UNIVERSITÉ DE VALENCIENNES
ET DU HAINAUT-CAMBRÉSIS
LABORATOIRE DE MATHÉMATIQUES

Courants invariants et formes automorphes d'un groupe kleinéen élémentaire

Thèse soutenue le 20 juin 2001

par

Frédéric DELACROIX

pour obtenir le grade de

Docteur en Mathématiques

Composition du Jury

Président	R. BARRE	*Université de Valenciennes*
Rapporteurs	P.-Y. GAILLARD	*Université de Nancy*
	J. LOTT	*University of Michigan, Ann Arbor*
	R. PARTHASARATHY	*Tata Institute, Bombay*
Examinateur	G. MEIGNIEZ	*Université de Bretagne Sud*
Directeur de thèse	A. EL KACIMI ALAOUI	*Université de Valenciennes*

Numéro d'ordre : 01-15

A ma femme Christelle
A mes parents
A mes amis

Remerciements

La rédaction de ce mémoire de thèse est la conclusion de plusieurs années d'études et de recherches, au cours desquelles plusieurs personnes m'ont accordé leur soutien. Je souhaite leur témoigner ici ma profonde gratitude.

Mes premières pensées vont à Aziz El Kacimi dont les précieux conseils ne m'ont jamais fait défaut et qui m'a beaucoup aidé dans la résolution de ce problème.

Pierre-Yves Gaillard m'a apporté un soutien précieux et amical. Je lui suis reconnaissant pour nos entretiens fructueux et les conseils avisés qu'il m'a prodigués. Il a accepté d'être rapporteur de cette thèse ; je l'en remercie vivement.

Rajagopalan Parthasarathy et John Lott ont également accepté d'être rapporteurs de cette thèse, je leur adresse mes sincères remerciements.

Raymond Barre, Gaël Meigniez ont gentiment accepté de participer au Jury, respectivement en tant que président et examinateur ; je les en remercie.

J'envoie aussi une pensée amicale à tous les membres du LAMATH.

Table des matières

Introduction

Un groupe Γ dénombrable discret étant donné, sa cohomologie à coefficients réels (ou complexes) peut être calculée en considérant une action de Γ sur une variété M contractile. Si cette action est libre et propre, cette cohomologie est isomorphe à la cohomologie du complexe $\Omega^\bullet_\Gamma(M)$ des formes différentielles Γ-invariantes sur M. Si M/Γ est une variété, ce complexe est canoniquement isomorphe au complexe de de Rham de M/Γ ; sa cohomologie est donc la cohomologie de de Rham de M/Γ. Lorsque ce n'est pas le cas, la cohomologie de $\Omega^\bullet_\Gamma(M)$ est tout de même isomorphe à la cohomologie singulière de M/Γ.

Dès lors, l'une des questions naturelles qui se posent dans cette situation est de savoir s'il existe un sous-complexe «intéressant» $A^\bullet$ de $\Omega^\bullet_\Gamma(M)$ induisant la même cohomologie, c'est-à-dire pour lequel l'inclusion $A^\bullet \hookrightarrow \Omega^\bullet_\Gamma(M)$ est un quasi-isomorphisme. On peut, par exemple, considérer que le théorème de de Rham concernant l'inclusion des formes différentielles dans le complexe des courants sur une variété différentiable s'inscrit dans cette optique.

Dans ce travail, on considère le cas où M est l'espace hyperbolique réel $\mathbb{H}^n$ de dimension n et Γ est un groupe kleinéen, c'est-à-dire un sous-groupe discret du groupe des isométries hyperboliques. Une forme différentielle Γ-invariante $\alpha \in \Omega^p_\Gamma(\mathbb{H}^n)$ est dite automorphe si :

- α et $d\alpha$ sont à croissance modérée :

$$\forall x_0 \in \mathbb{H}^n, \exists a, b > 0, \forall x \in \mathbb{H}^n, \max\{\|\alpha(x)\|, \|d\alpha(x)\|\} \leqslant a.e^{b\delta(x,x_0)},$$

  où δ désigne la distance sur $\mathbb{H}^n$ et $\|.\|$ la norme des formes p-linéaires sur $T_x\mathbb{H}^n$,
- α annule un polynôme non nul en le Laplacien :

$$\exists P \in \mathbb{C}[X] \setminus \{0\}, P(\Delta)(\alpha) = 0.$$

Ces formes automorphes forment un sous-complexe, noté $A^\bullet(\mathbb{H}^n/\Gamma)$, de $\Omega^\bullet_\Gamma(\mathbb{H}^n)$; et la question de savoir si l'inclusion est un quasi-isomorphisme est connue sous le nom de conjecture de Borel (*cf.* [B]).

D'autre part, les formes différentielles harmoniques cofermées et les formes automorphes harmoniques cofermées constituent également des sous-complexes de $\Omega^\bullet(\mathbb{H}^n)$, notés respectivement $\Omega^\bullet_{hc}(\mathbb{H}^n/\Gamma)$ et $A^\bullet_{hc}(\mathbb{H}^n/\Gamma)$. On a alors le diagramme d'inclusions

$$\begin{tikzcd}
A^\bullet_{hc}(\mathbb{H}^n/\Gamma) \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "i_2"'] & \Omega^\bullet_{hc}(\mathbb{H}^n/\Gamma) \arrow[d, "i_4"] \\
A^\bullet(\mathbb{H}^n/\Gamma) \arrow[r, "i_3"'] & \Omega^\bullet_\Gamma(\mathbb{H}^n)
\end{tikzcd}$$

La variante suivante de la conjecture de Borel est parfois nommée conjecture de Borel-Harder.

Conjecture 0.1. *Les inclusions i_1, i_2 et i_3 de ce diagramme sont des quasi-isomorphismes.*

Le fait que i_4 soit un quasi-isomorphisme résulte d'un théorème de Hodge pour les variétés non compactes (*cf.* [Ga2]). La Conjecture 0.1 résulte alors de la théorie de Hodge classique si le groupe Γ est cocompact (*i.e.* si $\mathbb{H}^n/\Gamma$ est compact). Elle a également été prouvée par J. Franke en 1998 (*cf.* [Fra] et [Wal]) dans le cas d'un groupe de covolume fini. Dans ce travail, nous étudions le cas de groupes élémentaires (parfois également nommés virtuellement abéliens), premiers exemples de groupes kleinéens de covolume infini.

Pour cette étude, on utilise l'outil introduit par Pierre-Yves Gaillard en 1986 dans [Ga1] : la transformation de Poisson, généralisation aux formes différentielles, courants et hyperformes de la transformation de Poisson connue sur les fonctions. Les formes automorphes Γ-invariantes harmoniques cofermées sur $\mathbb{H}^n$ sont alors les images des courants Γ-invariants sur la sphère à l'infini $\partial\mathbb{H}^n \simeq \mathbb{S}^{n-1}$. Le second outil est une description de la structure de ces courants invariants. Plus précisément, grâce à un résultat exposé dans [EMM], on décompose l'espace de ces courants en une partie constituée des courants invariants sur le domaine de discontinuité du groupe Γ, partie la plus régulière de l'action de Γ sur la sphère, et une partie formée des courants invariants portés par l'ensemble limite de Γ.

Dans le premier chapitre, on rappelle quelques notions élémentaires de géométrie différentielle et riemannienne et on donne les définitions et notations des objets qui seront considérés par la suite. Dans le second chapitre, on définit les formes différentielles et les courants sur une variété et on présente les résultats classiques pour la cohomologie de ces complexes dans le cas d'une variété quotient. Dans le chapitre 3, on rappelle les définitions et résultats classiques concernant les groupes kleinéens, notamment élémentaires. On y présente également le résultat central utilisé dans l'étude des courants invariants, publié dans [EMM]. On détaille aussi la construction d'une moyenne d'un complexe différentiel d'éléments Γ_0-invariants relativement à une extension finie Γ de Γ_0.

Enfin, le chapitre 4 constitue notre contribution proprement dite et fait l'objet d'un article à paraître dans le *Hokkaido Mathematical Journal* (*cf.* [D]). On y présente les résultats obtenus sur la cohomologie des courants invariants sur la sphère $\partial\mathbb{H}^n$ dans le cas d'un groupe engendré par une loxodromie de $\mathbb{H}^n$ (cas hyperbolique), puis dans celui d'un groupe engendré par une translation de $\mathbb{H}^2$ (cas parabolique). On se ramène ensuite à ces cas, par un argument de moyenne, lors de l'étude de groupes élémentaires non monogènes. Cette technique permet d'aboutir à un calcul explicite de cette cohomologie. Enfin, après un bref rappel des propriétés de la transformation de Poisson, on utilise ces calculs pour la détermination de la cohomologie des formes automorphes harmoniques cofermées sur $\mathbb{H}^n$, ce qui permet de répondre positivement à la Conjecture 0.1 dans les cas envisagés.

CHAPITRE 1
Rappels de géométrie riemannienne, l'espace hyperbolique

1.— Rappels de géométrie riemannienne

Sauf mention expresse du contraire ou précision, tous les objets considérés ont une régularité C^∞. Soit M une variété de dimension n.

1.1. Variété riemannienne, groupe des isométries, groupe conforme

Définition 1.1. *Un* **fibré vectoriel localement trivial** *au-dessus de M est la donnée d'une variété E appelée* **espace total**, *d'un espace vectoriel topologique F appelé* **fibre type** *et d'une submersion $\pi : E \longrightarrow M$ de classe C^∞ telle que*
(1) pour tout $x \in M$, il existe un couple (U, φ) où U est un voisinage ouvert de x et φ un difféomorphisme de $U \times F$ sur $\pi^{-1}(U)$;
(2) si (V, ψ) vérifie la même condition avec $U \cap V \neq \varnothing$, alors, pour tout $x \in U \cap V$, il existe un automorphisme $f_{UV}(x) \in \mathrm{GL}(F)$ tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\{x\} \times F \arrow[d, "\mathrm{id} \times f_{UV}(x)"'] \arrow[dr, "\varphi"] & \\
\{x\} \times F \arrow[r, "\psi"] & \pi^{-1}(x)
\end{tikzcd}$$

La variété M est appelée **base** *et l'espace $\pi^{-1}(x)$* **fibre au-dessus de** *x. On désignera simplement par E un tel fibré. Un ouvert U vérifiant la condition (1) est dit* **trivialisant** *ou* **distingué**.

Une **section** *d'un fibré $E \longrightarrow M$ est une application $s : M \longrightarrow E$ de classe C^∞ telle que $\pi \circ s = \mathrm{id}_M$.*

Les automorphismes $f_{UV}(x)$ vérifient en outre une condition de cocycle : pour tout $x \in M$ et des ouverts distingués U, V et W contenant x, on a $f_{VW}(x) \circ f_{UV}(x) = f_{UW}(x)$.

Le **fibré tangent** d'une variété différentiable M, noté TM, a pour base M et la fibre au-dessus de x est l'espace tangent T_xM de M en x. Les sections de TM sont les **champs de vecteurs sur** M, dont l'ensemble est noté $\chi(M)$. C'est un module sur l'anneau $C^\infty(M)$ des fonctions sur M de classe C^∞ à valeurs réelles.

Définition 1.2. *Une* **structure riemannienne** *sur M est la donnée d'une* **métrique**, *c'est-à-dire d'une famille différentiable (par rapport à x) de produits scalaires g_x sur les espaces tangents T_xM.*

La variété M peut toujours être munie d'une structure riemannienne, par exemple celle induite par un plongement de M dans un espace euclidien, ou par recollement de celle de $\mathbb{R}^n$ grâce aux cartes et à des fonctions localisantes.

Si M est connexe par arcs, la distance est définie de la façon suivante. Considérons $x, y \in M$ et une courbe $c : [0,1] \to M$ de classe C^∞ joignant x à y : $c(0) = x$ et $c(1) = y$. On pose

$$d_c(x,y) = \int_0^1 \left\| \frac{dc}{dt} \right\| dt.$$

Un simple changement de variable dans cette intégrale prouve que ce nombre ne dépend pas du paramétrage de la courbe c. On pose alors

$$d(x,y) = \inf \{ d_c(x,y), c \text{ vérifiant les hypothèses ci-dessus} \}.$$

On vérifie facilement que l'on a défini ainsi une distance sur M.

Définition 1.3. *Soit* (M,g) *une variété riemannienne. Le* **groupe des isométries de** M*, noté* $\mathrm{Iso}(M,g)$ *(ou* $\mathrm{Iso}(M)$ *lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté), est l'ensemble des difféomorphismes de* M *préservant sa métrique :*

$$\mathrm{Iso}(M,g) = \left\{ f \in \mathrm{Diff}(M), \forall x \in M, \forall u,v \in T_xM, \langle df_x(u), df_x(v) \rangle_{f(x)} = \langle u,v \rangle_x \right\}.$$

Si M *est orientée, on notera* $\mathrm{Iso}^+(M,g)$ *le sous-groupe de* $\mathrm{Iso}(M,g)$ *constitué des isométries de* M *préservant l'orientation. Le* **groupe conforme de** M*, noté* $\mathrm{Conf}(M)$*, est l'ensemble des difféomorphismes de* M *préservant les angles de vecteurs :*

$$\mathrm{Conf}(M) = \left\{ f \in \mathrm{Diff}(M), \exists c(f) \in C^\infty(M), \forall x \in M, \forall u,v \in T_xM, \langle df_x(u), df_x(v) \rangle = e^{c(f)(x)} \langle u,v \rangle_x \right\}.$$

La fonction $e^{c(f)}$ *associée à une transformation conforme* f *est appelée* **facteur de conformité** *de* f*. Si* M *est orientée, on notera* $\mathrm{Conf}^+(M)$ *le sous-groupe de* $\mathrm{Conf}(M)$ *constitué des transformations conformes de* M *préservant son orientation.*

Bien sûr, $\mathrm{Iso}(M,g)$ est un sous-groupe de $\mathrm{Conf}(M)$.

1.2. Action d'un groupe sur une variété riemannienne

Définition 1.4. *Soient* M *une variété riemannienne et* G *un groupe topologique (souvent discret). Une* **action de** G **sur** M *est la donnée d'une application continue*

$$\begin{aligned} \Phi : G \times M &\longrightarrow M \\ (g,x) &\longmapsto gx \end{aligned}$$

telle que :

$$(1) \quad \forall g, g' \in M, \forall x \in M, (gg')x = g(g'x) \qquad\qquad (2) \quad \forall x \in M, 1x = x.$$

Si, pour tout $g \in G$, $x \longmapsto gx$ *est un difféomorphisme de* M *(resp. une isométrie de* M*, une transformation conforme de* M*), on dira que* G *agit par difféomorphismes (resp. par isométries, par transformations conformes) sur* M*.*

La relation d'équivalence associée est ouverte ; on peut donc munir l'ensemble quotient, noté M/G (ou $G\backslash M$) de la topologie quotient. Rappelons que

1) la classe d'équivalence d'un élément $x \in M$ est son **orbite**, notée $\mathcal{O}_x$ (ou parfois Gx) ;
2) $x \in M$ est un **point fixe** si $\mathcal{O}_x = \{x\}$;
3) pour tout $x \in M$, l'ensemble $G_x = \{g \in G, gx = x\}$ est un sous-groupe de G appelé **groupe d'isotropie de** x ou **stabilisateur de** x, encore noté $\mathrm{Stab}_G(x)$;
4) une partie M_0 de M est dite **invariante** si $\forall x \in M_0, Gx \subset M_0$.

L'action de G sur M est dite

1) **libre** si tous les groupes d'isotropie sont réduits à l'élément neutre ;
2) **transitive** si M ne contient qu'une seule G-orbite ;
3) **totalement discontinue** si tout $x \in M$ admet un voisinage ouvert U tel que $\forall g \in G, U \cap gU = \varnothing$;
4) **séparante** si tous $x, y \in M$ ayant des orbites distinctes admettent des voisinages ouverts respectifs U et V tels que $\forall g, h \in G, gU \cap hV = \varnothing$;
5) **propre** si, pour tout compact K de M, l'ensemble $\{g \in G, K \cap gK \neq \varnothing\}$ est relativement compact dans G.

Lorsque l'action de G est séparante, l'espace topologique M/G est séparé. Lorsque G est un groupe dénombrable discret agissant librement et proprement sur M, alors l'action est séparante et proprement discontinue. Cela permet de munir M/G d'une structure de variété.

Proposition 1.5. *Soient M une variété de dimension n et G un groupe dénombrable discret agissant librement et proprement sur M. Alors le quotient $X = M/G$ est une variété de dimension n et la projection canonique $\pi : M \longrightarrow X$ est un revêtement.*

1.3. Courbure d'une variété riemannienne

Soit M une variété riemannienne de dimension n dont le produit scalaire est noté $\langle , \rangle$.

Définition 1.6.

1) *Une* **connexion affine** *sur M est une application*
$$\begin{aligned} \nabla : \chi(M) \times \chi(M) &\longrightarrow \chi(M) \\ (X, Y) &\longmapsto \nabla_X Y \end{aligned}$$
$C^\infty(M)$-linéaire par rapport à X, additive par rapport à Y et telle que, pour tout $f \in C^\infty(M)$:
$$\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y.$$
2) *Une telle connexion est dite* **symétrique** *si, pour tous $X, Y \in \chi(M)$:*
$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y].$$
3) *Elle est dite* **compatible avec la structure riemannienne de** M *si, pour tous champs de vecteurs $X, Y, Z \in \chi(M)$:*
$$X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle .$$

Théorème 1.7 [Levi-Civita]. *Il existe une unique connexion affine ∇ sur M qui soit symétrique et compatible avec la structure riemannienne de M.*

Cette connexion ∇ est appelée **connexion de Levi-Civita de** M. Elle permet de définir le **tenseur de courbure de** M comme étant l'application $C^\infty(M)$-bilinéaire R qui à deux champs de vecteurs $X, Y \in C^\infty(M)$ associe l'application linéaire :
$$\begin{aligned} R(X, Y) : \chi(M) &\longrightarrow \chi(M) \\ Z &\longmapsto R(X, Y)Z = \nabla_{[X,Y]}Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_Y \nabla_X Z. \end{aligned}$$

Soient $x \in M$ et σ un sous-espace vectoriel de dimension 2 de $T_x M$. Le nombre
$$\kappa(\sigma) = \frac{\langle R(X, Y)X, Y\rangle}{\|X\|^2\|Y\|^2 - \langle X, Y\rangle^2}$$
ne dépend pas du choix de la base (X, Y) de σ.

Définition 1.8. *Le nombre $\kappa(\sigma)$ est appelée* **courbure sectionnelle de** M **en** x **relativement à** σ.

Cette notion coïncide avec la notion usuelle de courbure gaussienne dans le cas d'une surface de $\mathbb{R}^3$ comme produit des courbures principales.

1.4. Géodésiques d'une variété riemannienne

La connexion de Levi-Civita de M permet également de définir la notion de dérivée covariante d'un champ de vecteurs le long d'une courbe. Soient M une variété riemannienne de dimension n, I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $c : I \to M$ une courbe différentiable.

Si X est un champ de vecteurs le long de c qui est la restriction d'un champ de vecteurs $\widetilde{X}$ sur M, le champ de vecteurs

$$\frac{DX}{dt} = \nabla_{\frac{dc}{dt}} \widetilde{X}$$

ne dépend pas du champ $\widetilde{X}$ prolongeant X. On l'appelle **dérivée covariante de** X **le long de** c. Cette opération vérifie les propriétés usuelles de la dérivée :

$$\frac{D}{dt}(X+Y) = \frac{DX}{dt} + \frac{DY}{dt} \qquad\qquad \frac{D}{dt}(fX) = f\frac{DX}{dt} + \frac{df}{dt}X.$$

Définition 1.9. *On dit que c est une* **géodésique de** M *si*

$$\frac{D}{dt}\left(\frac{dc}{dt}\right) = 0.$$

On vérifie alors facilement que la norme $\|\frac{dc}{dt}\|$ est constante. Si elle est égale à 1, on dit que la géodésique est **normalisée**. Dans ce cas, le paramètre t est la longueur de l'arc.

Les géodésiques d'une variété riemannienne sont les courbes qui minimisent localement la distance. Plus précisément, si x et y sont deux points d'un ouvert de carte U d'une variété riemannienne, il existe une géodésique c joignant x à y dans U telle que $d(x,y) = d_c(x,y)$.

Définition 1.10. *Une variété riemannienne est dite* **complète** *si toutes les géodésiques sont complètes, c'est-à-dire que leur paramètre décrit $\mathbb{R}$ tout entier.*

Théorème 1.11 [Théorème de classification]. *Soit M une variété riemannienne connexe et simplement connexe de dimension n complète de courbure sectionnelle κ constante. Alors*

1) si $\kappa = 1$, M est isométrique à la sphère $\mathbb{S}^n$ munie de la métrique induite par $\mathbb{R}^{n+1}$,

2) si $\kappa = 0$, M est isométrique à l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$,

3) si $\kappa = -1$, M est isométrique à l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^n$, détaillé ci-après.

2.— L'espace hyperbolique réel

2.1. Le modèle du demi-espace

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On appelle **espace hyperbolique réel de dimension** n, et on note $\mathbb{H}^n$, le demi-espace $\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, x_n > 0\}$ muni de la métrique riemannienne

$$g = \frac{1}{x_n^2} \sum_{i=1}^{n} dx_i^2.$$

Son **bord** est la variété $\partial\mathbb{H}^n = (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}) \cup \{\infty\}$ de dimension $n-1$. Sa topologie est celle induite par $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ et une base de voisinages de ∞ est constituée des complémentaires des parties bornées de $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$. Un atlas maximal de $\partial\mathbb{H}^n$ est constitué des deux cartes :

$$\begin{aligned} \phi_1 : \mathbb{R}^{n-1} &\longrightarrow \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\} = \partial\mathbb{H}^n \smallsetminus \{\infty\} \\ x &\longmapsto (x, 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_2 : \mathbb{R}^{n-1} &\longrightarrow \big((\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}) \smallsetminus \{0\}\big) \cup \{\infty\} \subset \partial\mathbb{H}^n \\ x &\longmapsto \begin{cases} \frac{x}{\|x\|^2} & \text{si } x \neq 0 \\ \infty & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$\|x\|$ désignant la norme euclidienne de x en tant que vecteur de $\mathbb{R}^{n-1}$.

Théorème 1.12. *La variété $\mathbb{H}^n$ est de courbure sectionnelle constante égale à -1. Ses géodésiques sont les droites verticales obtenues en fixant les $n-1$ premières variables et les demi-cercles euclidiens centrés sur $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$.*

2.2. Le modèle de la boule

Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, on note $\mathbb{B}^n$ la boule unité ouverte de $\mathbb{R}^n$ munie de la métrique riemannienne

$$g = \frac{1}{(1 - \|x\|^2)^2} \sum_{i=1}^{n} dx_i^2$$

où $\|.\|$ désigne la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$.

Proposition 1.13. *Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. L'inversion*

$$\begin{aligned} \sigma : \mathbb{R}^n \cup \{\infty\} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \cup \{\infty\} \\ x &\longmapsto \begin{cases} 2\dfrac{x + e_n}{\|x + e_n\|^2} - e_n & \text{si } x \in \mathbb{R}^n \setminus \{-e_n\} \\ -e_n & \text{si } x = \infty \\ \infty & \text{si } x = -e_n \end{cases} \end{aligned}$$

induit une isométrie de $\mathbb{H}^n$ sur $\mathbb{B}^n$ et un difféomorphisme de $\partial\mathbb{H}^n$ sur la sphère unité $\mathbb{S}^{n-1}$ de $\mathbb{R}^n$.

On aura coutûme d'identifier, lorsqu'aucune ambiguïté n'est à craindre, les variétés $\mathbb{H}^n$ et $\mathbb{B}^n$ d'une part, $\partial\mathbb{H}^n$, $\mathbb{S}^{n-1}$ et $\mathbb{R}^{n-1} \cup \{\infty\}$ d'autre part.

Lorsque $n = 2$, cette inversion s'écrit encore, en identifiant $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$:

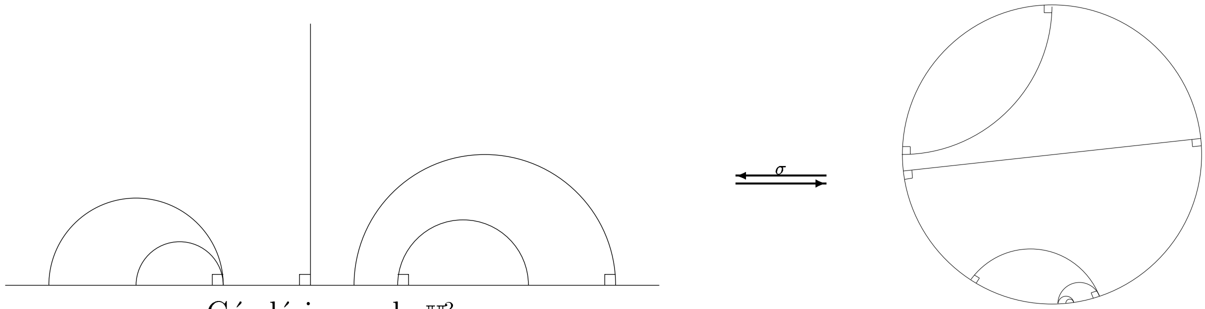
$$\sigma(z) = -i\frac{\overline{z} + i}{\overline{z} - i}.$$

Cependant, dans ce cas, on utilisera plus volontiers l'inversion, encore notée σ, définie par

$$\sigma(z) = \frac{z - i}{z + i}$$

qui n'est autre que l'inversion originale composée avec la reflexion $z \mapsto \overline{z}$ et la rotation $z \mapsto iz$, cette nouvelle application ayant la propriété d'être un biholomorphisme de $\mathbb{H}^2$ sur $\mathbb{B}^2$.

Une conséquence immédiate de la proposition est que la variété riemannienne $\mathbb{B}^n$ est à courbure -1 ; ses géodésiques sont les images par σ de celles de $\mathbb{H}^n$. On vérifie facilement que ce sont les arcs de cercles orthogonaux à la sphère $\mathbb{S}^{n-1}$.



Géodésiques de $\mathbb{H}^2$

Géodesiques de $\mathbb{B}^2$

CHAPITRE 2
Formes différentielles et courants sur une variété lisse

1.— Un peu d'algèbre multilinéaire

Soient E un espace vectoriel de dimension n et soit $p \in \mathbb{N}$. Une **forme p-linéaire sur E** est une application $\varphi : E^p \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que les applications partielles

$$\varphi(x_1, \dots, x_{i-1}, -, x_{i+1}, \dots, x_p) : E \longrightarrow E$$

soient linéaires pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$ et tout $(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_p) \in E^{p-1}$. Une telle forme est dite **antisymétrique** (ou **alternée**, ou **extérieure**) si, pour tout p-uplet $(x_1, \dots, x_p)$ de vecteurs de E et toute permutation $\sigma \in S_n$, on a :

$$\varphi(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p)}) = \varepsilon(\sigma)\varphi(x_1, \dots, x_p),$$

$\varepsilon(\sigma)$ désignant la signature de la permutation σ. L'espace vectoriel des formes p-linéaires alernées sur E se note $\Lambda^p(E^*)$.

On définit le **produit extérieur** de deux formes alternées $\alpha \in \Lambda^p(E^*)$ et $\beta \in \Lambda^q(E^*)$ par :

$$\alpha \wedge \beta(x_1, \dots, x_{p+q}) = \frac{1}{p!q!} \sum_{\sigma \in S_{p+q}} \varepsilon(\sigma)\alpha(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p)})\beta(x_{\sigma(p+1)}, \dots, x_{\sigma(p+q)}).$$

On obtient ainsi une $(p+q)$-forme extérieure sur E. On vérifie facilement que, en l'étendant par linéarité aux formes non homogènes, ce produit munit l'espace vectoriel somme

$$\Lambda^\bullet E = \bigoplus_{p=0}^{n} \Lambda^p(E^*)$$

d'une structure d'algèbre associative graduée. C'est **l'algèbre extérieure de E**. Elle s'identifie à l'algèbre extérieure abstraite du dual E^* de E comme quotient de son algèbre tensorielle. On a la relation d'anticommutativité

$$\forall(\alpha, \beta) \in \Lambda^p(E^*) \times \Lambda^q(E^*), \alpha \wedge \beta = (-1)^{pq}\beta \wedge \alpha.$$

On peut remarquer que $\Lambda^p(E^*)$ n'est non nul que pour $p \in \{0, \dots, n\}$ et que sa dimension est $C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$. Plus précisément, si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E dont la base duale est notée $(e_1^*, \dots, e_n^*)$, la famille $(e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_p}^*)_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \dots < i_p \leqslant n}$, constitue une base de $\Lambda^p(E^*)$.

Lorsque E est un espace euclidien, cette remarque permet de munir $\Lambda^\bullet E$ d'un produit scalaire, en décrétant que la base ainsi construite à partir d'une base orthonormée de E est elle-même orthonormée :

$$\left\langle e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_p}^* | e_{j_1}^* \wedge \dots \wedge e_{j_q}^* \right\rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } (i_1, \dots, i_p) = (j_1, \dots, j_q) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Toujours sous l'hypothèse que E est muni d'un produit scalaire, et en choisissant une base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$, on définit l'**opérateur $*$ de Hodge** sur $\Lambda^p(E^*)$, par :

$$\begin{array}{rccc} * : & \Lambda^p(E^*) & \longrightarrow & \Lambda^{n-p}(E^*) \\ & e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p} & \longmapsto & \varepsilon(\sigma)e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_{n-p}} \end{array}$$

où $(j_1, \dots, j_{n-p})$ est la suite croissante complémentaire de $(i_1, \dots, i_p)$ dans $\{1, \dots, n\}$ et σ la permutation $(i_1, \dots, i_p, j_1, \dots j_{n-p})$. On vérifie aisément que la définition de cet opérateur ne dépend pas de la base orthonormée choisie. Cet opérateur vérifie en outre $*^{-1} = (-1)^{p(n-p)}*$.

2.— Complexes différentiels, cohomologie

Définition 2.1. *Un* **complexe différentiel** *(ou, plus simplement,* **complexe***) est un espace gradué*

$$A^\bullet = \bigoplus_{p\in\mathbb{N}} A^p$$

muni d'une application linéaire d, nommée **différentielle**, *telle que $d(A^p) \subset A^{p+1}$ pour tout $p \in \mathbb{N}$ et $d \circ d = 0$. Un complexe est souvent représenté par la suite*

$$A^0 \xrightarrow{d} A^1 \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} A^p \xrightarrow{d} A^{p+1} \xrightarrow{d} \cdots$$

Dans un tel complexe, tout élément dont la différentielle est nulle est dit **fermé** *(on dit également que c'est un* **cocycle***). Un élément qui est la différentielle d'un autre est dit* **exact** *(ou que c'est un* **cobord***).*

La condition $d \circ d = 0$ implique clairement $\operatorname{Im} d \subset \ker d$ (on dit parfois que la suite est **semi-exacte**). Le défaut d'exactitude en A^p est mesuré par **le $p^{\text{ème}}$ espace de cohomologie du complexe $A^\bullet$** :

$$H^p(A^\bullet) = (\ker d \cap A^p)/(d(A^{p-1})).$$

La classe de cohomologie d'un élément fermé $x \in A^p$, c'est-à-dire son image par la projection canonique $\ker d \cap A^p \longrightarrow H^p(A^\bullet)$, sera généralement notée $[x]$.

Définition 2.2. *Soient $(A^\bullet, d)$ et $(B^\bullet, \delta)$ deux complexes. Un* **morphisme de complexes** *$A^\bullet \to B^\bullet$ est un morphisme d'espaces gradués, c'est-à-dire une famille $(f^p : A^p \to B^p)_{p\in\mathbb{N}}$ d'applications linéaires, commutant aux différentielles. On a donc un diagramme commutatif*

$$\begin{tikzcd}
A^0 \arrow[r, "d"] \arrow[d, "f_0"'] & A^1 \arrow[r, "d"] \arrow[d, "f_1"'] & \cdots \arrow[r, "d"] & A^p \arrow[r, "d"] \arrow[d, "f_p"'] & A^{p+1} \arrow[r, "d"] \arrow[d, "f_{p+1}"'] & \cdots \\
B^0 \arrow[r, "\delta"] & B^1 \arrow[r, "\delta"] & \cdots \arrow[r, "\delta"] & B^p \arrow[r, "\delta"] & B^{p+1} \arrow[r, "\delta"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Un morphisme de complexes $f^\bullet : A^\bullet \longrightarrow B^\bullet$ induit, pour tout $p \in \mathbb{N}$, une application linéaire $f^p_* : H^p(A^\bullet) \longrightarrow H^p(B^\bullet)$, qui s'écrit simplement

$$f^p_*([x]) = [f^p(x)].$$

Dans l'énoncé suivant, on convient que les espaces de degré négatif sont réduits à $\{0\}$.

Proposition 2.3 [Lemme du serpent]. *Soient $A^\bullet$, $B^\bullet$, $C^\bullet$ trois complexes, $f^\bullet : A^\bullet \longrightarrow B^\bullet$ et $g : B^\bullet \longrightarrow C^\bullet$ deux morphismes de complexes tels que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, la suite*

$$0 \longrightarrow A^p \xrightarrow{f^p} B^p \xrightarrow{g^p} C^p \longrightarrow 0$$

soit exacte. Alors il existe une famille d'applications linéaires $(c^p : H^p(C^\bullet) \to H^{p+1}(A^\bullet))_{p\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout p, la suite

$$H^{p-1}(C^\bullet) \xrightarrow{c^{p-1}} H^p(A^\bullet) \xrightarrow{f^p_*} H^p(B^\bullet) \xrightarrow{g^p_*} H^p(C^\bullet) \xrightarrow{c^p} H^{p+1}(A^\bullet)$$

soit exacte. Les applications linéaires c^p sont appelées **homomorphismes de connexion**.

Preuve. Détaillons ici la construction du morphisme de connexion c^{p-1}. On a le diagramme suivant, dans lequel les lignes sont des suites exactes :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A^{p-1} \arrow[r, "f^{p-1}"] \arrow[d, "d"] & B^{p-1} \arrow[r, "g^{p-1}"] \arrow[d, "d"] & C^{p-1} \arrow[r] \arrow[d, "d"] \arrow[dll, dashed, bend left] & 0 \\
0 \arrow[r] & A^p \arrow[r, "f^p"] & B^p \arrow[r, "g^p"] & C^p \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Soient $c \in H^{p-1}(C^\bullet)$ et $x \in C^{p-1}$ un représentant de c. Comme g^{p-1} est surjective, il existe $x' \in B^{p-1}$ tel que $x = g^{p-1}(x')$. Par commutativité du diagramme et puisque x est fermé, on a :

$$0 = dx = dg^{p-1}(x') = g^p(dx')$$

c'est-à-dire que $dx' \in \ker g^p = \operatorname{Im} f^p$ par exactitude de la suite. Par conséquent, il existe $y \in A^p$ tel que $dx' = f^p(y)$. On a de plus

$$f^{p+1}(dy) = df^p(y) = d(dx') = 0$$

donc y est fermé par injectivité de f^{p+1}. Pour poser $c^{p-1}(c) = [y]$, il faut encore vérifier que cette définition ne dépend pas du choix de x, x' et y.

Soit $x_1 \in c$. Alors x et x_1 diffèrent par un cobord $d\alpha$, avec $\alpha \in C^{p-2}$: $x_1 = x + d\alpha$. Soit $x'_1 \in B^{p-1}$ tel que $x'_1 = g^{p-1}(x_1)$. Comme précédemment, $dx'_1 \in \ker g^p = \operatorname{Im} f^p$ donc il existe $y_1 \in A^p$ tel que $f^p(y_1) = dx'_1$. Il reste à prouver que y_1 et y sont dans la même classe de cohomologie. On a $x_1 - x = g^{p-1}(x'_1 - x')$, donc, par exactitude de la suite, $x'_1 - x' \in \ker g^{p-1} = \operatorname{Im} f^{p-1}$, d'où l'existence de $y' \in A^{p-1}$ tel que $x'_1 = x' + f^{p-1}(y')$. On a donc :

$$f^p(y_1) = dx'_1 = dx' + df^{p-1}(y') = f^p(y) + f^p(dy') = f^p(y + dy')$$

d'où, par injectivité de f^p : $y_1 = y + dy'$. Ceci entraîne que $[y] = [y_1]$.

Vérifions maintenant l'exactitude de la suite

$$H^{p-1}(C^\bullet) \xrightarrow{c^{p-1}} H^p(A^\bullet) \xrightarrow{f^p_*} H^p(B^\bullet) \xrightarrow{g^p_*} H^p(C^\bullet) \xrightarrow{c^p} H^{p+1}(A^\bullet).$$

• Soit $[y] \in \operatorname{Im} c^{p-1}$: il existe $[x] \in H^{p-1}(C^\bullet)$ tel que $[y] = c^{p-1}([x])$. Avec les mêmes notations que précédemment, on a :

$$f^p_*([y]) = [f^p(y)] = [dx'] = 0$$

d'où $[y] \in \ker f^p_*$.

Soit maintenant $[y] \in \ker f^p_*$. Alors $[f^p(y)] = 0$, c'est-à-dire qu'il existe $x' \in B^{p-1}$ tel que $f^p(y) = dx'$. Posons $x = g^{p-1}(x')$. Alors on a, d'après la construction de c^{p-1}, $c^{p-1}([x]) = [y]$, d'où $[y] \in \operatorname{Im} c^{p-1}$. On a donc prouvé que $\operatorname{Im} c^{p-1} = \ker f^p_*$, exactitude de la suite en $H^p(A^\bullet)$.

• Soit $[y] \in \operatorname{Im} f^p_*$. Il existe donc $[x] \in H^p(A^\bullet)$ tel que $[y] = f^p_*([x])$. Alors

$$g^p_*([y]) = g^p_*(f^p_*([x])) = [g^p \circ f^p(x)]] = 0$$

d'où $[y] \in \ker g^p_*$.

Soit maintenant $[y] \in \ker g^p_*$. Comme $[g^p(y)] = 0$, il existe $x \in C^{p-1}$ tel que $g^p(y) = dx$. Comme g^{p-1} est surjective, il existe $x' \in B^{p-1}$ tel que $x = g^{p-1}(x')$. Alors

$$g^p(y) = dx = dg^{p-1}(x') = g^p(dx')$$

d'où $y - dx' \in \ker g^p = \operatorname{Im} f^p$, c'est-à-dire qu'il existe $y' \in A^p$ tel que $y = f^p(y') + dx'$ d'où

$$[y] = [f^p(y')] = f^p_*([y']) \in \operatorname{Im} f^p_*.$$

On a donc prouvé $\operatorname{Im} f^p_* = \ker g^p_*$, exactitude de la suite en $H^p(B^\bullet)$.

• Soit $[y] \in \operatorname{Im} g^p_*$: il existe $[x] \in H^p(B^\bullet)$ tel que $[y] = g^p_*([x])$. On a donc $y = g^p(x) + dy'$, avec $y' \in C^{p-1}$. Comme g^{p-1} est surjective, il existe $x' \in B^{p-1}$ tel que $y' = g^{p-1}(x')$. Alors

$$y = g^p(x) + dg^{p-1}(x') = g^p(x) + g^p(dx') = g^p(x + dx').$$

Par construction, $c^p([y])$ est l'antécédent de $d(x + dx')$ par f^{p+1}. Mais, x étant fermé, on a $d(x + dx') = 0$. Par suite $[y] \in \ker c^p$.

Soit maintenant $[x] \in \ker c^p$. Alors, toujours par construction de c^p, il existe $x' \in B^p$ tel que $g^p(x') = x$ et $dx' = f^{p+1}(0) = 0$. Alors on peut considérer $[x']$ et on a $g^p([x']) = [x]$, d'où $[x] \in \operatorname{Im} g^p_*$. On a donc prouvé que $\operatorname{Im} g^p_* = \ker c^p$, exactitude de la suite en $H^p(C^\bullet)$. ∎

Définition 2.4. *Un morphisme de complexes $f : A^\bullet \longrightarrow B^\bullet$ tel que $f_* : H^\bullet(A^\bullet) \longrightarrow H^p(B^\bullet)$ est un isomorphisme d'espaces gradués est appelé* **quasi-isomorphisme**.

3.— Formes différentielles sur une variété, cohomologie de de Rham

3.1. Définitions

Soit M une variété différentiable de dimension n. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, considérons le fibré vectoriel localement trivial $\Lambda^p(M)$ de base M dans lequel la fibre au-dessus de $x \in M$ est l'espace $\Lambda^p(T^*_x M)$.

Définition 2.5. *Une* **forme différentielle de degré** *p (ou p-forme) sur M est une section C^∞ du fibré vectoriel $\Lambda^p(M)$.*

L'espace vectoriel des p-formes sur M est noté $\Omega^p(M)$. Le produit extérieur $\wedge$ et l'opérateur de Hodge $*$ définis au paragraphe 1 s'étendent de manière C^∞ sans difficulté.

Proposition 2.6. *L'espace somme $\Omega^\bullet(M) = \bigoplus_{p=0}^{n} \Omega^p(M)$ est un module sur l'anneau $C^\infty(M)$ des fonctions sur M ; il est également muni d'une structure d'algèbre associative graduée par le produit $\wedge$. De plus, l'opérateur $*$ de Hodge définit un isomorphisme de modules de $\Omega^p(M)$ sur $\Omega^{n-p}(M)$.*

La différentielle d sur cette algèbre est définie comme suit. Pour $p \in \{0, \ldots, n\}$, $\alpha \in \Omega^p(M)$, $d\alpha$ est la $(p+1)$-forme associant à un $(p+1)$-uplet de champs de vecteurs $X_0, \ldots, X_p$ le nombre, en $x \in M$:

$$\begin{aligned} d\alpha_x(X_0, \ldots, X_p) = &\sum_{i=0}^{p} (-1)^i X_i \alpha(X_0, \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, X_p)(x) \\ &+ \sum_{0 \leqslant i < j \leqslant p} (-1)^{i+j} \alpha_x([X_i, X_j], X_0, \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, \widehat{X_j}, \ldots, X_p) \end{aligned}$$

Dans un ouvert de carte locale identifié à $\mathbb{R}^n$ elle s'écrit, pour

$$\alpha = \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_p \leqslant n} \alpha_{i_1 \ldots i_p} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}$$

$$d\alpha = \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_p \leqslant n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \alpha_{i_1 \ldots i_p}}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}$$

Dans cette expression, dx_i désigne le $i^{\text{ème}}$ vecteur de la base canonique de $(\mathbb{R}^n)^*$, $\mathbb{R}^n$ étant identifié à son espace tangent, c'est-à-dire la fonction «$i^{\text{ème}}$ coordonnée». Observons que si $p = 0$, on retrouve la notion habituelle de différentielle d'une fonction à n variables.

Enfin, si $\alpha \in \Omega^p(M)$ et $\beta \in \Omega^q(M)$, on a $d(\alpha \wedge \beta) = \alpha \wedge d\beta + (-1)^q d\alpha \wedge \beta$. Cette propriété confère à l'espace somme $H^\bullet(M) = \bigoplus_{p\in\mathbb{N}} H^p(\Omega^\bullet(M))$ une structure d'algèbre.

Définition 2.7. *L'algèbre $H^\bullet(M)$ s'appelle* **la cohomologie de de Rham de** M. *On note simplement $H^p(M)$ le $p^{\text{ème}}$ groupe de cohomologie de de Rham de M.*

3.2. Effet d'une application différentiable, formes différentielles sur un quotient

Soient M et N deux variétés différentiables et $f : M \longrightarrow N$ une application différentiable. Alors f induit un morphisme d'algèbres graduées $f^* : \Omega^\bullet(N) \longrightarrow \Omega^\bullet(M)$ défini, pour $\alpha \in \Omega^p(N)$, $x \in M$ et $(u_1, \ldots, u_p) \in (T_xM)^p$, par

$$f^*\alpha_x(u_1, \ldots, u_p) = \alpha_{f(x)}(df_x u_1, \ldots, df_x u_p).$$

C'est également un morphisme de complexes, il induit donc un morphisme d'algèbres graduées, encore noté f^* :

$$f^* : H^\bullet(N) \longrightarrow H^\bullet(M).$$

Lorsqu'un morphisme de complexes f est donné, on notera cependant f_* le morphisme qu'il induit en cohomologie, la correspondance $f \mapsto f_*$ étant covariante.

Si f est un difféomorphisme, alors f^* est un isomorphisme d'algèbres : la cohomologie de de Rham est un invariant différentiable. C'est également un invariant du type d'homotopie dans le sens où toute application continue $f : M \to N$ est différentiablement homotope à une application $g : M \to N$ de classe C^∞. Alors par définition $f^* = g^*$.

Un cas particulier important est celui d'un groupe Γ agissant différentiablement sur une variété M. Cette action induit une action de Γ sur le complexe de de Rham de M. On peut alors considérer le sous-ensemble des formes différentielles Γ-invariantes ; c'est un sous-complexe de $\Omega^\bullet(M)$, que l'on note $\Omega^\bullet_\Gamma(M)$.

Théorème 2.8. *Soit M une variété différentiable, Γ un groupe dénombrable discret agissant librement et proprement sur M. Alors la projection canonique $\pi : M \longrightarrow M/\Gamma$ induit un isomorphisme de complexes $\Omega^\bullet(M/\Gamma) \longrightarrow \Omega^\bullet_\Gamma(M)$. En particulier, les espaces de cohomologie $H^p(\Omega^\bullet_\Gamma(M))$ et $H^p(M/\Gamma)$ sont isomorphes.*

Remarque : il s'agit en réalité d'un isomorphisme d'algèbres. De plus, même lorsque M/Γ n'est pas une variété C^∞ (par exemple lorsque l'action de Γ n'est pas libre, auquel cas c'est une V-variété), la cohomologie du complexe $\Omega^\bullet_\Gamma(M)$ est tout de même isomorphe à la cohomologie singulière de M/Γ.

Ce résultat est bien connu ; on aura cependant besoin de certains détails et notations de la preuve par la suite.

Preuve. Soit $\alpha \in \Omega^p(M/\Gamma)$. Pour $\gamma \in \Gamma$, on a : $\gamma^*(\pi^*\alpha) = (\pi \circ \gamma)^* = \pi^*\alpha$ d'où $\pi^*\alpha \in \Omega^p_\Gamma(M)$.

Réciproquement, on va construire un inverse s de $\pi^* : \Omega^p(M/\Gamma) \longrightarrow \Omega^p_\Gamma(M)$. Soient $\alpha \in \Omega^p_\Gamma(M)$ et $y \in M/\Gamma$.

Comme $\pi : M \longrightarrow M/\Gamma$ est un revêtement, il existe un voisinage ouvert U de y qui trivialise le revêtement : $\pi^{-1}(U) \simeq U \times \Gamma$. Soit $x \in \pi^{-1}(y)$ et notons V la composante de $\pi^{-1}(U)$ contenant x. La projection π induit donc un difféomorphisme de V sur U, dont l'inverse est noté σ. On pose alors

$$s(\alpha)_y = \left(\sigma^*\left(\alpha_{|V}\right)\right)_y.$$

Il faut bien entendu vérifier que cette définition ne dépend pas du choix de U et de x.

Si U' est un autre ouvert trivialisant du revêtement contenant y, c'est aussi le cas de $U \cap U'$. Si on note V' le voisinage correspondant de x et σ' le difféomorphisme de U sur V' associé, on a alors

$$\sigma_{|U \cap U'} = \sigma'_{|U \cap U'}.$$

Il en résulte donc l'indépendance de la définition de $s(\alpha)_y$ par rapport au choix de U.

Soit x' un autre élément de $\pi^{-1}(y)$ et V' la composante de $\pi^{-1}(U)$ contenant x'. Puisque $\pi(x) = \pi(x')$, il existe $\gamma \in \Gamma$ tel que $x' = \gamma x$. Notons σ' le difféomorphisme de U sur V' inverse local de π.

Alors $\gamma \circ \sigma(U) = \gamma(V)$ est encore un ouvert de M contenant x'. Posons $W = V' \cap \gamma(V)$. Comme $\pi(W) \subset U$, π réalise encore un difféomorphisme de W sur $\pi(W)$, dont l'inverse n'est autre que $\sigma'_{|W}$. On peut résumer ce fait en disant que $\gamma \circ \sigma = \sigma'$ près de y. Alors :

$$\left(\sigma'^*\left(\alpha_{|W}\right)\right)_y = \left((\gamma \circ \sigma)^*\left(\alpha_{|W}\right)\right)_y = \left(\sigma^*\left(\gamma^*\left(\alpha_{|W}\right)\right)\right)_y.$$

Puisque α est Γ-invariante, on a

$$\gamma^*\left(\alpha_{|W}\right) = \alpha_{|\gamma^{-1}(W)}$$

d'où, finalement :

$$\left(\sigma'^*\left(\alpha_{|V'}\right)\right)_y = \left(\sigma'^*\left(\alpha_{|W}\right)\right)_y = \left(\sigma^*\left(\alpha_{|\gamma^{-1}(W)}\right)\right)_y = \left(\sigma^*\left(\alpha_{|V}\right)\right)_y$$

ce qui entraîne l'indépendance de la définition de $s(\alpha)_y$ par rapport au choix de $x \in \pi^{-1}(y)$. Le fait que $s(\alpha)_y$ dépende de manière C^∞ de y découle directement de sa définition locale.

Montrons que le morphisme de complexes $s : \Omega^\bullet_\Gamma(M) \longrightarrow \Omega^\bullet(M/\Gamma)$ ainsi défini est l'inverse de π^*. Soit $\alpha \in \Omega^p_\Gamma(M)$; on a, pour $x \in M$:

$$(\pi^*(s(\alpha)))_x = \left(\pi^*\left(\sigma^*\left(\alpha_{|V}\right)\right)\right)_x$$

où V et σ sont définis comme précédemment. Alors :

$$(\pi^*(s(\alpha)))_x = (\sigma \circ \pi)^*\left(\alpha_{|V}\right)_x = \left(\alpha_{|V}\right)_x = \alpha_x.$$

De même, pour $\beta \in \Omega^p(M/\Gamma)$ et $y \in M/\Gamma$ et avec les mêmes notations que précédemment :

$$(s(\pi^*(\beta)))_y = \left(\sigma^*\left(\pi^*(\beta)_{|V}\right)\right)_y = (\pi \circ \sigma)^*\left(\beta_{|V}\right)_y = \left(\beta_{|V}\right)_y = \beta_y.$$

Ceci achève de prouver que π^* est bien un isomorphisme. ∎

Définition 2.9. *Le* **support** *d'une forme différentielle $\alpha \in \Omega^\bullet(M)$ est l'adhérence dans M de l'ensemble des points où elle est non nulle :*

$$\operatorname{Supp}(\alpha) = \overline{\{x \in M, \alpha(x) \neq 0\}}.$$

On note $\Omega^p_c(M)$ l'ensemble des p-formes différentielles sur M à support compact. Ces espaces forment un sous-complexe de $\Omega^\bullet(M)$ dont la cohomologie s'appelle **cohomologie à support compact de** M. Elle est en général différente de la cohomologie de de Rham de M si M est non compacte.

3.3. Laplacien sur les formes, formes harmoniques, formes automorphes

Soient M une variété riemannienne de dimension n et $*$ l'opérateur de Hodge sur $\Omega^\bullet(M)$ associé.

Définition 2.10. *La* **codifférentielle** *d'une p-forme $\alpha \in \Omega^p(M)$ est la $(p-1)$-forme $d^*\alpha = (-1)^{n(p+1)+1} * d * \alpha$. Une forme α est dite* **cofermée** *si sa codifférentielle est nulle.*

Le **Laplacien sur les formes** *(ou* **opérateur de Laplace-Beltrami***) est l'opérateur sur $\Omega^\bullet(M)$ défini par $\Delta = dd^* + d^*d$. Une forme α est dite* **harmonique** *si $\Delta\alpha = 0$.*

Bien sûr, on retrouve la définition usuelle (au signe près) du Laplacien sur les fonctions lorsque $p = 0$ et $M = \mathbb{R}^n$ muni de la métrique plate. Les formes différentielles harmoniques et cofermées forment un sous-complexe, noté $\Omega^\bullet_{hc}(M)$, de $\Omega^\bullet(M)$.

Théorème 2.11 [Hodge]. *L'inclusion $\Omega^\bullet_{hc}(M) \hookrightarrow \Omega^\bullet(M)$ est un quasi-isomorphisme. Si de plus M est compacte, l'inclusion induit un isomorphisme des p-formes harmoniques sur $H^p(M)$.*

Dans le cas où M est un espace homogène G/K, on a la définition suivante, Γ étant un sous-groupe discret du groupe de Lie G.

Définition 2.12. *Une p-forme différentielle Γ-invariante $\alpha \in \Omega^p_\Gamma(M)$ est appelée* **forme automorphe** *si*

1) α et $d\alpha$ sont à croissance modérée :

$$\forall x_0 \in M, \exists a, b > 0, \forall x \in M, \max\{\|\alpha_x\|, \|d\alpha_x\|\} \leqslant a e^{b\delta(x,x_0)}$$

où $\|.\|$ désigne la norme des formes p-linéaires sur T_xM et δ la distance sur M ;

2) α annule un polynôme non nul en le Laplacien :

$$\exists P \in \mathbb{C}[X] \setminus \{0\}, P(\Delta)(\alpha) = 0.$$

Conjecture 2.13 [Borel]. *L'inclusion du complexe $A^\bullet(M)$ des formes automorphes dans $\Omega^\bullet(M)$ est un quasi-isomorphisme.*

Les formes automorphes et les formes automorphes harmoniques cofermées forment des sous-complexes de $\Omega^\bullet(M)$ notés respectivement $A^\bullet(M)$ et $A^\bullet_{hc}(M)$. On a donc les inclusions suivantes :

$$\begin{tikzcd} A^\bullet_{hc}(M) \arrow[r, hook, "i_1"] \arrow[d, "i_2"'] & \Omega^\bullet_{hc}(M) \arrow[d] \\ A^\bullet(M) \arrow[r, hook, "i_3"] & \Omega^\bullet(M). \end{tikzcd}$$

On a alors une variante de la conjecture de Borel, parfois appelée *conjecture de Borel-Harder*.

Conjecture 2.14. *Les inclusions i_1, i_2 et i_3 sont des quasi-isomorphismes. En particulier, chacun des complexes de ce diagramme a une cohomologie isomorphe à celle de M.*

4.— Courants et distributions sur une variété lisse

La notion de forme différentielle (et donc de fonction) sur une variété différentiable se généralise en considérant une classe plus large d'objets, au prix cependant de la perte de la structure d'algèbre. Ces définitions sont dûes à Laurent Schwartz et Georges de Rham dans leurs ouvrages respectifs *Théorie des distributions* [Sch] et *Variétés différentiables* [Rh].

4.1. Définitions, courants réguliers

L'espace $\Omega_c^p(M)$ précédemment défini est muni de la topologie C^∞ de Schwartz, pour laquelle une suite $(\alpha_m)_{m\in\mathbb{N}}$ dans $\Omega_c^p(M)$ converge vers 0 si :

- il existe un compact K de M tel que
$$\forall m \in \mathbb{N}, \mathrm{Supp}(\alpha_m) \subset K,$$
- la suite (α_m) converge vers 0 au sens de la topologie C^∞, c'est-à-dire que, dans toute carte de M, toutes les dérivées partielles de α_m convergent uniformément vers 0.

Définition 2.15. *On appelle* **courant de degré** p **sur** M *(ou p-courant) toute forme linéaire continue sur $\Omega_c^{n-p}(M)$. Leur ensemble $\mathcal{C}^p(M)$ est donc le dual topologique de $\Omega_c^{n-p}(M)$. On appelle* **distribution sur** M *tout courant de degré n sur M. La* **dimension** *d'un p-courant est $n-p$.*

Le premier exemple de courant est celui des p**-courants réguliers** définis par une p-forme différentielle $\omega \in \Omega^p(M)$:

$$\begin{array}{ccc} \Omega_c^{n-p}(M) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \alpha & \longmapsto & \displaystyle\int_M \omega \wedge \alpha. \end{array}$$

La correspondance entre la p-forme ω et le p-courant régulier qu'elle définit étant injective, on identifiera toujours ce courant à ω.

De plus, on munit l'espace gradué

$$\mathcal{C}^\bullet(M) = \bigoplus_{p=0}^{n} \mathcal{C}^p(M)$$

d'une structure de complexe différentiel prolongeant convenablement celle de $\Omega^\bullet(M)$ en posant, pour $T \in \mathcal{C}^p(M)$:

$$\forall \alpha \in \Omega_c^{n-p-1}(M), \langle dT, \alpha\rangle = (-1)^p \langle T, d\alpha\rangle .$$

Le résultat suivant se trouve dans [Rh] chap.IV §18 théorème 14.

Théorème 2.16 [de Rham]. *Toute classe de cohomologie de $\mathcal{C}^\bullet(M)$ contient un courant régulier. En particulier, l'inclusion $\Omega^\bullet(M) \subset \mathcal{C}^\bullet(M)$ est un quasi-isomorphisme et la cohomologie du complexe $\mathcal{C}^\bullet(M)$ est isomorphe à la cohomologie de de Rham de M :*

$$\forall p \in \mathbb{N}, H^p\left(\mathcal{C}^\bullet(M)\right) \simeq H^p(M).$$

4.2. Effet d'un difféomorphisme, courants invariants

Etant donnée une application différentiable $f : M \longrightarrow N$ entre deux variétés, on définit une application $f_* : \mathcal{C}^\bullet(M) \longrightarrow \mathcal{C}^\bullet(N)$ en posant, pour $T \in \mathcal{C}^p(M)$:

$$\forall \omega \in \Omega_c^{n-p}(M), \langle f_*T, \omega\rangle = \langle T, f^*\omega\rangle .$$

On peut remarquer qu'il s'agit d'une image directe (donc covariante) d'un courant et non d'une image réciproque (contravariante) comme pour les formes différentielles.

Si f est un difféomorphisme de M sur N, on peut cependant définir $f^* : \mathcal{C}^\bullet(N) \longrightarrow \mathcal{C}^\bullet(M)$, pour $T \in \mathcal{C}^p(N)$, par :

$$\forall \omega \in \Omega_c^{n-p}(M), \langle f^*T, \omega\rangle = \left\langle T, (f^{-1})^*\omega\right\rangle .$$

On peut vérifier que cette application est bien définie et prolonge convenablement l'application $f^* : \Omega^\bullet(N) \longrightarrow \Omega^\bullet(M)$.

Les applications f^* et f_* précédemment définies sont des morphismes de complexes.

Soit Γ un groupe agissant par difféomorphismes sur une variété M. Un courant $T \in \mathcal{C}^\bullet(M)$ est dit Γ-invariant si

$$\forall \gamma \in \Gamma, \gamma_* T = T.$$

L'ensemble des courants Γ-invariants est un sous-complexe de $\mathcal{C}^\bullet(M)$ noté $\mathcal{C}^\bullet_\Gamma(M)$. On peut constater que dans ce cas précis les conditions $\forall \gamma \in \Gamma, \gamma_* T = T$ et $\forall \gamma \in \Gamma, \gamma^* T = T$ sont équivalentes, et donc que les formes différentielles Γ-invariantes sur M sont encore Γ-invariantes en tant que courants :

$$\Omega^\bullet_\Gamma(M) \subset \mathcal{C}^\bullet_\Gamma(M).$$

Dans la suite de ce chapitre, on considère un groupe Γ dénombrable discret agissant proprement et librement sur M par difféomorphismes. Le but est de prouver que les complexes $\mathcal{C}^\bullet(M/\Gamma)$ et $\mathcal{C}^\bullet_\Gamma(M)$ sont isomorphes. Ces résultats se trouvent dans [EMM].

Lemme 2.17. *Pour tout $\omega \in \Omega^p(M/\Gamma)$, on a*

$$\mathrm{Supp}(\pi^*\omega)/\Gamma = \mathrm{Supp}(\omega).$$

Preuve. Soit $y \in \mathrm{Supp}(\pi^*\omega)/\Gamma$ et considérons $x \in \mathrm{Supp}(\pi^*\omega)$ tel que $\pi(x) = y$. Il existe donc une suite $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ de M convergeant vers x telle que $(\pi^*\omega)_{x_m} \neq 0$ pour tout $m \in \mathbb{N}$. Alors on a $\omega_{\pi(x_m)} \neq 0$, d'où

$$y = \lim_{m \longrightarrow \infty} \pi(x_m) \in \mathrm{Supp}(\omega)$$

par continuité de π et fermeture de $\mathrm{Supp}(\omega)$.

Réciproquement, soit $y \in \mathrm{Supp}(\omega)$; il existe une suite $(y_m)_{m\in\mathbb{N}}$ convergeant vers y telle que pour tout $m \in \mathbb{N}$, $\omega_{y_m} \neq 0$. Pour tout m considérons $x_m \in M$ tel que $\pi(x_m) = y_m$. On a alors $(\pi^*\omega)_{x_m} \neq 0$, d'où $x_m \in \mathrm{Supp}(\pi^*\omega)$ et $y_m = \pi(x_m) \in \pi(\mathrm{Supp}(\pi^*\omega))$. Comme π est ouverte, cet ensemble est fermé et on a

$$y = \lim_{m \longrightarrow \infty} y_m \in \mathrm{Supp}(\pi^*\omega)/\Gamma.$$

□

Corollaire 2.18. *L'image par π^* du sous-espace $\Omega^p_c(M/\Gamma)$ des p-formes à support compact sur M/Γ est l'espace*

$$\Omega^p_{\Gamma c}(M) = \{\alpha \in \Omega^p_\Gamma(M), \mathrm{Supp}(\alpha)/\Gamma \text{ compact } \}.$$

Preuve. Le Lemme 2.17 implique directement que $\pi^*(\Omega^p_c(M/\Gamma)) \subset \Omega^p_{\Gamma c}(M)$. Soit maintenant $\alpha \in \Omega^p_{\Gamma c}(M)$. L'inverse s de π^* ayant été construit au Théorème 2.8, on a de même $\mathrm{Supp}(s(\alpha)) = \mathrm{Supp}(\pi^*(s(\alpha)))/\Gamma = \mathrm{Supp}(\alpha)/\Gamma$, qui est compact. On en déduit que :

$$\alpha = \pi^*(s(\alpha)) \in \pi^*(\Omega^p_c(M/\Gamma)).$$

□

Lemme 2.19. *Il existe une fonction $k : M \longrightarrow \mathbb{R}_+$ de classe C^∞ telle que :*

(1) *pour tout compact K de M,* $\{\gamma \in \Gamma, \mathrm{Supp}(k) \cap \gamma K \neq \varnothing\}$ *est fini,*

(2) $\displaystyle\sum_{\gamma\in\Gamma} k \circ \gamma = 1$

Preuve. Soit $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement localement fini de M/Γ par des ouverts relativement compacts trivialisant le revêtement π et considérons, pour tout $i \in I$, un relèvement V_i de U_i.

Pour tout $i \in I$, on fixe une fonction $\ell_i : M \longrightarrow \mathbb{R}_+$ strictement positive sur V_i et nulle en dehors d'un voisinage W_i de V_i tel que $\{\gamma \in \Gamma, W_i \cap \gamma V_i \neq \varnothing\}$ soit fini. On pose alors $\ell = \sum_{i\in I} \ell_i$.

La famille $(V_i)_{i\in I}$ étant localement finie, cette fonction est bien définie et C^∞. Par construction, $\mathrm{Supp}(\ell) = \bigcup_{i\in I} \overline{V}_i$. Si K est un compact de M, on a

$$\pi^{-1}(K) \cap \mathrm{Supp}(\ell) = \bigcup_{i\in I} \left(\overline{V}_i \cap \pi^{-1}(K)\right).$$

On a de plus

$$\pi(\overline{V}_i \cap \pi^{-1}(K)) \subset \pi(\overline{V}_i) \cap K \subset \overline{U}_i \cap K$$

qui n'est non vide que pour un nombre fini de $i \in I$. Comme $\overline{V}_i$ est compact, $\pi^{-1}(K) \cap \mathrm{Supp}(\ell)$ l'est aussi.

On en déduit que pour tout compact K de M l'ensemble $\{\gamma \in \Gamma, \mathrm{Supp}(\ell \circ \gamma) \cap K \neq \varnothing\}$ est fini, donc que la fonction $\sum_{\gamma\in\Gamma} \ell \circ \gamma$ est bien définie et C^∞. Pour tout $x \in M$, il existe $i \in I$ tel que $\pi(x) \in U_i$; il existe donc $\gamma \in \Gamma$ tel que $x \in \gamma(V_i)$. Alors on a $\ell_i \circ \gamma^{-1}(x) > 0$.

On peut donc considérer la fonction

$$k = \frac{\ell}{\sum_{\gamma\in\Gamma} \ell \circ \gamma}$$

qui satisfait les conditions voulues. ∎

Lemme 2.20. *L'application*

$$\begin{aligned} r : \Omega_c^\bullet(M) &\longrightarrow \Omega_{\Gamma c}^\bullet(M) \\ \omega &\longmapsto \sum_{\gamma\in\Gamma} \gamma^*\omega \end{aligned}$$

est bien définie, linéaire, continue et surjective.

Preuve. Soit $\omega \in \Omega_c^p(M)$. Puisque l'action de Γ est propre et libre, cette somme est localement finie. On a bien sûr

$$\mathrm{Supp}(\gamma^*\omega) = \gamma^{-1}(\mathrm{Supp}(\omega))$$

de sorte que

$$\mathrm{Supp}(r(\omega)) \subset \bigcup_{\gamma\in\Gamma} \gamma(\mathrm{Supp}(\omega))$$

et, puisque $\pi \circ \gamma = \pi$:

$$\mathrm{Supp}(r(\omega))/\Gamma = \pi(\mathrm{Supp}(r(\omega))) \subset \bigcup_{\gamma\in\Gamma} \pi \circ \gamma(\mathrm{Supp}(\omega)) = \pi(\mathrm{Supp}(\omega))$$

ce qui prouve que $r(\omega) \in \Omega_{\Gamma c}^p(M)$.

Le fait que r soit linéaire et continue découle directement de sa définition ; montrons qu'elle est surjective. Soit $\alpha \in \Omega_{\Gamma c}^p(M)$ et posons $\omega = k\alpha$. On a :

$$r(\omega) = \sum_{\gamma\in\Gamma} \gamma^*(k\alpha) = \sum_{\gamma\in\Gamma} k \circ \gamma\, \gamma^*\alpha = \left(\sum_{\gamma\in\Gamma} k \circ \gamma\right) \alpha = \alpha$$

puisque α est Γ-invariante. Il reste à prouver que $\mathrm{Supp}(\omega)$ est compact.

On a $\omega = k\alpha$ donc $\mathrm{Supp}(\omega) \subset \mathrm{Supp}(k) \cap \mathrm{Supp}(\alpha)$. On a, puisque α est Γ-invariante, $\mathrm{Supp}(\alpha) = \pi^{-1}(\pi(\mathrm{Supp}(\alpha)))$. Comme $\pi(\mathrm{Supp}(\alpha))$ est compact et d'après une des propriétés de la fonction k, $\mathrm{Supp}(\omega)$ est lui aussi compact, d'où $\omega \in \Omega^p_c(M)$, ce qui prouve la surjectivité de r. $\square$

On va maintenant prouver que le noyau de r est l'espace vectoriel N engendré par les éléments de la forme $\gamma^*\omega - \omega$, pour $\omega \in \Omega^\bullet_c(M)$ et $\gamma \in \Gamma$:

$$N = \mathrm{Vect}\left(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} \mathrm{Im}(\gamma^* - \mathrm{id})\right).$$

Pour cela, posons, pour tout $\alpha \in \ker r$,

$$Z(\alpha) = \big\{x \in M/\Gamma : \alpha_{|_{\pi^{-1}(x)}} = 0\big\}.$$

Lemme 2.21. *Pour tout ouvert V de M/Γ trivialisant le revêtement π, tout ouvert U tel que $\overline{U} \subset V$ et tout $\alpha \in \ker r$, il existe $\alpha_1 \in \ker r$ tel que $\alpha - \alpha_1 \in N$ et $Z(\alpha) \cup U \subset Z(\alpha_1)$.*

C'est-à-dire que l'on peut toujours modifier une forme différentielle $\alpha \in \ker r$ de manière à ce que $Z(\alpha)$ recouvre tout ouvert trivialisant de π.
Preuve. Soit $g \in C^\infty(M/\Gamma)$ telle que $g_{|_U} = 1$ et $g_{|_{M/\Gamma\smallsetminus V}} = 0$; on pose $g_1 = g \circ \pi$. Considérons des relèvements respectifs U_1 et V_1 de U et V tels que $U_1 \subset V_1$.

$$\begin{tikzcd}
U_1 \arrow[r, hook] \arrow[d, "\pi", "\wr"'] & V_1 \arrow[r, hook] \arrow[d, "\pi", "\wr"'] & M \arrow[d, "\pi"] \arrow[dr, "g_1"] & \\
U \arrow[r, hook] & V \arrow[r, hook] & M/\Gamma \arrow[r, "g"] & \mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

L'ensemble $\{\gamma \in \Gamma : \gamma(V_1) \cap \mathrm{Supp}(\alpha) \neq \varnothing\}$ est fini puisque $\mathrm{Supp}(\alpha)$ est compact ; notons-le $\{\gamma_0, \dots, \gamma_\ell\}$ et posons, pour tout $j \in \{0, \dots, \ell\}$,

$$\eta_j = (g_1\alpha)_{|_{\gamma_j(V_1)}}$$

(cette restriction étant étendue à tout M par 0). On a bien sûr

$$\alpha = \sum_{j=0}^{\ell} \eta_j + (1 - g_1)\alpha$$

où chaque terme appartient à $\Omega^\bullet_c(M)$. Posons

$$\alpha_1 = \sum_{j=0}^{\ell} \gamma_j^*\eta_j + (1 - g_1)\alpha.$$

Par construction, on a :

$$\begin{aligned}
r(\alpha_1) &= \sum_{\gamma\in\Gamma}\sum_{j=0}^{\ell} (\gamma_j \circ \gamma)^*\eta_j + \sum_{\gamma\in\Gamma} \gamma^*\big((1 - g_1)\alpha\big) \\
&= \sum_{\gamma\in\Gamma}\sum_{j=0}^{\ell} \gamma^*\eta_j + \sum_{\gamma\in\Gamma} \gamma^*\big((1 - g_1)\alpha\big) \\
&= \sum_{\gamma\in\Gamma} \gamma^*\left(\sum_{j=0}^{\ell} \eta_j + (1 - g_1)\alpha\right) = r(\alpha) = 0
\end{aligned}$$

d'où $\alpha_1 \in \ker r$ et

$$\alpha - \alpha_1 = \sum_{j=0}^{\ell} \left(\eta_j - \gamma_j^* \eta_j\right) \in N.$$

D'autre part, pour $x \in Z(\alpha)$, $y \in \pi^{-1}(x)$ et tout $j \in \{0, \dots, \ell\}$, on a

$$(\eta_j)_{\gamma_j(y)} = 0$$

puisque $\gamma_j(y) \in \pi^{-1}(x)$. Ceci entraîne que $(\alpha_1)_y = 0$ donc que $x \in Z(\alpha_1)$. On en déduit que $Z(\alpha) \subset Z(\alpha_1)$.

Soit maintenant $x \in U$. Pour tout $y \in \pi^{-1}(x)$, on a $((1 - g_1)\alpha)_y = 0$ puisque $g_{|U} = 1$. De plus, pour $j \in \{0, \dots, \ell\}$,

$$\mathrm{Supp}(\gamma_j^* \eta_j) \subset \gamma_j^{-1}(\mathrm{Supp}(\eta_j)) \subset V_1$$

donc α_1 s'annule sur $\pi^{-1}(x) \setminus V_1$. Ecrivons $\pi^{-1}(x) \cap V_1 = \{x_1\}$. Alors

$$(\alpha_1)_{x_1} = \sum_{j=0}^{\ell} \left(\gamma_j^* \eta_j\right)_{x_1} = \sum_{j=0}^{\ell} g_1 \circ \gamma_j(x_1)(\gamma_j^* \alpha)_{x_1} = \sum_{j=0}^{\ell} (\gamma_j^* \alpha)_{x_1} = r(\alpha)_{x_1} = 0.$$

Ceci prouve bien que $U \subset Z(\alpha_1)$. ∎

Théorème 2.22. *Soit l'application* $\pi_! = (\pi^*)^{-1} \circ r$. *La suite*

$$0 \longrightarrow N \hookrightarrow \Omega_c^\bullet(M) \xrightarrow{\pi_!} \Omega_c^\bullet(M/\Gamma) \longrightarrow 0$$

est exacte ; en particulier $\pi_!$ *induit un isomorphisme d'espaces gradués*

$$\Omega_c^\bullet(M)/N \xrightarrow[\sim]{\pi_!} \Omega_c^\bullet(M/\Gamma).$$

Preuve. Soit $\alpha \in N$. Alors il existe $\ell \in \mathbb{N}$, $\gamma_1, \dots, \gamma_\ell \in \Gamma$ et $\alpha_1, \dots, \alpha_\ell \in \Omega_c^\bullet(M)$ tels que

$$\alpha = \sum_{j=1}^{\ell} (\gamma_j^* \alpha_j - \alpha_j).$$

On a alors

$$\begin{aligned} r(\alpha) &= \sum_{\gamma \in \Gamma} \sum_{j=1}^{\ell} (\gamma_j \circ \gamma)^* \alpha_j - \sum_{\gamma \in \Gamma} \sum_{j=1}^{\ell} \gamma^* \alpha_j \\ &= \sum_{\gamma \in \Gamma} \sum_{j=1}^{\ell} \gamma^* \alpha_j - \sum_{\gamma \in \Gamma} \sum_{j=1}^{\ell} \gamma^* \alpha_j = 0 \end{aligned}$$

d'où $\alpha \in \ker r = \ker \pi_!$.

Réciproquement, soit $\alpha_0 \in \ker r$. Comme $\pi(\mathrm{Supp}(\alpha_0))$ est compact, on peut le recouvrir par un nombre fini d'ouverts trivialisant le revêtement $V_1, \dots, V_k$. En posant, pour tout $j \in \{1, \dots, k\}$,

$$U_j = V_j \setminus \left(\bigcup_{i \neq j} V_i \right),$$

on peut observer que $\overline{U}_j \subset V_j$ et que

$$\pi(\mathrm{Supp}(\alpha_0)) \subset \bigcup_{j=1}^{k} \overline{U}_j.$$

Des applications successives du Lemme 2.21 donnent l'existence de formes $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \ker r$ telles que pour tout $j \in \{0, \ldots, k-1\}$:

$$\begin{cases} Z(\alpha_j) \cup U_{j+1} \subset Z(\alpha_{j+1}) \\ \alpha_{j+1} - \alpha_j \in N. \end{cases}$$

En particulier, on a $Z(\alpha_k) \supset U_1 \cup \ldots \cup U_k$; d'où, par fermeture de $Z(\alpha_k)$:

$$\begin{cases} Z(\alpha_k) \supset \bigcup_{j=1}^{k} \overline{U_j} \supset \pi(\mathrm{Supp}(\alpha)) \\ Z(\alpha_k) \supset Z(\alpha_0). \end{cases}$$

Ces deux conditions entraînent que $\alpha_k = 0$ et on a alors

$$\alpha_0 = (\alpha_0 - \alpha_1) + \cdots + (\alpha_{k-1} - \alpha_k) \in N.$$

On a donc bien $\ker \pi_! = \ker r = N$. ∎

Corollaire 2.23. *Les complexes différentiels $\mathcal{C}_\Gamma^\bullet(M)$ et $\mathcal{C}^\bullet(M/\Gamma)$ sont isomorphes.*

Preuve. D'après le théorème précédent et en remarquant que tous les morphismes d'espaces gradués considérés commutent avec la différentielle, on a un isomorphisme de complexes

$$\Omega_c^\bullet(M)/N \xrightarrow{\sim} \Omega_c^\bullet(M/\Gamma).$$

On en déduit donc que $\mathcal{C}^\bullet(M/\Gamma)$ est isomorphe au dual topologique de $\Omega_c^\bullet(M)/N$.

D'autre part, l'application $\psi : \mathcal{C}_\Gamma^p(M) \longrightarrow (\Omega_c^{n-p}(M)/N)'$ définie, pour $T \in \mathcal{C}_\Gamma^p(M)$, par :

$$\begin{aligned} \psi(T) : \Omega_c^{n-p}(M)/N &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \overline{\alpha} &\longmapsto \langle T, \alpha \rangle \end{aligned}$$

où $\overline{\alpha}$ désigne la classe de α modulo N, est bien définie. En effet, si $\alpha \in N$, il existe $\ell \in \mathbb{N}$, $\gamma_1, \ldots, \gamma_\ell \in \Gamma$ et $\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell \in \Omega_c^{n-p}(M)$ tels que

$$\alpha = \sum_{j=1}^{\ell} (\gamma_j^* \alpha_j - \alpha_j).$$

Alors, pour tout $T \in \mathcal{C}_\Gamma^p(M)$, on a :

$$\langle T, \alpha \rangle = \sum_{j=1}^{\ell} \big(\langle T, \gamma_j^* \alpha_j \rangle - \langle T, \alpha_j \rangle \big) = 0.$$

L'application ψ est clairement un isomorphisme d'après la définition même des courants Γ-invariants, et commute à la différentielle. ∎

4.3. Ecriture locale et dérivée d'un courant

Il n'est pas possible de prolonger la notion de produit extérieur aux courants en toute généralité. On peut cependant définir le produit extérieur d'une forme $\alpha \in \Omega^p(M)$ par un courant $T \in \mathcal{C}^q(M)$ simplement en posant, pour $\omega \in \Omega_c^{n-p-q}(M)$

$$\langle T \wedge \alpha, \omega \rangle = \langle T, \alpha \wedge \omega \rangle .$$

On a ainsi $T \wedge \alpha \in \mathcal{C}^{p+q}(M)$. Cette loi $\wedge$ est également compatible avec l'action d'un difféomorphisme γ de M, c'est-à-dire que

$$\gamma^*(T \wedge \alpha) = (\gamma^* T) \wedge (\gamma^* \alpha).$$

Cette définition permet de décrire localement les courants. Plus précisément, s'il existe une base de 1-formes globales $(\omega_1, \ldots, \omega_n)$, tout p-courant $T \in \mathcal{C}^p(M)$ s'écrit de manière unique

$$T = \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_p \leqslant n} T_{i_1 \ldots i_p} \wedge \omega_{i_1} \wedge \ldots \wedge \omega_{i_p}$$

où les $T_{i_1 \ldots i_p}$ sont des 0-courants. Cette écriture généralise bien entendu celles des formes différentielles à l'aide de fonctions lorsqu'il existe une base de 1-formes. En particulier, à travers une carte, un p-courant s'écrit toujours de cette manière avec $\omega_i = dx_i$.

Définition 2.24. *Soient $s = (s_1, \ldots, s_n) \in \mathbb{N}^n$ un multi-indice. Notons $|s| = s_1 + \cdots + s_n$ sa longueur et soit l'opérateur de dérivation*

$$D^s = \frac{\partial^{|s|}}{\partial x_1^{s_1} \ldots \partial x_n^{s_n}}.$$

Pour tout $T \in \mathcal{C}^p(\mathbb{R}^n)$, on définit le courant dérivé $D^s T \in \mathcal{C}^p(\mathbb{R}^n)$ par

$$\langle D^s T, \omega \rangle = (-1)^{|s|} \langle T, D^s \omega \rangle$$

avec

$$\omega = \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_{n-p} \leqslant n} \omega_{i_1 \ldots i_{n-p}} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_{n-p}} \in \Omega_c^{n-p}(M)$$

$$D^s \omega = \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_{n-p} \leqslant n} D^s(\omega_{i_1 \ldots i_{n-p}}) dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_{n-p}}.$$

Bien sûr, si T est un p-courant régulier, ses dérivées en tant que forme et en tant que courant coïncident.

Si on identifie, *via* une carte, M à $\mathbb{R}^n$, on peut, pour un courant $T \in \mathcal{C}^p(M)$, écrire localement

$$T = \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_p \leqslant n} T_{i_1 \ldots i_p} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}$$

où chaque $T_{i_1 \ldots i_p}$ est un 0-courant. Alors on a, toujours localement,

$$dT = \sum_{i=1}^{n} \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_p \leqslant n} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} T_{i_1 \ldots i_p} \right) dx_i \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}.$$

Remarque : les fonctions localement intégrables sur $\mathbb{R}^n$ muni de la mesure de Lebesgue peuvent être vues comme des distributions. Cette définition permet alors de «dériver» ces fonctions L^1_{loc} en tant que distributions.

4.4. Support d'un courant ; courants de Dirac

Définition 2.25. *Soit T un p-courant sur M. Le* **support de** *T est le complémentaire du plus grand ouvert de M sur lequel T est nul :*

$$\mathrm{Supp}(T) = M \setminus U$$

où U est le plus grand (i.e. la réunion) des ouverts U' de M tels que

$$\forall \omega \in \Omega_c^{n-p}(M), (\mathrm{Supp}(\omega) \subset U') \Rightarrow (\langle T, \omega \rangle = 0).$$

Autrement dit, pour tout $\omega \in \Omega_c^{n-p}(M)$*, on a* $\langle T, \omega \rangle = 0$ *dès que* $\mathrm{Supp}(T) \cap \mathrm{Supp}(\omega) = \varnothing$*.*

Etant donnés $T_1, T_2 \in \mathcal{C}^\bullet(M)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $s \in \mathbb{N}^n$, on a les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} \mathrm{Supp}(T_1 + T_2) \subset \mathrm{Supp}(T_1) \cup \mathrm{Supp}(T_2) \\ \mathrm{Supp}(\lambda T_1) = \mathrm{Supp}(T_1) \text{ si } \lambda \neq 0 \\ \mathrm{Supp}(D^s T_1) = \mathrm{Supp}(T_1) \text{ si } M = \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Bien sûr, si T est régulier, son support en tant que courant est le même que son support en tant que forme. Cependant, une forme différentielle étant toujours C^∞, son support n'est jamais ponctuel. Le support d'un courant peut être ponctuel, et ceci fournit toute une classe de courants non réguliers : les courants de Dirac.

Définition 2.26. *Soit* $\xi = \xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_{n-p}$ *un* $(n-p)$*-vecteur tangent en un point* $a \in M$*, c'est-à-dire un élément de degré* $n-p$ *de l'algèbre extérieure* $\Lambda^\bullet(T_a M)$*. Le* **courant de Dirac associé à** ξ *est le* p*-courant* δ_ξ *sur* M *défini par*

$$\forall \omega \in \Omega_c^{n-p}(M), \langle \delta_\xi, \omega \rangle = \omega_a(\xi_1, \ldots, \xi_{n-p}).$$

Lorsque $p = n$*, on note* δ_a *ce* n*-courant, également appelé* **distribution de Dirac en** a*, ou encore* **masse de Dirac en** a*.*

Etant donné que le support de δ_ξ est $\{a\}$, la définition de la dérivée de δ_ξ sur un ouvert de carte ne dépend pas du choix de la carte et ne pose pas de problème de recollement. Autrement dit et plus précisément, si on considère une carte (U, φ) (où U est un ouvert et $\varphi : U \longrightarrow M$ un difféomorphisme de U sur $\varphi(U)$) et un multi-indice $s \in \mathbb{N}^n$, on définit, pour un $(n-p)$-vecteur tangent $\xi \in \Lambda^{n-p}(T_a M)$, le courant $D^s \delta_\xi$ par

$$\langle D^s \delta_\xi, \omega \rangle = \left\langle D^s \delta_{(\varphi^{-1})_*(\xi)}, \varphi^* \omega \right\rangle$$

pour tout $\omega \in \Omega_c^{n-p}(M)$. On peut observer que $\varphi^* \omega$ n'est pas nécessairement à support compact dans U mais coïncide, sur un voisinage de $\varphi^{-1}(a)$ avec une forme de $\Omega_c^{n-p}(U)$, ce qui permet de donner un sens à la définition.

Le courant $D^s \delta_\xi$ ainsi défini dépend bien entendu du choix de la carte (U, φ) de M au voisinage de a. Cependant, pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, l'espace vectoriel engendré par

$$\bigcup \left\{ D^s \delta_\xi : \xi \in \Lambda^{n-p}(T_a M), s \in \mathbb{N}^n, |s| = \ell \right\}$$

ne dépend pas du choix de cette carte.

Le résultat suivant, dû à Laurent Schwartz ([Sch] p.100 théorème XXXV), caractérise les distributions à support ponctuel sur $\mathbb{R}^n$.

Théorème 2.27 [Schwartz]. *Si* T *est une distribution sur* $\mathbb{R}^n$ *à support ponctuel* $\{a\}$*, alors* T *est une combinaison linéaire finie de dérivées de la masse de Dirac* δ_a*.*

Corollaire 2.28. *Si* $T \in \mathcal{C}^p(M)$ *est tel que* $\mathrm{Supp}(T) \subset \{a\}$*, alors* T *est une combinaison linéaire de dérivées de courants de Dirac en* a*.*

Preuve. En se ramenant, *via* une carte, au cas où $M = \mathbb{R}^n$, il suffit de prouver cet énoncé pour les p-courants du type

$$T = S dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}$$

où S est un 0-courant et $(i_1, \ldots, i_p)$ une suite croissante de $\{1, \ldots, n\}$. Notons $(j_1, \ldots, j_{n-p})$ la suite croissante complémentaire de $(i_1, \ldots, i_p)$ dans $\{1, \ldots, n\}$. Alors

$$T \wedge dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_{n-p}}$$

est une distribution dont le support est le même que celui de T. Par le Théorème 2.27, c'est donc une combinaison linéaire de dérivées de δ_a ; c'est, au signe près, la distribution $Sdx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$. Sans perte de généralité, ramenons-nous au cas où cette distribution est égale à $D^s\delta_a$, où $s \in \mathbb{N}^n$ est un multi-indice. En remarquant que

$$\Omega_c^n(\mathbb{R}^n) = \{fdx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n, f \in \Omega_c^0(\mathbb{R}^n)\},$$

résolvons cette équation :

$$\begin{aligned} Sdx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n = D^s\delta_a &\iff \forall f \in \Omega_c^0(\mathbb{R}^n), \langle S, fdx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n\rangle = (-1)^{|s|}D^s f(a) \\ &\iff \forall \omega \in \Omega_c^n(\mathbb{R}^n), \langle S, \omega\rangle = (-1)^{|s|}(D^s\omega)_a\left(\frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \ldots \wedge \frac{\partial}{\partial x_n}\right) \\ &\iff \forall \omega \in \Omega_c^n(\mathbb{R}^n), \langle S, \omega\rangle = \left\langle D^s\delta_{\frac{\partial}{\partial x_1}\wedge\ldots\wedge\frac{\partial}{\partial x_n}}, \omega\right\rangle \end{aligned}$$

ce qui définit S de manière unique. On a donc

$$T = D^s\delta_{\frac{\partial}{\partial x_1}\wedge\ldots\wedge\frac{\partial}{\partial x_n}} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p} = D^s\delta_{\frac{\partial}{\partial x_{j_1}}\wedge\ldots\wedge\frac{\partial}{\partial x_{j_{n-p}}}}.$$

$\square$

4.5. Le morphisme de localisation

Soient M une variété et U un ouvert de M. Pour tout $x \in U$, on a un isomorphisme canonique de T_xU sur T_xM induit par l'inclusion $i : U \hookrightarrow M$, d'où un morphisme de complexes

$$i^* : \Omega^\bullet(M) \longrightarrow \Omega^\bullet(U).$$

C'est la restriction des formes différentielles sur M à U, dont on a déjà largement usé dans les paragraphes précédents et qu'on note généralement avec un symbole de restriction.

Il est possible de prolonger cette restriction aux courants en définissant, pour tout $T \in \mathcal{C}^p(M)$ et tout $\omega \in \Omega_c^{n-p}(U)$:

$$\langle L^p(T), \omega\rangle = \langle T, \widetilde{\omega}\rangle$$

où $\widetilde{\omega}$ est le prolongement de ω défini par $\widetilde{\omega}_{|U} = \omega$ et $\widetilde{\omega}_{|M\setminus U} = 0$. Observons que le fait que $\mathrm{Supp}(\omega)$ soit un compact et que U soit ouvert assure que $\widetilde{\omega} \in \Omega_c^{n-p}(M)$.

On vérifie immédiatement que l'application $L^\bullet : \mathcal{C}^p(M) \longrightarrow \mathcal{C}^p(U)$ est un morphisme de complexes, qu'on appelle **localisation des courants sur** U ou encore **restriction des courants à** U. Il prolonge convenablement la restriction des formes différentielles à U.

Proposition 2.29. *Le noyau de $L^\bullet$ est le sous-complexe $\mathcal{C}^\bullet(M; M\setminus U)$ des courants sur M dont le support est inclus dans $M \setminus U$.*

Preuve. Soient $T \in \mathcal{C}^p(M; M\setminus U)$ et $\omega \in \Omega_c^{n-p}(U)$. On a, avec les notations précédentes, $\mathrm{Supp}(\widetilde{\omega}) = \mathrm{Supp}(\omega) \subset U$. Alors $\mathrm{Supp}(\widetilde{\omega}) \cap \mathrm{Supp}(T) = \varnothing$, d'où $\langle L^p(T), \omega\rangle = 0$, *i.e.* $T \in \ker L^p$.

Réciproquement, soit $T \in \ker L^p$; on a, pour tout $\omega \in \Omega_c^{n-p}(U)$:

$$\langle T, \widetilde{\omega}\rangle = 0.$$

Remarquons que si $\omega \in \Omega_c^{n-p}(M)$ est telle que $\mathrm{Supp}(\omega) \subset U$, on a $\omega = \widetilde{\omega_{|U}}$ avec $\omega_{|U} \in \Omega_c^{n-p}(U)$. On a alors $\mathrm{Supp}(\omega) \subset M \setminus \mathrm{Supp}(T)$.

Comme tout compact K d'intérieur non vide de U peut ainsi être réalisé comme le support d'une forme de $\Omega_c^{n-p}(M)$, on en déduit que $U \subset M \setminus \mathrm{Supp}(T)$, soit $\mathrm{Supp}(T) \subset M \setminus U$.

$\square$

Si un groupe Γ agit sur M et si U est un ouvert Γ-invariant de M, la localisation préserve l'invariance, de sorte que $L^\bullet(\mathcal{C}^\bullet_\Gamma(M)) \subset \mathcal{C}^\bullet_\Gamma(U)$. On obtient alors immédiatement le corollaire suivant.

Corollaire 2.30. *Soient Γ un groupe agissant sur M et U un ouvert Γ-invariant de M. Alors le noyau de la localisation*

$$L^\bullet : \mathcal{C}^\bullet_\Gamma(M) \longrightarrow \mathcal{C}^\bullet_\Gamma(U)$$

est le sous-complexe $\mathcal{C}^\bullet_\Gamma(M; M \setminus U)$ des courants Γ-invariants sur M dont le support est inclus dans $M \setminus U$.

CHAPITRE 3
Les groupes kleinéens

Dans tout ce chapitre, n est un entier supérieur ou égal à 2 et $\mathbb{H}^n$ l'espace hyperbolique réel détaillé au chapitre 1. On commence par rappeler sans démonstration quelques faits bien connus au sujet des isométries hyperboliques, dont on trouvera un exposé détaillé par exemple dans [Ra].

1.— Transformations de Möbius et extension de Poincaré

Soit H un hyperplan affine de $\mathbb{R}^n$. Alors on peut décrire H de la façon suivante, $\langle .|. \rangle$ désignant le produit scalaire euclidien :

$$H = P^{n-1}(a,t) = \{x \in \mathbb{R}^n, \langle a|x \rangle = t\}$$

où $a \in \mathbb{R}^n$ et $t \in \mathbb{R}$ avec $\|a\| = 1$. C'est l'hyperplan passant par le point ta et admettant pour vecteur normal unitaire a. On définit la réflexion par rapport à $P^{n-1}(a,t)$ comme l'application

$$\begin{aligned} \sigma_{P^{n-1}(a,t)} : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\longmapsto x + 2(t - \langle a|x \rangle)a. \end{aligned}$$

D'autre part, pour $a \in \mathbb{R}^n$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$, on note $S^{n-1}(a,r)$ la sphère de centre a et de rayon r :

$$S^{n-1}(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n, \|x - a\| = r\}.$$

On définit alors l'inversion par rapport à $S^{n-1}(a,r)$ comme l'application

$$\begin{aligned} \sigma_{S^{n-1}(a,r)} : \mathbb{R}^n \smallsetminus \{a\} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \smallsetminus \{a\} \\ x &\longmapsto a + r^2 \frac{x-a}{\|x-a\|^2}. \end{aligned}$$

Une sphère de $\mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ est soit une sphère de $\mathbb{R}^n$, soit un hyperplan de $\mathbb{R}^n$ auquel on ajoute ∞ (la topologie reste bien sûr celle d'une sphère). On prolonge les applications précédemment définies à $\mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ en posant :

$$\sigma_{P^{n-1}(a,t)}(\infty) = \infty \qquad \sigma_{S^{n-1}(a,r)}(\infty) = a \qquad \sigma_{S^{n-1}(a,r)}(a) = \infty.$$

On obtient alors les réflexions par rapport à ces sphères $P^{n-1}(a,t)$ ou $S^{n-1}(a,r)$. Ce sont des involutions de $\mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ qui préservent la sphère en question.

Définition 3.1. *Une* **transformation de Möbius** *de $\mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ est une composition finie de réflexions par rapport à des sphères. Autrement dit, l'ensemble des transformations de Möbius est le groupe, noté $M(\mathbb{R}^n \cup \{\infty\})$, engendré par les réflexions par rapport aux sphères de $\mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$.*

Puisque chaque isométrie de $\mathbb{R}^n$ est la composée d'au plus $n+1$ réflexions par rapport à des hyperplans affines, les isométries euclidiennes peuvent être prolongées en tranformations de Möbius de $\mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$. Ainsi, $\mathrm{Iso}(\mathbb{R}^n)$ s'identifie à un sous-groupe de $M(\mathbb{R}^n \cup \{\infty\})$ de transformations fixant ∞. Cependant, on prouve que le sous-groupe de $M(\mathbb{R}^n \cup \{\infty\})$ constitué de toutes les transformations fixant ∞ s'identifie au groupe des similitudes de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$. Rappelons qu'une similitude est une isométrie composée à une homothétie ; en particulier, les homothéties sont elles-mêmes des transformations de Möbius.

En identifiant $\mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ à $(\mathbb{R}^n \times \{0\}) \cup \{\infty\} \subset \mathbb{R}^{n+1} \cup \{\infty\}$, on obtient un morphisme injectif de groupes, appelé **extension de Poincaré** :

$$\begin{aligned} Ext : M(\mathbb{R}^n \cup \{\infty\}) &\longrightarrow M(\mathbb{R}^{n+1} \cup \{\infty\}) \\ \sigma_{P^{n-1}(a,t)} &\longmapsto \sigma_{P^n(a,t)} \\ \sigma_{S^{n-1}(a,r)} &\longmapsto \sigma_{S^n(a,r)}. \end{aligned}$$

Théorème 3.2. *L'image de l'extension de Poincaré est le sous-groupe des transformations de Möbius de $\mathbb{R}^{n+1} \cup \{\infty\}$ préservant le demi-espace supérieur $\mathbb{H}^{n+1}$ et qu'on nomme* **transformations de Möbius de $\mathbb{H}^{n+1}$**. *Toute transformation de Möbius de $\mathbb{H}^{n+1}$ est la composée de réflexions par rapport à des sphères orthogonales à $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire du type $P^n(a,t)$ ou $S^n(a,r)$ avec $a \in \mathbb{R}^n \times \{0\}$.*

Toutes ces définitions peuvent être également vues *via* la conjugaison par l'inversion σ définie au chapitre 1. On obtient alors les **transformations de Möbius de la sphère** $\mathbb{S}^n$, image par σ de $\mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$. L'extension de Poincaré de ces transformations de Möbius de $\mathbb{S}^n$ donne les **transformations de Möbius de la boule** $\mathbb{B}^{n+1}$, qui n'est autre que l'image de $\mathbb{H}^{n+1}$ par σ. Ce sont les composées d'inversions de $\mathbb{R}^{n+1} \cup \{\infty\}$ par rapport à des sphères orthogonales à $\mathbb{S}^n$.

On nommera encore **transformations de Möbius de** $\mathbb{B}^{n+1}$ (resp. $\mathbb{H}^{n+1}$) les applications $\mathbb{B}^{n+1} \to \mathbb{B}^{n+1}$ (resp. $\mathbb{H}^{n+1} \to \mathbb{H}^{n+1}$) induites par ces transformations de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Le lien très fort entre ces transformations de Möbius, construites à l'aide de la géométrie euclidienne, et la géométrie hyperbolique est donné par le théorème suivant.

Théorème 3.3. *Les isométries hyperboliques de $\mathbb{B}^{n+1}$ (resp. $\mathbb{H}^{n+1}$) sont les transformations de Möbius de $\mathbb{B}^{n+1}$ (resp $\mathbb{H}^{n+1}$). Les transformations de Möbius de $\mathbb{S}^n$ sont les transformations conformes de la sphère $\mathbb{S}^n$.*

En particulier, grâce à l'extension de Poincaré, on a des isomorphismes de groupes

$$\mathrm{Iso}(\mathbb{B}^{n+1}) \simeq \mathrm{Iso}(\mathbb{H}^{n+1}) \simeq M(\mathbb{H}^{n+1}) \simeq M(\mathbb{R}^n \cup \{\infty\}) \simeq M(\mathbb{S}^n) \simeq \mathrm{Conf}(\mathbb{S}^n).$$

2.— Définitions

2.1. Groupes kleinéens

Le groupe $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ des matrices 2×2 à coefficients réels et déterminant 1 agit par isométries (holomorphes) sur le plan hyperbolique (vu comme un ouvert de $\mathbb{C}$) à l'aide d'homographies :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}(z) = \frac{az+b}{cz+d}.$$

Le groupe $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ des matrices 2×2 à coefficients complexes et déterminant 1 agit par transformations conformes sur la sphère $\mathbb{C} \cup \{\infty\} \simeq \mathbb{S}^2$ de la même manière.

On note $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ et $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ les quotients respectifs de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ et $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ par leur sous-groupe $\{-I, I\}$.

Enfin, on note $\mathrm{SO}(n-1,1)$ le groupe des transformations de $\mathbb{R}^n$ préservant la forme quadratique de Lorentz

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 - x_n^2$$

et $\mathrm{SO}(n-1,1)_0$ sa composante connexe contenant l'identité.

Le théorème suivant décrit de manière exhaustive le groupe des isométries de l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^n$ $(n \geqslant 2)$ muni de la topologie compacte-ouverte.

Théorème 3.4. *Sur le groupe* $\mathrm{Iso}(\mathbb{H}^n)$*, la topologie compacte-ouverte coïncide avec la topologie de la convergence simple. De plus,*

$$\mathrm{Iso}^+(\mathbb{H}^n) \simeq \mathrm{Conf}^+(\mathbb{S}^{n-1}) \simeq \begin{cases} \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) & \text{si } n=2 \\ \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C}) & \text{si } n=3 \\ \mathrm{SO}(n-1,1)_0 & \text{si } n \geqslant 4. \end{cases}$$

Définition 3.5. *On appelle* **groupe kleinéen** *tout sous-groupe discret du groupe* $\mathrm{Iso}^+(\mathbb{H}^n)$ *des isométries de* $\mathbb{H}^n$ *préservant son orientation.*

Il est à remarquer que l'espace topologique $X = \mathbb{H}^n/\Gamma$ quotient de l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^n$ par l'action d'un groupe kleinéen Γ n'est pas nécessairement muni d'une structure de variété, l'action n'étant pas toujours libre.

On appelle **ensemble fondamental** d'un groupe kleinéen Γ toute partie F de $\mathbb{H}^n$ telle que $\mathbb{H}^n = \bigcup_{\gamma\in\Gamma}\gamma(F)$. Un **domaine fondamental** est un ensemble fondamental F mesurable et tel que presque toute Γ-orbite admet un unique représentant dans F.

Définition 3.6. *Un groupe kleinéen* Γ *est dit* **cocompact** *si l'espace topologique quotient* $X = \mathbb{H}^n/\Gamma$ *est compact.*

Il suffit pour cela que Γ admette un domaine fondamental compact, par exemple l'intérieur d'un polygone hyperbolique dont les sommets sont dans $\mathbb{H}^n$.

2.2. Ensemble limite, domaine de discontinuité

Définition 3.7. *Soit* Γ *un groupe kleinéen. On appelle* **ensemble limite** *de* Γ *la trace de l'adhérence dans* $\mathbb{H}^n \cup \partial\mathbb{H}^n$ *de l'orbite d'un point quelconque* $a \in \mathbb{H}^n$ *sur le bord* $\partial\mathbb{H}^n$ *:*

$$\Lambda_\Gamma = \overline{\Gamma.a} \cap \partial\mathbb{H}^n.$$

Autrement dit, $x \in \partial\mathbb{H}^n$ *est un point de* Λ_Γ *s'il existe une suite* $(\gamma_m)_{m\in\mathbb{N}}$ *dans* Γ *telle que* $(\gamma_m(a))$ *converge vers* x.

On vérifie bien sûr que cette définition ne dépend pas du choix de l'élément $a \in \mathbb{H}^n$.

Le fermé Λ_Γ est lui-même Γ-invariant. Il en est de même de **l'enveloppe convexe de** Λ_Γ, définie comme la réunion des géodésiques de $\mathbb{H}^n$ dont les points à l'infini appartiennent à Λ_Γ.

Définition 3.8. *Un groupe kleinéen* Γ *est dit* **convexe-cocompact** *si* $\mathrm{Card}\,\Lambda_\Gamma \geqslant 2$ *et si le quotient par* Γ *de l'enveloppe convexe de* Λ_Γ *est compact.*

Définition 3.9. *Le* **domaine de discontinuité** *d'un groupe kleinéen* Γ *est le complémentaire dans* $\partial\mathbb{H}^n$ *de son ensemble limite :*

$$D_\Gamma = \partial\mathbb{H}^n \smallsetminus \Lambda_\Gamma.$$

On vérifie facilement que D_Γ est un ouvert de Λ_Γ sur lequel Γ agit proprement discontinûment.

Dans toute la suite de ce travail, un groupe kleinéen Γ étant donné, on appellera simplement «localisation» le morphisme de localisation des courants Γ-invariants sur le domaine de discontinuité de Γ.

D'après le Corollaire 2.30, on a donc une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{C}_\Gamma^\bullet(\partial\mathbb{H}^n;\Lambda_\Gamma) \longrightarrow \mathcal{C}_\Gamma^\bullet(\partial\mathbb{H}^n) \xrightarrow{L^\bullet} \mathcal{C}_\Gamma^\bullet(D_\Gamma).$$

2.3. Exposant critique

Soient Γ un groupe kleinéen, $z \in \mathbb{B}^n$ et $s > 0$. On appelle **série de Poincaré absolue d'exposant s de Γ en z** la série :

$$\Phi_s(z) = \sum_{\gamma\in\Gamma} \|\gamma'(z)\|^s,$$

où $\|.\|$ est la norme d'opérateur. La convergence de cette série ne dépend pas du choix de z et, en cas de convergence, elle est uniforme sur tout compact.

Définition 3.10. *On appelle* **exposant critique de Γ** *le réel*

$$\delta(\Gamma) = \inf\{s > 0, \Phi_s(z) \text{ converge}\}.$$

Le lien entre l'exposant critique et l'ensemble limite est donné par le théorème suivant, dû à Sullivan dans [Su].

Théorème 3.11 [Sullivan]. *Si Γ est un groupe kleinéen convexe-cocompact, son exposant critique est la dimension de Hausdorff de son ensemble limite :*

$$\delta(\Gamma) = \dim_H(\Lambda_\Gamma).$$

De plus, le théorème suivant complète le Corollaire 2.30 concernant la restriction des courants invariants au domaine de discontinuité d'un groupe kleinéen. C'est le résultat central qui sera utilisé au chapitre 4.

Théorème 3.12 [EMM théorème 2.2]. *Si Γ est un groupe kleinéen tel que le quotient D_Γ/Γ est compact, la localisation des courants Γ-invariants sur $\partial\mathbb{H}^n$ de dimension strictement supérieure à $\delta(\Gamma)$ sur D_Γ est surjective ; de sorte que, pour $p < n-1-\delta(\Gamma)$, on a une suite exacte*

$$0 \longrightarrow \mathcal{C}_\Gamma^p(\mathbb{S}^{n-1},\Lambda_\Gamma) \overset{i^p}{\hookrightarrow} \mathcal{C}_\Gamma^p(\mathbb{S}^{n-1}) \xrightarrow{L^p} \mathcal{C}_\Gamma^p(D_\Gamma) \longrightarrow 0.$$

On a de plus le lemme suivant, qui est une généralisation de [EMM] théorème 3.1 concernant la localisation des distributions invariantes sur le domaine de discontinuité. On ne fait ici aucune hypothèse sur le nombre de composantes connexes de D_Γ/Γ.

Lemme 3.13. *Soit Γ un groupe kleinéen tel que (1) $\delta(\Gamma) < 1$, (2) Γ agit librement sur chaque composante connexe de D_Γ et (3) D_Γ/Γ est réunion de compacts disjoints. Alors l'image $\operatorname{Im} L^{n-1}$ de la localisation des distributions Γ-invariantes contient le noyau $\ker\widetilde{\Theta}$ de l'application linéaire*

$$\begin{aligned} \widetilde{\Theta} : \mathcal{C}_\Gamma^{n-1}(D_\Gamma) &\longrightarrow \mathbb{C}^C \\ T &\longmapsto (\langle T, k_c\rangle)_{c\in C} \end{aligned}$$

où C désigne l'ensemble des composantes connexes de D_Γ et, pour $c \in C$, k_c est une fonction de $\Omega^0(D_\Gamma)$ dont le support est contenu dans la composante connexe c et satisfaisant aux conditions du Lemme 2.19.

Preuve. Puisque Γ agit sur chaque composante connexe de D_Γ, on a une bijection canonique b de C sur l'ensemble des composantes connexes de D_Γ/Γ. Pour chaque $c \in C$, on a alors le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}_\Gamma^{n-2}(\mathbb{S}^{n-1}) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "L^{n-2}"'] & \mathcal{C}_\Gamma^{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \arrow[d, "L^{n-1}"] & \\
\mathcal{C}_\Gamma^{n-2}(D_\Gamma) \arrow[r, "d"] & \mathcal{C}_\Gamma^{n-1}(D_\Gamma) \arrow[dr, "\widetilde{\Theta}"] & \\
\mathcal{C}^{n-2}(D_\Gamma/\Gamma) \arrow[r, "d"] \arrow[u, "\pi^!"', "\wr"] & \mathcal{C}^{n-1}(D_\Gamma/\Gamma) \arrow[r, "\theta"] \arrow[u, "\pi^!", "\wr"'] & \mathbb{C}^C.
\end{tikzcd}$$

Rappelons que $\pi^!$ est l'isomorphisme explicité au Corollaire 2.23. L'application θ est l'augmentation des distributions sur chaque composante connexe, définie, pour $T \in \mathcal{C}^{n-1}(D_\Gamma/\Gamma)$, par :

$$\theta(T) = \left(\langle T, \mathbf{1}_{b(c)}\rangle\right)_{c\in C}$$

où $\mathbf{1}_{b(c)}$ désigne la fonction indicatrice de la composante connexe $b(c)$ de D_Γ/Γ. On peut remarquer que $\theta(T)$ est bien défini puisque $b(c)$ est compact. Cette application prolonge l'intégrale des formes différentielles de degré $n-1$ sur chaque composante connexe.

Montrons que ce diagramme est commutatif. Puisque $\pi^!$ et $L^\bullet$ sont des morphismes de complexes, il suffit de prouver que $\widetilde{\Theta} \circ \pi^! = \theta$, ou encore $\theta \circ (\pi^!)^{-1} = \widetilde{\Theta}$. Pour $T \in \mathcal{C}_\Gamma^{n-1}(D_\Gamma)$ et $c \in C$, on a :

$$\begin{aligned}
\left\langle (\pi^!)^{-1}(T), \mathbf{1}_{b(c)}\right\rangle &= \left\langle T, \left((\pi^*)^{-1} \circ r\right)^{-1}(\mathbf{1}_{b(c)})\right\rangle \\
&= \left\langle T, k\pi^*(\mathbf{1}_{b(c)})\right\rangle = \langle T, k\mathbf{1}_c\rangle \\
&= \langle T, k_c\rangle
\end{aligned}$$

ce qui entraîne l'égalité voulue.

Soit maintenant $T \in \ker \widetilde{\Theta}$. Alors $(\pi^!)^{-1}(T) \in \ker \theta$. D'après le théorème de de Rham, la dernière ligne du diagramme est exacte. Il existe donc $S \in \mathcal{C}^{n-2}(D_\Gamma/\Gamma)$ tel que $(\pi^!)^{-1}(T) = dS$. Puisque L^{n-2} est surjective d'après le Théorème 3.12, il existe $S_1 \in \mathcal{C}_\Gamma^{n-2}(\mathbb{S}^{n-1})$ tel que $\pi^!(S) = L^{n-2}(S_1)$. Par commutativité du diagramme, on a alors

$$L^{n-1}(dS_1) = dL^{n-2}(S_1) = d\pi^!(S) = \pi^!(dS) = T$$

de sorte que $T \in \operatorname{Im} L^{n-1}$. $\square$

3.— Les groupes élémentaires

Les plus simples des groupes kleinéens sont les groupes élémentaires. Dans cette section on donne la définition, la classification et les premières propriétés des groupes élémentaires. Leur intérêt majeur pour ce travail est que le quotient X de l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^n$ par un groupe kleinéen élémentaire Γ est toujours non compact et même de volume infini. La conjecture de Borel-Harder est encore ouverte dans ce cas.

On détaille ensuite la construction d'une moyenne qui, sans être liée à la notion de groupe élémentaire, nous permettra de nous restreindre à des situations plus simples.

3.1. Définition et classification

Les définitions et résultats de cette section se trouvent dans [Ra].

Définition 3.14. *Un groupe kleinéen Γ est dit* **élémentaire** *s'il possède une orbite finie dans la clôture $\mathbb{H}^n \cup \partial\mathbb{H}^n$ de l'espace hyperbolique.*

Théorème 3.15. *Un groupe élémentaire Γ est dit :*

- **elliptique** *s'il existe une orbite finie dans $\mathbb{H}^n$. De manière équivalente, il existe un point fixe dans $\mathbb{H}^n$. Ce sont également les sous-groupes finis de $\mathrm{Conf}^+(\mathbb{S}^{n-1})$;*
- **parabolique** *si la seule orbite finie est constituée d'un point fixe sur $\partial\mathbb{H}^n$. De manière équivalente, il est conjugué à un sous-groupe discret infini d'isométries de l'espace euclidien $\mathbb{R}^{n-1}$;*
- **hyperbolique** *s'il n'est ni elliptique ni parabolique. L'orbite finie est alors constituée de deux points de $\partial\mathbb{H}^n$ et un tel groupe contient un sous-groupe monogène d'indice fini.*

On vérifie facilement que l'ensemble limite Λ_Γ est alors :

- vide si Γ est elliptique,
- le point fixe de $\partial\mathbb{H}^n$ si Γ est parabolique,
- les deux points de l'orbite finie sur $\partial\mathbb{H}^n$ si Γ est hyperbolique.

3.2. Moyenne

Soit $(C^\bullet, d)$ un complexe différentiel sur lequel un groupe Γ agit (par morphismes de complexes). Supposons également que Γ_0 soit un sous-groupe d'indice fini de Γ. Posons $h = [\Gamma : \Gamma_0]$ et soit $\{\gamma_1, \dots, \gamma_h\}$ un système de représentants des classes à droite modulo Γ_0.

En notant $C^\bullet_\Gamma$ et $C^\bullet_{\Gamma_0}$ les sous-complexes constitués respectivement des éléments invariants respectivement par Γ et Γ_0, on définit l'application

$$\begin{aligned} m^\bullet : C^\bullet_{\Gamma_0} &\longrightarrow C^\bullet_\Gamma \\ \omega &\longmapsto \frac{1}{h}\sum_{i=1}^{h} \gamma_i \omega. \end{aligned}$$

Lemme 3.16. *L'application $m^\bullet$ est bien définie, ne dépend pas du choix des représentants $\gamma_1, \dots, \gamma_h$ et définit une rétraction de complexes, donc une surjection en cohomologie.*

Preuve. Montrons d'abord l'indépendance par rapport au choix des représentants. Soit $\{\gamma'_1, \dots, \gamma'_h\}$ un autre système de représentants des classes à droite modulo Γ_0. Quitte à permuter ces éléments, on peut supposer que, pour tout $i \in \{1, \dots, h\}$, il existe $\gamma_i^0 \in \Gamma_0$ tel que $\gamma'_i = \gamma_i \gamma_i^0$. Pour $\omega \in C^\bullet_{\Gamma_0}$, on a alors

$$\frac{1}{h}\sum_{i=1}^{h} \gamma'_i \omega = \frac{1}{h}\sum_{i=1}^{h} \gamma_i \gamma_i^0 \omega = \frac{1}{h}\sum_{i=1}^{h} \gamma_i \omega = m^\bullet(\omega).$$

D'autre part, considérons $\gamma \in \Gamma$. Posons, pour tout i, $\gamma'_i = \gamma\gamma_i$. Alors $\gamma_i \mapsto \gamma'_i$ induit une permutation des classes à droite modulo Γ_0, de sorte que $\{\gamma'_1, \dots, \gamma'_h\}$ est encore un système de représentants de ces classes. D'après ce qui précède, on a donc :

$$\gamma\big(m^\bullet(\omega)\big) = \frac{1}{h}\sum_{i=1}^{h} \gamma\gamma_i \omega = \frac{1}{h}\sum_{i=1}^{h} \gamma'_i \omega = m^\bullet(\omega)$$

d'où $m^\bullet(\omega) \in C^\bullet_\Gamma$.

Enfin, si $\omega \in C^\bullet_\Gamma$, on a de plus

$$m^\bullet(\omega) = \frac{1}{h}\sum_{i=1}^{h} \gamma_i \omega = \frac{1}{h}\sum_{i=1}^{h} \omega = \omega.$$

On en conclut donc que $m^\bullet$ est bien une rétraction de complexes de $C^\bullet_{\Gamma_0}$ sur $C^\bullet_\Gamma$.

On a donc une application $m_* : H^\bullet(C^\bullet_{\Gamma_0}) \longrightarrow H^\bullet(C^\bullet_\Gamma)$. Soit $[\omega] \in H^\bullet(C^\bullet_\Gamma)$. Alors $\omega \in C^\bullet_\Gamma \subset C^\bullet_{\Gamma_0}$ et sa classe $[\omega]_0$ dans $H^\bullet(C^\bullet_{\Gamma_0})$ vérifie bien $m_*([\omega]_0) = [m^\bullet(\omega)] = [\omega]$, ce qui prouve la surjectivité de m_*. ∎

3.3. Moyenne dans un groupe élémentaire

Etant donné un groupe élémentaire Γ, on peut, sous certaines conditions, réduire l'étude des objets Γ-invariants à celle des objets invariants par un sous-groupe Γ_0 de Γ d'indice fini qui rend la situation plus simple.

Plus précisément, si Γ est de type hyperbolique, il contient un sous-groupe monogène d'indice fini. Un tel sous-groupe est engendré par une loxodromie de $\mathbb{H}^n$, c'est-à-dire une isométrie hyperbolique fixant deux points de $\partial\mathbb{H}^n$.

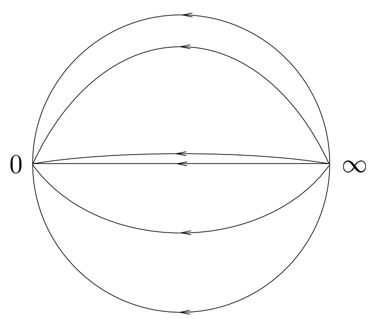
Quitte à conjuguer Γ par une isométrie hyperbolique, on peut se ramener au cas où ces deux points sont 0 (**attracteur**) et ∞ (**repousseur**). Dans ce cas, une telle loxodromie s'écrit

$$\gamma = \gamma_a \circ R$$

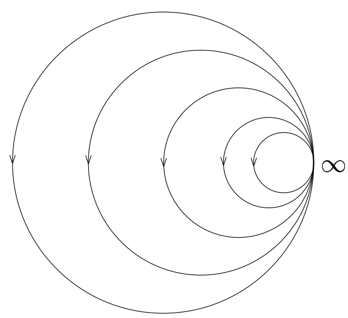
où γ_a est l'homothétie de rapport $a \in]0,1[$ définie dans le demi-espace $\mathbb{H}^n = \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^*_+$ par $\gamma_a(x) = ax$ et $R \in \mathrm{SO}(n-1)$ une transformation orthogonale induisant une application linéaire sur $\mathbb{R}^{n-1}$ et agissant trivialement sur $\mathbb{R}^*_+$.

Il est à remarquer que, pour $n \geqslant 3$, le sous-groupe de $\mathrm{Iso}^+(\mathbb{H}^n)$ engendré par R n'est pas nécessairement discret, on ne peut donc pas faire l'économie de cette transformation orthogonale. Bien sûr, pour $n = 2$, on a $\gamma = \gamma_a$.

Si Γ est de type parabolique, il n'existe pas forcément de sous-groupe monogène d'indice fini pour $n \geqslant 3$. En revanche, Γ contient, à conjugaison près, un sous-groupe abélien libre de rang $p \leqslant n-1$ engendré par des translations selon p vecteurs linéairement indépendants de $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$. Un tel sous-groupe ne sera nécessairement monogène que pour $n = 2$.



Orbites d'une loxodromie de $\mathbb{B}^2$



Orbites d'une translation de $\mathbb{B}^2$

CHAPITRE 4
Courants invariants par un groupe élémentaire

Dans ce chapître, nous mettons à profit les résultats et techniques détaillés aux chapitres précédents pour calculer la cohomologie des espaces de courants invariants par un groupe kleinéen élémentaire.

1.— Cas d'un groupe monogène de type hyperbolique

Un groupe élémentaire de type hyperbolique contient un sous-groupe monogène d'indice fini. On va donc d'abord étudier le cas où un groupe Γ est engendré par une loxodromie $\gamma = \gamma_a \circ R$ où, comme précédemment, γ_a est l'homothétie de rapport $a \in]0,1[$ dans le demi-espace $\mathbb{H}^n$ et $R \in \mathrm{SO}(n-1)$.

Dans toute la suite de cette section, on note Γ le groupe kleinéen engendré par γ. La loxodromie γ fixe les points 0 et ∞, respectivement attracteur et repousseur. L'ensemble limite de Γ est donc $\Lambda_\Gamma = \{0, \infty\}$ et son domaine de discontinuité $D_\Gamma = \mathbb{R}^{n-1} \smallsetminus \{0\}$.

1.1. Courants portés par l'ensemble limite

Lemme 4.1. *Le complexe des courants Γ-invariants sur $\mathbb{S}^{n-1}$ à support dans l'ensemble limite Λ_Γ est concentré en degré $n-1$. Plus précisément, on a :*

$$\mathcal{C}^\bullet_\Gamma(\mathbb{S}^{n-1}, \Lambda_\Gamma) = \mathbb{C}\delta_0 \oplus \mathbb{C}\delta_\infty .$$

Preuve. Considérons $\mathbb{R}^{n-1}$ vu comme carte locale de la sphère $\mathbb{S}^{n-1}$ et caractérisons les courants Γ-invariants portés par $\{0\}$.

D'après le Corollaire 2.28, on sait qu'un p-courant porté par $\{0\}$ est combinaison linéaire de dérivées de p-courants de Dirac en 0. Il reste à voir lesquels de ces courants sont réellement Γ-invariants. Soient $\xi \in \Lambda^{n-1-p}(T_0\mathbb{R}^{n-1})$ un $(n-1-p)$-vecteur et $s = (s_1, \ldots, s_{n-1}) \in \mathbb{N}^{n-1}$ un multi-indice et posons $T = D^s\delta_\xi$ où D^s est l'opérateur de dérivation associé à s. On a alors, pour $\omega \in \Omega^{n-1-p}(\mathbb{R}^{n-1})$:

$$\left\langle (\gamma_a^{-1})^*(D^s\delta_\xi), \omega \right\rangle = \langle D^s\delta_\xi, \gamma_a^*\omega\rangle = (-1)^{|s|} \langle \delta_\xi, D^s(\gamma_a^*\omega)\rangle .$$

Localement, ω s'écrit

$$\omega = \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_{n-1-p} \leqslant n-1} \omega_{i_1 \ldots i_{n-1-p}} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_{n-1-p}} .$$

Or, pour $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ et une fonction $f \in \Omega^0(\mathbb{R}^{n-1})$, on a :

$$\gamma_a^*(dx_i) = d(\gamma_a^* x_i) = d(x_i \circ \gamma_a) = d(ax_i) = a dx_i$$
$$D^s(\gamma_a^* f) = D^s(f \circ \gamma_a) = a^{|s|}(D^s f) \circ \gamma_a$$

Puisque γ_a fixe 0, on a $D^s(f \circ \gamma_a)(0) = D^s f(0)$ d'où :

$$\left\langle (\gamma_a^{-1})^* T, \omega \right\rangle = (-1)^{|s|} a^{n-1-p+|s|} \langle \delta_\xi, D^s\omega\rangle$$

de sorte que $(\gamma_a^{-1})^*T = a^{n-1-p+|s|}T$.

Ainsi, pour toute forme $\omega \in \Omega^{n-1-p}(\mathbb{R}^{n-1})$, on a :

$$\left\langle (\gamma^{-1})^*T, \omega \right\rangle = a^{n-1-p+|s|} \left\langle T, (R^{-1})^*\omega \right\rangle .$$

En choisissant une forme ω qui soit R-invariante et telle que $\langle T, \omega\rangle \neq 0$, l'invariance de T s'écrit $a^{n-1-p+|s|} = 1$, soit $p = n-1$ et $s = 0$; c'est-à-dire que $T = \delta_0$. Réciproquement, les multiples de δ_0 sont bien Γ-invariants.

Considérons le changement de cartes involutif

$$\begin{aligned} \phi = \phi_2 \circ \phi_1^{-1} : \mathbb{R}^{n-1} &\longrightarrow \mathbb{R}^{n-1} \\ x &\longmapsto \frac{x}{\|x\|^2} \end{aligned}$$

(*cf.* p. 14). L'étude des courants Γ-invariants portés par $\{\infty\}$ revient alors à caractériser les dérivées des courants de Dirac en 0 invariants par la transformation $\widehat{\gamma} = \phi \circ \gamma \circ \phi$.

Pour $x \in \mathbb{R}^{n-1}$, on a :

$$\begin{aligned} \widehat{\gamma}(x) &= \phi\left(aR\left(\frac{x}{\|x\|^2}\right)\right) = \phi\left(\frac{a}{\|x\|^2}R(x)\right) \\ &= \frac{\frac{a}{\|x\|^2}R(x)}{\left\|\frac{a}{\|x\|^2}R(x)\right\|^2} = \frac{\frac{a}{\|x\|^2}R(x)}{\frac{a^2}{\|x\|^4}\|R(x)\|^2} = \frac{1}{a}R(x) \end{aligned}$$

d'où $\widehat{\gamma} = \gamma_a^{-1} \circ R$. Dans le calcul précédent, on peut donc remplacer a par a^{-1}, ce qui fournit cependant le même résultat. On en conclut donc que les seuls courants Γ-invariants portés par $\{\infty\}$ sont les multiples de δ_∞. □

1.2. Courants sur le domaine de discontinuité

Nous aurons besoin par la suite de travailler en coordonnées sphériques. Considérons donc le difféomorphisme

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^{n-1} \smallsetminus \{0\} &\xrightarrow{\sim} \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{S}^{n-2} \\ x &\longmapsto (\pi_1(x), \pi_2(x)) = \left(\|x\|, \frac{x}{\|x\|}\right). \end{aligned}$$

Ceci permet de définir un 1-courant qui sera particulièrement important pour la suite.

Définition 4.2. *Pour $\varphi \in \Omega^{n-2}(\mathbb{S}^{n-1})$, on pose :*

$$\langle Vp, \varphi\rangle = \begin{cases} \lim\limits_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \displaystyle\int_{[-\frac{1}{\varepsilon}, -\varepsilon] \cup [\varepsilon, \frac{1}{\varepsilon}]} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx & \textit{si } n = 2 \\ \displaystyle\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \pi_1^*\left(\frac{dr}{r}\right) \wedge \varphi & \textit{si } n \geqslant 3 \end{cases}$$

Lemme 4.3. *Cette expression définit un 1-courant Γ-invariant Vp.*

Preuve. Supposons d'abord $n = 2$: Vp est la **valeur principale de Cauchy**. Soit $\varphi \in \Omega^0(\mathbb{R}^{n-1} \cup \{\infty\})$. Considérons les développements limités de φ aux voisinages respectifs de 0 et ∞ :

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + x\epsilon_1(x) \qquad\qquad \varphi(x) = b_0 + \frac{b_1}{x} + \frac{1}{x}\epsilon_2(x)$$

où $a_0, a_1, b_0, b_1 \in \mathbb{C}$ et ϵ_1, ϵ_2 sont des fonctions de limite nulle en 0 et ∞ respectivement. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$; à l'aide d'un changement de variable, on a :

$$\int_{[-\frac{1}{\varepsilon},-\varepsilon]\cup[\varepsilon,\frac{1}{\varepsilon}]} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx = \int_{\varepsilon}^{\frac{1}{\varepsilon}} \frac{\varphi(x)+\varphi(-x)}{x}\,dx = I_0 + I_\infty$$

où

$$I_0 = \int_{\varepsilon}^{1} \frac{\varphi(x)+\varphi(-x)}{x}\,dx \quad \text{et} \quad I_\infty = \int_{1}^{\frac{1}{\varepsilon}} \frac{\varphi(x)+\varphi(-x)}{x}\,dx.$$

A l'aide des développements limités ci-dessus, on a alors :

$$I_0 = 2a_1(1-\varepsilon) + \int_{\varepsilon}^{1} (\epsilon_1(x)+\epsilon_1(-x))\,dx \qquad I_\infty = 2b_1(1-\varepsilon) + \int_{1}^{\frac{1}{\varepsilon}} \frac{\epsilon_2(x)+\epsilon_2(-x)}{x^2}\,dx.$$

Comme les fonctions ϵ_1 et ϵ_2 sont bornées respectivement aux voisinages de 0 et ∞, les intégrales intervenant dans ces écritures ont une limite finie lorsque $\varepsilon \to 0$. Il en est donc de même de $I_0 + I_\infty$. Ceci prouve que l'expression $\langle V_p, \varphi\rangle$ a un sens pour toute fonction φ. La linéarité de Vp est évidente.

Soit maintenant une suite $(\varphi_m)_{m\in\mathbb{N}}$ dans $\Omega^0(\mathbb{S}^1)$ convergeant vers 0 au sens de la topologie C^∞ de Schwartz. Comme $\mathbb{S}^1$ est compact, cela revient à dire que pour tout $s \in \mathbb{N}$, la suite $(\varphi_m^{(s)})_{m\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0. En considérant les développements limités de φ_m aux voisinages respectifs de 0 et ∞

$$\varphi_m(x) = a_0^m + a_1^m x + x\epsilon_1^m(x) \qquad \varphi(x) = b_0^m + \frac{b_1^m}{x} + \frac{1}{x}\epsilon_2^m(x)$$

on a, en reprenant l'expression précédente :

$$\langle Vp, \varphi_m\rangle = 2a_1^m + 2b_1^m + \int_0^1 (\epsilon_1^m(x)+\epsilon_1^m(-x))\,dx + \int_1^{+\infty} \frac{\epsilon_2^m(x)+\epsilon_2^m(-x)}{x^2}\,dx.$$

Comme les suites (ϵ_1^m) et (ϵ_2^m) convergent uniformément vers 0, les intégrales convergent vers 0. Les suites (a_1^m) et (b_1^m) convergent elles aussi vers 0 donc $(\langle Vp, \varphi_m\rangle)$ converge vers 0. Ceci prouve la continuité de la forme linéaire Vp, et montre donc que $Vp \in \mathcal{C}^1(\mathbb{S}^1)$.

Montrons maintenant que Vp est Γ-invariant. On a, pour $\varphi \in \Omega^0(\mathbb{S}^1)$:

$$\langle Vp, \varphi\circ\gamma_a\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\varepsilon}^{\frac{1}{\varepsilon}} \frac{\varphi(ax)+\varphi(-ax)}{x}\,dx$$

d'où, par changement de variable :

$$\langle Vp, \varphi\circ\gamma_a\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{a\varepsilon}^{\frac{1}{a\varepsilon}} \frac{\varphi(x)+\varphi(-x)}{x}\,dx = \langle Vp, \varphi\rangle$$

de sorte que $Vp \in \mathcal{C}^1_\Gamma(\mathbb{S}^1)$. Ceci conclut l'étude du cas $n = 2$.

Supposons maintenant $n \geqslant 3$ et soit $\varphi \in \Omega^{n-2}(\mathbb{S}^{n-1})$. Dans $\mathbb{R}^{n-1}$ vu comme carte locale de $\mathbb{S}^{n-1}$ au voisinage de 0, on peut écrire :

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n-1} \varphi_i\, dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \ldots \wedge dx_{n-1}$$

où les φ_i sont des fonctions. Puisque

$$\pi_1^*\left(\frac{dr}{r}\right) = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} x_i\,dx_i}{\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2}$$

il s'agit de prouver l'intégrabilité au voisinage de 0 de la fonction

$$\psi : x \longmapsto \frac{\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{i-1}x_i\varphi_i(x)}{\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2}.$$

Pour cela, nous allons utiliser les coordonnées sphériques, qui ont pour expression :

$$\begin{cases} x_1 & = & r\cos\theta_1\cos\theta_2\ldots\cos\theta_{n-3}\cos\theta_{n-2} \\ x_2 & = & r\cos\theta_1\cos\theta_2\ldots\cos\theta_{n-3}\sin\theta_{n-2} \\ \vdots & & \iddots \\ x_{n-2} & = & r\cos\theta_1\sin\theta_2 \\ x_{n-1} & = & r\sin\theta_1 \end{cases}$$

et dont le jacobien est $r^{n-2}\cos^{n-3}\theta_1\cos^{n-4}\theta_2\ldots\cos\theta_{n-3}$. On obtient l'expression suivante (en adoptant la convention $\theta_{n-1} = \frac{\pi}{2}$) :

$$\psi(x) = r^{n-3}\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{i-1}\cos\theta_1\ldots\cos\theta_{n-i-1}\sin\theta_{n-i}\cos^{n-3}\theta_1\cos^{n-4}\theta_2\ldots\cos\theta_{n-3}\varphi_i(x).$$

Puisque $n \geqslant 3$, cette fonction est intégrable au voisinage de 0.

En remarquant que la 1-forme $\pi_1^*(\frac{dr}{r})$ est changée en son opposée par l'inversion $\phi : x \longmapsto \frac{x}{\|x\|^2}$, l'intégrabilité au voisinage de 0 de la forme

$$\phi^*\left(\pi_1^*\left(\frac{dr}{r}\right)\wedge\varphi\right) = -\pi_1^*\left(\frac{dr}{r}\right)\wedge\phi^*\varphi$$

découle de ce qui précède, et entraîne l'intégrabilité de $\pi_1^*(\frac{dr}{r})\wedge\varphi$ au voisinage de ∞. L'expression $\langle Vp,\varphi\rangle$ a donc un sens. La linéarité de Vp est encore évidente.

Soit $(\varphi_m)_{m\in\mathbb{N}}$ une suite de $(n-2)$-formes sur $\mathbb{S}^{n-1}$ convergeant vers 0 au sens de la topologie C^∞ de Schwartz. Alors la suite

$$\left(\pi_1^*\left(\frac{dr}{r}\right)\wedge\varphi_m\right)_{m\in\mathbb{N}}$$

converge uniformément vers 0 sur $\mathbb{S}^{n-1}$, donc $(\langle Vp,\varphi_m\rangle)_{m\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. Ceci prouve la continuité de Vp.

Montrons maintenant que Vp est Γ-invariant. Pour $\varphi\in\Omega^{n-2}(\mathbb{S}^{n-1})$, et un difféomorphisme f de $\mathbb{S}^{n-1}$, on a :

$$\begin{aligned}\langle Vp, f^*\varphi\rangle &= \int_{\mathbb{S}^{n-1}}(f^{-1}\circ f)^*\circ\pi_1^*\left(\frac{dr}{r}\right)\wedge f^*\varphi = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} f^*\left((f^{-1})^*\circ\pi_1^*\left(\frac{dr}{r}\right)\wedge\varphi\right)\\ &= \int_{f^{-1}(\mathbb{S}^{n-1})}(\pi_1\circ f^{-1})^*\left(\frac{dr}{r}\right)\wedge\varphi\end{aligned}$$

avec bien sûr $f^{-1}(\mathbb{S}^{n-1}) = \mathbb{S}^{n-1}$. Pour $f = \gamma_a$, on peut remarquer que $\pi_1\circ\gamma_a^{-1} = \gamma_a^{-1}\circ\pi_1$, en désignant encore par γ_a l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ x & \longmapsto & ax. \end{array}$$

La 1-forme $\frac{dr}{r}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ étant γ_a-invariante, on a :

$$\langle Vp,\gamma_a^*\varphi\rangle = \int_{\mathbb{S}^{n-1}}\pi_1^*\left((\gamma_a^{-1})^*\left(\frac{dr}{r}\right)\right)\wedge\varphi = \int_{\mathbb{S}^{n-1}}\pi_1^*\left(\frac{dr}{r}\right)\wedge\varphi = \langle Vp,\varphi\rangle\,.$$

Pour $f = R$, on a $\pi_1\circ R = \pi_1$ donc la R-invariance de Vp est vérifiée. Le 1-courant Vp est invariant par les actions de γ_a et de R, il l'est donc par celle de $\gamma = \gamma_a\circ R$ $\square$

1.3. Calcul de l'exposant critique

Pour appliquer le Théorème 3.12, on a besoin de connaître l'exposant critique du groupe Γ. Le groupe Γ étant convexe-cocompact, le Théorème 3.11 s'applique et on a $\delta(\Gamma) = 0$. Nous en proposons cependant un calcul à la main.

Lemme 4.4. *Pour $\Gamma = \langle\gamma\rangle$, avec $\gamma = \gamma_a \circ R$, on a $\delta(\Gamma) = 0$.*

Preuve. On a besoin de l'expression de cette loxodromie dans la boule $\mathbb{B}^n$. On pose donc $\varphi = \sigma \circ \gamma \circ \sigma$ où σ est l'inversion définie à la Proposition 1.13.

On a $\varphi = \sigma \circ \gamma_a \circ R \circ \sigma$ donc

$$d\varphi_0 = d\sigma_{\gamma_a \circ R \circ \sigma(0)} \circ (d\gamma_a)_{R\circ\sigma(0)} \circ dR_{\sigma(0)} \circ d\sigma_0$$

avec $\sigma(0) = e_n$, $R(e_n) = e_n$, $\gamma_a(e_n) = ae_n$, $(e_1, \dots, e_n)$ désignant la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Puisque $\sigma(x) = 2\frac{x+e_n}{\|x+e_n\|^2} - e_n$, on a, en notant $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$:

$$\frac{\partial\sigma}{\partial x_i}(x) = \begin{cases} 2\dfrac{\|x+e_n\|^2 e_i - 2x_i(x+e_n)}{\|x+e_n\|^4} & \text{si } i < n \\ 2\dfrac{\|x+e_n\|^2 e_n - 2(x_n+1)(x+e_n)}{\|x+e_n\|^4} & \text{si } i = n \end{cases} \qquad \text{d'où} \qquad \frac{\partial\sigma}{\partial x_i}(0) = \begin{cases} 2e_i & \text{si } i < n \\ -2e_n & \text{si } i = n \end{cases}$$

de sorte que la jacobienne de σ en 0 est $2A$ où $A = \begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Comme les applications R et γ_a sont des endomorphismes de $\mathbb{R}^n$, on a $dR_{e_n} = R$ et $(d\gamma_a)_{e_n} = \gamma_a = a\,\mathrm{id}$. Il reste donc à calculer $d\sigma_{ae_n}$. En reprenant les expressions précédentes, on a :

$$\frac{\partial\sigma}{\partial x_i}(ae_n) = \begin{cases} \dfrac{2}{(a+1)^2}e_i & \text{si } i < n \\ -\dfrac{2}{(a+1)^2}e_n & \text{si } i = n \end{cases}$$

d'où $\mathrm{Jac}_{ae_n}\,\sigma = \frac{2}{(a+1)^2}A$.

On a donc

$$\begin{aligned} \mathrm{Jac}_0\,\varphi &= \frac{2}{(a+1)^2}\begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} aI \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} 2 \begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{4a}{(a+1)^2}R. \end{aligned}$$

Comme $R \in SO(n-1)$, on a bien sûr $\|R\| = 1$ d'où $\|d\varphi_0\| = \frac{4a}{(a+1)^2}$. L'expression de $\|d\varphi_0^m\|$ pour $m \in \mathbb{Z}$ s'obtient alors en remplaçant a par a^m :

$$\|d\varphi_0^m\| = \frac{4a^m}{(a^m+1)^2} = \frac{4a^{-m}}{(1+a^{-m})^2}.$$

Si $m \to +\infty$, $a^{-m} \to +\infty$. Si $m \to -\infty$, $a^m \to +\infty$. Dans les deux cas, on a, pour tout $s > 0$:

$$\|d\varphi_0^m\|^s \sim 4^s a^{|m|s}$$

qui est le terme général d'une série géométrique convergente pour tout $s > 0$ puisque $a \in]0,1[$. On en déduit donc que $\delta(\Gamma) = 0$. □

De ce calcul et du Théorème 3.12 résulte que la localisation des p-courants Γ-invariants de degré strictement inférieur à $n - 1 - \delta(\Gamma) = n - 1$ est surjective. Il reste donc à déterminer l'image de la localisation des courants Γ-invariants de degré $n-1$, c'est-à-dire des distributions invariantes. C'est l'objet de la proposition suivante.

Proposition 4.5. *L'image* $\operatorname{Im} L^{n-1}$ *de la localisation des distributions* Γ*-invariantes sur* $\mathbb{S}^{n-1}$ *est le noyau de la forme linéaire*

$$\widehat{\theta} = \begin{cases} \widetilde{\Theta} & \text{si } n \geqslant 3 \\ \widehat{\theta}_+ - \widehat{\theta}_- & \text{si } n = 2 \end{cases}$$

où $\widehat{\theta}_+$ *et* $\widehat{\theta}_-$ *désignent les deux composantes de* $\widetilde{\Theta}$ *lorsque* $n = 2$ *(cf. Lemme 3.13), correspondant aux deux composantes connexes* $\mathbb{R}_+^*$ *et* $\mathbb{R}_-^*$ *de* $D_\Gamma = \mathbb{R}^*$.

Preuve. Le cas $n \geqslant 3$ est couvert par [EMM] théorème 3.2 ; nous en reproduisons ici la démonstration avant de l'adapter au cas où $n = 2$.

L'action de Γ sur chaque composante connexe de D_Γ est libre et le quotient $D_\Gamma/\Gamma \simeq \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^{n-2}$ est réunion de compacts disjoints donc d'après le Lemme 3.13, on a

$$\ker \widetilde{\Theta} \subset \operatorname{Im} L^{n-1}.$$

Supposons $n \geqslant 3$. Alors D_Γ est connexe, donc $\widetilde{\Theta}$ est une forme linéaire et $\ker \widetilde{\Theta}$ est un hyperplan de $\mathcal{C}_\Gamma^{n-1}(D_\Gamma)$. Pour montrer l'inclusion réciproque, il suffit donc de prouver qu'un générateur d'un supplémentaire de $\ker \widetilde{\Theta}$ n'appartient pas à $\operatorname{Im} L^{n-1}$.

Soit $x \in D_\Gamma$; on pose

$$T = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \delta_{\gamma^m(x)}.$$

Comme le support d'une fonction $f \in \Omega_c^0(D_\Gamma)$ est compact, il ne rencontre qu'un nombre fini d'éléments de la γ-orbite de x (qui est discrète) ; de sorte que T définit bien une distribution sur D_Γ. De plus, on a :

$$\langle T, f \circ \gamma \rangle = \sum_{m \in \mathbb{Z}} f \circ \gamma(\gamma^m(x)) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} f \circ \gamma^{m+1}(x) = \langle T, f \rangle\,,$$

c'est-à-dire que $T \in \mathcal{C}_\Gamma^{n-1}(D_\Gamma)$. Posons alors

$$S = \delta_x + \sum_{m \in \mathbb{Z}_+^*} (\delta_{\gamma^m(x)} - \delta_0) + \sum_{m \in \mathbb{Z}_-^*} (\delta_{\gamma^m(x)} - \delta_\infty).$$

Pour montrer que S est une distribution bien définie sur $\mathbb{S}^{n-1}$, il faut montrer que les séries définissant $\langle S, \varphi \rangle$ convergent pour toute fonction $\varphi \in \Omega^0(\mathbb{S}^{n-1})$.

Considérons la carte locale $(\mathbb{R}^{n-1}, \phi_1)$ (*cf.* p. 14) de $\mathbb{S}^{n-1}$ au voisinage de 0 et notons $\widetilde{\varphi} = \varphi \circ \phi_1$. Pour $h = \phi_1(\widetilde{h})$, on a :

$$|\varphi(h) - \varphi(0)| = |\widetilde{\varphi}(\widetilde{h}) - \widetilde{\varphi}(0)| \leqslant |d\widetilde{\varphi}_0.\widetilde{h} + \|\widetilde{h}\|\varepsilon(\widetilde{h})|$$

où ε est une fonction de limite nulle en 0. En particulier, pour h suffisamment proche de 0, on a :

$$|\varphi(h) - \varphi(0)| \leqslant (\|d\widetilde{\varphi}_0\| + 1)\|\widetilde{h}\|.$$

Pour $h = \gamma^m(x)$, on a $\|\widetilde{h}\| = a^m\|x\|$ de sorte que, pour $m \in \mathbb{N}$ assez grand :

$$|\varphi(\gamma^m(x)) - \varphi(0)| \leqslant a^m\|x\|\big(\|d\varphi_0\| + 1\big)$$

qui est le terme général d'une série géométrique convergente. On en déduit la convergence absolue de la première série dans l'expression de $\langle S, \varphi \rangle$.

Comme on l'a vu dans la démonstration du Lemme 4.1, conjuguer γ par le changement de carte $\phi_1^2 = \phi_2 \circ \phi_1^{-1}$ revient à remplacer a par a^{-1}. Le calcul précédent appliqué à $\varphi \circ \phi_1^2$

assure la convergence de la sommation sur $m \in \mathbb{Z}_-^*$. La forme linéaire S sur $\Omega^0(\mathbb{S}^{n-1})$ est donc bien définie.

Soit $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\Omega^0(\mathbb{S}^{n-1})$ convergeant vers 0 au sens de la topologie C^∞ de Schwartz. On a :

$$|\langle S,\varphi_k\rangle| \leqslant |\varphi_k(x)| + \sum_{m\in\mathbb{Z}_+^*}\left|\varphi_k(\gamma^m(x)) - \varphi_k(0)\right| + \sum_{m\in\mathbb{Z}_-^*}\left|\varphi_k(\gamma^m(x)) - \varphi_k(\infty)\right|$$

où tous les termes tendent uniformément vers 0. La forme linéaire S est donc continue ; on a $S \in \mathcal{C}^{n-1}(\mathbb{S}^{n-1})$.

Cependant S n'est pas Γ-invariante : pour $\varphi \in \Omega^0(\mathbb{S}^{n-1})$,

$$\begin{aligned}
\langle S, \varphi\circ\gamma - \varphi\rangle &= \varphi(\gamma(x)) - \varphi(x) + \sum_{m\in\mathbb{Z}_+^*}\left[\big(\varphi(\gamma^{m+1}(x)) - \varphi(0)\big) - \big(\varphi(\gamma^m(x)) - \varphi(0)\big)\right] \\
&\quad + \sum_{m\in\mathbb{Z}_-^*}\left[\big(\varphi(\gamma^{m+1}(x)) - \varphi(\infty)\big) - \big(\varphi(\gamma^m(x)) - \varphi(\infty)\big)\right] \\
&= \sum_{m\in\mathbb{Z}}\big(\varphi(\gamma^{m+1}(x)) - \varphi(\gamma^m(x))\big) \\
&= \lim_{M\to\infty}\sum_{m=-M}^{M-1}\big(\varphi(\gamma^{m+1}(x)) - \varphi(\gamma^m(x))\big) = \lim_{M\to\infty}\big(\varphi(\gamma^M(x)) - \varphi(\gamma^{-M}(x))\big) \\
&= \varphi(0) - \varphi(\infty)
\end{aligned}$$

d'où $\gamma_* S - S = \delta_0 - \delta_\infty$.

Supposons que $T \in \mathrm{Im}(L^{n-1})$. Alors il existe une distribution $S_1 \in \mathcal{C}_\Gamma^{n-1}(\mathbb{S}^{n-1})$ telle que $T = L^{n-1}(S_1)$. Posons $U = S_1 - S$. Comme S_1 et S coïncident sur toute fonction $\varphi \in \Omega^0(\mathbb{S}^{n-1})$ telle que $\mathrm{Supp}(\varphi) \subset D_\Gamma$, on a $\mathrm{Supp}(U) \subset \{0,\infty\}$. De plus, $\gamma_* U - U = \gamma_* S - S - (\gamma_* S_1 - S_1) = \delta_0 - \delta_\infty$.

Soit $g \in \Omega^0(\mathbb{S}^{n-1})$ une fonction localisante égale à 1 sur un voisinage de 0 et à 0 sur un voisinage de ∞. On a alors, puisque γ fixe chaque point de $\mathrm{Supp}(U)$, $\langle U, g\circ\gamma\rangle = \langle U, g\rangle$, d'où

$$0 = \langle \gamma_* U - U, g\rangle = \langle \delta_0 - \delta_\infty, g\rangle = 1$$

ce qui est absurde et prouve que $T \notin \ker L^{n-1}$.

On a, d'autre part,

$$\widetilde{\Theta}(T) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} k(\gamma^m(x)) = 1$$

d'où $\mathcal{C}^{n-1}(D_\Gamma) = \ker\widetilde{\Theta} \oplus \mathbb{C}T$. On a donc l'égalité voulue.

Il reste le cas $n = 2$ à examiner. Dans ce cas, $\widetilde{\Theta}$ est à valeurs dans $\mathbb{C}^2$. On a $\ker\widetilde{\Theta} \subset \ker\widehat{\theta}$ et, plus précisément,

$$\ker\widehat{\theta} = \ker\widetilde{\Theta} \oplus \mathbb{C}\,\frac{dx}{x}.$$

En effet, $\dfrac{dx}{x} \in \Omega_\Gamma^1(\mathbb{R}^*) \subset \mathcal{C}_\Gamma^1(\mathbb{R}^*)$, $\ker\widetilde{\Theta}$ est de codimension 1 dans $\ker\widehat{\theta}$ et

$$\widehat{\theta}_+\left(\frac{dx}{x}\right) = \int_{\mathbb{R}^*}\frac{k_+(x)}{x}dx > 0,$$

mais, avec $k_-(x) = k_+(-x)$ on a clairement

$$\widehat{\theta}\left(\frac{dx}{x}\right) = \int_{\mathbb{R}^*}\frac{k_+(x)}{x}\,dx - \int_{\mathbb{R}^*}\frac{k_-(x)}{x}\,dx = 0.$$

On a de plus $\dfrac{dx}{x} = L^1(Vp)$, ce qui montre que $\mathbb{C}\frac{dx}{x} \subset \operatorname{Im} L^1$, et

$$\ker \widehat{\theta} \subset \operatorname{Im} L^1.$$

Pour l'inclusion réciproque considérons

$$T = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \delta_{a^m}.$$

Puisque $\widehat{\theta}(T) = 1$, la distribution T engendre un supplémentaire de $\ker\widehat{\theta}$. Les arguments développés dans le cas $n \geqslant 3$ précédent peuvent être repris sans modification pour prouver la bonne définition de T, sa continuité et le fait qu'elle ne se prolonge pas de manière Γ-invariante en 0 et ∞. ∎

1.4. Cohomologie des courants invariants sur $\mathbb{S}^{n-1}$

Le théorème suivant utilise les outils mis en place dans les sections précédentes et constitue le résultat central de ce travail.

Théorème 4.6. *La cohomologie des courants Γ-invariants sur $\partial\mathbb{H}^n$ est :*

$$H^p\big(\mathcal{C}_\Gamma^\bullet(\mathbb{S}^1)\big) = \begin{cases} \mathbb{C}[\mathbf{1}] & \textit{si } p=0 \\ \mathbb{C}[Vp] \oplus \mathbb{C}[\delta_0+\delta_\infty] & \textit{si } p=1 \\ 0 & \textit{sinon} \end{cases}$$

$$H^p\big(\mathcal{C}_\Gamma^\bullet(\mathbb{S}^{n-1})\big) = \begin{cases} \mathbb{C}[\mathbf{1}] & \textit{si } p=0 \\ \mathbb{C}[Vp] & \textit{si } p=1 \\ \mathbb{C}[\delta_0+\delta_\infty] & \textit{si } p=n-1 \\ 0 & \textit{sinon.} \end{cases} \qquad (n \geqslant 3)$$

Preuve. D'après le Lemme 4.4 et le Théorème 3.12, on sait que, pour $p < n-1$ la localisation L^p est surjective. La Proposition 4.5 donne l'image de la localisation des distributions L^{n-1}.

Nous sommes donc dans la situation du diagramme commutatif suivant, dans lequel les lignes sont des suites exactes et les colonnes des complexes différentiels :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & C^0 & \xhookrightarrow{i^0} & S^0 & \xrightarrow{L^0} & Q^0 & \longrightarrow & 0 \\
 & & {\scriptstyle d}\downarrow & & {\scriptstyle d}\downarrow & & {\scriptstyle d}\downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & C^1 & \xhookrightarrow{i^1} & S^1 & \xrightarrow{L^1} & Q^1 & \longrightarrow & 0 \\
 & & {\scriptstyle d}\downarrow & & {\scriptstyle d}\downarrow & & {\scriptstyle d}\downarrow & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
 & & {\scriptstyle d}\downarrow & & {\scriptstyle d}\downarrow & & {\scriptstyle d}\downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & C^{n-2} & \xhookrightarrow{i^{n-2}} & S^{n-2} & \xrightarrow{L^{n-2}} & Q^{n-2} & \longrightarrow & 0 \\
 & & {\scriptstyle d}\downarrow & & {\scriptstyle d}\downarrow & & {\scriptstyle d}\downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & C^{n-1} & \xhookrightarrow{i^{n-1}} & S^{n-1} & \xrightarrow{L^{n-1}} & Q^{n-1} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

où les complexes $C^\bullet$, $S^\bullet$ et $Q^\bullet$ sont définis par :

$$C^p = \mathcal{C}_\Gamma^p(\mathbb{S}^{n-1}, \Lambda_\Gamma) \qquad S^p = \mathcal{C}_\Gamma^p(\mathbb{S}^{n-1}) \qquad Q^p = \begin{cases} \mathcal{C}_\Gamma^p(D_\Gamma) & \text{si } p \neq n-1 \\ \ker\widehat{\theta} & \text{si } p = n-1. \end{cases}$$

Pour montrer que $Q^\bullet$ est bien un complexe différentiel, il faut encore prouver que $d(Q^{n-2}) \subset Q^{n-1}$. Il suffit de vérifier que, pour $T \in Q^{n-2}$, $\widetilde{\Theta}(dT) = 0$.

Pour toute fonction k vérifiant le Lemme 2.19, la somme

$$\sum_{\gamma\in\Gamma} k \circ \gamma = \mathbf{1}$$

est localement finie, donc

$$\sum_{\gamma\in\Gamma} \gamma^*(dk) = \sum_{\gamma\in\Gamma} d(k\circ\gamma) = 0.$$

On a donc, pour un $(n-2)$-courant Γ-invariant $T \in Q^{n-2}$,

$$0 = \sum_{\gamma\in\Gamma} \langle T, \gamma^*(dk)\rangle = \sum_{\gamma\in\Gamma} \langle T, dk\rangle$$

d'où $\widetilde{\Theta}(dT) = 0$, et $dT \in Q^{n-1}$.

En appliquant le lemme du serpent (Proposition 2.3) au diagramme ci-dessus, on obtient une suite exacte longue en cohomologie :

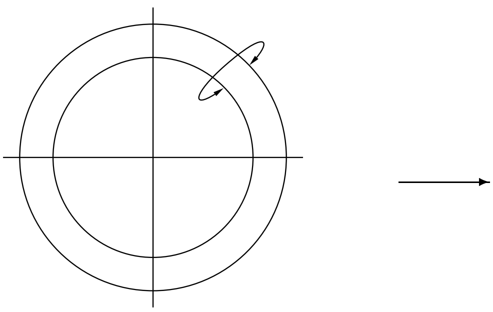
$$0 \longrightarrow H^0(C^\bullet) \xrightarrow{i^0_*} H^0(S^\bullet) \xrightarrow{L^0_*} H^0(Q^\bullet) \xrightarrow{c^0} H^1(C^\bullet) \xrightarrow{i^1_*} \cdots$$
$$\cdots \xrightarrow{c^{n-2}} H^{n-1}(C^\bullet) \xrightarrow{i^{n-1}} H^{n-1}(S^\bullet) \xrightarrow{L^{n-1}} H^{n-1}(Q^\bullet) \longrightarrow 0.$$

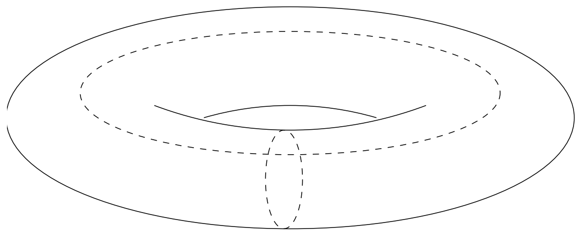
D'après le Lemme 4.1, on a $C^p = \mathbb{C}\delta_0 \oplus \mathbb{C}\delta_\infty$ si $p = n-1$ et 0 sinon. On en déduit donc que $H^p(C^\bullet) = \mathbb{C}[\delta_0] \oplus \mathbb{C}[\delta_\infty]$ si $p = n-1$ et 0 sinon.

D'autre part, l'action de Γ sur D_Γ est libre, propre et discontinue ; donc d'après le Corollaire 2.23 et le théorème de de Rham (Théorème 2.16), la cohomologie du complexe $\mathcal{C}^\bullet_\Gamma(D_\Gamma)$ est isomorphe à la cohomologie de de Rham du quotient D_Γ/Γ. Un domaine fondamental de l'action de Γ sur $D_\Gamma = \mathbb{R}^{n-1} \smallsetminus \{0\}$ est la couronne

$$R_D = \left\{x \in \mathbb{R}^{n-1}, a \leqslant \|x\| \leqslant 1\right\} \simeq \mathbb{S}^{n-2} \times [a,1]$$

donc $D_\Gamma/\Gamma \simeq \mathbb{S}^{n-2} \times \mathbb{S}^1$ et on peut calculer sa cohomologie de de Rham par la formule de Künneth.





D_Γ/Γ pour $n = 3$

Action de Γ sur D_Γ pour $n = 3$

Supposons dans un premier temps que $n = 2$. Alors D_Γ/Γ est constitué de deux cercles disjoints, donc la cohomologie du complexe $\mathcal{C}^\bullet_\Gamma(D_\Gamma)$ est de dimension 2 en degrés 0 et 1. Des générateurs de $H^0(\mathcal{C}^\bullet_\Gamma(D_\Gamma))$ sont les fonctions indicatrices $\mathbf{1}_{\mathbb{R}^*_+}$ et $\mathbf{1}_{\mathbb{R}^*_-}$ des deux composantes connexes de D_Γ. La 1-cohomologie est engendrée par les 1-courants réguliers $\frac{dx}{x}$ sur ces composantes connexes.

De ceci découle que $H^0(Q^\bullet) = \mathbb{C}[\mathbf{1}_{\mathbb{R}^*_+}] \oplus \mathbb{C}[\mathbf{1}_{\mathbb{R}^*_-}]$. De plus, on a $\frac{dx}{x} = \frac{dx}{x}\mathbf{1}_{\mathbb{R}^*_+} + \frac{dx}{x}\mathbf{1}_{\mathbb{R}^*_-} = L^1(Vp) \in Q^1$ mais ni $\frac{dx}{x}\mathbf{1}_{\mathbb{R}^*_+}$, ni $\frac{dx}{x}\mathbf{1}_{\mathbb{R}^*_-}$ n'appartient à $\ker\widehat{\theta} = \operatorname{Im} L^1$. On a donc $H^1(Q^\bullet) = \mathbb{C}[\frac{dx}{x}]$.

Finalement, il reste la suite exacte suivante :

$$0 \longrightarrow H^0(S^\bullet) \xrightarrow{L^0_*} \mathbb{C}[\mathbf{1}_{\mathbb{R}^*_+}] \oplus \mathbb{C}[\mathbf{1}_{\mathbb{R}^*_-}] \xrightarrow{c^0} \mathbb{C}[\delta_0] \oplus \mathbb{C}[\delta_\infty] \xrightarrow{i^1_*} H^1(S^\bullet) \xrightarrow{L^1_*} \mathbb{C}\left[\frac{dx}{x}\right] \longrightarrow 0.$$

Les seuls 0-courants fermés sur la variété connexe $\mathbb{S}^{n-1}$ sont les constantes (qui sont effectivement Γ-invariantes), donc $H^0(S^\bullet) = \mathbb{C}[\mathbf{1}]$.

La distribution $\delta_0 + \delta_\infty$ n'est pas exacte (elle n'annule pas les constantes), donc $0 \neq \mathbb{C}[\delta_0 + \delta_\infty] \subset H^1(S^\bullet)$. De plus, $L^1(Vp) = \frac{dx}{x}$ et, comme la distribution $\frac{dx}{x}$ n'est pas exacte dans $Q^\bullet$ et que $L^\bullet$ est un morphisme de complexes, la distribution Vp n'est pas exacte dans $S^\bullet$. On a donc également $0 \neq \mathbb{C}[Vp] \subset H^1(S^\bullet)$.

On a $\mathbb{C}[\delta_0 \oplus \delta_\infty] \oplus \mathbb{C}[Vp] \subset H^1(S^\bullet)$ et la nullité de la somme alternée des dimensions dans une suite exacte d'espaces vectoriels donne l'inclusion réciproque. Sans utiliser la caractérisation des 0-courants fermés, la description de l'homomorphisme de connexion c^0 permet d'arriver au même résultat. Cet argument est détaillé ci-après dans le cas de la dimension supérieure. Ceci achève la démonstration du Théorème 4.6 dans le cas $n = 2$.

Supposons maintenant $n \geqslant 4$. Alors, par la formule de Künneth, la cohomologie du complexe $H^p(\mathcal{C}^\bullet_\Gamma)$ est de dimension 1 en degrés 0, 1, $n-2$ et $n-1$. Cependant, un générateur de $H^{n-1}(\mathcal{C}^\bullet_\Gamma(D_\Gamma))$ est la $(n-1)$-forme différentielle

$$\pi_1^*\left(\frac{dr}{r}\right) \wedge \pi_2^*\omega$$

où ω désigne la forme volume sur $\mathbb{S}^{n-2}$. Mais cette forme n'appartient pas à $\ker\widehat{\theta}$. De ceci découle que $H^{n-1}(Q^\bullet) = 0$ et la suite exacte se résume alors à :

$$0 \longrightarrow H^0(S^\bullet) \xrightarrow{L^0_*} \mathbb{C}[\mathbf{1}] \longrightarrow 0 \longrightarrow H^1(S^\bullet) \xrightarrow{L^1_*} \mathbb{C}\left[\pi_1^*\left(\frac{dr}{r}\right)\right] \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow H^p(S^\bullet) \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots \qquad (p \in \{2, \ldots, n-3\})$$

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow H^{n-2}(S^\bullet) \xrightarrow{L^{n-2}_*} \mathbb{C}[\pi_2^*(\omega)] \xrightarrow{c^{n-2}} \mathbb{C}[\delta_0] \oplus \mathbb{C}[\delta_\infty] \xrightarrow{i^{n-1}_*} H^{n-1}(S^\bullet) \longrightarrow 0.$$

De la première ligne, on tire que L^0_* et L^1_* sont des isomorphismes. Comme $\pi_1^*\left(\frac{dr}{r}\right) = L^1(Vp)$, on a $H^1(S^\bullet) = \mathbb{C}[Vp]$. La deuxième ligne donne $H^p(S^\bullet) = 0$ pour $2 \leqslant p \leqslant n-3$, et la troisième ligne implique que

$$\dim H^{n-2}(S^\bullet) + 1 = \dim H^{n-1}(S^\bullet) \in \{1, 2\}.$$

Considérons le générateur $T = \pi_2^*\omega$ de $H^{n-2}(Q^\bullet)$. D'après la construction de l'homomorphisme de connexion $c^{n-2} : H^{n-2}(Q^\bullet) \longrightarrow H^{n-1}(C^\bullet)$ détaillée dans la démonstration de la Proposition 2.3, l'image de T est la distribution $dS \in C^{n-1}$ où $S \in S^{n-2}$ est un prolongement de T : on a $T = L^{n-2}(S)$. De plus $dS \in C^{n-1} = \mathbb{C}\delta_0 \oplus \mathbb{C}\delta_\infty$, il existe donc des constantes $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ telles que

$$dS = \alpha\delta_0 + \beta\delta_\infty.$$

D'autre part, $\langle dS, \mathbf{1}\rangle = 0 = \alpha + \beta$. Supposons $\alpha = 0$. Alors S est fermé et, comme $H^{n-2}(\mathcal{C}^\bullet(\mathbb{S}^{n-1})) \simeq H^{n-2}(\mathbb{S}^{n-1}) = 0$, il existe $U \in \mathcal{C}^{n-3}(\mathbb{S}^{n-1})$ tel que $S = dU$. Alors on a :

$$\pi_2^*\omega = T = L^{n-2}(S) = L^{n-2}(dU) = d\big(L^{n-3}(U)\big)$$

ce qui est absurde.

On en déduit donc que $c^{n-2}\big(H^{n-2}(S^\bullet)\big) = \mathbb{C}[\delta_0 - \delta_\infty]$. Par suite on a :

$$\dim H^{n-1}(S^\bullet) = \mathrm{rg}(i^{n-1}_*) = 2 - \dim\ker(i^{n-1}_*) = 2 - \mathrm{rg}(c^{n-2}) = 1.$$

Ceci achève de prouver le Théorème 4.6 dans le cas $n \geqslant 4$.

Il reste le cas $n = 3$ à étudier. La cohomologie de $\mathcal{C}^\bullet_\Gamma(D_\Gamma)$ est alors la cohomologie du tore $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ et, comme précédemment, le générateur $\pi_1^*\left(\frac{dr}{r}\right) \wedge \pi_2^*\omega$ de la 2-cohomologie de $\mathcal{C}^\bullet_\Gamma(D_\Gamma)$ n'appartient pas à Q^2. On a alors $H^0(Q^\bullet) = \mathbb{C}[\mathbf{1}]$, $H^1(Q^\bullet) = \mathbb{C}\left[\pi_1^*\left(\frac{dr}{r}\right)\right] \oplus \mathbb{C}[\pi_2^*\omega]$ et $H^2(Q^\bullet) = 0$. La suite exacte donne donc

$$0 \longrightarrow H^0(S^\bullet) \xrightarrow{L^0_*} \mathbb{C}[\mathbf{1}] \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow H^1(S^\bullet) \xrightarrow{L^1_*} \mathbb{C}\left[\pi_1^*\left(\frac{dr}{r}\right)\right] \oplus \mathbb{C}[\pi_2^*\omega] \xrightarrow{c^1} \mathbb{C}[\delta_0] \oplus \mathbb{C}[\delta_\infty] \xrightarrow{i^2_*} H^2(S^\bullet) \longrightarrow 0.$$

Ici encore, $H^0(S^\bullet) = \mathbb{C}[\mathbf{1}]$, mais cette fois $\dim H^1(S^\bullet) = \dim H^2(S^\bullet) \in \{1, 2\}$. Comme précédemment, le rang de l'homomorphisme de connexion c^1 est 1, ce qui entraîne que la dimension en question est 1 et termine la preuve du théorème. $\square$

2.— Cas d'un groupe monogène de type parabolique

Considérons maintenant un groupe Γ monogène de type parabolique. Quitte à le conjuguer par une isométrie hyperbolique, on peut supposer qu'il fixe ∞. On supposera de plus qu'il est engendré par une translation. Un tel groupe n'est pas convexe-cocompact.

Nous commençons par calculer l'exposant critique de Γ, ce calcul étant valable en toute dimension. Par la suite, on sera amené à supposer $n = 2$.

2.1. Calcul de l'exposant critique

Lemme 4.7. *Soit $\Gamma = \langle t \rangle$ où $t : x \mapsto x + b$ est la translation de vecteur $b = (b_1, \ldots, b_{n-1}, 0) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ vue dans le demi-espace $\mathbb{H}^n$. Alors $\delta(\Gamma) = \frac{1}{2}$.*

Preuve. Posons $\tau = \sigma \circ t \circ \sigma$. On a, pour tout $x \in \mathbb{B}^n$:

$$\tau(x) = 2\frac{2g(x) + b}{\|2g(x) + b\|^2} - e_n \qquad \text{avec} \qquad g(x) = \frac{x + e_n}{\|x + e_n\|^2}.$$

On a, $\langle . | . \rangle$ désignant le produit scalaire euclidien :

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(x) = \frac{\|x + e_n\|^2 e_i - 2\langle e_i | x + e_n \rangle (x + e_n)}{\|x + e_n\|^4}$$

d'où

$$g(0) = e_n \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial g}{\partial x_i}(0) = \begin{cases} e_i & \text{si } i < n \\ -e_n & \text{si } i = n. \end{cases}$$

Alors, pour $i < n$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tau}{\partial x_i}(0) &= 2\frac{2\|2e_n + b\|^2 e_i - 2\langle 2e_i | 2e_n + b\rangle (2e_n + b)}{\|2e_n + b\|^4} \\
&= \frac{4}{\|2e_n + b\|^2}\left[e_i - \frac{2b_i(2e_n + b)}{\|2e_n + b\|^2}\right] \\
\frac{\partial \tau}{\partial x_n}(0) &= 2\frac{-2\|2e_n + b\|^2 e_n - 2\langle -2e_n | 2e_n + b\rangle (2e_n + b)}{\|2e_n + b\|^4} \\
&= \frac{4}{\|2e_n + b\|^2}\left[-e_n + 4\frac{2e_n + b}{\|2e_n + b\|^2}\right].
\end{aligned}$$

La jacobienne de τ en 0 s'écrit donc $\mathrm{Jac}_0(\tau) = \dfrac{4}{\|2e_n+b\|^2} A$ où

$$A = \begin{pmatrix} 1 - \dfrac{2b_1^2}{\|2e_n+b\|^2} & -\dfrac{2b_2b_1}{\|2e_n+b\|^2} & \cdots & \dfrac{4b_1}{\|2e_n+b\|^2} \\ -\dfrac{b_1b_2}{\|2e_n+b\|^2} & 1 - \dfrac{2b_2^2}{\|2e_n+b\|^2} & \cdots & \dfrac{4b_2}{\|2e_n+b\|^2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\dfrac{4b_1}{\|2e_n+b\|^2} & -\dfrac{4b_2}{\|2e_n+b\|^2} & \cdots & -1 + \dfrac{8}{\|2e_n+b\|^2} \end{pmatrix}.$$

Nous allons calculer $\|A\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} \|Ae_i\|^2$. Pour $i < n$, on a :

$$\begin{aligned} \|Ae_i\|^2 &= \frac{4b_i^2}{\|2e_n+b\|^4}(\|b\|^2 - b_i^2) + \left[1 - \frac{2b_i^2}{\|2e_n+b\|^2}\right]^2 + \frac{16b_i^2}{\|2e_n+b\|^4} \\ &= \frac{4b_i^2\|b\|^2}{\|2e_n+b\|^4} - \frac{4b_i^4}{\|2e_n+b\|^4} + 1 + \frac{4b_i^4}{\|2e_n+b\|^4} - \frac{4b_i^2}{\|2e_n+b\|^2} + \frac{16b_i^2}{\|2e_n+b\|^4} \\ &= \frac{4b_i^2\|b\|^2}{\|2e_n+b\|^4} + 1 + \frac{4b_i^2}{\|2e_n+b\|^2}\left(\frac{4}{\|2e_n+b\|^2} - 1\right) \\ \|Ae_n\|^2 &= \frac{16\|b\|^2}{\|2e_n+b\|^4} + \left(-1 + \frac{8}{\|2e_n+b\|^2}\right)^2 \\ &= \frac{16\|b\|^2}{\|2e_n+b\|^4}(\|b\|^2 + 4) - \frac{16}{\|2e_n+b\|^2} + 1. \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} \|A\|_2^2 &= \sum_{i=1}^{n-1} \|Ae_i\|^2 + \|Ae_n\|^2 \\ &= \frac{4\|b\|^4}{\|2e_n+b\|^4} + n - 1 + \frac{4\|b\|^2}{\|2e_n+b\|^2}\left[\frac{4}{\|2e_n+b\|^2} - 1\right] + \frac{16}{\|2e_n+b\|^4}(\|b\|^2+4) - \frac{16}{\|2e_n+b\|^2} + 1 \\ &= \frac{4\|b\|^4 + 32\|b\|^2 + 64}{\|2e_n+b\|^4} - \frac{4(\|b\|^2+4)}{\|2e_n+b\|^2} + n \\ &= \frac{4(\|b\|^2+4)^2}{\|2e_n+b\|^4} - 2\frac{2(\|b\|^2+4)}{\|2e_n+b\|^2} + 1 + n - 1 \\ &= \left[\frac{2(\|b\|^2+4)}{\|2e_n+b\|^2} - 1\right]^2 + n - 1. \end{aligned}$$

Comme τ^m s'obtient, pour $m \in \mathbb{Z}$, en remplaçant b par mb, on a $\|\mathrm{Jac}_0(\tau^m)\| = u_m v_m$ où :

$$\begin{aligned} u_m &= \frac{4}{\|2e_n+mb\|^2} \sim \frac{4}{|m|^2\|b\|^2} \\ v_m &= \left(\left[\frac{2(\|mb\|^2+4)}{\|2e_n+mb\|^2} - 1\right]^2 + n - 1\right)^{\frac{1}{2}} \sim \sqrt{n}. \end{aligned}$$

La série de Poincaré absolue $\Phi_s(0) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} (u_m v_m)^s$ est donc de même nature que la série de Riemann

$$\frac{4^s n^{\frac{s}{2}}}{\|b\|^{2s}} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{1}{|m|^{2s}}$$

convergente si et seulement si $s > \frac{1}{2}$. On en déduit donc $\delta(\Gamma) = \frac{1}{2}$. $\square$

2.2. Courants portés par l'ensemble limite

Dans toute la suite de cette section, on suppose que $n = 2$ et, sans perte de généralité, que $b = 1$.

Conformément à la Définition 2.26, on note, pour un entier $s \in \mathbb{N}$ et un $(1-p)$-vecteur ξ tangent en 0 à $\mathbb{S}^1$, $D^s\delta_\xi^\infty$ le p-courant de Dirac $\phi^*(D^s\delta_\xi)$ où $\phi = \phi_2 \circ \phi_1^{-1}$ est le changement de carte $x \mapsto \frac{x}{|x|^2}$ (*cf.* p. 14).

Lemme 4.8. *Le complexe des courants* Γ*-invariants sur* $\mathbb{S}^1$ *à support dans l'ensemble limite* Λ_Γ *est réduit à*

$$\mathcal{C}_\Gamma^p(\mathbb{S}^1, \Lambda_\Gamma) = \begin{cases} \mathbb{C}\delta_\infty \oplus \mathbb{C}\delta_\infty' & \textit{si } p = 1 \\ \mathbb{C}\delta^\infty_{\frac{\partial}{\partial x}} & \textit{si } p = 0. \end{cases}$$

Preuve. D'après le Corollaire 2.28, il suffit de chercher lesquels des courants de Dirac en ∞ sont invariants par la translation t, ou encore lesquelles de leurs images par ϕ^* sont invariantes par $\tau = \sigma \circ t \circ \sigma$.

Supposons d'abord $p = 1$: nous cherchons les dérivées de δ_0 invariantes par τ. Pour cela, nous utilisons un résultat concernant les dérivées successives d'une composée et dont la vérification est immédiate par récurrence : pour $s \in \mathbb{N}^*$ et $\varphi \in \Omega^0(\mathbb{R})$,

$$(\varphi \circ \tau)^{(s)} = \sum_{p=1}^{s} a_p^s \varphi^{(p)} \circ \tau$$

où chaque coefficient a_p^s est un polynôme homogène de degré p en $\tau', \tau'', \dots, \tau^{(s-p+1)}$. Plus précisément, on a, pour $s \geqslant 1$:

$$\begin{cases} a_1^s = \tau^{(s)} \qquad a_s^s = (\tau')^s \\ \forall p \in \{2, \dots, s\}, a_p^{s+1} = (a_p^s)' + a_{p-1}^s \tau' \\ a_{s-1}^s = \frac{m(m-1)}{2}(\tau')^{m-2}\tau'' \quad \text{si } m \geqslant 2. \end{cases}$$

Alors on a, pour $\varphi \in \Omega^0(\mathbb{R})$ et $s \in \mathbb{N}^*$:

$$\left\langle \tau_* \delta_0^{(s)}, \varphi \right\rangle = \sum_{p=1}^{s} a_p^s(0)\varphi^{(p)} \circ \tau(0) = \sum_{p=1}^{s} a_p^s(0)\varphi^{(p)}(0)$$

d'où $\tau_*\delta_0^{(s)} = \sum_{p=1}^s a_p^s(0)\delta_0^{(p)}$. En particulier, le sous espace vectoriel $V = \bigoplus_{p=1}^m \mathbb{C}\delta_0^{(p)}$ est stable par τ_*. Comme $\tau'(0) = 1$ et $\tau''(0) = -2$, on a $a_s^s(0) = 1$ et $a_{s-1}^s(0) = -s(s-1)$. On en déduit que la matrice de l'endomorphisme de V induit par τ_* relativement à la base $(\delta_0^{(p)})_{p=1}^s$ est de la forme :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & * & \cdots & \cdots & * \\ 0 & 1 & -6 & \cdots & \cdots & * \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & * & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & -s(s-1) \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice $M - \mathrm{id}_V$ est donc de rang $s-1$ et le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 est engendré par δ_0'. Comme δ_∞ est évidemment Γ-invariante, ceci achève de prouver que $\mathcal{C}_\Gamma^1(\mathbb{S}^1) = \mathbb{C}\delta_\infty \oplus \mathbb{C}\delta_\infty'$.

Supposons maintenant que $p = 0$. Soit $s \in \mathbb{N}$ et $T = (\delta^\infty_{\frac{\partial}{\partial x}})^{(s)}$. Pour $\varphi \in \Omega^0(\mathbb{R})$, on a

$$\langle d\phi_* T, \varphi\rangle = \left\langle (\delta_{\frac{\partial}{\partial x}})^{(s)}, \varphi'\,dx \right\rangle = (-1)^s (\varphi')^{(s)}(0) = -\left\langle \delta_0^{(s+1)}, \varphi \right\rangle$$

de sorte que $dT = -\delta_\infty^{(s+1)}$. Puisque les espaces $\mathcal{C}^p_\Gamma(\mathbb{S}^1, \Lambda_\Gamma)$ forment un sous-complexe de $\mathcal{C}^\bullet_\Gamma(\mathbb{S}^1)$, pour que T soit Γ-invariant, il est nécessaire que dT le soit. D'après l'étude du cas $p = 1$ ci-dessus, on a donc $s + 1 \in \{0, 1\}$, qui entraîne $s = 0$.

Réciproquement, si $\omega \in \Omega^1(\mathbb{S}^1)$ s'écrit localement $\omega = \varphi\, dx$, on a :

$$\left\langle \delta_{\frac{\partial}{\partial x}}, \tau^*\omega \right\rangle = \left\langle \delta_{\frac{\partial}{\partial x}}, \varphi \circ \tau\tau'\, dx \right\rangle = \varphi \circ \tau(0)\tau'(0) = \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi\rangle = \left\langle \delta_{\frac{\partial}{\partial x}}, \omega \right\rangle$$

ce qui prouve que $\delta_{\frac{\partial}{\partial x}}$ est bien τ-invariante. ∎

Lemme 4.9. *La cohomologie des courants Γ-invariants sur $\mathbb{S}^1$ à support dans $\Lambda_\Gamma = \{\infty\}$ est :*

$$H^p(\mathcal{C}^\bullet_\Gamma(\mathbb{S}^1, \Lambda_\Gamma)) = \begin{cases} \mathbb{C}[\delta_\infty] & si\ p = 1 \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

Preuve. La distribution δ_∞ n'est pas exacte car elle n'annule pas les fonctions constantes. En revanche, $d(\delta^\infty_{\frac{\partial}{\partial x}}) = -\delta'_\infty$ comme on l'a vu précédemment. Il en résulte que $[\delta'_\infty] = 0$ et que $\delta^\infty_{\frac{\partial}{\partial x}}$ n'est pas fermée. ∎

2.3. Courants sur le domaine de discontinuité

Définition 4.10. *Pour $\varphi \in \Omega^0(\mathbb{S}^1)$, on pose :*

$$\langle Pf(dx), \varphi\rangle = \lim_{A \to +\infty} \int_{-A}^{A} [\varphi(x) - \varphi(\infty)]\, dx.$$

Lemme 4.11. *Cette expression définit une distribution Γ-invariante $Pf(dx)$ sur $\mathbb{S}^1$, appelée* **partie finie de** *dx.*

Preuve. Soit $\varphi \in \Omega^0(\mathbb{S}^1)$; considérons un développement limité de φ au voisinage de ∞ :

$$\varphi(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \frac{1}{x^2}\epsilon(x)$$

où ϵ est une fonction de limite nulle en ∞ (donc bornée). On a alors, pour $A \in \mathbb{R}^*_+$:

$$\begin{aligned}
\int_{-A}^{A} [\varphi(x) - \varphi(\infty)]\, dx &= \int_{[-A,-1]\cup[1,A]} \left[\frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \frac{1}{x^2}\epsilon(x)\right] dx + \int_{-1}^{1} [\varphi(x) - \varphi(\infty)]\, dx \\
&= 2a_2\left(1 - \frac{1}{A}\right) + \int_{[-A,-1]\cup[1,A]} \frac{\epsilon(x)}{x^2}\, dx + \int_{-1}^{1} [\varphi(x) - \varphi(\infty)]\, dx \\
&\xrightarrow[A \to +\infty]{} 2a_2 + \int_{]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[} \frac{\epsilon(x)}{x^2}\, dx + \int_{-1}^{1} [\varphi(x) - \varphi(\infty)]\, dx
\end{aligned}$$

ce qui prouve que la forme linéaire $Pf(dx)$ est bien définie, sa linéarité étant évidente. Si $(\varphi_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions de $\Omega^0(\mathbb{S}^1)$ convergeant vers 0 au sens de la topologie C^∞ de Schwartz, on a, avec des notations similaires :

$$\langle Pf(dx), \varphi_m\rangle = 2a_2^m + \int_{-1}^{1} [\varphi_m(x) - \varphi_m(\infty)]\, dx + \int_{]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[} \frac{\epsilon^m(x)}{x^2}\, dx.$$

Pour tout $s \in \mathbb{N}$, $(\varphi_m^{(s)})_{m\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0, donc dans cette somme tous les termes tendent vers 0. On en déduit que $Pf(dx)$ est continue ; c'est donc une distribution sur $\mathbb{S}^1$. Montrons maintenant qu'elle est invariante par t.

Avec le même développement limité, on a :

$$\langle Pf(dx), \varphi \circ t\rangle = \lim_{A \to +\infty} \int_{-A}^{A} [\varphi(x+1) - \varphi(\infty)]\, dx = \lim_{A \to \infty} \int_{-A+1}^{A+1} [\varphi(x) - \varphi(\infty)]\, dx$$

$$\int_{-A+1}^{A+1} [\varphi(x) - \varphi(\infty)]\, dx = \int_{-A}^{A} [\varphi(x) - \varphi(\infty)]\, dx + \int_{-A+1}^{-A} [\varphi(x) - \varphi(\infty)]\, dx + \int_{A}^{A+1} [\varphi(x) - \varphi(\infty)]\, dx$$

$$\begin{aligned}\int_{A}^{A+1} [\varphi(x) - \varphi(\infty)]\, dx &= \int_{A}^{A+1} \left(\frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x_2} + \frac{1}{x^2}\epsilon(x)\right) dx \\ &= a_1 \ln \left|\frac{A+1}{A}\right| + a_2 \left[\frac{1}{A} - \frac{1}{A+1}\right] + \int_{A}^{A+1} \frac{\epsilon(x)}{x^2}\, dx\end{aligned}$$

Pour A suffisamment grand, on a $|\epsilon| \leqslant 1$ sur $[A, A+1]$; alors

$$\left|\int_{A}^{A+1} \frac{\epsilon(x)}{x^2}\, dx\right| \leqslant \int_{A}^{A+1} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{A} - \frac{1}{A+1} \xrightarrow[A \to +\infty]{} 0$$

de sorte que

$$\lim_{A \to +\infty} \int_{A}^{A+1} [\varphi(x) - \varphi(\infty)]\, dx = 0.$$

Remplacer A par $-A$ dans ces calculs permet de prouver également que

$$\lim_{A \to +\infty} \int_{-A+1}^{-A} [\varphi(x) - \varphi(\infty)]\, dx = 0.$$

On a donc $\langle Pf(dx), \varphi \circ t\rangle = \langle Pf(dx), \varphi\rangle$, d'où $Pf(dx) \in \mathcal{C}^1_\Gamma(\mathbb{S}^1)$. ∎

Proposition 4.12. *La localisation des distributions* Γ*-invariantes* $L^1 : \mathcal{C}^1_\Gamma(\mathbb{S}^1) \longrightarrow \mathcal{C}^1_\Gamma(D_\Gamma)$ *est surjective.*

Preuve. Le groupe Γ agit librement, proprement et discontinûment sur D_Γ et le quotient $D_\Gamma/\Gamma \simeq \mathbb{S}^1$ est compact et connexe donc, d'après le Lemme 3.13, on a $\ker \widetilde{\Theta} \subset \operatorname{Im} L^1$. D'autre part,

$$\mathcal{C}^1_\Gamma(\mathbb{R}) = \ker \widetilde{\Theta} \oplus \mathbb{C}\, dx.$$

En effet, la fonction k (*cf.* Lemme 2.19) est continue, positive et non nulle donc $\widetilde{\Theta}(dx) > 0$. Le sous-espace $\ker \widetilde{\Theta}$ étant un hyperplan de $\mathcal{C}^1_\Gamma(\mathbb{S}^1)$, la 1-forme Γ-invariante dx en engendre donc un supplémentaire.

Mais $Pf(dx)$ est un élément de $\mathcal{C}^1_\Gamma(\mathbb{S}^1)$ qui vérifie $L^1(Pf(dx)) = dx$, ce qui prouve que $\mathbb{C}\, dx \subset \operatorname{Im} L^1$, donc que $\operatorname{Im} L^1 = \mathcal{C}^1_\Gamma(\mathbb{R})$. ∎

2.4. Cohomologie des courants invariants sur $\mathbb{S}^1$

Nous appliquons une technique similaire à celle du cas hyperbolique et obtenons le théorème suivant.

Théorème 4.13. *La cohomologie des courants* Γ*-invariants sur* $\partial\mathbb{H}^2$ *est*

$$H^p\big(\mathcal{C}^\bullet_\Gamma(\mathbb{S}^1)\big) = \begin{cases} \mathbb{C}[\mathbf{1}] & \text{si } p = 0 \\ \mathbb{C}[\delta_\infty] \oplus \mathbb{C}[Pf(dx)] & \text{si } p = 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Preuve. D'après le Lemme 4.7, $\delta(\Gamma) = \frac{1}{2}$ donc, d'après le Théorème 3.12, la localisation des p-courants tels que $p < 2 - 1 - \delta(\Gamma) = \frac{1}{2}$, c'est-à-dire $p = 0$, est surjective. D'après la Proposition 4.12, la localisation des distributions l'est également. On est donc dans la situation du diagramme commutatif suivant, dans lequel les lignes sont des suites exactes et les colonnes des complexes différentiels :

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & C^0 \arrow[r, "i^0"] \arrow[d, "d"] & S^0 \arrow[r, "L^0"] \arrow[d, "d"] & Q^0 \arrow[r] \arrow[d, "d"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C^1 \arrow[r, "i^1"] \arrow[d] & S^1 \arrow[r, "L^1"] \arrow[d] & Q^1 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Les complexes $C^\bullet$, $S^\bullet$ et $Q^\bullet$ désignent respectivement $\mathcal{C}^\bullet_\Gamma(\mathbb{S}^1, \Lambda_\Gamma)$, $\mathcal{C}^\bullet_\Gamma(\mathbb{S}^1)$ et $\mathcal{C}^\bullet_\Gamma(D_\Gamma)$. Ceci donne, d'après le lemme du serpent (*cf.* Proposition 2.3) une suite exacte en cohomologie :

$$0 \longrightarrow H^0(C^\bullet) \xrightarrow{i^0_*} H^0(S^\bullet) \xrightarrow{L^0_*} H^0(Q^\bullet) \xrightarrow{c^0} H^1(C^\bullet) \xrightarrow{i^1_*} H^1(S^\bullet) \xrightarrow{L^1_*} H^1(Q^\bullet) \longrightarrow 0.$$

Le Lemme 4.9 donne la cohomologie du complexe $C^\bullet$ et l'action de Γ sur D_Γ est libre, propre et discontinue, donc d'après le Corollaire 2.23 et le théorème de de Rham (Théorème 2.16), la cohomologie du complexe $Q^\bullet$ est isomorphe à la cohomologie de de Rham du quotient D_Γ/Γ. Un domaine fondamental de l'action de Γ sur $D_\Gamma = \mathbb{R}$ est $[0,1]$, d'où $H^0(Q^\bullet) = \mathbb{C}[\mathbf{1}]$ et $H^1(Q^\bullet) = \mathbb{C}[dx]$. En effet, dx est une 1-forme différentielle fermée qui n'est pas exacte dans $Q^\bullet$. La suite exacte précédente se réduit donc à :

$$0 \longrightarrow H^0(Q^\bullet) \xrightarrow{L^0_*} \mathbb{C}[\mathbf{1}] \xrightarrow{c^0} \mathbb{C}[\delta_\infty] \xrightarrow{i^1_*} H^1(S^\bullet) \xrightarrow{L^1_*} \mathbb{C}[dx] \longrightarrow 0.$$

Les constantes sont les seuls 0-courants fermés sur la variété connexe $\mathbb{S}^1$ et sont effectivement Γ-invariantes, donc $H^0(S^\bullet) = \mathbb{C}[\mathbf{1}]$. L'application L^0_* est donc un isomorphisme. L'homomorphisme de connexion c^0 est nul par exactitude de la suite et i^1_* est injectif. Comme $L^1_*([Pf(dx)]) = [dx]$, on a bien $H^1(S^\bullet) = \mathbb{C}[\delta_\infty] \oplus \mathbb{C}[Pf(dx)]$. ∎

3.— Cas d'un groupe élémentaire

Dans cette section on applique les résultats précédents pour déterminer la cohomologie des courants Γ-invariants lorsque Γ est un groupe kleinéen élémentaire. Comme on l'a rappelé au Théorème 3.15, un groupe kleinéen élémentaire de type hyperbolique contient un sous-groupe d'indice fini engendré par une loxodromie.

Avant de détailler l'étude de ces groupes élémentaires de type hyperbolique, remarquons que, lorsque $n = 2$ un sous-groupe élémentaire de type parabolique est toujours monogène, engendré par une translation si le point fixe est ∞. Ce résultat est exposé dans [Fre] Lemme 1.9 p.12.

3.1. Cas hyperbolique

Nous supposons donc que Γ est un groupe kleinéen élémentaire de type hyperbolique, et que Γ_0 est un sous-groupe monogène de Γ d'indice fini. Quitte à conjuguer Γ par une isométrie hyperbolique, on supposera également que l'orbite finie de Γ est $\{0,\infty\}$. Le groupe Γ_0 satisfait alors les hypothèses de l'étude précédente du cas monogène hyperbolique.

Alors, d'après le Lemme 3.16, pour tout complexe différentiel sur lequel Γ agit, on a une notion de moyenne, qui est une rétraction du sous-complexe des éléments Γ_0-invariants sur celui des éléments Γ-invariants. En particulier, cette moyenne induit une surjection en cohomologie.

C'est notamment le cas du complexe des courants Γ-invariants sur $\mathbb{S}^{n-1}$.

Théorème 4.14. *Si $n \geqslant 3$, la moyenne $m^\bullet$ est un quasi-isomorphisme de $\mathcal{C}^\bullet_{\Gamma_0}(\mathbb{S}^{n-1})$ sur $\mathcal{C}^\bullet_{\Gamma}(\mathbb{S}^{n-1})$. En particulier, la cohomologie des courants Γ-invariants sur $\mathbb{S}^{n-1}$ est :*

$$H^p\big(\mathcal{C}^\bullet_{\Gamma}(\mathbb{S}^{n-1})\big) = \begin{cases} \mathbb{C}[\mathbf{1}] & \text{si } p=0 \\ \mathbb{C}[m^1(Vp)] & \text{si } p=1 \\ \mathbb{C}[\delta_0+\delta_\infty] & \text{si } p=n-1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Preuve. Puisque, pour tout p, la moyenne $m_* : H^p\big(\mathcal{C}^\bullet_{\Gamma_0}(\mathbb{S}^{n-1})\big) \longrightarrow H^p\big(\mathcal{C}^\bullet_{\Gamma}(\mathbb{S}^{n-1})\big)$ est une surjection, il nous suffit d'appliquer la moyenne à chacun des générateurs de la cohomologie du complexe $\mathcal{C}^\bullet_{\Gamma_0}(\mathbb{S}^{n-1})$ donnés au Théorème 4.6 ; leurs images engendrent alors la cohomologie cherchée.

Puisque $\{0,\infty\}$ est une orbite de Γ, la distribution $\delta_0+\delta_\infty$ est Γ-invariante, donc égale à sa moyenne. Il en est bien sûr de même des fonctions constantes, qui engendrent donc la 0-cohomologie.

Il reste le cas $p=1$ à examiner, pour lequel nous supposons $n \geqslant 3$. La forme volume euclidienne $\widetilde{\omega}$ sur $\mathbb{S}^{n-2}$ est telle que $\pi_2^*(\widetilde{\omega})$ est Γ_0-invariante. En effet, on a, pour une homothétie γ_a $\big(a \in]0,1[\big)$:

$$\gamma_a^*\big(\pi_2^*(\widetilde{\omega})\big) = (\pi_2\circ\gamma_a)^*(\widetilde{\omega})$$

avec $\pi_2\circ\gamma_a = \pi_2$. Les éléments de $\mathrm{SO}(n-1)$ étant des isométries euclidiennes, $\pi_2^*(\widetilde{\omega})$ est également invariante par ce groupe. Elle l'est donc par le groupe Γ_0.

On peut donc considérer sa moyenne $\omega = m^{n-2}\big(\pi_2^*(\widetilde{\omega})\big)$, et :

$$\big\langle m^1(Vp),\omega\big\rangle = \big\langle Vp, m^{n-2}(\omega)\big\rangle = \langle Vp,\omega\rangle = \frac{1}{[\Gamma:\Gamma_0]}\sum_{\overline{\gamma}\in\Gamma_0\backslash\Gamma}\int_{\mathbb{R}^{n-1}\smallsetminus\{0\}} \pi_1^*\left(\frac{dr}{r}\right)\wedge\gamma^*\big(\pi_2^*(\widetilde{\omega})\big).$$

Puisque tout $\gamma\in\Gamma$ préserve l'orientation, chacune de ces intégrales est celle d'une fonction positive. On en déduit donc que $\langle Vp,\omega\rangle \neq 0$, donc que m_* est un isomorphisme.

$\square$

Ce résultat n'est plus vrai lorsque $n=2$, comme nous allons le montrer. Nous commençons par caractériser les sous-groupes discrets élémentaires de type hyperbolique de $\mathrm{Conf}^+(\mathbb{S}^1)$.

Proposition 4.15. *Tout sous-groupe discret élémentaire de type hyperbolique de $\mathrm{Iso}^+(\mathbb{H}^2)$ est conjugué à l'un des groupes suivants :*

- *un groupe monogène $\Gamma = \langle\gamma_a\rangle$ engendré par une homothétie $z\longmapsto az$ où $a\in]0,1[$;*
- *un groupe engendré par une telle homothétie et l'inversion $\phi : z\longmapsto -\frac{1}{z}$.*

Preuve. Quitte à conjuguer Γ par une isométrie, on se ramène à nouveau au cas où Γ préserve $\{0,\infty\}$. D'après le Théorème 3.4, $\mathrm{Iso}^+(\mathbb{H}^2)$ s'identifie à $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ agissant par homographies.

Soit $\sigma\in\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ d'ordre fini. On a

$$\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

L'ensemble $\{0,\infty\}$ étant σ-invariant, σ fixe ou échange 0 et ∞. On a

$$\begin{cases}\sigma(0)=0\\ \sigma(\infty)=\infty\end{cases} \iff \begin{cases}b=0\\ c=0\end{cases} \iff \sigma=\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & a^{-1}\end{pmatrix} : z\longmapsto a^2 z$$

$$\begin{cases}\sigma(0)=\infty\\ \sigma(\infty)=0\end{cases} \iff \begin{cases}d=0\\ a=0\end{cases} \iff \sigma=\begin{pmatrix}0 & b\\ -b^{-1} & 0\end{pmatrix} : z\longmapsto -\frac{b^2}{z}$$

Il est facile de voir que σ n'est d'ordre fini que lorsque, dans le premier cas, $a=\pm 1$ ($\sigma=\mathrm{id}$) ou, dans le second cas, $b=\pm 1$. ∎

Proposition 4.16. *Soit $\Gamma=\langle\gamma_a,\phi\rangle$ le groupe kleinéen élémentaire de type hyperbolique engendré par l'homothétie $\gamma_a : z\longmapsto az$ et l'inversion $\phi : z\longmapsto -\frac{1}{z}$. La cohomologie des courants Γ-invariants sur $\mathbb{S}^1$ est*

$$H^p(\mathcal{C}^\bullet_\Gamma(\mathbb{S}^1))=\begin{cases}\mathbb{C}[\mathbf{1}] & si\ p=0\\ \mathbb{C}[\delta_0+\delta_\infty] & si\ p=1\\ 0 & sinon.\end{cases}$$

Preuve. Ici, $\Gamma_0=\langle\gamma_a\rangle$ et, comme précédemment, parmi les générateurs de la cohomologie énumérés au Théorème 4.6, les constantes et la distribution $\delta_0+\delta_\infty$ sont Γ-invariantes donc égales à leur moyenne.

En revanche, pour $\varphi\in\Omega^0(\mathbb{S}^1)$, le changement de variable $u=\frac{1}{x}$ donne :

$$\begin{aligned}\langle Vp,\varphi\circ\phi\rangle &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^{\frac{1}{\varepsilon}}\frac{\varphi\circ\phi(x)-\varphi\circ\phi(-x)}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^{\frac{1}{\varepsilon}}\frac{\varphi\left(-\frac{1}{x}\right)-\varphi\left(\frac{1}{x}\right)}{x}\,dx\\ &= -\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\frac{1}{\varepsilon}}^{\varepsilon}\frac{\varphi(-u)-\varphi(u)}{u^2}u\,du = -\langle Vp,\varphi\rangle\end{aligned}$$

On a donc $\phi_*Vp=-Vp$, d'où $m^1(Vp)=0$. ∎

3.2. Quelques mots du cas elliptique

Soit Γ un groupe élémentaire de type elliptique, c'est-à-dire un sous-groupe fini de $\mathrm{Conf}^+(\mathbb{S}^{n-1})$. On peut remarquer que l'ensemble limite est vide, que l'exposant critique est nul et que la localisation des courants est l'identité.

Puisque le groupe trivial est un sous-groupe d'indice fini de Γ, on peut considérer la moyenne des courants sur $\mathbb{S}^{n-1}$:

$$\begin{aligned} m^\bullet : \mathcal{C}^\bullet(\mathbb{S}^{n-1}) &\longrightarrow \mathcal{C}^\bullet_\Gamma(\mathbb{S}^{n-1})\\ T &\longmapsto \frac{1}{\mathrm{Card}\,\Gamma}\sum_{\gamma\in\Gamma}\gamma^* T.\end{aligned}$$

A nouveau, d'après le Lemme 3.16, $m^\bullet$ est une rétraction de complexes.

Proposition 4.17. *La moyenne $m^\bullet$ est un quasi-isomorphisme de $\mathcal{C}^\bullet(\mathbb{S}^{n-1})$ sur $\mathcal{C}^\bullet_\Gamma(\mathbb{S}^{n-1})$. En particulier, la cohomologie des courants Γ-invariants sur $\mathbb{S}^{n-1}$ est :*

$$H^p(\mathcal{C}^\bullet_\Gamma(\mathbb{S}^{n-1}))=\begin{cases}\mathbb{C}[\mathbf{1}] & si\ p=0\\ \mathbb{C}[m^{n-1}(\omega)] & si\ p=n-1\\ 0 & sinon,\end{cases}$$

où ω désigne une forme volume sur $\mathbb{S}^{n-1}$.

Preuve. Puisque la moyenne est une rétraction, l'application

$$m_* : H^\bullet(\mathcal{C}^\bullet(\mathbb{S}^{n-1}))\longrightarrow H^\bullet(\mathcal{C}^\bullet_\Gamma(\mathbb{S}^{n-1}))$$

est surjective. On en déduit immédiatement, d'après le théorème de de Rham (*cf.* Théorème 2.16), que $H^p(\mathcal{C}^\bullet_\Gamma(\mathbb{S}^{n-1}))=0$ pour $p\notin\{0,n-1\}$ et $\dim H^p(\mathcal{C}^\bullet_\Gamma(\mathbb{S}^{n-1}))\leqslant 1$ pour $p\in\{0,n-1\}$.

Puisque les constantes sont Γ-invariantes, on a également $H^0(\mathcal{C}^\bullet_\Gamma(\mathbb{S}^{n-1}))=\mathbb{C}[\mathbf{1}]$. Enfin, Γ préservant l'orientation, $m^{n-1}(\omega)$ n'annule pas les constantes donc n'est pas exacte. On a donc $H^{n-1}(\mathcal{C}^\bullet_\Gamma(\mathbb{S}^{n-1}))=\mathbb{C}[m^{n-1}(\omega)]\neq 0$. ∎

4.— Application aux formes automorphes

Le but de cette section est de voir la conséquence des résultats précédents sur la cohomologie des formes automorphes d'un groupe kleinéen élémentaire sur l'espace hyperbolique, ce qui a constitué la motivation initiale de ce travail.

4.1. La transformation de Poisson

L'outil que nous utilisons est la transformation de Poisson, que P.-Y. Gaillard introduisit dans [Ga1], généralisant la transformation de Poisson connue sur les fonctions comme solution du problème de la chaleur.

Nous commençons par rappeler les propriétés de cette transformation qui nous seront utiles. Signalons toutefois que la définition originale de la transformation de Poisson concerne une classe plus étendue d'objets : les hyperformes, c'est-à-dire les formes linéaires continues sur l'espace des formes différentielles analytiques sur $\partial\mathbb{H}^n$.

Théorème 4.18 [Ga1 théorèmes 1, 2, 3]. *Il existe une famille d'applications* $(\Phi^p)_{p=0}^n$

$$\begin{aligned} \Phi^p : \mathcal{C}^p(\partial\mathbb{H}^n) &\longrightarrow A^p_{hc}(\mathbb{H}^n) \qquad p \in \{0, \ldots, n-1\} \\ \Phi^n : \mathbb{C} &\longrightarrow A^n_{hc}(\mathbb{H}^n) \end{aligned}$$

telle que

1) Φ^0 *est la transformation de Poisson usuelle,*
2) Φ^p *commute aux isométries hyperboliques,*
3) $(n-1-2p)\Phi^{p+1} \circ d = (n-1-p)d \circ \Phi^p$ *pour* $p \in \{0, \ldots, n-2\}$,
4) $\Phi^{\frac{n+1}{2}} \circ d = \frac{n-1}{2} * \Phi^{\frac{n-1}{2}} *$ *si* n *est impair,*
5) *pour toute distribution* $T \in \mathcal{C}^{n-1}(\partial\mathbb{H}^n)$, $d \circ \Phi^{n-1}T = (1-n)\left(\int_{\partial\mathbb{H}^n} T\right)\omega$ *où* ω *désigne la forme volume hyperbolique.*
6) *si* $p \neq \frac{n-1}{2}$, Φ^p *est un isomorphisme,*
7) *si* n *est impair,* $\ker \Phi^{\frac{n-1}{2}}$ *est l'espace des* $(\frac{n-1}{2})$*-courants cofermés et* $\operatorname{Im} \Phi^{\frac{n-1}{2}}$ *est l'espace des* $(\frac{n-1}{2})$*-formes automorphes fermées et cofermées.*

La transformation de Poisson Φ^p est donnée, pour $p \neq n-1$, par un noyau ϕ_p, qui est une $(p, n-1-p)$-forme double (*cf.* [Rh] §7 p.35) sur $\mathbb{H}^n \times \partial\mathbb{H}^n$. Pour l'expression explicite de ϕ_p, voir [Ga1] lemmes 1 et 3. Alors, si T est un p-courant sur $\partial\mathbb{H}^n$, on a :

$$\Phi^p(T)(x) = \int_{\{x\} \times \partial\mathbb{H}^n} \phi_p \wedge (1 \otimes T).$$

On trouve également dans [Ga1] une construction visuelle de la transformation de Poisson d'une forme différentielle $\alpha \in \Omega^p(\partial\mathbb{H}^n)$.

Soit Γ un groupe kleinéen (éventuellement trivial). Complétons le complexe des courants Γ-invariants sur $\partial\mathbb{H}^n$ en posant

$$D^p = \begin{cases} \mathcal{C}^p_\Gamma(\partial\mathbb{H}^n) & \text{si } p \neq n \\ \mathbb{C} & \text{si } p = n. \end{cases}$$

On munit l'espace gradué $D^\bullet = \bigoplus_{p=0}^n D^p$ d'une structure de complexe différentiel grâce à l'augmentation des distributions

$$\begin{aligned} \int : D^{n-1} &\longrightarrow D^n = \mathbb{C} \\ T &\longmapsto \langle T, \mathbf{1} \rangle \end{aligned}$$

qui prolonge l'intégration sur $\partial\mathbb{H}^n$ des $(n-1)$-formes différentielles. On peut remarquer que l'application linéaire Φ^n est définie par $\Phi^n(1) = \omega$, et que le point 5 du Théorème 4.18 peut être lu comme $d \circ \Phi^{n-1} = (1-n) \int \circ \Phi^n$. On pose enfin $X = \mathbb{H}^n/\Gamma$.

Corollaire 4.19. *Si n est pair, les complexes $D^\bullet$ et $A^\bullet_{hc}(X)$ sont isomorphes. Plus généralement, la transformation de Poisson induit un isomorphisme de $H^p(D^\bullet)$ sur $H^p(A^\bullet_{hc}(X))$ si $p \notin \{\frac{n-1}{2}, \frac{n+1}{2}\}$ et un morphisme surjectif de $H^{\frac{n-1}{2}}(D^\bullet)$ sur $H^{\frac{n-1}{2}}(A^\bullet_{hc}(X))$.*

Preuve. Supposons n pair. Considérons la suite $(a_p)_{p=0}^n$ définie par :

$$\begin{cases} a_0 = 1 \qquad a_n = (1-n)a_{n-1} \\ \forall p \in \{0,\dots,n-2\}, a_{p+1} = \dfrac{n-1-2p}{n-1-p} a_p \end{cases}$$

et posons $\widehat{\Phi^p} = a_p \Phi^p$. On a le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & D^0 \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\widehat{\Phi}^0"'] & D^1 \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\widehat{\Phi}^1"'] & \cdots \arrow[r, "d"] & D^{n-1} \arrow[r, "\int"] \arrow[d, "\widehat{\Phi}^{n-1}"'] & D^n \arrow[r] \arrow[d, "\widehat{\Phi}^n"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & A^0_{hc}(X) \arrow[r, "d"] & A^1_{hc}(X) \arrow[r, "d"] & \cdots \arrow[r, "d"] & A^{n-1}_{hc}(X) \arrow[r, "d"] & A^n_{hc}(X) \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Montrons que ce diagramme est commutatif, c'est-à-dire que $\widehat{\Phi}^\bullet$ est un morphisme de complexes. Pour $p \in \{0,\dots,n-2\}$, on a, d'après les points 3 et 5 du Théorème 4.18 et la construction de la suite (a_p) :

$$\widehat{\Phi}^{p+1} \circ d = a_{p+1}\Phi^{p+1} \circ d = \left(\frac{n-1-2p}{n-1-p}\right)\left(\frac{n-1-p}{n-1-2p}\right) a_p d \circ \Phi^p = d \circ \widehat{\Phi}^p$$
$$\widehat{\Phi}^n \circ \int = a_n \Phi^n \circ \int = (1-n)\, a_{n-1} \frac{1}{1-n} d \circ \Phi^{n-1} = d \circ \widehat{\Phi}^{n-1}$$

Puisque, pour tout p, a_p est non nul, $\widehat{\Phi}^\bullet$ est donc un isomorphisme de complexes.

Si n est impair, on ne peut pas construire un isomorphisme en «rectifiant» ainsi la transformation de Poisson car le diagramme présente un défaut de commutativité : $d \circ \Phi^{\frac{n-1}{2}} = 0$ tandis que $\Phi^{\frac{n+1}{2}} \circ d = \frac{n-1}{2} * \Phi^{\frac{n-1}{2}} *$, où $*$ est l'opérateur de Hodge.

Néammoins, pour tout $p \in \{0,\dots,n\} \setminus \{\frac{n+1}{2}\}$, on peut considérer l'application

$$\begin{aligned} J^p : H^p(D^\bullet) &\longrightarrow H^p\big(A^\bullet_{hc}(X)\big) \\ [T] &\longmapsto [\Phi^p(T)]. \end{aligned}$$

Montrons que J^p est bien définie. Si, pour $T \in D^p$, $[T] = 0$, il existe $S \in D^{p-1}$ tel que $T = dS$. Supposons $p < n$. Alors, d'après le point 3 du Théorème 4.18,

$$\Phi^p(T) = \Phi^p \circ d(S) = \frac{n-p}{n+1-2p} d \circ \Phi^{p-1}(S)$$

d'où $[\Phi^p(T)] = 0$. Si $p = n$, on a $T = 0$ donc $[\Phi^n(T)] = 0$. L'application J^p est donc bien définie.

Soit $[T] \in H^p(D^\bullet)$ tel que $J^p([T]) = 0$. Alors il existe $\alpha \in A^{p-1}_{hc}(X)$ telle que $\Phi^p(T) = d\alpha$. Comme $p - 1 \neq \frac{n-1}{2}$, Φ^{p-1} est bijective. Posons $S = \left(\Phi^{p-1}\right)^{-1}(\alpha)$ et supposons $p < n$. On a :

$$\Phi^p \circ d\left(\frac{n+1-2p}{n-p} S\right) = d \circ \Phi^{p-1}(S) = d\alpha = d\Phi^p(T)$$

d'où $dS - T \in \ker \Phi^p$.

Or, si $p \neq \frac{n-1}{2}$, Φ^p est injective donc $T = dS$, ce qui prouve que $[T] = 0$ et que J^p est injective. Enfin, si $p = n$, on a $A^n_{hc}(X) = \mathbb{C}\omega$, donc $\Phi^n(T) = 0$ et $T = 0$. Par suite J^n est injective.

Montrons maintenant que J^p est surjective. Soit $[\alpha] \in H^p(A^\bullet_{hc}(X))$. En particulier, α est fermée et cofermée. Si $p \neq \frac{n-1}{2}$, Φ^p est bijective. Si $p = \frac{n-1}{2}$, $\operatorname{Im}\Phi^p = \{\beta \in A^p_{hc}(X), d\beta = 0\}$ d'après le point 7 du Théorème 4.18. Dans les deux cas, il existe $T \in D^p$ tel que $\alpha = \Phi^p(T)$. Alors

$$J^p([T]) = [\Phi^p(T)] = [\alpha]$$

ce qui prouve que J^p est surjective dans tous les cas. ∎

4.2. Le cas hyperbolique

On se place à nouveau dans le cas où Γ est un groupe kleinéen élémentaire de type hyperbolique. Quitte à le conjuguer par une isométrie hyperbolique, on suppose de plus que Γ préserve $\{0, \infty\}$. Soit Γ_0 un sous-groupe monogène d'indice fini de Γ, engendré par une loxodromie.

Notons $X = \mathbb{H}^n/\Gamma$ et $X_0 = \mathbb{H}^n/\Gamma_0$. Dans le théorème suivant, on note $m^\bullet$ le morphisme de moyenne de $A^\bullet_{hc}(X_0)$ sur $A^\bullet_{hc}(X)$.

Théorème 4.20. *Si $n \geqslant 3$, le complexe des formes automorphes harmoniques cofermées relativement au groupe Γ a la p-cohomologie du cercle pour $p \neq \frac{n+1}{2}$. Plus précisément,*

$$H^p(A^\bullet_{hc}(X)) = \begin{cases} \mathbb{C}[\mathbf{1}] & \textit{si } p = 0 \\ \mathbb{C}\left[m^1\left(\pi_1^*\left(\dfrac{dr}{r}\right)\right)\right] & \textit{si } p = 1 \\ 0 & \textit{si } p \geqslant 1 \textit{ et } p \neq \frac{n+1}{2}. \end{cases}$$

Preuve. Soit $p \in \{0, \dots, n\} \smallsetminus \{\frac{n+1}{2}\}$. D'après le Corollaire 4.19, $H^p(A^\bullet_{hc}(X))$ est engendré par les transformés des générateurs de la cohomologie du complexe $D^\bullet$ précédemment défini.

Si $p \leqslant n-2$, on a $H^p(D^\bullet) = H^p(\mathcal{C}^\bullet_\Gamma(\mathbb{S}^{n-1}))$, dont les générateurs ont été listés au Théorème 4.14.

D'autre part, $\int \delta_0 = \int \delta_\infty = 1$, l'augmentation $\int$ est donc une forme linéaire non nulle donc surjective, d'où $H^n(D^\bullet) = 0$. La distribution $\delta_0 + \delta_\infty$ (qui engendre $H^{n-1}(\mathcal{C}^\bullet_\Gamma(\mathbb{S}^{n-1}))$ lorsque $n \geqslant 3$) n'appartient pas à $\ker \int$ donc $H^{n-1}(D^\bullet) = 0$.

De ceci découle que, toujours pour $p \neq \frac{n+1}{2}$,

$$\dim H^p(A^\bullet_{hc}(X)) \begin{cases} = 0 & \text{si } p \notin \{0,1\} \\ \leqslant 1 & \text{si } p \in \{0,1\}. \end{cases}$$

Nous déterminons maintenant les générateurs de cette cohomologie. Il est clair que les constantes sont des 0-formes automorphes fermées et cofermées. On a donc $H^0(A^\bullet_{hc}(X)) = \mathbb{C}[\mathbf{1}]$. Montrons maintenant que la 1-forme $\pi_1^*\left(\frac{dr}{r}\right)$ est automorphe pour le groupe Γ_0, fermée, cofermée et non exacte. Elle est trivialement fermée et on a, $\langle | \rangle$ désignant le produit scalaire euclidien :

$$\forall x \in \mathbb{H}^n, \forall u \in T_x\mathbb{H}^n, \quad \pi_1^*\left(\frac{dr}{r}\right)_x .u = \frac{\langle x|u\rangle}{\|x\|^2}$$

donc $\pi_1^*\left(\frac{dr}{r}\right)$ est à croissance modérée. Montrons que sa codifférentielle est nulle, en utilisant l'opérateur $*$ de Hodge, qui ici vérifie $*dx_i = (-1)^{i-1}\frac{1}{x_n^{n-2}} dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \ldots \wedge dx_n$:

$$\begin{aligned}
d * \pi_1^*\left(\frac{dr}{r}\right) &= d * \left[\frac{1}{\|x\|^2}\sum_{i=1}^n x_i\, dx_i\right] \\
&= d\left[\frac{1}{x_n^{n-2}\|x\|^2}\sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} x_i\, dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \ldots \wedge dx_n\right] \\
&= d\left(\frac{1}{x_n^{n-2}\|x\|^2}\right) \wedge \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} x_i\, dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \ldots \wedge dx_n \\
&\qquad + \frac{1}{x_n^{n-2}\|x\|^2}\sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} dx_i \wedge dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \ldots \wedge dx_n \\
&= \left(-\frac{2}{x_n^{n-2}\|x\|^4}\sum_{i=1}^n x_i\, dx_i\right) \wedge \left(\sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} x_i\, dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \ldots \wedge dx_n\right) \\
&\qquad - \left(\frac{n-2}{x_n^{n-1}\|x\|^2}\, dx_n\right) \wedge \left(\sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} x_i\, dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \ldots \wedge dx_n\right) \\
&\qquad + \frac{n}{x_n^{n-2}\|x\|^2}\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n \\
&= \frac{1}{x_n^{n-2}\|x\|^2}[-2 - (n-2) + n]\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Ceci entraîne que $\pi_1^*\left(\frac{dr}{r}\right) \in A^1_{hc}(X_0)$; cette forme n'est pas exacte car ses primitives sont les fonctions $x \mapsto \log\|x\| + K$, où K est une constante, qui ne sont pas Γ_0-invariantes.

Puisque la transformation de Poisson commute aux isométries hyperboliques, on obtient, d'après les propriétés du 1-courant $m^1(Vp)$ détaillées dans la démonstration du Théorème 4.14, que $m^1\left(\pi_1^*\left(\frac{dr}{r}\right)\right)$ est une forme automorphe relativement au groupe Γ qui est fermée, cofermée et non exacte. ∎

On peut appliquer la même méthode au cas $n = 2$.

Théorème 4.21. *Si $n = 2$, la cohomologie des formes automorphes harmoniques cofermées relativement au groupe Γ est*

$$H^p(A^\bullet_{hc}(X)) = \begin{cases} \mathbb{C}[\mathbf{1}] & \text{si } p = 0 \\ \mathbb{C}\left[\pi_1^*\left(\frac{dr}{r}\right)\right] & \text{si } p = 1 \text{ et si } \Gamma \text{ est monogène} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Preuve. Ici, n est pair, donc la cohomologie du complexe $A^\bullet_{hc}(X)$ est isomorphe à celle du complexe $D^\bullet$ d'après le Corollaire 4.19. Bien sûr $H^0(A^\bullet_{hc}(X)) = \mathbb{C}[\mathbf{1}]$ et, comme dans la démonstration du Théorème 4.20, on a $H^2(D^\bullet) = 0$.

Si Γ est monogène engendré par une loxodromie, d'après le Théorème 4.6, l'espace $H^1(\mathcal{C}^\bullet_\Gamma(\mathbb{S}^1))$ est engendré par $\delta_0 + \delta_\infty$ et Vp. La distribution $\delta_0 + \delta_\infty$ n'est pas fermée pour l'augmentation $\int$; en revanche on a $\int Vp = 0$ puisqu'il s'agit de l'intégrale d'une fonction impaire sur un intervalle centré en 0. On a donc $H^1(D^\bullet) = \mathbb{C}.[Vp]$ et $\dim H^1(A^\bullet_{hc}(X)) = 1$. Comme précédemment, on vérifie que $\pi_1^*(\frac{dr}{r})$ en est un générateur. Bien sûr, les autres groupes de cohomologie de $A^\bullet_{hc}(X)$ sont nuls.

Si Γ n'est pas monogène, on a, d'après la Proposition 4.16, $H^1(\mathcal{C}^\bullet_\Gamma(\mathbb{S}^1))) = 0$ d'où $H^1(D^\bullet) = 0$ et $H^1(A^\bullet_{hc}(X)) = 0$. ∎

4.3. Le cas parabolique

On suppose maintenant que $n = 2$ et que Γ est un groupe kleinéen monogène de type parabolique. Quitte à le conjuguer par une isométrie hyperbolique, on peut le supposer également engendré par la translation $t : z \longmapsto z + 1$ dans $\mathbb{H}^2$.

Théorème 4.22. *La cohomologie des formes automorphes harmoniques cofermées relativement au groupe* Γ *est :*

$$H^p(A^\bullet_{hc}(X)) = \begin{cases} \mathbb{C}[\mathbf{1}] & \textit{si } p = 0 \\ \mathbb{C}[dx] & \textit{si } p = 1. \end{cases}$$

Preuve. D'après le Corollaire 4.19, cette cohomologie est isomorphe à celle du complexe $D^\bullet$. Comme $\delta_\infty \in D^1$ vérifie $\int \delta_\infty = 1$, l'augmentation est une forme linéaire non nulle donc surjective : $H^2(D^\bullet) = 0$.

On a bien sûr $H^0(D^\bullet) = H^0(\mathcal{C}^\bullet_\Gamma(\mathbb{S}^1)) = \mathbb{C}[1]$. D'après le Théorème 4.13, un générateur de $H^1(\mathcal{C}^\bullet_\Gamma(\mathbb{S}^1))$ est la distribution $Pf(dx)$, qui vérifie

$$\int Pf(dx) = \lim_{A \to +\infty} \int_{-A}^{A} dx = 0.$$

Ceci entraîne que ce générateur est fermé au sens du complexe $D^\bullet$, donc que l'on a encore $H^1(D^\bullet) = \mathbb{C}[Pf(dx)]$.

On en déduit que la p-cohomologie du complexe $A^\bullet(X)$ est de dimension 1 en degrés $p = 0$ et $p = 1$ et nulle en les autres degrés. Bien sûr, on a $H^0(A^\bullet_{hc}(X)) = \mathbb{C}[\mathbf{1}]$. Il reste donc à vérifier que la 1-forme dx sur $\mathbb{H}^2$ est une forme automorphe fermée cofermée non exacte. Cette vérification est immédiate. □

4.4. Quelques mots du cas elliptique

Cette méthode peut encore être appliquée au cas où le groupe Γ est élémentaire de type elliptique, c'est-à-dire fini.

Proposition 4.23. *Pour* $p \neq \frac{n+1}{2}$*, la* p*-cohomologie des formes automorphes harmoniques cofermées relativement à un sous-groupe* Γ *discret élémentaire elliptique de* $\mathrm{Conf}^+(\mathbb{S}^{n-1})$ *est :*

$$H^p(A^\bullet_{hc}(X)) = \begin{cases} \mathbb{C}[\mathbf{1}] & \textit{si } p = 0 \\ 0 & \textit{si } p \neq 0 \textit{ et } p \neq \dfrac{n+1}{2}. \end{cases}$$

Preuve. D'après le Corollaire 4.19, cette cohomologie est engendrée (et de manière isomorphe si $p \neq \frac{n-1}{2}$) par les images des générateurs du complexe $D^\bullet$.

La cohomologie en degré $\leqslant n-2$ des courants Γ-invariants sur $\mathbb{S}^{n-1}$ n'est pas altérée par l'augmentation des distributions : $H^p(D^\bullet) = H^p(\mathcal{C}^\bullet_\Gamma(\mathbb{S}^{n-1}))$ pour $p \leqslant n-2$, ces espaces étants connus par la Proposition 4.17.

En revanche, comme on l'a vu dans la démonstration de la Proposition 4.17, on a $m^{n-1}(\omega) \notin \ker \int$, de sorte que $H^{n-1}(D^\bullet) = 0$. Enfin, l'augmentation $\int$ n'est pas identiquement nulle donc elle est surjective et $H^n(D^\bullet) = 0$. □

4.5. Conclusion : conjecture de Borel-Harder

Les résultats des Théorème 4.20, Théorème 4.21, Théorème 4.22 et Proposition 4.23 peuvent être confrontés à la cohomologie du complexe $\Omega^\bullet(X)$ des formes Γ-invariantes sur $\mathbb{H}^n$. Il est cependant à remarquer qu'on est toujours amené à supposer n pair pour appliquer pleinement ces résultats.

Théorème 4.24. *Si n est pair, la Conjecture 0.1 est vraie pour un groupe kleinéen $\Gamma \subset \mathrm{Iso}^+(\mathbb{H}^n)$ élémentaire de type hyperbolique.*

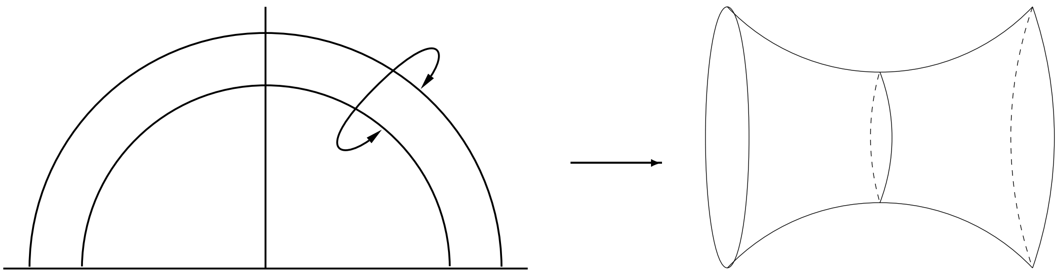
Preuve. A nouveau, quitte à conjuguer Γ par une isométrie hyperbolique, plaçons nous dans le cas où le groupe Γ préserve $\{0, \infty\}$ et soit Γ_0 un sous-groupe d'indice fini de Γ engendré par une loxodromie $\gamma = \gamma_a \circ R$. Posons $X = \mathbb{H}^n/\Gamma$ et $X_0 = \mathbb{H}^n/\Gamma_0$.

Alors, d'après le Lemme 3.16, on a une surjection m_* de $H^p(X_0)$ sur $H^p(X)$.

Un domaine fondamental pour l'action de Γ_0 sur $\mathbb{H}^n$ est la demi-couronne

$$\{x \in \mathbb{H}^n, a \leqslant \|x\| < 1\}$$

et le quotient X_0 a le type d'homotopie d'un cercle.



Action de Γ sur $\mathbb{H}^n$ $(n = 2)$ — X pour $n = 2$

On en déduit que $H^p(X) = 0$ pour $p \notin \{0, 1\}$. Bien sûr, $H^0(X) = \mathbb{C}[\mathbf{1}]$ et il reste le cas $p = 1$ à examiner. On a aussi $H^1(X_0) = \mathbb{C}\left[\pi_1^*\left(\frac{dr}{r}\right)\right]$ donc $H^1(X)$ est engendré par $m^1\left(\pi_1^*\left(\frac{dr}{r}\right)\right)$. C'est également un générateur de la 1-cohomologie de $A^\bullet_{hc}(\mathbb{H}^n)$ lorsque $n \geqslant 4$ comme on l'a vu au Théorème 4.20.

Supposons maintenant que $n = 2$. Puisque la transformation de Poisson est linéaire et commute aux isométries hyperboliques, elle commute également à la moyenne, de sorte que :

$$m^1\left(\pi_1^*\left(\frac{dr}{r}\right)\right) = m^1(\Phi^1(Vp)) = \Phi^1(m^1(Vp)) = 0$$

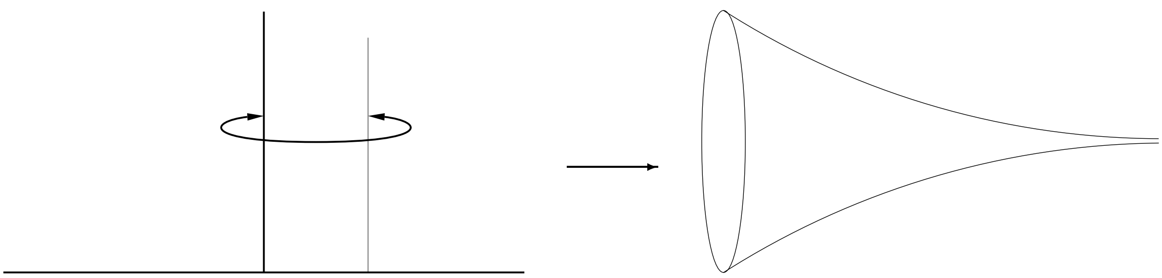
d'après le Théorème 4.21.

Dans les deux cas, l'inclusion $A^\bullet_{hc}(X) \longrightarrow \Omega^\bullet(X)$ est un quasi-isomorphisme. $\square$

Théorème 4.25. *La Conjecture 0.1 est vraie pour un groupe monogène de type parabolique d'isométries de $\mathbb{H}^2$.*

Preuve. Soit Γ un tel groupe, dont on peut supposer qu'il est engendré par la translation $t : z \longmapsto z + 1$. Un domaine fondamental de l'action de Γ sur $\mathbb{H}^2$ est la bande

$$\left\{z \in \mathbb{H}^2, 0 \leqslant \mathrm{Re}(z) \leqslant 1\right\}.$$



Action de la translation sur $\mathbb{H}^2$ — $\mathbb{H}^2/\Gamma$

Le quotient $\mathbb{H}^2/\Gamma$ a le type d'homotopie d'un cercle ; la cohomologie du complexe $\Omega^\bullet(X)$ est engendrée par les constantes en degré 0 et la 1-forme dx en degré 1. Ce sont également les générateurs de $H^1(A^\bullet_{hc}(X))$ d'après le Théorème 4.22. ∎

Proposition 4.26. *Si n est pair, la Conjecture 0.1 est vraie pour un groupe kleinéen $\Gamma \subset \mathrm{Iso}^+(\mathbb{H}^n)$ élémentaire de type elliptique.*

Preuve. L'espace hyperbolique est contractile, donc la cohomologie du quotient X de $\mathbb{H}^n$ par un tel groupe est la cohomologie de Γ, qui est fini. C'est donc la cohomologie du point, identique à celle calculée à la Proposition 4.23. ∎

P.-Y. Gaillard m'a communiqué une démonstration de la Conjecture 0.1 dans le cas plus général du quotient d'un groupe de Lie G connexe simple de rang 1 non compact à centre trivial par un sous-groupe compact maximal K relativement à un sous-groupe Γ fini de G. Elle utilise la théorie des représentations et la théorie de Casselman-Wallach.

Bibliographie

[B] BOREL A., *Cohomology and spectrum of arithmetic groups, In : Operator algebras and group representations I*, Monographs and Studies in Maths. 17 pp. 28-45, 1984.

[D] DELACROIX F., *Invariant currents and automorphic forms of an elementary Kleinian group*, à paraître dans Hokkaido Math. J.

[EMM] EL KACIMI ALAOUI A., MATSUMOTO S. & MOUSSA T., *Currents invariant by a Kleinian group*, Hokkaido Math. J. Vol. XXVI No. 1 pp. 177–202, Sapporo 1997.

[Fra] FRANKE J., *Harmonic analysis in weighted L_2-spaces*, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. (4) 31, no. 2, pp. 181–279, 1998.

[Fre] FREITAG E., *Hilbert modular forms*, Springer-Verlag, New York 1990.

[Ga1] GAILLARD P.-Y., *Transformation de Poisson de formes différentielles. Le cas de l'espace hyperbolique*, Comment. Math. Helvetici 61 pp. 581–616, Basel 1986.

[Ga2] GAILLARD P.-Y., *Un théorème de Hodge pour les variétés non compactes*, manuscrit non publié, 1993.

[Go] GODBILLON C., *Géométrie différentielle et mécanique analytique*, Hermann, Paris 1969.

[HB] HAEFLIGER A. & LI BANGHE, *Currents on a circle invariant by a Fuchsian group*, Lecture Notes in Math. 1007 pp. 369–378, 1981.

[Ma] MATSUMOTO S., *Foundations of flat conformal structures*, Advanced Studies in Pure Mathematics, Vol. 20 pp. 167–261, 1992.

[Ra] RATCLIFFE J. G., *Foundations of Hyperbolic Manifolds*, Springer-Verlag, New York 1994.

[Rh] DE RHAM G., *Variétés différentiables*, Hermann, Paris 1960.

[Sch] SCHWARTZ L., *Théorie des distributions*, Hermann, Paris 1966.

[Su] SULLIVAN D., *The density at infinity of a discrete group of hyperbolic motions*, Publ. Math. IHES 50 pp. 419–450, 1979.

[Wal] WALDSPURGER J.-L., *Cohomologie des espaces de formes automorphes*, Séminaire Bourbaki 48ème année, No. 809, 1995.

[War] WARNER F. W., *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Springer-Verlag, New York 1987.

Résumé en Français

La cohomologie d'un groupe discret à coefficients réels (ou complexes) peut être vue comme la cohomologie de de Rham du quotient d'une variété contractile par une action libre et propre de ce groupe. Il est alors naturel d'envisager l'existence de sous-complexes du complexe des formes différentielles invariantes induisant la même cohomologie, c'est-à-dire pour lesquels l'inclusion est un quasi-isomorphisme.

Cette question est étudiée dans le cadre du quotient de l'espace hyperbolique réel par un groupe Kleinéen, le sous-complexe considéré étant celui des formes automorphes. Ce problème est alors connu sous le nom de conjecture de Borel, et admet une variante, parfois nommée conjecture de Borel-Harder. Cette conjecture est résolue par la théorie de Hodge classique dans le cas où le quotient est compact et a été prouvée par Franke dans le cas où le quotient est de volume fini. Nous étudions dans ce travail des cas simples où le quotient est de volume infini : celui des groupes élémentaires.

Pour cela, nous utilisons la transformation de Poisson pour déplacer le problème sur la sphère à l'infini de l'espace hyperbolique. On calcule alors explicitement la cohomologie des courants invariants sur cette sphère grâce à la décomposition en une partie régulière sur le domaine de discontinuité et une partie irrégulière sur l'ensemble limite. Ce calcul est mené dans le cas de groupes d'abord monogènes de type hyperbolique (engendré par une loxodromie) puis parabolique (engendré par une translation en dimension 2). Un argument de moyenne permet alors d'étendre ces calculs à des classes plus grandes de groupes élémentaires. On en déduit explicitement la cohomologie des formes automorphes harmoniques cofermées via la transformation de Poisson, et la confrontation de ces résultats à la cohomologie de de Rham du quotient en dimension paire permet alors de répondre positivement à la conjecture de Borel-Harder dans les cas envisagés.

Titre en Anglais

Invariant currents and automorphic forms of an elementary Kleinian group

Résumé en Anglais

The cohomology of a discrete group with real (or complex) coefficients can be seen as the de Rham cohomology of the quotient of a contractile manifold by a free and proper action of this group. It is then natural to consider the existence of subcomplexes of the complex of invariant differential forms that induce the same cohomology, i.e. for which the inclusion is a quasi-isomorphism.

This question is studied in the case of the quotient of the real hyperbolic space by a Kleinian group, the considered subcomplex being that of automorphic forms. This problem is then known as the Borel conjecture, and allows a variant, sometimes called the Borel-Harder conjecture. This conjecture is solved by the classical Hodge theory when the quotient is compact and was proved by Franke when the quotient has finite volume. In this work, we examine the simplest case where the quotient has infinite volume : elementary groups.

We use the Poisson transformation to move the problem to the sphere at infinity of the hyperbolic space. Then we compute explicitely the cohomology of invariant currents on this sphere thanks to a decomposition in a regular part on the discontinuity domain and an irregular part on the limit set. This calculus is first made in the cases of infinite cyclic groups of hyperbolic type (generated by a loxodromy), then of parabolic type (generated by a translation in dimension 2). By an average process we can then extend the computations to bigger classes of elementary groups. We obtain explicitely the cohomology of coclosed harmonic automorphic forms via the Poisson transformation, and, by comparing the results with the de Rham cohomology of the quotient when the dimension is even, we can positively answer to the Borel-Harder conjecture for the groups above.

Discipline

Mathématiques

Mots-clés

Courants, Groupes kleinéens, Formes automorphes, Cohomologie

Adresse du laboratoire

Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis
Laboratoire de Mathématiques
Le mont Houy
F-59313 Valenciennes Cedex 9