

DÉFORMATION D'UN TRIANGLE À AIRE ET PÉRIMÈTRE FIXÉS

Aziz EL KACIMI

On décrit toutes les familles de triangles à aire et périmètre fixés. Elles sont les feuilles d'un feuilletage (*) (presque régulier) sur l'espace \mathfrak{T} de tous les triangles.

1. Préliminaires

1.1. L'espace des triangles

Se donner un triangle (dans n'importe quel espace euclidien, de dimension finie ou non), c'est se donner trois nombres réels positifs ou nuls x , y et z , tels que :

$$(1) \quad \begin{cases} x \leq y + z \\ y \leq z + x \\ z \leq x + y \end{cases}$$

représentant les mesures des côtés. On adoptera la notation $\langle xyz \rangle$ pour la distinguer de celle qu'on utilise habituellement : XYZ où les points X , Y et Z sont les sommets. On sait en effet (premier cas d'égalité, comme on dit dans le temps) que $\langle xyz \rangle$ est isométrique à $\langle x'y'z' \rangle$ si $x = x'$, $y = y'$ et $z = z'$. (Pour le moment on fera la différence entre un triangle et un autre obtenu par permutation des trois nombres qui le représentent même si, géométriquement, ils sont les mêmes !) Dans toute la suite, λ sera le demi-périmètre $\lambda = \frac{x+y+z}{2}$.

L'ensemble des triangles \mathfrak{T} est ainsi une partie de \mathbb{R}_+^3 . Décrivons-la explicitement. Aux inégalités (1) sont associées trois équations définissant respectivement trois plans :

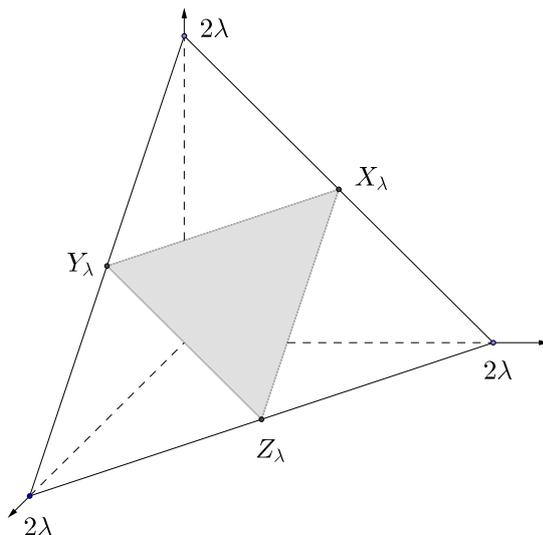
$$(2) \quad \begin{cases} \Sigma_1 = \{x = y + z\} \\ \Sigma_2 = \{y = z + x\} \\ \Sigma_3 = \{z = x + y\} \end{cases}$$

Sur la tranche $\{x + y + z = 2\lambda\}$ de \mathbb{R}_+^3 , Σ_1 , Σ_2 et Σ_3 délimitent un triangle équilatéral dans \mathbb{R}_+^3 dont les sommets sont $X_\lambda = (0, \lambda, \lambda)$, $Y_\lambda = (\lambda, 0, \lambda)$ et $Z_\lambda = (\lambda, \lambda, 0)$ (voir dessin ci-dessous) ; l'enveloppe convexe P_λ (triangle plein) de ces trois points (le triangle $X_\lambda Y_\lambda Z_\lambda$ et son intérieur) représente l'espace des triangles $\langle xyz \rangle$ de périmètre 2λ .

(*) *Existe-t-il des triangles non isométriques ayant même aire et même périmètre ?* C'est une question que Geoffrey Letellier, étudiant à Lille I, a posée à son enseignant Valerio Vassallo et qui me l'a posée à son tour. C'est ce qui a amené à la construction de ce feuilletage. (Voir aussi l'exemple de Geoffrey à la fin de ce texte.)

Quand on fait varier λ en λ' , on obtient un autre triangle plein $P_{\lambda'}$, transformé de P_λ par l'homothétie de centre l'origine et de rapport $k = \frac{\lambda'}{\lambda}$. Ainsi, l'espace \mathfrak{T} est *feuilleté* par ces triangles ; \mathfrak{T} est en fait le cône de sommet l'origine et de base n'importe lequel de ces triangles pleins P_λ , par exemple P_1 :

$$(3) \quad \mathfrak{T} = \bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}_+} \lambda P_1 = \{\lambda X : X \in P_1 \text{ et } \lambda \in \mathbb{R}_+\}.$$

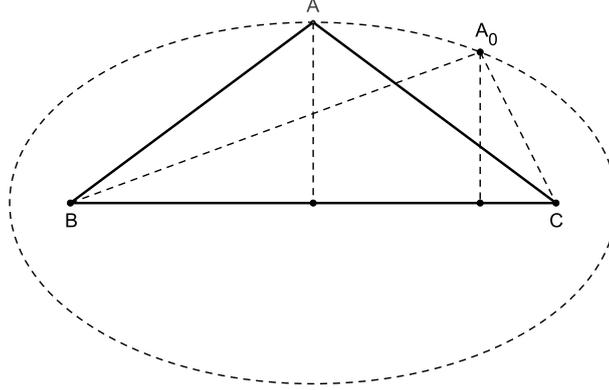


Pour une situation particulière qui va apparaître par la suite, nous aurons besoin du lemme ci-dessous donnant la nature du triangle qui maximise l'aire quand le périmètre est prescrit.

1.2. Lemme. *On se donne une famille de triangles ABC ayant tous le même périmètre 2λ . Parmi tous ces triangles, celui qui maximise l'aire est le triangle équilatéral.*

Preuve. Fixons la base BC et posons $q = 2\lambda - BC$; q est une constante et A se balade de façon à ce que $AB + AC = q$, donc il est sur l'ellipse de foyers B et C et de grand axe q . L'aire de ABC est maximale lorsque la hauteur issue de A l'est, c'est-à-dire lorsque ABC est isocèle.

Affirmation : si ABC n'est pas équilatéral, il ne peut pas maximiser l'aire. En effet, il aura deux côtés non égaux, disons AB et AC . Si on fixe BC , le triangle ABC a une aire strictement inférieure à celle du triangle dont le sommet A est celui de l'ellipse ci-dessous. Ce qui démontre le lemme. ◇



2. Deux feuilletages sur \mathfrak{T}

2.1. Le feuilletage périmètre \mathcal{P}

Chacune de ses feuilles P_λ (où $\lambda \in \mathbb{R}_+$) est définie par l'équation $p(x, y, z) = 2\lambda$ où p est la fonction périmètre $p(x, y, z) = x + y + z$. Nous avons déjà vu que la surface de niveau P_λ est l'enveloppe convexe du triangle $X_\lambda Y_\lambda Z_\lambda$. Lorsque $\lambda = 0$, P_0 est le point $(0, 0, 0)$ de \mathbb{R}_+^3 .

Nous avons donc un feuilletage \mathcal{P} singulier sur \mathfrak{T} dont les feuilles régulières sont les surfaces P_λ ($\lambda > 0$). Évidemment, en dehors de P_0 , \mathcal{P} est trivial puisque isomorphe au feuilletage produit $P_1 \times \mathbb{R}_+^*$.

2.2. Le feuilletage aire \mathcal{A}

Soit $a : \mathbb{R}_+^3 \rightarrow \mathbb{R}_+$ la fonction qui au triangle $\langle xyz \rangle$ associe son aire. Analytiquement, elle est donnée par la formule de Héron :

$$(4) \quad a(x, y, z) = \frac{1}{4} \sqrt{(x + y + z)(-x + y + z)(x - y + z)(x + y - z)}.$$

Le feuilletage \mathcal{A} qui nous intéressera sera celui dont les feuilles sont les surfaces de niveau de cette fonction. On peut déjà voir que la feuille $a(x, y, z) = 0$ est le cône fermé de base les côtés du triangle $P_1 = X_1 Y_1 Z_1$. Ceci étant réglé, on ne travaillera plus que sur l'intérieur de \mathfrak{T} qui est l'ouvert $\Omega = \mathfrak{T} \cap (\mathbb{R}_+^*)^3$. Nous regarderons donc la fonction $a : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+^*$.

• La surface de niveau s de la fonction a sur l'ouvert Ω est exactement celle de niveau s^2 de la fonction $\Phi = a^2$. L'avantage de travailler avec Φ plutôt qu'avec a est qu'il n'y a plus de racine carrée, ce qui simplifie les calculs, entre autres celui de la différentielle qui joue un rôle fondamental. On considère donc la fonction :

$$(5) \quad \Phi(x, y, z) = \frac{1}{16} (x + y + z)(-x + y + z)(x - y + z)(x + y - z).$$

- La différentielle de Φ est de la forme :

$$d\Phi(x, y, z) = \frac{1}{16} \{A(x, y, z)dx + B(x, y, z)dy + C(x, y, z)dz\}$$

où les fonctions A , B et C sont données comme suit :

$$\begin{aligned}
A &= (-x + y + z)(x - y + z)(x + y - z) - (x + y + z)(x - y + z)(x + y - z) \\
&\quad + (x + y + z)(-x + y + z)(x + y - z) + (x + y + z)(-x + y + z)(x - y + z) \\
(6) \quad B &= (-x + y + z)(x - y + z)(x + y - z) + (x + y + z)(x - y + z)(x + y - z) \\
&\quad - (x + y + z)(-x + y + z)(x + y - z) + (x + y + z)(-x + y + z)(x - y + z) \\
C &= (-x + y + z)(x - y + z)(x + y - z) + (x + y + z)(x - y + z)(x + y - z) \\
&\quad + (x + y + z)(-x + y + z)(x + y - z) - (x + y + z)(-x + y + z)(x - y + z).
\end{aligned}$$

Un calcul facile mais long montre que ces trois fonctions A , B et C ne sont nulles simultanément que si $x = y = z = 0$, ce qui ne peut pas se produire car $(0, 0, 0)$ n'est pas dans Ω .

- À périmètre fixé 2λ , la fonction aire a est maximale, et donc la fonction Φ aussi, lorsque $x = y = z = \frac{2}{3}\lambda$; en ce point Φ vaut $\frac{\lambda^4}{27}$. Ce sont les valeurs prises par la fonction Φ sur la demi-droite Δ d'équations $x = y = z$.

On se met maintenant dans l'ouvert $\Omega_* = \Omega \setminus \Delta$. Pour tout $u = (x, y, z) \in \Omega_*$, la différentielle $d_u\Phi$ est de rang 1 ; donc l'ensemble de niveau de Φ passant par ce point est une surface régulière A , c'est même une surface algébrique de degré 4 (on dit une *quartique*). Elle a pour équation :

$$(x + y + z)(-x + y + z)(x - y + z)(x + y - z) = 16\Phi(u).$$

2.3. Quelques remarques

Notons G le sous-groupe du groupe $\text{Isom}(\mathbb{R}^3)$ des isométries de l'espace euclidien \mathbb{R}^3 engendré par la rotation r d'axe Δ et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ et la réflexion σ par rapport au plan d'équation $x = y$. (Les restrictions de ses éléments au plan d'équation $x + y + z = 2\lambda$ est le groupe des isométries du triangle équilatéral $X_\lambda Y_\lambda Z_\lambda$.) Il laisse l'espace \mathfrak{T} invariant ainsi que son bord $\partial\mathfrak{T}$, la demi-droite Δ et les ouverts Ω et Ω_* . Il agit donc sur \mathfrak{T} et fixe chaque feuille de \mathcal{A} individuellement ; il en est de même pour le feuilletage \mathcal{P} .

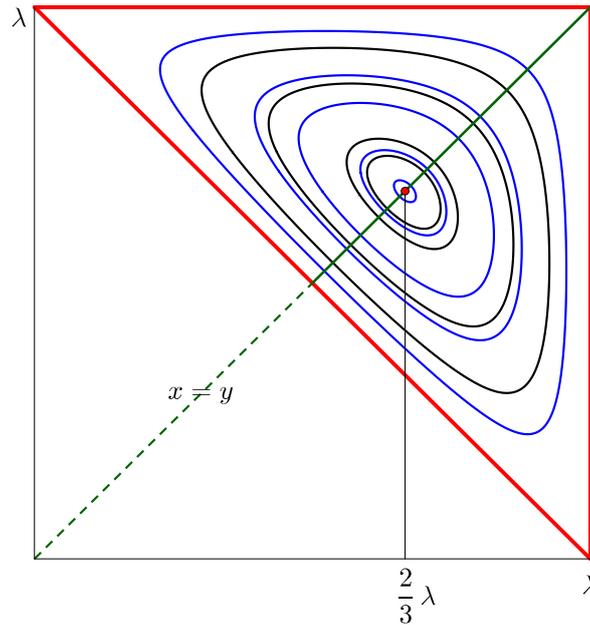
3. Le feuilletage \mathcal{F} aire-périmètre

3.1. Soit $\Psi : \Omega_* \mapsto (\mathbb{R}_+^*)^2$ la fonction définie par $\Psi(x, y, z) = (p(x, y, z), \Phi(x, y, z))$. À un facteur multiplicatif constant près, la matrice de sa différentielle en $u = (x, y, z)$ est :

$$d_u \Psi = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ A(u) & B(u) & C(u) \end{pmatrix}$$

où A, B et C sont les fonctions données par (6). On peut montrer que ces fonctions ne sont égales que si $x = y = z$; donc pour $u \in \Omega_*$, $d_u \Psi$ est de rang 2. Par suite, les ensembles de niveau de Ψ sont des courbes régulières, feuilles d'un feuilletage \mathcal{F}_* sur Ω_* .

3.2. Sur \mathfrak{T} on a donc un feuilletage singulier $\mathcal{F} = \mathcal{P} \cap \mathcal{A}$. Ses feuilles de dimension 0 sont les points de la demi-droite $\{(\frac{2}{3}\lambda, \frac{2}{3}\lambda, \frac{2}{3}\lambda) : \lambda \in \mathbb{R}_+\}$. Parmi les feuilles de dimension égale à 1, il y a les triangles de sommets $X_\lambda = (0, \lambda, \lambda)$, $Y_\lambda = (\lambda, 0, \lambda)$ et $Z_\lambda = (\lambda, \lambda, 0)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$; toute autre feuille est une courbe d'équation $\Psi(u) = \text{constante}$ dans l'ouvert Ω_* . Ces courbes feuilletent bien sûr chaque plaque P_λ (feuille de \mathcal{P}). Pour bien voir ce que c'est, on projette orthogonalement cette plaque sur le plan $z = 0$ et on obtient le feuilletage du dessin ci-dessous. Nous allons expliquer ce que tout cela signifie.



La partie Θ_λ constituée du triangle rouge et son intérieur est le projeté sur le plan $z = 0$ de l'ensemble P_λ des triangles $\langle x_\lambda y_\lambda z_\lambda \rangle$ de périmètre 2λ . Notons que le bord de P_λ est un triangle équilatéral alors que celui de Θ_λ est un triangle rectangle isocèle. Le feuilletage \mathcal{F} sur P_λ est isomorphe au feuilletage du dessin via le difféomorphisme $f : P_\lambda \rightarrow \Theta_\lambda$ défini par $f(x, y, z) = (x, y, 0)$ et d'inverse $f^{-1}(x, y, 0) = (x, y, 2\lambda - x - y)$.

- Le bord (triangle rouge) correspond aux triangles qui ont une aire nulle : les triangles aplatis *i.e.* ceux pour lesquels on a l'une des égalités $x = y + z$, $y = z + x$ ou $z = x + y$.
- Le point rouge ω de coordonnées $(\frac{2}{3}\lambda, \frac{2}{3}\lambda)$ correspond au triangle équilatéral $\langle xxx \rangle$ d'aire maximale. Un triangle équilatéral ne peut donc jamais se déformer en un autre triangle (quel qu'il soit) ayant même aire et même périmètre.
- Les courbes noires et bleues (on a alterné les couleurs pour qu'on les voie mieux) forment un feuilletage de $\Theta_\lambda \setminus \{\omega\}$, chaque feuille correspond à l'ensemble des triangles ayant même aire. Elle a pour équation $\lambda(2\lambda - x)(2\lambda - y)(x + y) = 8c$ où c est une constante variant dans $]0, \frac{8\lambda^4}{27}[$.
- Le morceau de diagonale en vert correspond à l'ensemble des triangles isocèles (pour lesquels $x = y$). Dans chacune des feuilles il y a exactement les projetés de deux triangles isocèles $\langle xxz \rangle$ et $\langle x'x'z' \rangle$.

Geoffrey Letellier a trouvé deux droites de triangles isocèles $\langle x_\lambda y_\lambda z_\lambda \rangle$ et $\langle x'_\lambda y'_\lambda z'_\lambda \rangle$ paramétrées par $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ avec $x_\lambda = y_\lambda = \frac{11}{14}\lambda$, $z_\lambda = \frac{3}{7}\lambda$ et $x'_\lambda = y'_\lambda = \frac{4}{7}\lambda$, $z'_\lambda = \frac{6}{7}\lambda$. Elles sont telles que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle x_\lambda x_\lambda z_\lambda \rangle \text{ et } \langle x'_\lambda x'_\lambda z'_\lambda \rangle \text{ ont même périmètre } 2\lambda. \\ \langle x_\lambda x_\lambda z_\lambda \rangle \text{ et } \langle x'_\lambda x'_\lambda z'_\lambda \rangle \text{ ont même aire } \frac{3\lambda^2}{7\sqrt{7}}. \\ \langle x_\lambda x_\lambda z_\lambda \rangle \text{ et } \langle x'_\lambda x'_\lambda z'_\lambda \rangle \text{ ne sont pas isométriques.} \end{array} \right.$$

Par exemple les deux triangles isocèles $x = y = 11$, $z = 6$ et $x' = y' = 8$, $z' = 12$ ont même périmètre égal à 28 et même aire égale à $12\sqrt{7}$.

- Enfin, on voit sur le dessin que toute la situation n'est invariante que par la réflexion σ (symétrie par rapport à la diagonale $x = y$) alors que sur le triangle P_λ elle est invariante par tout le groupe G . ◇

LAMATH, FR du CNRS 2956
ISTV2, Le Mont Houy
Université de Valenciennes
59313 Valenciennes Cedex 9 – France
Cité des Géométries – Gare numérique de Jeumont
aziz.elkacimi@univ-valenciennes.fr