Géométrie complexe en dimension 1
Partie II : Groupes d'automorphismes

Aziz El Kacimi
Université Polytechnique Hauts-de-France
http://perso.numericable.fr/azizelkacimi/

Mini-cours au
Séminaire Inter-Universitaire de Géométrie - Maroc
Samedi 29 janvier 2022

3. Biholomorphismes

3.1. Généralités

Le problème de l'équivalence entre objets mathématiques est central.

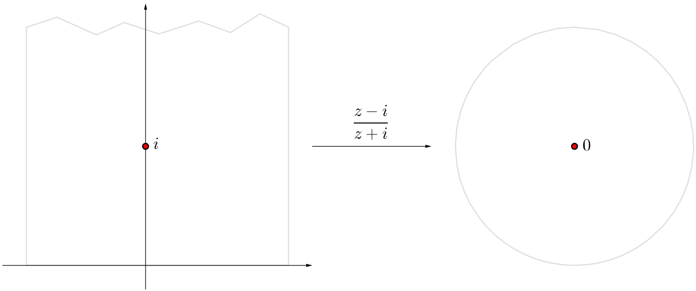
Soient U et V deux ouverts non vides de $\mathbb{C}$. On dira qu'une application $\phi : U \longrightarrow V$ est un ***biholomorphisme*** si ϕ est bijective, holomorphe et ϕ^{-1} holomorphe. On dira que U et V sont ***biholomorphiquement équivalents*** s'il existe un biholomorphisme de U sur V. Un biholomorphisme de U sur lui-même est appelé ***automorphisme*** de U. L'ensemble des automorphismes de U est un groupe noté $\mathbf{Aut}(U)$.

Notons que deux ouverts U et V biholomorphiquement équivalents ont des groupes d'automorphismes isomophes. En effet, si $h : U \longrightarrow V$ est un biholomorphisme, il est immédiat de vérifier que l'application $\phi \in \mathbf{Aut}(U) \longmapsto h \circ \phi \circ h^{-1} \in \mathbf{Aut}(V)$ est un isomorphisme de groupes.

Nous allons déterminer les groupes d'automorphismes du disque unité ouvert $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ et le demi-plan supérieur $\mathbb{H} = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : y > 0\}$. Mais avant cela nous donnerons l'un des théorèmes les plus puissants dans cette direction.

Théorème d'uniformisation

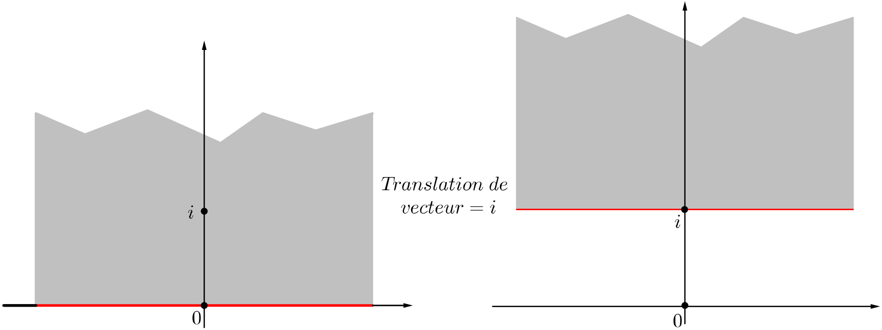
Soit U un ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$ différent de $\mathbb{C}$. Alors U est biholomorphiquement équivalent au disque unité ouvert $\mathbb{D}$.

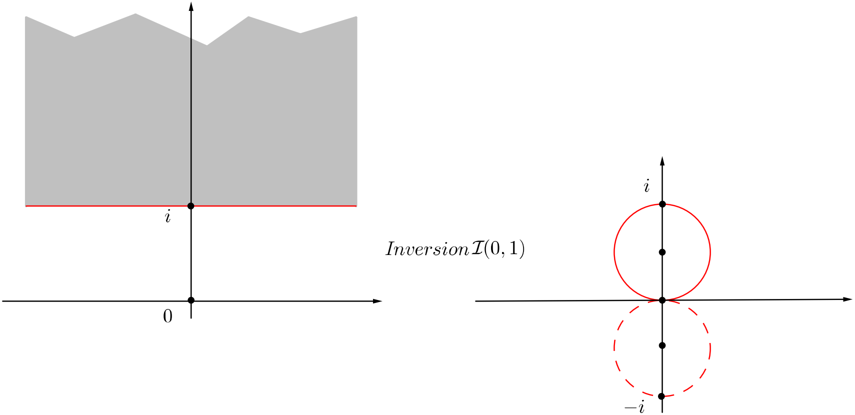


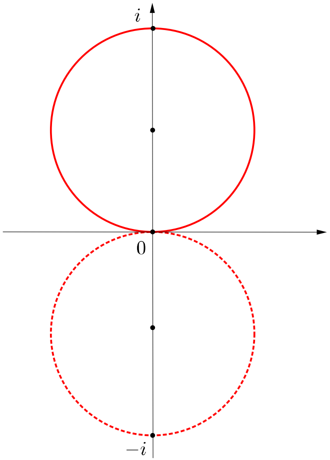
On peut écrire $\phi(z) = \frac{z-i}{z+i} = -\frac{2i}{z+i} + 1$. Ce qui montre que ϕ se décompose comme suit.

1. $z \longmapsto z_1 = z + i$: translation de vecteur i.
2. $z_1 \longmapsto z_2 = \frac{1}{\overline{z_1}} = \frac{1}{\overline{z}-i}$: inversion de pôle 0 et de puissance 1.
3. $z_2 \longmapsto z_3 = \overline{z_2} = \frac{1}{z+i}$: symétrie par rapport à l'axe $0x$.
4. $z_3 \longmapsto z_4 = iz_3 = \frac{i}{z+i}$: rotation de centre 0 et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
5. $z_4 \longmapsto z_5 = -2z_4 = \frac{-2i}{z+i}$: homothétie de centre 0 et de rapport -2.
6. $z_5 \longmapsto z_6 = z_5 + 1 = iz_3 = \frac{-2i}{z+i} + 1 = \phi(z)$: tanslation de vecteur 1.

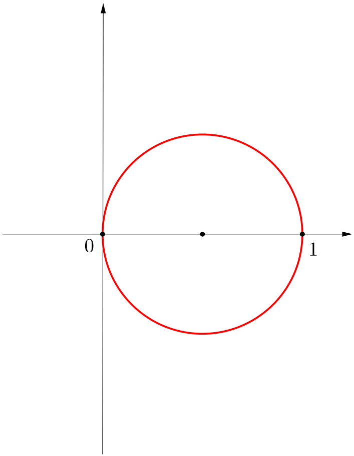
Si tu cales sur un problème, fais un dessin, tu y verras beaucoup mieux !

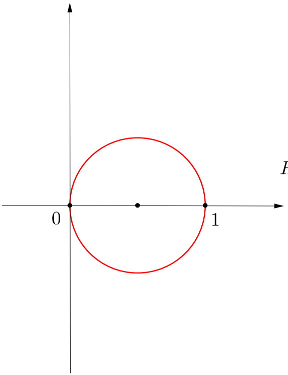

i
0
Translation de
$vecteur = i$
i
0


i
0
Inversion $\mathcal{I}(0,1)$
i
−i

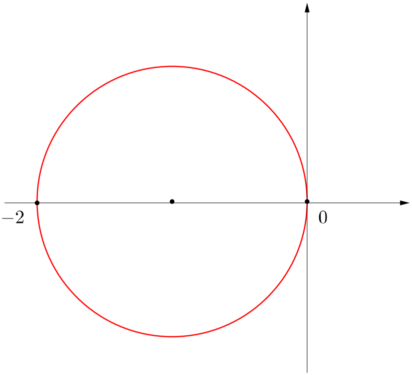


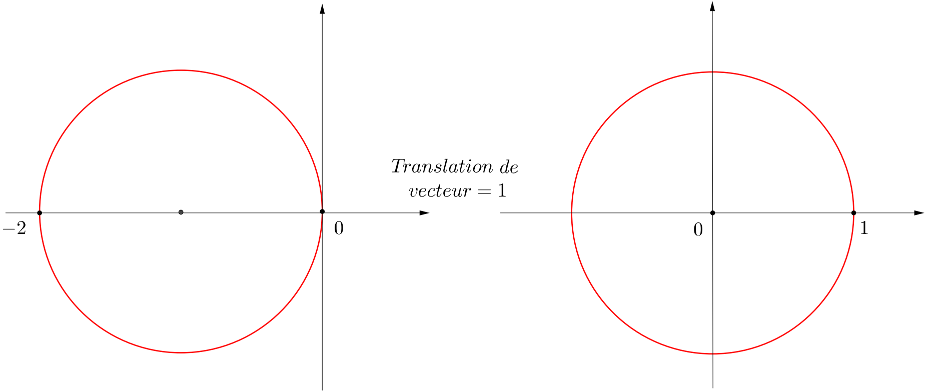
Rotation $\mathcal{R}\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$





Homothétie $\mathcal{H}(0, -2)$




−2
0
Translation de
vecteur = 1
0
1

3.2. Exemples de groupes d'automorphismes

Théorème

Tout biholomorphisme du disque unité ouvert $\mathbb{D}$ *s'écrit sous la forme* $f(z) = e^{i\theta}\frac{z-p}{\overline{p}z-1}$ *où* θ *est un réel et* $p \in \mathbb{D}$*. De manière équivalente, on peut aussi écrire* f *sous la forme* $\frac{\alpha z+\overline{\beta}}{\beta z+\overline{\alpha}}$ *avec* $|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1$*.*

Comme on vient de le signaler la transformation homographique $\phi(z) = \frac{z-i}{z+i}$ **est un biholomorphisme de** $\mathbb{H}$ **sur** $\mathbb{D}$**. On a donc une application :** $\zeta : \mathbf{Aut}(\mathbb{D}) \longrightarrow \mathbf{Aut}(\mathbb{H})$ **définie par** $\zeta(f) = \phi^{-1} \circ f \circ \phi$ **et qui est en fait un isomorphisme de groupes. Ceci nous donne le :**

Théorème

Tout automorphisme du demi-plan ouvert $\mathbb{H} = \{x + iy \in \mathbb{C} : y > 0\}$ *est de la forme* $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ *où* a, b, c, d *sont des réels tels que* $ad - bc = 1$*.*

Preuve du premier théorème

Nous utiliserons à cet effet le Lemme de Schwarz :

> *Soit $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorphe sur le disque unité ouvert $\mathbb{D}$ et telle que $|f| < 1$ et $f(0) = 0$. Alors $|f(z)| \leq |z|$ et $|f'(0)| \leq 1$. Si $|f(z)| = |z|$ pour un certain $z \neq 0$ ou si $|f'(0)| = 1$, alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $f(z) = e^{i\theta} z$.*

D'abord, toute transformation $f(z) = e^{i\theta} \frac{z-p}{\bar{p}z-1}$ où θ est un réel et $p \in \mathbb{D}$ est un biholomorphisme de $\mathbb{D}$. En effet, comme la multiplication par $e^{i\theta}$ est une isométrie euclidienne, ceci va découler de l'assertion qui suit.

On note $\overline{\mathbb{D}}$ le disque unité fermé $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ dont le bord est le cercle unité $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Soit $p \in \mathbb{D}$ et posons $\omega = \frac{1}{\bar{p}}$; il est clair que $|\omega| > 1$ et donc $\omega \notin \overline{\mathbb{D}}$. Pour tout $z \in \Omega = \mathbb{C} \backslash \{\omega\}$, posons $\varphi(z) = \frac{z-p}{\bar{p}z-1}$.

L'application φ est un automorphisme de Ω et sa restriction au disque unité ouvert $\mathbb{D}$ est un automorphisme de celui-ci.

Démontrons cela. Le fait que φ soit un automorphisme de Ω est immédiat : φ est une bijection de l'ouvert Ω sur lui-même d'inverse $\varphi^{-1}(w) = \frac{w-p}{\overline{p}w-1} = \varphi(w)$.

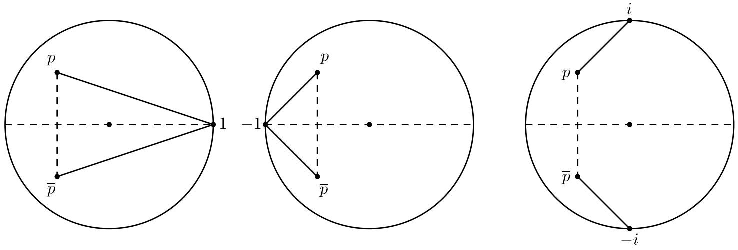
Pour voir que φ induit un automorphisme de $\mathbb{D}$, il suffit de montrer que l'image $\varphi(\mathbb{D})$ de $\mathbb{D}$ par φ est contenue dans $\mathbb{D}$. Comme φ est une homographie, elle transforme tout cercle qui ne passe pas par ω en un cercle. Montrons qu'elle laisse le cercle unité Γ globalement invariant. Il suffit à cet effet de montrer que les images de trois points distincts de Γ sont encore sur Γ.

Ce qui suit se justifie en regardant juste les trois dessins. On a :

$$\varphi(1)=\frac{1-p}{\overline{p}-1}$$

qui est de module 1. **De même :** $\varphi(-1)=\frac{-1-p}{-1-\overline{p}}$ **qui est aussi de module** 1. **Calculons le module de :** $\varphi(i)=\frac{i-p}{\overline{p}i-1}$.
On a :

$$\left|\frac{i-p}{\overline{p}i-1}\right|=\frac{|i-p|}{|\overline{p}i-1|}=\frac{|i-p|}{|-i(-i-\overline{p})|}=\frac{|i-p|}{|(-i-\overline{p})|}=1.$$



Comme φ est un homéomorphisme de Ω sur lui-même laissant Γ globalement invariant, il envoie composante connexe de $\Omega \backslash \Gamma$ ($\mathbb{D}$ en est une) sur composante connexe de $\Omega \backslash \Gamma$. Mais $p \in \mathbb{D}$ et $\varphi(p) = 0$ qui appartient encore à $\mathbb{D}$; donc l'image de $\mathbb{D}$ est $\mathbb{D}$. $\square$

Soit maintenant f un biholomorphisme de $\mathbb{D}$. Posons :

$$z_0 = f(0), \qquad h(z) = \frac{z - z_0}{(\overline{z}_0)z - 1} \qquad \text{et} \qquad g = h \circ f.$$

Alors g est un biholomorphisme de $\mathbb{D}$ qui vérifie $g(0) = 0$. D'après le lemme de Schwarz, on a $|g(z)| \leq |z|$ pour tout $z \in \mathbb{D}$. Mais comme g^{-1} est aussi un biholomorphisme de $\mathbb{D}$ qui vérifie $g^{-1}(0) = 0$, on a $|g^{-1}(z)| \leq |z|$ pour tout $z \in \mathbb{D}$. On en déduit donc $|g(z)| = |z|$ pour tout $z \in \mathbb{D}$.

La fonction $\frac{g(z)}{z}$ est holomorphe et son module $\left|\frac{g(z)}{z}\right|$ est constant égal à 1 ; elle est donc égale à une constante λ de module 1. D'où $f(z) = h^{-1}(g(z)) = h^{-1}(\lambda z) = \lambda \frac{z-\overline{\lambda} z_0}{(\lambda \overline{z}_0)z-1}$. En posant $p = \overline{\lambda} z_0$ et $\lambda = e^{i\theta}$ on peut écrire $f(z) = e^{i\theta}\frac{z-p}{\overline{p}z-1}$. C'est l'expression cherchée.
Maintenant on peut remarquer que :

$$f(z) = e^{i\theta}\frac{z-p}{\overline{p}z-1} = \frac{e^{i\frac{\theta}{2}} \cdot z - e^{i\frac{\theta}{2}} \cdot p}{\overline{p}e^{-i\frac{\theta}{2}} \cdot z - e^{-i\frac{\theta}{2}}} = \frac{\alpha z + \overline{\beta}}{\beta z + \overline{\alpha}}$$

avec :

$$\alpha = \frac{e^{i\frac{\theta}{2}}}{\sqrt{1-p\overline{p}}} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{\overline{p}e^{-i\frac{\theta}{2}}}{\sqrt{1-p\overline{p}}}.$$

Ceci termine la démonstration du théorème. □

Théorème

Tout automorphisme du plan complexe $\mathbb{C}$ est de la forme $f(z) = az + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

Quelques précisions d'abord **: Soient U l'ouvert obtenu en privant $\mathbb{C}$ d'un disque $\{|z| \leq r\}$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction.**

• On dit que f est holomorphe au point ∞ si la fonction $\phi(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$ est holomorphe en 0.

• On dit que f est méromorphe en ∞ si la fonction $\phi(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$ est méromorphe en 0. Dans ce cas le point ∞ est un pôle de f.

• On dit que point ∞ est une singularité essentielle de f si 0 en est une de la fonction $\phi(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$.

• On en déduit par exemple que toute série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ avec un nombre infini de termes a le point ∞ comme singularité essentielle. Par le théorème de Weierstrass l'image par f de tout ouvert $V = \{z : |z| > r\}$ est dense dans $\mathbb{C}$.

Passons maintenant à la preuve du théorème.

• On pose $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ et $V = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$.

• Un automorphisme f de $\mathbb{C}$ est avant tout une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ tout entier, donc une série entière $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ de rayon de convergence $R = +\infty$. Si le nombre de termes non nuls de cette série n'était pas fini, le point ∞ serait une singuarité essentielle ; par le théorème de Weierstrass l'ouvert $V' = f(V)$ serait dense dans $\mathbb{C}$, en particulier tout point de $U' = f(U)$ serait adhérent à V' ; mais ceci est impossible car les ouverts U' et V' sont disjoints et non vides. Par conséquent f est un polynôme $f(z) = \sum_{k=0}^{k} a_k z^k$.

• Comme l'application f est bijective, et donc a fortiori injective, ce polynôme doit être du premier degré, c'est-à-dire de la forme $f(z) = az + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

4. Regard sur certains ouverts

3.1. Les couronnes

Soient r et R deux réels tels que $0 \leq r < R \leq +\infty$. On appelle *couronne* (ouverte) de *centre* z_0 et de rayons r et R l'ensemble $C(z_0, r, R) = \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}$.

Par la translation $z \longmapsto (z - z_0)$, on voit que $C(z_0, r, R)$ est holomorphiquement équivalente (et en d'autres sens géométriques d'ailleurs) à la couronne de centre l'origine et de rayons r et R qu'on notera simplement $C(r, R)$. Désormais, toutes nos couronnes seront centrés à l'origine.

Question : *On se donne deux couronnes $C(r, R)$ et $C(r', R')$. Dans quelles conditions sont-elles holomorphiquement équivalentes*?

La réponse à cette question passe par la description explicite de la couronne $C(r, R)$ en fonction des valeurs des deux rayons r et R.

Type 1 : $r = 0$ ***et*** $R = +\infty$

On a alors $C(r, R) = \mathbb{C}^*$, ouvert bien connu. Son revêtement universel est le plan complexe tout entier de projection :

$$p : z \in \mathbb{C} \longmapsto p(z) = e^{2i\pi z} \in \mathbb{C}^*.$$

C'est même un morphisme de groupes qui donne lieu à la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{C} \xrightarrow{p} \mathbb{C}^* \longrightarrow 1.$$

Le groupe $\mathbf{Aut}(\mathbb{C}^*)$ (qu'on notera G) est engendré par les homothéties complexes $h : z \longmapsto az$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ et l'homographie $\gamma(z) = \frac{1}{z}$.

C'est le produit semi-direct interne du groupe multiplicatif $\mathbb{C}^*$ (vu comme le groupe des homothéties) par le groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ agissant sur $\mathbb{C}^*$ par conjugaison par l'intermédiaire de son générateur γ :

$$(\gamma \cdot h)(z) = (\gamma^{-1} \circ h \circ \gamma)(z) = \frac{z}{a} = h^{-1}(z)$$

pour $h(z) = az$. Il est résoluble puisque son premier groupe dérivé $G_1 = [G, G] = \mathbb{C}^*$ est commutatif. Mais il n'est pas nilpotent car $G^2 = [G, G^1] = [G, G_1] = G_1$, donc $G^3 = [G, G^2] = G_1$ et, pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$G^{n+1} = [G, G^n] = G_1.$$

Type 2 : $r = 0$ et $R < +\infty$

C'est alors le disque de rayon $R > 0$ privé de l'origine. Par l'homothétie $z \longmapsto \frac{z}{R}$ il est holomorphiquement équivalent au disque unité épointé $\mathbb{D}^* = \mathbb{D}\backslash\{0\}$. Ce dernier admet le demi-plan $\mathbb{H}$ comme revêtement universel de projection $p : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{D}^*$ avec $p(z) = e^{2i\pi z}$.

Le groupe $\mathrm{Aut}(\mathbb{D}^*)$ des auomorphismes de $\mathbb{D}^*$ est réduit au groupe $\mathbf{SO}(2)$ des rotations centrées à l'origine. En effet, un automorphisme φ de $\mathbb{D}^*$ est avant tout une fonction holomorphe $\mathbb{D}^* \longrightarrow \mathbb{D} \subset \mathbb{C}$. Comme elle est à valeurs dans $\mathbb{D}$, elle est bornée ; elle se prolonge donc à $\mathbb{D}$ (en vertu du Théorème de Riemann VI.5.5). Par le théorème V.6.3, l'automorphisme φ est alors de la forme $\varphi(z) = e^{i\theta}\frac{z-p}{\overline{p}z-1}$ où $p \in \mathbb{D}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Mais comme nécessairement $\varphi(0) = 0$, $p = 0$ et par suite φ est une rotation.

Type 3 : $r > 0$ *et* $R = +\infty$

C'est le plan complexe $\mathbb{C}$ duquel on a ôté le disque fermé de centre l'origine et de rayon r. Il se transforme biholomorphiquement en le disque épointé $\mathbb{D}^*$ par l'homographie $\varphi(z) = \frac{r}{z}$. ≪ Nous sommes donc dans la situation qui précède ≫.

Type 3 : $r > 0$ *et* $R < +\infty$

C'est le cas où $C(r, R)$ est ce qu'on pourrait considérer comme une ≪ vraie couronne ≫ au sens familier. Décrivons son revêtement universel. À cet effet, on considère la bande :

$$\mathcal{B} = \{z \in \mathbb{C} : \alpha < \Im(z) < \beta\}$$

avec $\alpha = -\frac{\ln(R)}{2\pi}$ **et** $\beta = -\frac{\ln(r)}{2\pi}$.

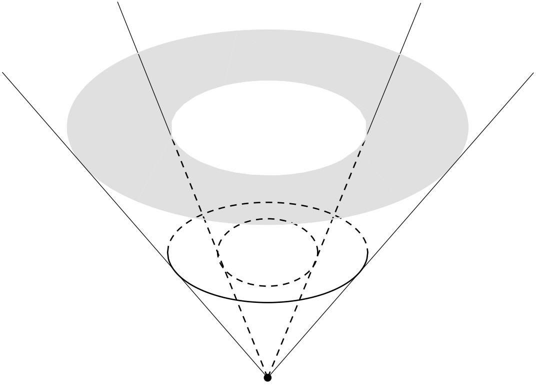
L'application :

$$p_0 : z \in \mathcal{B} \longmapsto e^{2i\pi z} \in C(r, R)$$

est un revêtement de groupe $\mathbb{Z}$. Mais la bande $\mathcal{B}$ est simplement connexe et strictement contenue dans $\mathbb{C}$. D'après le théorème d'uniformisation, il existe un isomorphisme φ envoyant $\mathbb{D}$ sur $\mathcal{B}$. L'application composée $p = p_0 \circ \varphi : \mathbb{D} \longrightarrow C(r, R)$ est aussi un revêtement de la couronne $C(r, R)$, et c'est son revêtement universel.

Soient $C(r, R)$ et $C(r', R')$ deux couronnes avec $r, r' > 0$ et $R, R' < +\infty$. Supposons $\frac{R}{r} = \frac{R'}{r'}$, ce qui est équivalent à $\frac{R}{R'} = \frac{r}{r'} = \lambda$. Alors l'homothétie $z \longrightarrow \lambda z$ transforme $C(r', R')$ en $C(r, R)$; les deux couronnes $C(r, R)$ et $C(r', R')$ sont donc équivalentes. En particulier, toute couronne $C(r, R)$ est équivalente à $C(1, \rho)$ avec $\rho = \frac{R}{r}$.

Réciproquement, si les deux couronnes $C(r, R)$ et $C(r', R')$ sont équivalentes, alors on a nécessairement $\frac{R}{r} = \frac{R'}{r'}$.



Une famille de couronnes équivalentes indexée par $t \in \mathbb{R}_+^*$.

Qu'en est-il du groupe des automorphismes de $C(r, R)$ (avec $0 < r < R < +\infty$) ? Il est engendré par les rotations centrées à l'origine et l'homographie $\gamma : z \longmapsto \frac{rR}{z}$. Il est isomorphe au produit semi-direct :

$$\mathbf{SO}(2) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

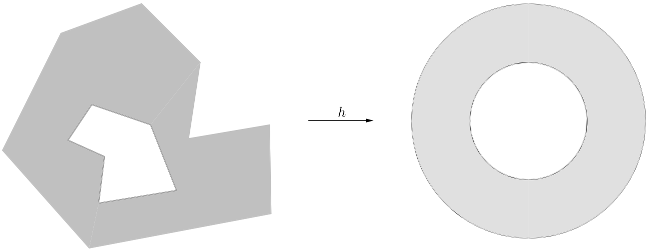
où $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ agit sur $\mathbf{SO}(2)$ par conjugaison.

Reste le cas plus général où l'ouvert U a un groupe fondamental isomorphe à $\mathbb{Z}$. Évidemment, une couronne en est l'exemple-type. En plus, elle est à géométrie très simple, et constitue un modèle pour de tels ouverts. Plus précisément, on a le théorème qui suit.

4.2. Le groupe fondamental est $\mathbb{Z}$

Théorème

Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ tel que $\pi_1(U) = \mathbb{Z}$. Alors U est holomorphiquement équivalent à une couronne $C(r, R)$ où r et R sont tels que $0 \leq r < R \leq +\infty$.



Le dessin correspond au cas $0 < r < R < +\infty$

Petit théorème de Picard

Soit $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe non constante. Alors le complémentaire de l'image de f contient au plus un point.

Preuve. Supposons que f n'atteint pas deux valeurs distinctes a et b. Notons U l'ouvert $\mathbb{C}\backslash\{a, b\}$ et $\widetilde{U}$ son revêtement universel. Comme $\widetilde{U}$ est simplement connexe, à biholomorphisme près, il y a trois possibilités : $\widetilde{U}$ est la sphère de Riemann $\widehat{\mathbb{C}}$, le plan complexe $\mathbb{C}$ ou le disque unité $\mathbb{D}$. Comme U est non compact, $\widetilde{U}$ ne peut pas être $\widehat{\mathbb{C}}$. Et comme $\pi_1(U)$ est le groupe libre à deux générateurs et qu'il doit s'injecter dans $\mathbf{Aut}(\widetilde{U})$, $\widetilde{U}$ n'est pas $\mathbb{C}$ non plus. Donc $\widetilde{U}$ est le disque $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

Soit $q : \mathbb{D} \longrightarrow U$ la projection de revêtement. Comme $\mathbb{C}$ est simplement connexe, il existe une application holomorphe $\widetilde{f} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{D}$ telle que le diagramme ci-dessous commute :

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{D} \arrow[d, "q"] \\
\mathbb{C} \arrow[ur, "\widetilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & U
\end{tikzcd}$$

La partie $\mathbb{D}$ étant bornée dans $\mathbb{C}$, la fonction $\widetilde{f}$ est aussi bornée, donc constante par le théorème de Liouville. Par suite f est constante. Mais ceci est une contradiction avec l'hypothèse sur f. $\square$

BIBLIOGRAPHIE

[1] AHLFORS, L.V. *Complex Analysis*. Collection *Mathematics Series*, McGraw-Hill (1979).

[2] CARTAN, H. *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes*. Collection *Enseignement des Sciences*, Hermann (1985).

[3] EL KACIMI ALAOUI, A. *Variable complexe et surfaces riemanniennes.* Références Sciences, Ellipses (2021).

[4] FARKAS, H.M. & KRA, I. *Riemann Surfaces.* GTM 71 (1980), Springer-Verlag.

[5] FORSTER, O. *Lectures on Riemann Surfaces.* GTM 81 (1981), Springer-Verlag.

[6] FREITAG, E. *Hilbert Modular Forms.* Springer-Verlag, (1990).

[7] HÖRMANDER, L. *An Introduction to Complex Analysis in Several Variables*. D. Van Nostrand Compagny. Inc. (1966).

[8] Jones, G. & Singerman, D. *Complex Functions. An algebraic and geometric viewpoint.* Cambridge University Press, (1987).

[9] Krantz, S. G. *Geometric Function Theory*. Birkhäuser (2006).

[10] Lavrentiev, M. & Chabat, B. *Méthodes de la théorie des fonctions d'une variable complexe*. Éditions Mir, Moscou (1972).

[11] Maass, H. *Lectures on Modular Functions of one Complex Variable.* Tata Institute of Fundamental Research, (1964).

[12] Saint-Gervais, H. P. *Uniformisation des surfaces de Riemann*. ENS Éditions, Lyon (2010).

[13] Schlichenmaier, M. *An Introduction to Riemann Surfaces, Algebraic Curves and Moduli Spaces*. Lecture Notes in Physics 322, Springer-Verlag (1979).

[14] Schwerdtfeger, H. *Geometry of Complex Numbers*. Dover Publications, INC New York (1979).

[15] Vidonne, R. *Groupe circulaire, rotations et quaternions*. Collections CAPES et Agrégation, Ellipses (2001).