Variétés complexes et groupes de Lie complexes

Aziz El Kacimi
Université Polytechnique Hauts-de-France
http://perso.numericable.fr/azizelkacimi/

Mini-cours au
Séminaire Inter-Universitaire de Géométrie - Maroc
Samedi 26 février 2022

7. Variétés complexes

7.1. Préliminaires

Formellement la définition est la même que celle des variétés différentiables : la notion de difféomorphisme entre ouverts de $\mathbb{R}^n$ est remplacée par celle d'application biholomorphe entre ouverts de $\mathbb{C}^n$. L'espace $\mathbb{C}^n$ sera identifié à $\mathbb{R}^{2n}$ à l'aide de l'application :

$$(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n) \in \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow (x_1 + iy_1, \cdots, x_n + iy_n) \in \mathbb{C}^n.$$

Soit U un ouvert de $\mathbb{C}^n$. Notons $(z_1, \ldots, z_n)$ les coordonnées complexes d'un point $z \in U$ et $(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n)$ ses coordonnées réelles où, pour tout $k = 1, \ldots, n$, $z_k = x_k + iy_k$. Pour toute fonction $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{C}$ de classe C^1, on pose :

$$\partial\varphi = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial\varphi}{\partial z_k} dz_k \quad \textbf{et} \quad \overline{\partial}\varphi = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial\varphi}{\partial \overline{z}_k} d\overline{z}_k$$

où

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial z_k} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x_k} - i\dfrac{\partial}{\partial y_k}\right) \\ \dfrac{\partial}{\partial \overline{z}_k} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x_k} + i\dfrac{\partial}{\partial y_k}\right) \end{cases}.$$

Alors $d\varphi = \partial\varphi + \overline{\partial}\varphi$ où, pour tout point $z \in U$, $\partial_z\varphi$ et $\overline{\partial}_z\varphi$ sont des 1-formes complexes $\mathbb{R}$-linéaires sur $\mathbb{C}^n$. La première est $\mathbb{C}$-linéaire et la deuxième est $\mathbb{C}$-antilinéaire.

Définition

*On dira que φ est **holomorphe** si, pour tout point $z \in U$, la 1-forme $d_z\varphi$ est $\mathbb{C}$-linéaire i.e. si la partie antilinéaire $\overline{\partial}_z\varphi$ est nulle.*

Si $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$ est une fonction définie sur un ouvert $U \in \mathbb{C}^n$ et à valeurs dans $\mathbb{C}^m$, on dira que φ est ***holomorphe*** sur U si chacune de ses composantes φ_ℓ, $\ell = 1, \ldots, m$ est holomorphe en tant que fonction définie sur U et à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Une ***application biholomorphe*** d'un ouvert U de $\mathbb{C}^n$ sur un ouvert V de $\mathbb{C}^m$ est une application bijective $\varphi : U \longrightarrow V$ telle que φ et son inverse φ^{-1} soient holomorphes. Dans ce cas, on a nécessairement $n = m$. On dira que les deux ouverts U et V de $\mathbb{C}^n$ sont ***holomorphiquement équivalents***.

Voici une caractérisation de l'holomorphie en termes de série entière pour une fonction de plusieurs variables complexes. Soient U un ouvert de $\mathbb{C}^n$ (avec $n \geq 2$) et $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction.

Théorème

La fonction f est holomorphe sur U si, et seulement si, elle y est analytique (au sens complexe), c'est-à-dire, pour tout $a = (a_1, \cdots, a_n) \in U$, il existe $r > 0$ tel que le polydisque $D = D(a_1, r) \times \cdots \times D(a_n, r)$ soit entièrement contenu dans U et pour tout $z = (z_1, \cdots, z_n) \in D$ on ait :

$$f(z) = \sum_{k_1 \cdots k_n} \alpha_{k_1 \cdots k_n} (z_1 - a_1)^{k_1} \cdots (z_n - a_n)^{k_n}$$

où le multi-indice $(k_1, \cdots, k_n)$ varie dans $\mathbb{N}^n$ et les $\alpha_{k_1 \cdots k_n}$ sont des constantes complexes.

Le théorème qui suit marque une différence nette entre la propriété d'holomorphie en dimension 1 et celle en dimension supérieure.

Théorème (Hartogs)

Soient U un ouvert de $\mathbb{C}^n$ (avec $n \geq 2$), K un compact de U tel que l'ouvert $U \backslash K$ soit connexe et $f : U \backslash K \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe.

Alors f s'étend en une fonction holomorphe sur U tout entier, c'est-à-dire, il existe $\widetilde{f} : U \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorphe dont la restriction à $U \backslash K$ coïncide avec f.

Il a beaucoup d'applications substantielles en analyse complexe à plusieurs variables.

Nous sommes maintenant en mesure de donner la définition de *variété complexe*. Soit M un espace topologique séparé.

Définition

On dira que M est une variété complexe de dimension n si elle admet un recouvrement ouvert $\{U_k\}$ et pour tout k, un homéomorphisme φ_k d'un ouvert de $\mathbb{C}^n$ sur U_k de telle sorte que, si $U_k \cap U_\ell \neq \emptyset$ l'homéomorphisme qui suit soit biholomorphe :

$$\varphi_\ell^{-1} \circ \varphi_k : \varphi_k^{-1}(U_k \cap U_\ell) \subset \mathbb{C}^n \longrightarrow \varphi_\ell^{-1}(U_k \cap U_\ell) \subset \mathbb{C}^n$$

Par définition même, toute variété complexe est munie naturellement d'une structure de variété différentiable.

Tout ouvert d'une variété complexe est une variété complexe de même dimension.

Une variété complexe est dite connexe, compacte... si l'espace topologique sous-jacent est connexe, compact...

7.2. Exemples

• Soient $N = n + q$, $f : \mathbb{C}^N \longrightarrow \mathbb{C}^q$ une application holomorphe et $c \in f(\mathbb{C}^N)$. On pose $M = \{z \in \mathbb{C}^N : f(z) = c\}$.
Supposons qu'en tout point $z = (z_1, \ldots, z_N) \in M$, la différentielle $d_z f : \mathbb{C}^N \longrightarrow \mathbb{C}^q$ (application $\mathbb{C}$-linéaire) soit de rang maximum.
Alors la version complexe du théorème des fonctions implicites montre que M possède une structure de variété complexe de dimension n.
On dit que f est une *fonction définissant M*.

Contrairement au cas réel, il y a beaucoup de variétés complexes qui ne peuvent pas être obtenues de cette manière : il n'existe pas de version holomorphe du *théorème de plongement de Whitney*.
Celles qu'on peut plonger sont appelées *variétés de Stein*.
Les variétés complexes compactes n'en font pas partie.

• On reprend la sphère de Riemann $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ et on pose $U_1 = \mathbb{C}$ et $U_2 = \mathbb{C}^* \cup \{\infty\}$. Alors $\{U_1, U_2\}$ est un recouvrement ouvert de $\widehat{\mathbb{C}}$. Soient $\varphi_1 : \mathbb{C} \longrightarrow U_1$ et $\varphi_2 : \mathbb{C} \longrightarrow U_2$ les applications définies respectivement par $\varphi_1(z) = z$ et $\varphi_2(z) = \frac{1}{z}$.

Alors :

$$U_1 \cap U_2 = \mathbb{C}^* = \varphi_1^{-1}(U_1 \cap U_2) = \varphi_2^{-1}(U_1 \cap U_2)$$

et $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1(z) = \frac{1}{z}$ qui est un biholomorphisme de $\mathbb{C}^*$.

Donc $\widehat{\mathbb{C}}$ est une variété complexe de dimension 1.

• Sur $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ on considère la relation d'équivalence :

$$z \sim w \iff \exists \lambda \in \mathbb{C}^* \text{ tel que } w = \lambda z.$$

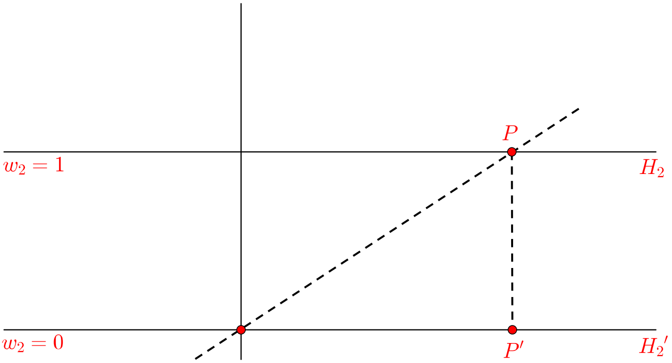
Le quotient $P^n(\mathbb{C})$ de $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ par cette relation d'équivalence est une variété complexe appelée *espace projectif complexe* de dimension n.

Prenons $n = 3$ et considérons la projection canonique $p : \mathbb{C}^3 \backslash \{0\} \longrightarrow P^2(\mathbb{C})$. Les *coordonnées homogènes* d'un point de $P^2(\mathbb{C})$ seront notées $[w_1, w_2, w_3]$ (avec $(w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{C}^3 \backslash \{0\}$) ; elles sont définies à un facteur multiplicatif non nul près.

Pour k variant dans $\{1, 2, 3\}$, les ensembles $U_k = p(\widetilde{U}_k)$ avec $\widetilde{U}_k = \{(w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{C}^3 : w_k \neq 0\}$ forment un recouvrement ouvert de $P^2(\mathbb{C})$ et les applications $\varphi_k : \mathbb{C}^2 \longrightarrow U_k$ définies ci-dessous sont des cartes locales :

$$\begin{cases} \varphi_1(u, v) = [1, u, v] \\ \varphi_2(u, v) = [u, 1, v] \\ \varphi_3(u, v) = [u, v, 1]. \end{cases}$$

Dans le dessin ci-dessous l'hyperplan complexe H_2' est $\mathbb{C}^2$. Le point P' dessus a pour coordonnées $(u, 0, v) \simeq (u, v)$ et est envoyé par φ_2 sur le point $(u, 1, v)$ de l'hyperplan complexe affine H_2, ensuite par la projection p sur l'ouvert U_2.



H_2 et H_2' sont les plans d'équations respectives $w_2 = 1$ et $w_2 = 0$

Vérifinons la compatibilité entre les cartes. Faisons-le par exemple pour (U_1, φ_1) et (U_2, φ_2) en explicitant $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$ qui est une application de $\varphi_1^{-1}(U_1 \cap U_2)$ dans $\varphi_2^{-1}(U_1 \cap U_2)$. L'élément (u, v) qu'on va prendre dans $\varphi_1^{-1}(U_1 \cap U_2) \subset \mathbb{C}^2$ est tel que $u \neq 0$. On a :

$$\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1(u, v) = \varphi_2^{-1}([1, u, v]) = \varphi_2^{-1}\left(\left[\frac{1}{u}, \frac{u}{u}, \frac{v}{u}\right]\right) = \left(\frac{1}{u}, \frac{v}{u}\right).$$

Ceci montre que le changement de coordonnées :

$$(u', v') = \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1(u, v) = \left(\frac{1}{u}, \frac{v}{u}\right)$$

est holomorpphe. Le recouvrement ouvert $\{U_k\}$ et les applications φ_k forment donc un atlas définissant une structure de variété complexe de dimension 2 sur $P^2(\mathbb{C})$.

7.3. Applications holomorphes

Soient M et N deux variétés complexes de dimensions respectives n et q.

Définition

On dira qu'une application $f : M \longrightarrow N$ est holomorphe au point $z \in M$ si, pour toute carte locale de M, (U, φ) contenant z et toute carte locale (V, ψ) de N contenant $f(z)$ et tout voisinage ouvert W de z contenu dans U et tel que $f(W) \subset V$, l'application :

$$\psi^{-1} \circ f \circ \varphi : \varphi^{-1}(W) \subset \mathbb{C}^n \longrightarrow \psi^{-1}(V) \subset \mathbb{C}^q$$

est holomorphe au point $\varphi^{-1}(z)$. On dira que f est holomorphe si elle est holomorphe en tout point de M.

Une fonction $f : M \longrightarrow \mathbb{C}$ est dite *holomorphe* si pour toute carte locale (U, φ) la fonction qui suit est holomorphe :

$$f \circ \varphi : \varphi^{-1}(U) \subset \mathbb{C}^n \longrightarrow U \longrightarrow \mathbb{C}$$

1. Si $f : M \longrightarrow N$ est holomorphe, bijective et f^{-1} holomorphe on dira que f est un *biholomorphisme* de M sur N. Dans ce cas les variétés M et N ont nécessairement la même dimension.

2. On notera $\mathcal{H}(M, N)$ l'ensemble des applications holomorphes de M dans N et simplement $\mathcal{H}(M)$ lorsque $N = \mathbb{C}$. Notons que lorsque M est compacte connexe, l'espace $\mathcal{H}(M)$ est réduit aux constantes.

3. L'ensemble des biholomorphismes (ou automorphismes) d'une variété complexe est un groupe (pour la composition des applications) noté $\mathrm{Aut}(M)$; c'est bien sûr un sous-groupe du groupe $\mathrm{Diff}(M)$ des difféomorphismes de M.

7.4. Variétés complexes quotients

Soient Γ un groupe dénombrable (qu'on supposera muni de la topologie discrète) d'élément neutre noté e. On se donne une variété complexe M de groupe de biholomorphismes G.

Définition

*On appelle **action holomorphe** de Γ sur M toute application continue $\Phi : \Gamma \times M \longrightarrow M$ telle que :*

1. $\Phi(e, z) = z$ *pour tout* $z \in M$;
2. $\Phi(\gamma\gamma', z) = \Phi(\gamma, \Phi(\gamma', z))$ *pour tous* $\gamma, \gamma' \in \Gamma$ *et tout point* $z \in M$;
3. *pour tout* $\gamma \in \Gamma$, *l'application partielle* $\Phi(\gamma, \cdot) : z \in M \longmapsto \Phi(\gamma, z) \in M$ *est un élément de* G.

L'application $\rho : \gamma \in \Gamma \longmapsto \Phi(\gamma, \cdot) \in G$ est donc un morphisme de groupes. On dira que l'action Φ est ***fidèle*** si ρ est injectif. Dans ce cas on regardera toujours γ comme un automorphisme non trivial de M.

Soient M une variété complexe (connexe pour simplifier) munie d'une action holomorphe Φ d'un groupe discret Γ. Le point $\Phi(\gamma, z)$ sera noté $\gamma \cdot z$.

Définition

On dira que Φ est :

1. ***libre** si $\gamma \cdot z = z$ implique $\gamma = e$;*
2. ***propre** si, pour tout compact $K \subset M$, l'ensemble $\{\gamma \in \Gamma : \gamma \cdot K \cap K \neq \emptyset\}$ est fini .*

Pour tout point $z \in M$, $\Gamma(z)$ sera son orbite *i.e.* l'ensemble $\{\gamma \cdot z : \gamma \in \Gamma\}$. Les orbites partitionnent M et forment un ensemble M/Φ qu'on appelle quotient de M par l'action Φ.

Deux actions (M, Φ) et (N, Ψ) sont dites *conjuguées* s'il existe un biholmorphisme $h : M \longrightarrow N$ tel que, pour tout $\gamma \in \Gamma$ et tout $z \in M$ on ait $h(\gamma \cdot z) = \gamma \cdot h(z)$. Cela signifie que le diagramme qui suit est commutatif pour tout $\gamma \in \Gamma$.

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{h} & N \\ \gamma \downarrow & & \downarrow \gamma \\ M & \xrightarrow{h} & N \end{array}$$

Théorème

Soient M une variété complexe de dimension n et Φ une action holomorphe, libre et propre de Γ sur M. Alors :

1. *M/Φ est une variété complexe de dimension n.*
2. *la projection canonique $\pi : M \longrightarrow M/\Phi$ est un **biholomorphisme local**, c'est-à-dire tout point $z \in M$ admet un voisinage ouvert U tel que la restriction $\pi : U \longrightarrow \pi(U)$ soit un biholomorphisme.*
3. *Si Ψ est une autre action sur M holomorphiquement conjuguée à Φ, les variétés M/Φ et M/Ψ sont holomorphiquement équivalentes.*

7.5. Les tores complexes

Soient $M = \mathbb{C}^n$ et $\Gamma = \mathbb{Z}^{2n}$, $\tau = (\tau_1, \tau'_1 \dots, \tau_n, \tau'_n)$ un vecteur de $\mathbb{R}^{2n}$ dont les composantes sont toutes non nulles. On définit une action $\Phi : \Gamma \times M \longrightarrow M$ par :

$$\Phi(q, z) = z + \tau q$$

où :

$$z = (z_1, \dots z_n) \in \mathbb{C}^n \qquad \text{et} \qquad q = (q_1, {q'}_1 \cdots, q_n, {q'}_n) \in \mathbb{Z}^{2n}$$

et :

$$q\tau = (q_1\tau_1 + i{q'}_1{\tau'}_1, \cdots, q_n\tau_n + i{q'}_n{\tau'}_n).$$

Alors Φ est une action holomorphe, libre et propre ; le quotient M/Φ est une variété complexe de dimension n appelée ***n-tore complexe*** et est notée $\mathbb{T}^n_\tau$.

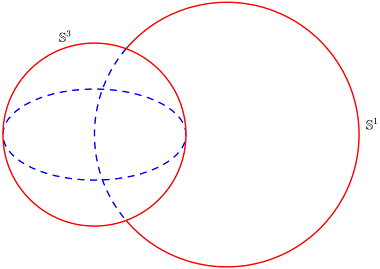
Contrairement au cas réel, sa structure complexe dépend du choix de $\tau \in \mathbb{R}^{2n}$.

7.6. Les variétés de Hopf

Soient $M = \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, $\Gamma = \mathbb{Z}$ et $a \in \mathbb{C}$ tel que $0 < |a| < 1$. On définit une action de Γ sur M de la façon suivante :

$$\Phi : (q, z) \in \Gamma \times M \longmapsto a^q z \in M.$$

Alors Φ est une action holomorphe, libre et propre. Le quotient M/Γ est une variété complexe de dimension n appelée ***variété de Hopf***. Comme exercice le lecteur pourrait démontrer que cette variété est difféomorphe à $\mathbb{S}^{2n-1} \times \mathbb{S}^1$.



La variété de Hopf $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^1$

8. Groupes de Lie complexes

8.1. Définition

Un groupe de Lie complexe est une variété complexe G munie d'une structure de groupe de Lie pour laquelle l'application $\Phi : (z, w) \in G \times G \longmapsto zw^{-1} \in G$ est holomorphe.

La *dimension complexe* du groupe G est celle de la variété complexe sous-jacente.

Bien évidemment, l'application $z \in G \longmapsto z^{-1} \in G$ de passage à l'inverse est holomorphe.

On dira qu'un groupe de Lie complexe G est *connexe, compact,...* s'il est connexe, compact... en tant que variété.

8.2. Exemples

1. Les abéliens.

1. Le premier est évidemment le groupe de Lie (additif) $\mathbb{C}^n$. C'est un groupe commutatif simplement connexe.
2. On peut donner aussi $(\mathbb{C}^*)^n$. Il n'est pas simplement connexe : il est difféomorphe (analytiquement) au produit $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$.
3. On a le produit $G = \mathbb{C}^p \times (\mathbb{C}^*)^q$ avec $p + q = n$ et $p, q \in \mathbb{N}^*$.
4. Un *groupe de Cousin* : groupe de Lie connexe sur lequel toute fonction holomorphe est constane. Un tel groupe est toujours abélien et il n'est pas forcément compact. En fait on a le théorème qui suit démontré dans [11] :

Théorème

Soit G un groupe de Lie complexe connexe et abélien. Alors G est isomorphe au produit $C \times \mathbb{C}^r \times (\mathbb{C}^*)^s$ où C est un groupe de Cousin.

2. Les compacts.

Les premiers sont les *tores complexes* dont on a déjà parlé. Les voici à nouveau.

Soient $\widetilde{G} = \mathbb{C}^n$ et $\tau = (\tau_1, \tau'_1 \ldots, \tau_n, \tau'_n)$ un vecteur de $\mathbb{R}^{2n}$ dont les composantes sont toutes non nulles. Ce dernier nous permet de fabriquer le réseau uniforme de $\widetilde{G} = \mathbb{C}^n$:

$$\Lambda = \{(q_1\tau_1 + iq'_1\tau'_1, \cdots, q_n\tau_n + iq'_1\tau'_n) : (q_1, q'_1, \cdots, q_n, q'_n) \in \mathbb{Z}^{2n}\}.$$

c'est-à-dire un sous-groupe discret tel que le quotient $\widetilde{G}/\Lambda$ soit compact. En tant que variété complexe ce quotient est le tore $\mathbb{T}^n_\tau$ comme on l'a déjà vu.

En plus Λ est un sous-groupe normal de $\widetilde{G} = \mathbb{C}^n$, donc $G = \widetilde{G}/\Lambda$ est aussi un groupe.

G est en fait un *groupe de Lie complexe* de dimension n, connexe et compact.

La catégorie des groupes de Lie complexes, connexes et compacts se réduit en fait aux tores complexes qu'on vient de décrire.

Théorème

Soit G un groupe de Lie complexe, connexe et compact de dimension n. Alors G est un tore complexe $\mathbb{T}^n_\Lambda = \mathbb{C}^n/\Lambda$ où Λ est un réseau de $\mathbb{C}^n$.

Preuve.

- **Montrons d'abord que G est abélien. Notons e l'élément neutre de G et $\Psi : G \times G \longrightarrow G$ l'application holomorphe définie par $\Psi(x,y) = xyx^{-1}y^{-1}$. Soit $\varphi : U \longrightarrow \Omega \subset \mathbb{C}^n$ une carte locale au voisinage de e, envoyant e sur 0 par exemple. (On peut donc voir Ψ comme une fonction holomorphe à valeurs dans Ω.) L'application Ψ étant continue et $\Psi(G,e) = e$, il existe un ouvert V_x contenant x et un ouvert W_x contenant e tels que $\Psi(V_x, W_x) \subset U$. Le groupe G étant compact, on peut extraire du recouvrement ouvert $\{V_x\}_{x\in G}$.**

un recouvrement fini $V_{x_1}, \cdots, V_{x_k}$. On pose $W = W_{x_1} \cap \cdots \cap W_{x_k}$; c'est un ouvert contenant e et on a $\Psi(G, W) \subset U$. Ceci implique que $\Psi(G, W) = e$ puisque Ψ est holomorphe, G compact et $\Psi(e, y) = e$ pour tout $y \in W$.
Finalement, W étant ouvert et G connexe, on a $\Psi(G, G) = e$, donc Ψ est constante égale à e, ce qui signifie que G est abélien.

- Pour montrer que G est en fait un tore complexe, on passe par son revêtement universel $\pi : \widetilde{G} \longrightarrow G$. C'est un groupe simplement connexe et abélien, donc sans facteur compact ; par suite c'est l'espace vectoriel $\mathbb{C}^n$ (Théorème 17.4.1. dans [5]).
Comme l'application π est un homomorphisme de groupes et que G est compact, son noyau est un réseau Λ de $\mathbb{C}^n$. Par suite G est le tore complexe $\mathbb{C}^n/\Lambda$.

3. Quelques autres

• Il y a d'abord $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$ le groupe des matrices carrées d'ordre n inversibles et à coefficients complexes.

• Les sous-groupes de $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$ comme par exemple $\mathbf{SL}(n, \mathbb{C})$ qui est le sous-groupe $\{A \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{C}) : \det A = 1\}$.

• En voici un explicite. Soit A une matrice de $\mathbf{GL}(p, \mathbb{Z})$ ayant n valeurs propres réelles strictement positives $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$. Pour tout $\mu \in \mathbb{C}$, on peut donc considérer la matrice A^μ ; ce qui nous donne une action : $(\mu, z) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \longmapsto A^\mu z \in \mathbb{C}^n$ et nous permet de construire le produit semi-direct $G_\mathbb{C} = \mathbb{C}^n \rtimes \mathbb{C}$. C'est un groupe de Lie complexe de dimension $n + 1$, résoluble non nilpotent.

• On vérifie facilement que pour $n = 1$, $G_\mathbb{C}$ est le groupe des transformations affines $z \in \mathbb{C} \longmapsto (az + b) \in \mathbb{C}$.

8.3. Automorphismes de variétés complexes

1. Dimension 1. Nous avons déjà rencontré les groupes suivants.

- Plan complexe :

$$\mathbf{Aut}(\mathbb{C}) = \{z \in \mathbb{C} \longmapsto (az+b) \in \mathbb{C} : a \in \mathbb{C}^* \ \text{ et } \ b \in \mathbb{C}\} \simeq \mathbb{C} \rtimes \mathbb{C}^*.$$

- Droite projective complexe :

$$\mathbf{Aut}(P^1(\mathbb{C})) = \left\{ z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d} : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbf{SL}(2,\mathbb{C}) \right\} \simeq \mathbf{PSL}(2,\mathbb{C}).$$

- Demi-plan de Poincaré :

$$\mathbf{Aut}(\mathbb{H}) = \left\{ z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d} : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbf{SL}(2,\mathbb{R}) \right\} \simeq \mathbf{PSL}(2,\mathbb{R}).$$

Ce sont tous des groupes de Lie : les deux premiers sont complexes, le troisième ne l'est pas.

2. Dimension ≥ 2. On se contentera des situations qui suivent. Le groupe $\mathrm{Aut}(M)$ d'une variété complexe peut être de dimension infnie : *en effet, pour toute fonction holomorphe $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, l'application $\Phi(z, w) = (z, w + f(z))$ est un automorphisme de $M = \mathbb{C}^2$.*

Théorème

Soit M un ouvert connexe borné de $\mathbb{C}^n$ avec $n \geq 2$. Alors $\mathrm{Aut}(M)$ est un groupe de Lie complexe. En plus, le groupe d'isotropie $\mathrm{Aut}_z(M)$ de tout point $z \in M$ est un sous-groupe compact de $\mathrm{Aut}(M)$.

Théorème

Soit M une variété complexe compacte. Alors $\mathrm{Aut}(M)$ est un groupe de Lie complexe d'algèbre de Lie l'algèbre des champs de vecteurs holomorphes sur M.

3. Un calcul concret.

C'est un cas particulier de l'exemple construit dans la note qui suit : [A. El Kacimi. *Exemple de feuilletage transversalement holomorphe et son groupe d'automorphismes.* Janvier 2022]

3.1. Construction de la variété

Soit $n \geq 1$ entier. On note $(z_1, \cdots, z_n)$ les coordonnées d'un point quelconque z de $\mathbb{C}^n$. On pose $\widetilde{M} = \mathbb{C}^n \backslash \{0\}$.
Soient $a_1, \cdots, a_n$ des nombres complexes tels que $|a_1|, \cdots, |a_n|$ soient dans $]0,1[$ et deux à deux distincts. On note Q la matrice diagonale :

$$Q = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}.$$

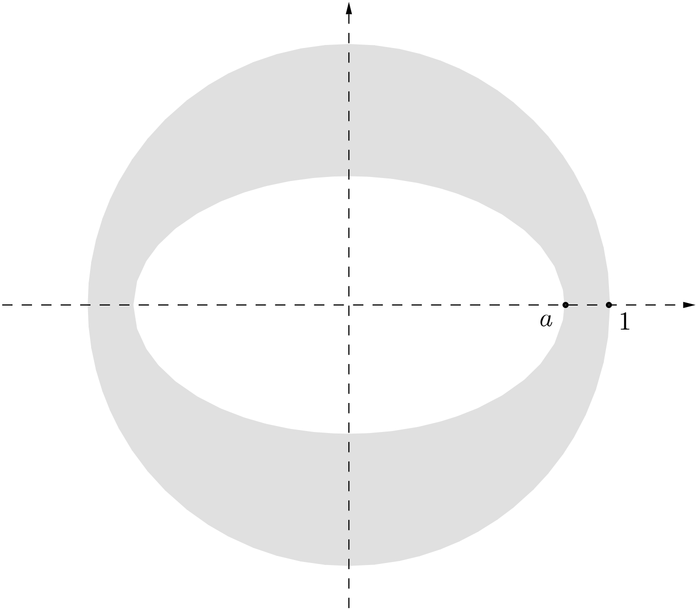
La transformation linéaire $\gamma(z) = Q(z)$ de $\mathbb{C}^n$ engendre une action sur $\widetilde{M}$ du groupe :

$$\Gamma = \langle\gamma\rangle = \{\gamma^k : k \in \mathbb{Z}\} \simeq \mathbb{Z}$$

holomorphe, libre et propre. Elle a pour domaine fondamental la « couronne », intersection de la boule unité fermée de $\mathbb{C}^n$ et de l'adhérence de la partie extérieure de l'ellipsoïde d'équation :

$$\frac{|z_1|^2}{|a_1|^2} + \cdots + \frac{|z_q|^2}{|a_n|^2} = 1.$$

Le quotient $M = \widetilde{M}/\Gamma$ est donc une variété complexe compacte, analytiquement (au sens réel) difféomorphe à la variété de Hopf $\mathbb{S}^{2n-1} \times \mathbb{S}^1$. Pour $n = 1$, M est un 1-tore complexe.


a
1

3.2. Le groupe $\mathbf{Aut}(M)$

Rappelons que la projection canonique $\pi : \widetilde{M} \longrightarrow M$ est un revêtement holomorphe. Donc tout automorphisme Φ de$M$ se relève en un automorphisme $\widetilde{\phi}$ de $\widetilde{M}$ commutant à l'action de γ. On a une suite exacte :

$$(1) \qquad 0 \longrightarrow \Gamma \overset{j}{\hookrightarrow} \mathbf{Aut}(\widetilde{M}) \xrightarrow{\pi_*} \mathbf{Aut}(M) \longrightarrow 1.$$

On voit donc que $\mathbf{Aut}(M)$ s'identifie au quotient $\mathbf{Aut}(\widetilde{M})/j(\Gamma)$. Un automorphisme $\widetilde{\phi}$ de $\mathbb{C}^n \backslash \{0\}$ commutant à γ vérifie $\widetilde{\phi}(\gamma(z)) = \gamma(\widetilde{\phi}(z))$ pour tout $z \in \mathbb{C}^n \backslash \{0\}$. Donc, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $\widetilde{\phi}(\gamma^k(z)) = \gamma^k(\phi(z))$. En faisant tendre k vers $+\infty$, et utilisant le fait que l'automorphisme linéaire γ est contractant et fixant 0, on prolonge $\widetilde{\phi}$ à $\mathbb{C}^n$ tout entier par $\widetilde{\phi}(0) = 0$.

En particulier la fonction $\widetilde{\phi} : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ est holomorphe ; elle est donc de la forme $\widetilde{\phi}(z) = (\widetilde{\phi}_1(z), \cdots, \widetilde{\phi}_n(z))$ où, pour tout $\ell = 1, \cdots, n$, la fonction $\widetilde{\phi}_\ell$ s'écrit :

$$\widetilde{\phi}_\ell(z_1, \cdots, z_n) = \sum_{\ell_1 \cdots \ell_n} b_{\ell_1 \cdots \ell_n} z_1^{\ell_1} \cdots z_n^{\ell_n}$$

avec $(\ell_1, \cdots, \ell_n)$ décrivant $\mathbb{N}^n$. Ce développement en série et la condition d'équivariance sur $\widetilde{\phi}$ nous permettent de montrer (par un calcul simple) que $\widetilde{\phi}_\ell$ est de la forme $\widetilde{\phi}_\ell(z) = b_\ell z_\ell$ où b_ℓ est une constante complexe. La fonction $\widetilde{\phi}$ est donc linéaire de matrice diagonale :

$$B = \begin{pmatrix} b_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & b_q \end{pmatrix}.$$

Un élément ψ de $j(\Gamma)$ est un automorphisme de $\widetilde{M}$ qui préserve individuellement chaque fibre du revêtement π. C'est donc exiger de ψ d'être de la forme $\psi(z) = (a_1^r z_1, \cdots, a_n^r z_n)$ avec $r \in \mathbb{Z}$. Soit $\ell \in \{1, \cdots, q\}$. Comme $|a_\ell| \in]0, 1[$, le sous-groupe $\langle a_\ell \rangle$ de $\mathbb{C}^*$ engendré par a_ℓ est fermé et isomorphe à $\mathbb{Z}$. Le quotient $\mathbb{T}_\ell = \mathbb{C}^*/\langle a_\ell \rangle$ est donc un 1-tore complexe dont la structure (complexe) est codée par le rapport $\tau_\ell = \frac{1}{|a_\ell|}$ des rayons de la couronne $\{|a_\ell| < |w| < 1\}$.

La suite exacte (1) devient donc :

$$(2) \qquad 0 \longrightarrow \Gamma \overset{j}{\hookrightarrow} \mathbf{Aut}(\widetilde{M}) \xrightarrow{\pi_*} \prod_{\ell=1}^{n} \mathbb{T}_\ell \longrightarrow 1.$$

Le groupe $\mathbf{Aut}(M)$ des automorphismes de la variété complexe M est donc le produit cartésien des 1-tores complexes $\mathbb{T}_1, \cdots, \mathbb{T}_n$:

$$\mathbf{Aut}(M) = \prod_{\ell=1}^{n} \mathbb{T}_\ell$$

deux à deux non équivalents puisqu'on a supposé que les nombres réels $|a_1|, \cdots, |a_n|$ sont deux à deux distincts et donc les rapports $\tau_\ell = \frac{1}{|a_\ell|}$ le sont aussi. $\square$

QUELQUES RÉFÉRENCES

1. BIRKENHAKE, C. AND LANGE, H. *Complex Abelian Varieties.* Springer-Verlag (2003).

2. CHABAT, B. *Introduction à l'analyse complexe.* Tome 2, Éditions Mir, Moscou (1990).

3. CHERN, S-S. *Complex Manifolds Without Potential Theory.* Universitext, Springer-Verlag (1979).

4. GRAUERT, H. & REMMERT.R. *Theory of Stein Spaces*. *Classics in Mathematics*, Springer-Verlag (1979).

5. HOCHSCHILD, G. *The structure of Lie Groups.* Holden-Day Series Mathematics (1965).

6. HÖRMANDER, L. *An Introduction to Complex Analysis in Several Variables*. D. Van Nostrand Compagny. Inc. (1966).

7. HSIANG, W.Y. *Lectures on Lie Groups.* Series on University Mathematics - Vol. 2, World Scientific (2000).

8. HUYBRECHTS, D. *Complex Geometry*. Universitext, Springer-Verlag (2004).

9. KOBAYASHI, S. *Transformation Groups in Differential Geometry*. *Classics in Mathematics*, Springer (1995).

10. KODAIRA, K. *Complex Manifolds and Deformation of Complex Structures*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 238, Springer-Verlag (1986).

11. MORIMOTO, A. *On the classification on noncompact complex Abelian groups*. Trans. Am. Math. Soc. 123 (1) (1966), 200-228.

12. RANGE, R.M. *Holomorphic Functions and Integral Represntations in Several Complex Variables*. GTM 108, Springer-Verlag (1986).

13. WELLS, L. *Differential Analysis on Complex Manifolds*. GTM 65, Springer-Verlag (1980).