf{Aut}(U)$ des biholomorphismes d'un ouvert U est un groupe pour la composition des applications. Il est toujours contenu dans le groupe $\mathbf{Diff}(U)$ des difféomorphismes de U et est beaucoup plus petit.

1.2. Conditions de Cauchy-Riemann

Dire que $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ est holomorphe en $z_0 \in U$, c'est dire qu'au voisinage de ce point on a :

$$(*) \qquad f(z) - f(z_0) = f'(z_0)(z - z_0) + \varepsilon(z)|z - z_0|$$

avec $\lim_{z \to z_0} \varepsilon(z) = 0$. Écrivons $z = x + iy$, $z_0 = x_0 + iy_0$, $f(z) = u(z) + iv(z)$, $f'(z_0) = a + ib$, $z - z_0 = h + ik$ et $\varepsilon = \alpha + i\beta$.
Alors l'expression $(*)$ devient en coordonnées réelles :

$$(**) \quad \begin{cases} u(x_0+h, y_0+k) - u(x_0, y_0) = ah - bk + \alpha\sqrt{h^2+k^2} \\ v(x_0+h, y_0+k) - v(x_0, y_0) = bh + ak + \beta\sqrt{h^2+k^2} \end{cases}$$

Ceci montre que la fonction
$f : (x,y) \in U \longmapsto u(x,y) + iv(x,y) \in \mathbb{C}$ **est différentiable au point** $z_0 = (x_0, y_0)$ **et de différentielle :**

$$d_{z_0} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial u}{\partial y}(z_0) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial v}{\partial y}(z_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

avec (comme on le voit sur la deuxième matrice) :

$$(\mathrm{CR}) \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(z_0) \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial y}(z_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(z_0).$$

Les relations (CR) sont appelées *conditions de Cauchy-Riemann*. **Cela signifie que f est différentiable au point z_0 (au sens réel) et sa différentielle $d_{z_0}f$ (qui est une application $\mathbb{R}$-linéaire de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$) est en fait $\mathbb{C}$-linéaire.**

Si on considère f comme fonction complexe des variables réelles x et y, les conditions (CR) s'écrivent aussi :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) + i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = 0.$$

Les deux assertions qui suivent sont donc équivalentes :

1. $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ *est holomorphe en* z_0.
2. f *est différentiable en* z_0 *et vérifie* (CR).

1.3. Exemples

1. Une fonction polynôme $P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$.
2. une fonction rationnelle (là où le dénominateur ne s'annule pas) :
$$f(z) = \frac{a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n}{b_0 + b_1 z + \cdots + b_m z^m}.$$
3. Toute série entière $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ à l'intérieur de son disque de convergence.
4. La fonction exponentielle $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{n!}$.
5. Les fonctions :
$$\mathrm{ch}(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \qquad \mathrm{sh}(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$
$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \qquad \sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \ldots$$

Exemple non holomorphe

La fonction $\phi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $\phi(z) = \overline{z}$ n'est holomorphe nulle part. Vérifions-le au point $z_0 = 0$ en calculant $\lim\limits_{\substack{z \to 0 \\ z \neq 0}} \frac{\phi(z) - \phi(0)}{z} = \lim\limits_{\substack{z \to 0 \\ z \neq 0}} \frac{\overline{z}}{z}$ lorsque z tend vers 0 par valeurs réelles et lorsque z tend vers 0 par valeurs imaginaires pures.

On a :

$$\lim_{\substack{z \to 0 \\ z \text{ réel } \neq 0}} \frac{\overline{z}}{z} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{x}{x} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{z \to 0 \\ z \text{ imaginaire } \neq 0}} \frac{\overline{z}}{z} = \lim_{\substack{y \to 0 \\ y \neq 0}} \frac{-iy}{iy} = -1.$$

Les deux limites ne coïncident pas, donc ϕ n'est pas holomorphe en 0.

On peut le voir aussi par la matrice jacobienne en 0 :

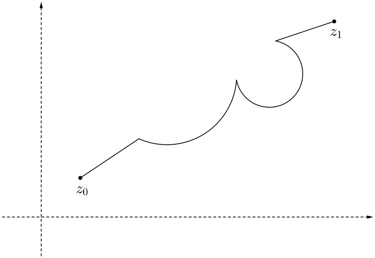
$$d\phi(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

qui ne vérifie pas les conditions de Cauchy-Riemann.

1.4. Intégration complexe

On appelle **chemin** dans U d'**origine** z_0 et d'**extrémité** z_1 toute application continue $\gamma : [0,1] \longrightarrow U$ telle que $\gamma(0) = z_0$ et $\gamma(1) = z_1$.

On dira qu'un chemin γ est C^1 par **morceaux** s'il existe une subdivision de l'intervalle $[0,1]$: $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = 1$ telle que γ soit C^1 sur chacun des intervalles ouverts $]t_i, t_{i+1}[$ (avec $i = 0, \cdots n-1$) et $\gamma'(t)$ admet une limite à droite de t_i et une limite à gauche de t_{i+1}.



Soit $\gamma : t \in [a, b] \longmapsto \gamma(t) = x(t) + iy(t) \in U$ un chemin C^1 par morceaux donné comme précédemment. On définit intégrale de f sur γ comme l'intégrale ordinaire qui suit :

$$\int_\gamma f(z)dz = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(\gamma(t))d\gamma(t)$$
$$= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(\gamma(t)) \left\{x'(t) + iy'(t)\right\} dt.$$

Cette intégrale ne dépend pas du paramétrage du chemin γ. On a :

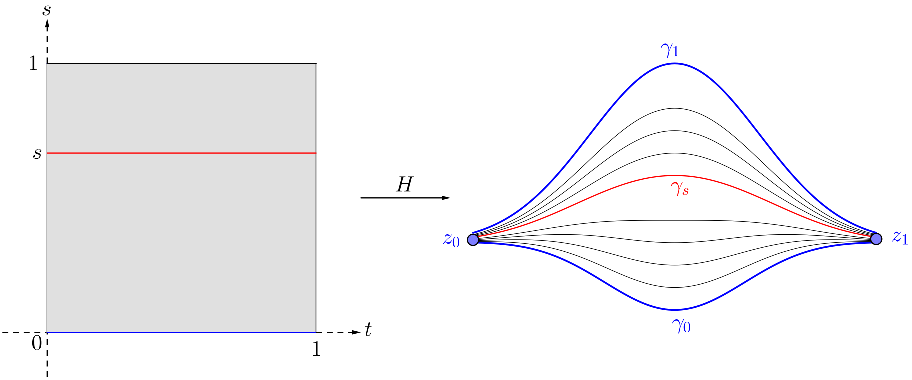
$$\int_\gamma (f(z) + g(z))dz = \int_\gamma f(z)dz + \int_\gamma g(z)dz$$

et

$$\int_\gamma \lambda f(z)dz = \lambda \int_\gamma f(z)dz \quad \text{pour tout } \lambda \in \mathbb{C}.$$

Définition

On dira que deux chemins γ_0 *et* γ_1 *(ayant même origine* z_0 *et même extrémité* z_1*) sont* ***homotopes*** *s'il existe une application continue* $H : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow U$*, appelée* ***homotopie*** *entre* γ_0 *et* γ_1*, telle que pour tout* $t \in [0,1]$ *on ait :* $H(0,t) = \gamma_0(t)$ et $H(1,t) = \gamma_1(t)$.

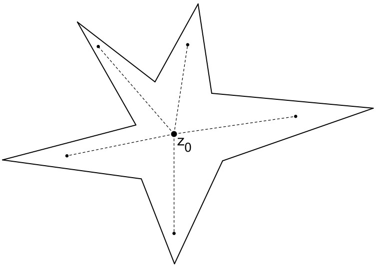


Un *lacet* est un chemin dont l'extrémité et l'origine sont confondues.

Définition

On dira que U est simplement connexe s'il est connexe et si tout lacet dedans est homotope à un point (lacet constant).

- **Le plan complexe $\mathbb{C}$ lui-même, le disque unité $\mathbb{D}$ et le demi-plan supérieur $\mathbb{H}$ sont simplement connexes.**
- **On dira que U est étoilé par rapport au point z_0 si, pour tout $z_1 \in U$, le segment $[z_0 z_1] \subset U$. Il est simplement connexe.**



Ouvert étoilé

Proposition

Soient $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorphe et γ_0 et γ_1 deux chemins homotopes ayant même origine et même extrémité. Alors :

$$\int_{\gamma_0} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz.$$

Exemple fondamental

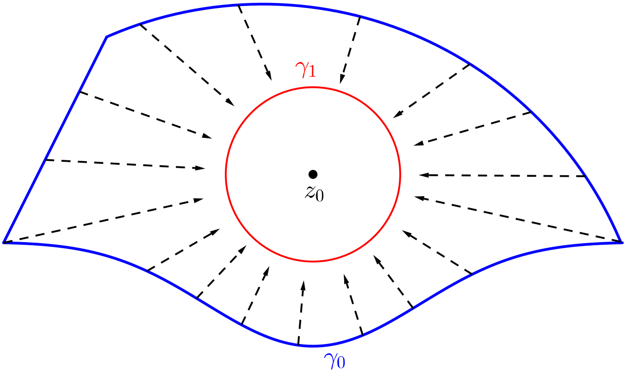
La fonction $f(z) = \frac{1}{z-z_0}$ est définie et holomorphe sur l'ouvert $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$. Calculons son intégrale sur le chemin $\gamma_n(t) = z_0 + re^{2i\pi nt}$ où $n \in \mathbb{Z}^*$ et r est un réel strictement positif; γ_n est tout simplement le cercle centré en z_0 et de rayon r parcouru $|n|$-fois dans le sens positif si $n > 0$ et dans le sens négatif si $n < 0$. On a :

$$\int_{\gamma_n} \frac{dz}{z-z_0} = \int_0^1 \frac{1}{re^{2i\pi nt}} d(z_0 + re^{2i\pi nt}) = 2i\pi n \int_0^1 dt = 2i\pi n.$$

En fait, pour tout chemin fermé γ_0 ne passant pas par z_0, le nombre :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_0}\frac{dz}{z-z_0}$$

est un entier relatif. On le note $\mathrm{Ind}(\gamma_0, z_0)$ et on l'appelle *indice* de γ_0 par rapport à z_0.



1.5. Formule intégrale de Cauchy

Soient $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe sur un ouvert U et $z_0 \in U \setminus \gamma$ où γ est un chemin fermé dans U homotope à un point. Alors :

$$\mathrm{Ind}(\gamma, z_0) f(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

En utilisant cette formule et le développement en série de Taylor :

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - z_0} \cdot \left\{ 1 + \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right) + \cdots + \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right)^n + \cdots \right\}$$

on obtient $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n (z - z_0)^n$ avec $f_n = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi$.

Ceci montre bien que f est une fonction analytique sur U.

1.6. Deux théorèmes fondamentaux

Théorème de Liouville

Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ tout entier (on dit que f est une fonction entière). On suppose que f est bornée. Alors f est constante.

Principe du maximum

Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorphe non constante sur un ouvert connexe U. Alors il n'existe aucun point $z_0 \in U$ en lequel le module $|f|$ de f soit maximal. De façon précise, il n'existe pas de point $z_0 \in U$ tel que $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ pour tout $z \in U$.

Corollaire

Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorphe non constante sur un ouvert connexe borné U et continue sur son adhérence $\overline{U}$. Alors $|f|$ ne peut atteindre son maximum que sur le bord ∂U de U.

1.7. Singularités

Soient z_0 un point de $\mathbb{C}$ et f une fonction holomorphe sur un voisinage ouvert de z_0 sauf peut-être en z_0. On dira alors que z_0 est un *point singulier isolé* de f.

Pour r suffisamment petit, f admet un développement de Laurent sur la couronne $0 < |z - z_0| < r$: $f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} f_n(z - z_0)^n$. Il y a trois possibiltés :

• Les coefficients f_n sont nuls pour $n < 0$. Dans ce cas on dira que z_0 est une *singularité apparente*.

• Il n'y a qu'un nombre fini de coefficients f_n avec $n < 0$ qui sont non nuls. Dans ce cas on dira que z_0 est un *pôle* de f. Le plus grand $n \geq 1$ tel que $f_{-n} \neq 0$ est un entier naturel m appelé *ordre* du pôle z_0. Si $m = 1$ on dira que z_0 est un *pôle simple* de f.

• Il y a une infinité de coefficients f_n avec $n < 0$ qui sont non nuls. Dans ce cas on dira que z_0 est une *singularité essentielle*.

Définition

*Une fonction $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ est dite **méromorphe** s'il existe un ensemble discret Σ de U tel que f est holomorphe sur $U \setminus \Sigma$ et tout point de Σ est un pôle de f.*

Il n'y a aucune restriction sur les pôles comme le décrit le *Théorème de Mittag-Leffler* qui a été un pas décisif dans la théorie des fonctions d'une variable complexe.

Théorème de Mittag-Leffler

Soit $(z_k)_{k\geq 1}$ une suite discrète dans $\mathbb{C}$ et $(m_k)_{k\geq 1}$ une suite d'entiers naturels. Alors il existe une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ ayant $z_1, \cdots, z_k, \cdots$ comme pôles d'ordres respectifs $m_1, \cdots, m_k, \cdots$.

On peut donc prescrire à l'avance les pôles et leurs ordres respectifs.

L'importance de la notion de *singularité essentielle* est par exemple illustrée par les deux théorèmes qui suivent.

Théorème de Weierstrass

Soit $f : D(z_0, r) \longrightarrow \mathbb{C}$ ***holomorphe sur le disque ouvert*** $D(z_0, r)$ ***sauf en*** z_0 ***qui est une singularité essentielle. Alors, pour tout*** $\varepsilon > 0$ ***(avec*** $\varepsilon < r$***), l'image par*** f ***du disque épointé*** $D(z_0, \varepsilon) \setminus \{z_0\}$ ***est dense dans*** $\mathbb{C}$***.***

Encore plus fort :

Théorème de Picard

Soit z_0 ***une singularité essentielle d'une fonction*** f ***holomorphe sur un disque ouvert épointé*** $D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$***. Alors, pour tout*** $\varepsilon > 0$ ***(avec*** $\varepsilon < r$***), l'image par*** f ***du disque épointé*** $D(z_0, \varepsilon) \setminus \{z_0\}$ ***est*** $\mathbb{C}$ ***tout entier ou*** $\mathbb{C}$ ***privé d'un point.***

Exercice : ***Tester le théorème de Weierstrass sur*** $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$***.***

2. Homographie

2.1. Généralités

On complète le plan complexe en lui rajoutant le point à l'infini ∞ ; on obtient alors ce qu'on appelle la *sphère de Riemann* et qu'on note $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.
On prolonge une partie des opérations de l'addition et de la multiplication de $\mathbb{C}$ à $\widehat{\mathbb{C}}$ en posant :

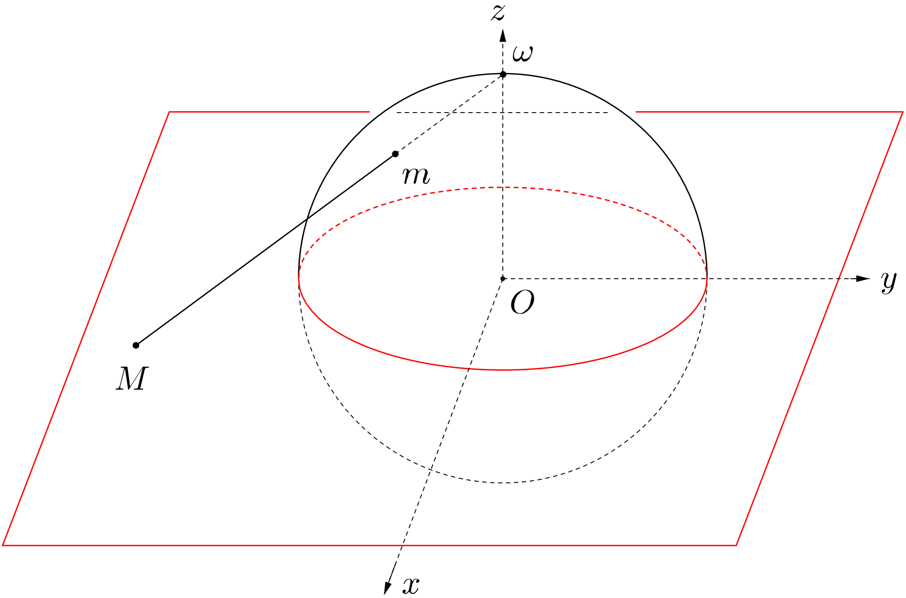
$$z + \infty = \infty + z = \infty \quad \infty \times \infty = \infty \quad \text{et} \quad \frac{z}{\infty} = 0 \quad \text{pour } z \in \mathbb{C}$$

$$z \times \infty = \infty \times z = \infty \quad \text{et} \quad \frac{z}{0} = \infty \quad \text{pour tout } z \in \mathbb{C}^*.$$

On peut montrer que, du point de vue topologique, $\widehat{\mathbb{C}}$ est la sphère unité $\mathbb{S}^2$ de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$. L'application $\psi : \mathbb{S}^2 \setminus \{\omega\} \longrightarrow \mathbb{C}$ qui suit est une bijection :

$$\psi(x, y, z) = \frac{x}{1-z} + i\frac{y}{1-z}$$

Quand m tend vers ω, M est rejeté à l'infini. Ainsi $\widehat{\mathbb{C}}$ s'identifie à la sphère $\mathbb{S}^2$, ce qui justifie l'appellation *sphère de Riemann* pour $\widehat{\mathbb{C}}$. ψ s'appelle *projection stéréographique*.


z
ω
m
y
O
M
x

Définition

*Une **homographie** de $\widehat{\mathbb{C}}$ est une transformation h qui à M d'affixe z associe le point M' d'affixe :*

$$z' = \begin{cases} \frac{az+b}{cz+d} & \text{si } z \in \mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\} \\ \infty & \text{si } z = -\frac{d}{c} \\ \frac{a}{c} & \text{si } z = \infty \end{cases}$$

où a, b, c, d sont des nombres complexes.

On vérifie immédiatement que, si $ad - bc = 0$, la transformation h est constante ; on supposera donc $ad - bc \neq 0$. Si $c = 0$ on a $a \neq 0$ et $d \neq 0$; h s'écrit alors $h(z) = \alpha z + \beta$ avec $\alpha = \frac{a}{d}$ et $\beta = \frac{b}{d}$.
Si on pose $\rho = |\alpha|$ et $\theta = \text{argument}(\alpha)$, h se décompose comme suit :

$$z \longmapsto \rho z \longmapsto \rho e^{i\theta} z = \alpha z \longmapsto \rho e^{i\theta} z + \beta = z'.$$

C'est donc une *similitude directe*.

2.2. Décomposition canonique

Rappelons qu'on appelle *inversion* de *pôle* O et de *puissance* κ, l'application notée $I(O,\kappa)$ qui, à tout point M distinct de O associe le point M' sur la droite (OM) tel que $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OM'}=\kappa$. On peut bien sûr la prolonger à toute la sphère de Riemann $\widehat{\mathbb{C}}$ en posant $I(O,\kappa)(O)=\infty$ et $I(O,\kappa)(\infty)=O$.

Soit $h(z)=\frac{az+b}{cz+d}$ une homographie avec $c\neq 0$ et $ad-bc\neq 0$. On peu l'écrire sous la forme : $h(z)=\alpha+\frac{\beta}{cz+d}$ avec $\alpha=\frac{a}{c}$ et $\beta=\frac{bc-ad}{c}$. On pose $Z=cz+d$ et on note s la similitude directe qui à z associe Z. On a la décomposition qui suit :

$$z\longmapsto Z=cz+d\longmapsto\frac{1}{\overline{Z}}\longmapsto\frac{1}{Z}\longmapsto\frac{\beta}{Z}\longmapsto\alpha+\frac{\beta}{Z}.$$

On voit donc qu'on passe de z à $z'=h(z)$ en appliquant la similitude s suivie de l'inversion de pôle l'origine 0 et de puissance 1, de la réflexion par rapport à l'axe $(0x)$, de l'homothétie de centre l'origine et de rapport $|\beta|$, de la rotation de centre 0 et d'angle l'argument de β et enfin la translation de vecteur α.

2.3. Les points fixes

Soit $h(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ une homographie qui n'est pas l'identité. Un point fixe de h vérifie l'équation $\frac{az+b}{cz+d} = z$.

• Si $c = 0$, on sait que h a un seul point fixe $= \infty$ si $\frac{a}{d} = 1$ et deux points fixes ∞ et $\frac{1}{1-\frac{a}{d}}$ si $\frac{a}{d} \neq 1$. Donc au plus deux points fixes.

• Supposons $c \neq 0$. Alors ∞ n'est pas un point fixe de h et $z \in \mathbb{C}$ en est un si, et seulement si, $cz^2 + (d-a)z - b = 0$. On résout cette équation en calculant le discriminant

$\Delta = (a+d)^2 - 4(ad-bc) = (a+d)^2 - 4$.

– Si $\Delta = 0$, cette équation a une solution double, c'est-à-dire h a un seul point fixe.

– Si $\Delta \neq 0$, l'équation a deux solutions distinctes c'est-à-dire h a deux points fixes différents.

Aussi bien dans le cas $c = 0$ que $c \neq 0$, si h a trois points fixes distincts dans $\widehat{\mathbb{C}}$ (l'un de ces points peut très bien être ∞), h est l'identité. Par suite deux homographies qui coïncident sur trois points distincts sont égales.

2.4. Le groupe des homographies

L'ensemble $\mathcal{H}$ des homographies de $\widehat{\mathbb{C}}$ muni de la loi de composition des applications est un groupe non commutatif.

Soient $h_1(z) = \frac{a_1z+b_1}{c_1z+d_1}$ et $h_2(z) = \frac{a_2z+b_2}{c_2z+d_2}$ deux homographies. Un calcul simple donne l'expression de la composée :

$$h_2 \circ h_1(z) = \frac{(a_2a_1+b_2c_1)z+(a_2b_1+b_2d_1)}{(c_2a_1+d_2c_1)z+(c_2b_1+d_2d_1)}$$

qui montre bien que $h_2 \circ h_1$ est une homographie. L'élément neutre est l'identité donnée par $a = d = 1$ et $b = c = 0$ ou $a = d = -1$ et $b = c = 0$.

Toute homographie $h(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ est inversible et a pour inverse $h^{-1}(z) = \frac{dz-b}{-cz+a}$.

Ainsi l'ensemble $\mathcal{H}$ des homographies muni de la composition des applications est un groupe. Il n'est pas commutatif car, si on prend $h_1(z) = z+1$ et $h_2(z) = \frac{1}{z}$, on a $h_1 \circ h_2(z) = \frac{z+1}{z}$ alors que $h_2 \circ h_1(z) = \frac{1}{z+1}$.

2.5. La forme matricielle de $\mathcal{H}$

Soit $\mathbf{GL}(2,\mathbb{C})$ le groupe des matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ à coefficients complexes et inversibles. L'application déterminant $\det : A \in \mathbf{GL}(2,\mathbb{C}) \longmapsto \det A \in \mathbb{C}^*$ est un morphisme de groupes. Son noyau est un sous-groupe normal de $\mathbf{GL}(2,\mathbb{C})$ qu'on note $\mathbf{SL}(2,\mathbb{C})$. Alors l'application :

$$\Theta : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbf{SL}(2,\mathbb{C}) \longmapsto \left(z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d}\right) \in \mathcal{H}$$

est un morphisme de groupes. Ceci découle du calcul du produit de deux homographies fait précédemment. Ce morphisme est en plus surjectif puisque toute homographie est associée à une matrice de $\mathbf{SL}(2,\mathbb{C})$.

Le noyau de Θ est constitué de toutes les matrices $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telles que, pour tout $z \in \widehat{\mathbb{C}}$, on ait $\frac{az+b}{cz+d} = z$ c'est-à-dire $cz^2 + (d-a)z - b = 0$. Ce qui implique $b = c = 0$ et $a = d$.

Mais comme $ad = 1$ (car $ad - bc = 1$) on doit avoir $a = d = 1$ ou $a = d = -1$. Par suite $\ker\Theta$ est réduit aux deux matrices :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Comme $\ker\Theta = \{I, -I\}$ est un sous-groupe normal de $\mathbf{SL}(2, \mathbb{C})$, le quotient de $\mathbf{SL}(2, \mathbb{C})$ par $\{I, -I\}$ est un groupe noté $\mathbf{PSL}(2, \mathbb{C})$. On a donc un ismorphisme :

$$\Theta : \mathbf{PSL}(2, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{H}$$

qui à tout élément de $\mathbf{PSL}(2, \mathbb{C})$ représenté par une matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ associe l'homographie :

$$h(z) = \frac{az+b}{cz+d}.$$

2.6. Exercices

1. Soient $z_1, z_2, z_3 \in \widehat{\mathbb{C}}$ distincts deux à deux. Montrer qu'il existe toujours une unique homographie $h \in \mathcal{H}$ telle que :
$$\begin{cases} h(z_1) = \infty \\ h(z_2) = 0 \\ h(z_3) = 1. \end{cases}$$

2. On appelle ***birapport*** de quatre points $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \widehat{\mathbb{C}}$ pris dans cet ordre, la quantité :
$$\rho(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} : \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2}.$$
i) Soit h une homographie qui envoie z_1 sur ∞, z_2 sur 0 et z_3 sur 1. Montrer que $h(z_4) = \rho(z_1, z_2, z_3, z_4)$.
ii) Montrer que toute homographie $\phi \in \mathcal{H}$ préserve le birapport de quatre points, c'est-à-dire, on a :
$$\rho(\phi(z_1), \phi(z_2), \phi(z_3), \phi(z_4)) = \rho(z_1, z_2, z_3, z_4)$$
pour tous $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \widehat{\mathbb{C}}$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] AHLFORS, L.V. *Complex Analysis*. Collection *Mathematics Series*, McGraw-Hill (1979).

[2] CARTAN, H. *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes*. Collection *Enseignement des Sciences*, Hermann (1985).

[3] EL KACIMI ALAOUI, A. *Variable complexe et surfaces riemanniennes.* Références Sciences, Ellipses (2021).

[4] FARKAS, H.M. & KRA, I. *Riemann Surfaces.* GTM 71 (1980), Springer-Verlag.

[5] FORSTER, O. *Lectures on Riemann Surfaces.* GTM 81 (1981), Springer-Verlag.

[6] FREITAG, E. *Hilbert Modular Forms.* Springer-Verlag, (1990).

[7] HÖRMANDER, L. *An Introduction to Complex Analysis in Several Variables*. D. Van Nostrand Compagny. Inc. (1966).

[8] JONES, G. & SINGERMAN, D. *Complex Functions. An algebraic and geometric viewpoint.* Cambridge University Press, (1987).

[9] KRANTZ, S. G. *Geometric Function Theory*. Birkhäuser (2006).

[10] LAVRENTIEV, M. & CHABAT, B. *Méthodes de la théorie des fonctions d'une variable complexe*. Éditions Mir, Moscou (1972).

[11] MAASS, H. *Lectures on Modular Functions of one Complex Variable.* Tata Institute of Fundamental Research, (1964).

[12] SAINT-GERVAIS, H. P. *Uniformisation des surfaces de Riemann*. ENS Éditions, Lyon (2010).

[13] SCHLICHENMAIER, M. *An Introduction to Riemann Surfaces, Algebraic Curves and Moduli Spaces*. Lecture Notes in Physics 322, Springer-Verlag (1979).

[14] SCHWERDTFEGER, H. *Geometry of Complex Numbers*. Dover Publications, INC New York (1979).

[15] VIDONNE, R. *Groupe circulaire, rotations et quaternions*. Collections CAPES et Agrégation, Ellipses (2001).