LE PLAN AFFINE EUCLIDIEN, SES ISOMÉTRIES, SES FIGURES GÉOMÉTRQUES ÉLÉMENTAIRES...

Aziz El Kacimi
Université de Valenciennes
Cité des Géométries - Gare numérique de Jeumont

Formation en géométrie aux
Collèges Bayard et Turgot
Denain les 5, 10, 19 avril et 11 mai 2012

Un chauffeur de bus a constamment en tête le trajet qu'il doit faire de son point de départ à son point d'arrivée !

À n'importe quel niveau, l'enseignant est dans la même situation : pour mener à bien sa leçon, il doit connaître profondément son contenu et en maîtriser les éléments de base !

Surtout, il ne doit pas se contenter de répéter ce qu'il a lu dans un manuel !

Sinon, il ne pourra faire face à aucune situation imprévue, et encore moins répondre aux questions d'un élève éveillé !

Un chauffeur de bus a constamment en tête le trajet qu'il doit faire de son point de départ à son point d'arrivée !

À n'importe quel niveau, l'enseignant est dans la même situation : pour mener à bien sa leçon, il doit connaître profondément son contenu et en maîtriser les éléments de base !

Surtout, il ne doit pas se contenter de répéter ce qu'il a lu dans un manuel !

Sinon, il ne pourra faire face à aucune situation imprévue, et encore moins répondre aux questions d'un élève éveillé !

Un chauffeur de bus a constamment en tête le trajet qu'il doit faire de son point de départ à son point d'arrivée !

À n'importe quel niveau, l'enseignant est dans la même situation : pour mener à bien sa leçon, il doit connaître profondément son contenu et en maîtriser les éléments de base !

Surtout, il ne doit pas se contenter de répéter ce qu'il a lu dans un manuel !

Sinon, il ne pourra faire face à aucune situation imprévue, et encore moins répondre aux questions d'un élève éveillé !

Un chauffeur de bus a constamment en tête le trajet qu'il doit faire de son point de départ à son point d'arrivée !

À n'importe quel niveau, l'enseignant est dans la même situation : pour mener à bien sa leçon, il doit connaître profondément son contenu et en maîtriser les éléments de base !

Surtout, il ne doit pas se contenter de répéter ce qu'il a lu dans un manuel !

Sinon, il ne pourra faire face à aucune situation imprévue, et encore moins répondre aux questions d'un élève éveillé !

La géométrie élémentaire est l'étude de figures dans l'espace représentant le plus souvent des objets familiers de la vie réelle !

C'est du moins ce qui apparaît au premier regard d'un jeune enfant.

Mais realise-t-il à quel point leurs dimensions, leurs propriétés... sont indépendantes de leurs positions ?

L'enfant peut-être pas mais l'enseignant est tenu de le faire !

L'étude des mouvements rigides du plan est donc une étape impérative à toute introduction à la géométrie !

La géométrie élémentaire est l'étude de figures dans l'espace représentant le plus souvent des objets familiers de la vie réelle !

C'est du moins ce qui apparaît au premier regard d'un jeune enfant.

Mais realise-t-il à quel point leurs dimensions, leurs propriétés... sont indépendantes de leurs positions ?

L'enfant peut-être pas mais l'enseignant est tenu de le faire !

L'étude des mouvements rigides du plan est donc une étape impérative à toute introduction à la géométrie !

La géométrie élémentaire est l'étude de figures dans l'espace représentant le plus souvent des objets familiers de la vie réelle !

C'est du moins ce qui apparaît au premier regard d'un jeune enfant.

Mais realise-t-il à quel point leurs dimensions, leurs propriétés... sont indépendantes de leurs positions ?

L'enfant peut-être pas mais l'enseignant est tenu de le faire !

L'étude des mouvements rigides du plan est donc une étape impérative à toute introduction à la géométrie !

La géométrie élémentaire est l'étude de figures dans l'espace représentant le plus souvent des objets familiers de la vie réelle !

C'est du moins ce qui apparaît au premier regard d'un jeune enfant.

Mais realise-t-il à quel point leurs dimensions, leurs propriétés... sont indépendantes de leurs positions ?

L'enfant peut-être pas mais l'enseignant est tenu de le faire !

L'étude des mouvements rigides du plan est donc une étape impérative à toute introduction à la géométrie !

La géométrie élémentaire est l'étude de figures dans l'espace représentant le plus souvent des objets familiers de la vie réelle !

C'est du moins ce qui apparaît au premier regard d'un jeune enfant.

Mais realise-t-il à quel point leurs dimensions, leurs propriétés... sont indépendantes de leurs positions ?

L'enfant peut-être pas mais l'enseignant est tenu de le faire !

L'étude des mouvements rigides du plan est donc une étape impérative à toute introduction à la géométrie !

1. Le plan, ses droites...

Avant de commencer, on fixe d'abord le cadre dans lequel on va travailler

1.1. On suppose bien connue la notion de plan comme ensemble dont les éléments sont les points tel un tableau noir, un sol bien poli, une table bien lisse... On s'y déplace dans tous les sens, sans contrainte et sans limite. Cet ensemble sera noté $\mathcal{P}$.

- *Tous les points de $\mathcal{P}$ jouent le même rôle.*
- *On a les notions habituelles :*
  - *de distance entre deux points A et B notée AB,*
  - *de droites parallèles,*
  - *d'angle de deux demi-droites,*
  - *de droites perpendiculaires.*

1. Le plan, ses droites...

Avant de commencer, on fixe d'abord le cadre dans lequel on va travailler

***1.1.** On suppose bien connue la notion de plan comme ensemble dont les éléments sont les points tel un tableau noir, un sol bien poli, une table bien lisse... On s'y déplace dans tous les sens, sans contrainte et sans limite. Cet ensemble sera noté $\mathcal{P}$.*

- *Tous les points de $\mathcal{P}$ jouent le même rôle.*
- *On a les notions habituelles :*
  - *de distance entre deux points A et B notée AB,*
  - *de droites parallèles,*
  - *d'angle de deux demi-droites,*
  - *de droites perpendiculaires.*

1. Le plan, ses droites...

Avant de commencer, on fixe d'abord le cadre dans lequel on va travailler

1.1. ***On suppose bien connue la notion de plan comme ensemble dont les éléments sont les points tel un tableau noir, un sol bien poli, une table bien lisse... On s'y déplace dans tous les sens, sans contrainte et sans limite. Cet ensemble sera noté $\mathcal{P}$.***

- ***Tous les points de $\mathcal{P}$ jouent le même rôle.***
- ***On a les notions habituelles :***
  - ***de distance entre deux points A et B notée AB,***
  - ***de droites parallèles,***
  - ***d'angle de deux demi-droites,***
  - ***de droites perpendiculaires.***

1. Le plan, ses droites...

Avant de commencer, on fixe d'abord le cadre dans lequel on va travailler

1.1. *On suppose bien connue la notion de **plan** comme ensemble dont les éléments sont les **points** tel un tableau noir, un sol bien poli, une table bien lisse... On s'y déplace dans tous les sens, sans contrainte et sans limite. Cet ensemble sera noté $\mathcal{P}$.*

- *Tous les points de $\mathcal{P}$ jouent le même rôle.*
- *On a les notions habituelles :*
  - *de distance entre deux points A et B notée AB,*
  - *de droites parallèles,*
  - *d'angle de deux demi-droites,*
  - *de droites perpendiculaires.*

1. Le plan, ses droites...

Avant de commencer, on fixe d'abord le cadre dans lequel on va travailler

1.1. ***On suppose bien connue la notion de plan comme ensemble dont les éléments sont les points tel un tableau noir, un sol bien poli, une table bien lisse... On s'y déplace dans tous les sens, sans contrainte et sans limite. Cet ensemble sera noté $\mathcal{P}$.***

- ***Tous les points de $\mathcal{P}$ jouent le même rôle.***
- ***On a les notions habituelles :***
  - ***de distance entre deux points A et B notée AB,***
  - ***de droites parallèles,***
  - ***d'angle de deux demi-droites,***
  - ***de droites perpendiculaires.***

1. Le plan, ses droites...

Avant de commencer, on fixe d'abord le cadre dans lequel on va travailler

1.1. *On suppose bien connue la notion de plan comme ensemble dont les éléments sont les points tel un tableau noir, un sol bien poli, une table bien lisse... On s'y déplace dans tous les sens, sans contrainte et sans limite. Cet ensemble sera noté $\mathcal{P}$.*

- *Tous les points de $\mathcal{P}$ jouent le même rôle.*
- *On a les notions habituelles :*
  - *de distance entre deux points A et B notée AB,*
  - *de droites parallèles,*
  - *d'angle de deux demi-droites,*
  - *de droites perpendiculaires.*

1. Le plan, ses droites...

Avant de commencer, on fixe d'abord le cadre dans lequel on va travailler

1.1. *On suppose bien connue la notion de **plan** comme ensemble dont les éléments sont les **points** tel un tableau noir, un sol bien poli, une table bien lisse... On s'y déplace dans tous les sens, sans contrainte et sans limite. Cet ensemble sera noté $\mathcal{P}$.*

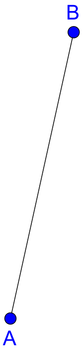
- *Tous les points de $\mathcal{P}$ jouent le même rôle.*
- *On a les notions habituelles :*
  - *de **distance** entre deux points A et B notée AB,*
  - *de **droites parallèles**,*
  - *d'**angle** de deux demi-droites,*
  - *de **droites perpendiculaires**.*

1. Le plan, ses droites...

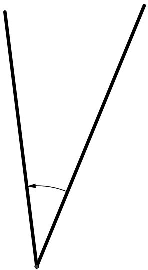
Avant de commencer, on fixe d'abord le cadre dans lequel on va travailler

1.1. *On suppose bien connue la notion de plan comme ensemble dont les éléments sont les points tel un tableau noir, un sol bien poli, une table bien lisse... On s'y déplace dans tous les sens, sans contrainte et sans limite. Cet ensemble sera noté $\mathcal{P}$.*

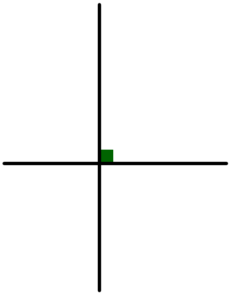
- *Tous les points de $\mathcal{P}$ jouent le même rôle.*
- *On a les notions habituelles :*
  - *de distance entre deux points A et B notée AB,*
  - *de droites parallèles,*
  - *d'angle de deux demi-droites,*
  - *de droites perpendiculaires.*



Droites parallèles



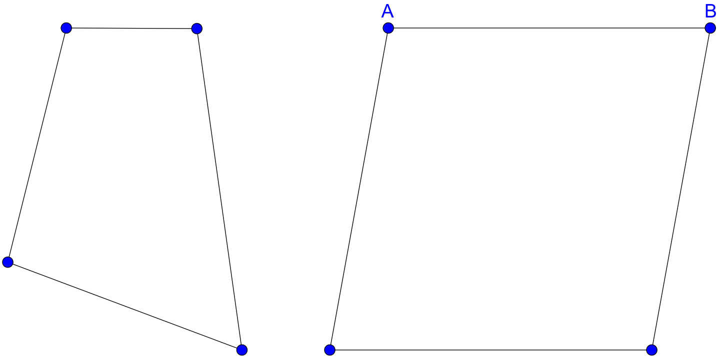
Angle de deux demi-droites



Droites perpendiculaires

1.2. On se donne le plan $\mathcal{P}$ avec toutes les propriétés qu'on vient d'énumérer et qu'on suppose admises.

Rappelons qu'un parallélogramme est un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles deux à deux.

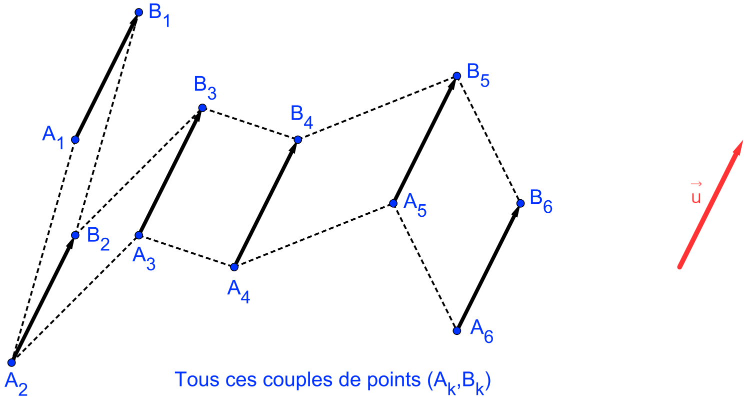


Quadrilatère quelconque

Parallélogramme

– ***Un couple de points (A, B) de $\mathcal{P}$ définit un vecteur qu'on notera $\overrightarrow{AB}$.***

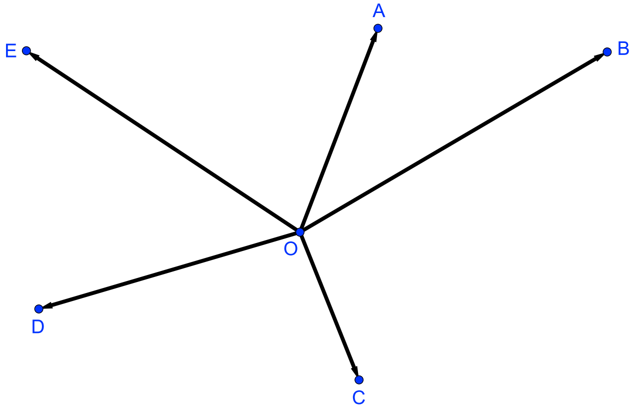
– ***Deux couples (A_1, B_1) et (A_2, B_2) définissent le "même vecteur" si le quadrilatère $A_1B_1B_2A_2$ est un parallélogramme.***



Tous ces couples de points (A_k,B_k)
définissent un même vecteur

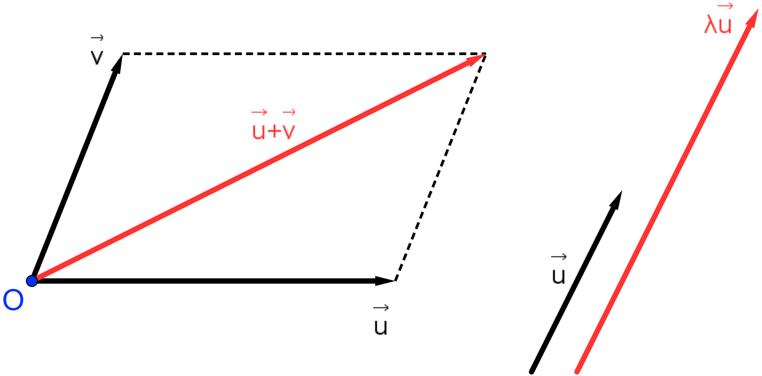
Les vecteurs forment un ensemble qu'on notera $\overrightarrow{\mathcal{V}}$***. Ses éléments seront notés*** $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$***...***

En choisissant un point O ***dans*** $\mathcal{P}$***, on peut représenter chaque vecteur*** $\overrightarrow{u}$ ***par le couple*** (O, A) ***où*** A ***est un point du plan.***



L'ensemble $\overrightarrow{\mathcal{V}}$ est muni de deux opérations :

- ***L'addition : $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$,***
- ***La multiplication par un nombre réel : $\lambda\overrightarrow{u}$.***



L'addition sur $\overrightarrow{\mathcal{V}}$ a les propriétés qui suivent :

- *Elle est commutative, c'est-à-dire :* $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}$.
- *Elle a un élément neutre qui est le vecteur nul noté* $\overrightarrow{0}$.
- *Tout vecteur* $\overrightarrow{u}$ *a un opposé noté* $-\overrightarrow{u}$.

La multiplication par les réels a les propriétés qui suivent :

- $1\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}$.
- $\lambda(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \lambda\overrightarrow{u} + \lambda\overrightarrow{v}$.
- $(\lambda + \mu)\overrightarrow{u} = \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{u}$.
- $\lambda(\mu\overrightarrow{u}) = (\lambda\mu)\overrightarrow{u}$.

L'addition confère à $\overrightarrow{\mathcal{V}}$ une structure de groupe commutatif. Les deux lois lui confèrent une structure d'espace vectoriel sur le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels : c'est le plan vectoriel !

L'addition sur $\overrightarrow{\mathcal{V}}$ a les propriétés qui suivent :

- *Elle est **commutative**, c'est-à-dire :* $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}$.
- *Elle a un **élément neutre** qui est le **vecteur nul** noté* $\overrightarrow{0}$.
- *Tout vecteur* $\overrightarrow{u}$ *a un **opposé** noté* $-\overrightarrow{u}$.

La multiplication par les réels a les propriétés qui suivent :

- $1\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}$.
- $\lambda(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \lambda\overrightarrow{u} + \lambda\overrightarrow{v}$.
- $(\lambda + \mu)\overrightarrow{u} = \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{u}$.
- $\lambda(\mu\overrightarrow{u}) = (\lambda\mu)\overrightarrow{u}$.

*L'addition confère à $\overrightarrow{\mathcal{V}}$ une structure de **groupe commutatif**. Les deux lois lui confèrent une structure **d'espace vectoriel** sur le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels : c'est le **plan vectoriel** !*

L'addition sur $\overrightarrow{\mathcal{V}}$ a les propriétés qui suivent :

- *Elle est commutative, c'est-à-dire :* $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}$.
- *Elle a un élément neutre qui est le vecteur nul noté* $\overrightarrow{0}$.
- *Tout vecteur* $\overrightarrow{u}$ *a un opposé noté* $-\overrightarrow{u}$.

La multiplication par les réels a les propriétés qui suivent :

- $1\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}$.
- $\lambda(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \lambda\overrightarrow{u} + \lambda\overrightarrow{v}$.
- $(\lambda + \mu)\overrightarrow{u} = \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{u}$.
- $\lambda(\mu\overrightarrow{u}) = (\lambda\mu)\overrightarrow{u}$.

L'addition confère à $\overrightarrow{\mathcal{V}}$ une structure de groupe commutatif. Les deux lois lui confèrent une structure d'espace vectoriel sur le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels : c'est le plan vectoriel !

L'addition sur $\overrightarrow{\mathcal{V}}$ a les propriétés qui suivent :

- *Elle est commutative, c'est-à-dire :* $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}$.
- *Elle a un élément neutre qui est le vecteur nul noté* $\overrightarrow{0}$.
- *Tout vecteur* $\overrightarrow{u}$ *a un opposé noté* $-\overrightarrow{u}$.

La multiplication par les réels a les propriétés qui suivent :

- $1\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}$.
- $\lambda(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \lambda\overrightarrow{u} + \lambda\overrightarrow{v}$.
- $(\lambda + \mu)\overrightarrow{u} = \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{u}$.
- $\lambda(\mu\overrightarrow{u}) = (\lambda\mu)\overrightarrow{u}$.

L'addition confère à $\overrightarrow{\mathcal{V}}$ une structure de groupe commutatif. Les deux lois lui confèrent une structure d'espace vectoriel sur le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels : c'est le plan vectoriel !

L'addition sur $\overrightarrow{\mathcal{V}}$ a les propriétés qui suivent :

- *Elle est commutative, c'est-à-dire :* $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}$.
- *Elle a un élément neutre qui est le vecteur nul noté* $\overrightarrow{0}$.
- *Tout vecteur* $\overrightarrow{u}$ *a un opposé noté* $-\overrightarrow{u}$.

La multiplication par les réels a les propriétés qui suivent :

- $1\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}$.
- $\lambda(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \lambda\overrightarrow{u} + \lambda\overrightarrow{v}$.
- $(\lambda + \mu)\overrightarrow{u} = \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{u}$.
- $\lambda(\mu\overrightarrow{u}) = (\lambda\mu)\overrightarrow{u}$.

L'addition confère à $\overrightarrow{\mathcal{V}}$ une structure de groupe commutatif. Les deux lois lui confèrent une structure d'espace vectoriel sur le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels : c'est le plan vectoriel !

L'addition sur $\overrightarrow{\mathcal{V}}$ a les propriétés qui suivent :

- *Elle est commutative, c'est-à-dire :* $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}$.
- *Elle a un élément neutre qui est le vecteur nul noté* $\overrightarrow{0}$.
- *Tout vecteur* $\overrightarrow{u}$ *a un opposé noté* $-\overrightarrow{u}$.

La multiplication par les réels a les propriétés qui suivent :

- $1\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}$.
- $\lambda(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \lambda\overrightarrow{u} + \lambda\overrightarrow{v}$.
- $(\lambda + \mu)\overrightarrow{u} = \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{u}$.
- $\lambda(\mu\overrightarrow{u}) = (\lambda\mu)\overrightarrow{u}$.

L'addition confère à $\overrightarrow{\mathcal{V}}$ une structure de groupe commutatif. Les deux lois lui confèrent une structure d'espace vectoriel sur le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels : c'est le plan vectoriel !

L'addition sur $\overrightarrow{\mathcal{V}}$ a les propriétés qui suivent :

- *Elle est commutative, c'est-à-dire :* $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}$.
- *Elle a un élément neutre qui est le vecteur nul noté* $\overrightarrow{0}$.
- *Tout vecteur* $\overrightarrow{u}$ *a un opposé noté* $-\overrightarrow{u}$.

La multiplication par les réels a les propriétés qui suivent :

- $1\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}$.
- $\lambda(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \lambda\overrightarrow{u} + \lambda\overrightarrow{v}$.
- $(\lambda + \mu)\overrightarrow{u} = \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{u}$.
- $\lambda(\mu\overrightarrow{u}) = (\lambda\mu)\overrightarrow{u}$.

L'addition confère à $\overrightarrow{\mathcal{V}}$ une structure de groupe commutatif. Les deux lois lui confèrent une structure d'espace vectoriel sur le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels : c'est le plan vectoriel !

L'addition sur $\overrightarrow{\mathcal{V}}$ a les propriétés qui suivent :

- *Elle est commutative, c'est-à-dire :* $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}$.
- *Elle a un élément neutre qui est le vecteur nul noté* $\overrightarrow{0}$.
- *Tout vecteur* $\overrightarrow{u}$ *a un opposé noté* $-\overrightarrow{u}$.

La multiplication par les réels a les propriétés qui suivent :

- $1\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}$.
- $\lambda(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \lambda\overrightarrow{u} + \lambda\overrightarrow{v}$.
- $(\lambda + \mu)\overrightarrow{u} = \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{u}$.
- $\lambda(\mu\overrightarrow{u}) = (\lambda\mu)\overrightarrow{u}$.

L'addition confère à $\overrightarrow{\mathcal{V}}$ une structure de groupe commutatif. Les deux lois lui confèrent une structure d'espace vectoriel sur le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels : c'est le plan vectoriel !

L'addition sur $\overrightarrow{\mathcal{V}}$ a les propriétés qui suivent :

- *Elle est commutative, c'est-à-dire :* $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}$.
- *Elle a un élément neutre qui est le vecteur nul noté* $\overrightarrow{0}$.
- *Tout vecteur* $\overrightarrow{u}$ *a un opposé noté* $-\overrightarrow{u}$.

La multiplication par les réels a les propriétés qui suivent :

- $1\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}$.
- $\lambda(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \lambda\overrightarrow{u} + \lambda\overrightarrow{v}$.
- $(\lambda + \mu)\overrightarrow{u} = \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{u}$.
- $\lambda(\mu\overrightarrow{u}) = (\lambda\mu)\overrightarrow{u}$.

L'addition confère à $\overrightarrow{\mathcal{V}}$ une structure de groupe commutatif. Les deux lois lui confèrent une structure d'espace vectoriel sur le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels : c'est le plan vectoriel !

L'addition sur $\overrightarrow{\mathcal{V}}$ a les propriétés qui suivent :

- *Elle est commutative, c'est-à-dire :* $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}$.
- *Elle a un élément neutre qui est le vecteur nul noté* $\overrightarrow{0}$.
- *Tout vecteur* $\overrightarrow{u}$ *a un opposé noté* $-\overrightarrow{u}$.

La multiplication par les réels a les propriétés qui suivent :

- $1\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}$.
- $\lambda(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \lambda\overrightarrow{u} + \lambda\overrightarrow{v}$.
- $(\lambda + \mu)\overrightarrow{u} = \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{u}$.
- $\lambda(\mu\overrightarrow{u}) = (\lambda\mu)\overrightarrow{u}$.

L'addition confère à $\overrightarrow{\mathcal{V}}$ une structure de groupe commutatif.
Les deux lois lui confèrent une structure d'espace vectoriel sur le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels : c'est le plan vectoriel !

L'addition sur $\overrightarrow{\mathcal{V}}$ a les propriétés qui suivent :

- *Elle est commutative, c'est-à-dire :* $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}$.
- *Elle a un élément neutre qui est le vecteur nul noté* $\overrightarrow{0}$.
- *Tout vecteur* $\overrightarrow{u}$ *a un opposé noté* $-\overrightarrow{u}$.

La multiplication par les réels a les propriétés qui suivent :

- $1\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}$.
- $\lambda(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \lambda\overrightarrow{u} + \lambda\overrightarrow{v}$.
- $(\lambda + \mu)\overrightarrow{u} = \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{u}$.
- $\lambda(\mu\overrightarrow{u}) = (\lambda\mu)\overrightarrow{u}$.

L'addition confère à $\overrightarrow{\mathcal{V}}$ une structure de groupe commutatif. Les deux lois lui confèrent une structure d'espace vectoriel sur le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels : c'est le plan vectoriel !

2. Les isométries

2.1. ***Une transformation de $\mathcal{P}$ est une bijection $\mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$.***

Tout vecteur $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{V}}$ en définit une :

$$\tau_{\overrightarrow{u}} : M \in \mathcal{P} \longrightarrow \tau_{\overrightarrow{u}}(M) = M' \in \mathcal{P}$$

avec $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{u}$. Le point M' est aussi noté $M + \overrightarrow{u}$ pour bien montrer que M est "poussé" vers M' par la "force" $\overrightarrow{u}$.

La correspondance $\overrightarrow{u} \longmapsto \tau_{\overrightarrow{u}}$ est telle que :

- $\tau_{\overrightarrow{u}} =$ *identité* $\Longleftrightarrow \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.
- $\tau_{\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}} = \tau_{\overrightarrow{v}} \circ \tau_{\overrightarrow{u}}$.
- $\tau_{\overrightarrow{u}}^{-1} = \tau_{-\overrightarrow{u}}$.

La transformation $\tau_{\overrightarrow{u}}$ est appelée translation de vecteur $\overrightarrow{u}$.

Les translations forment un groupe noté $\mathfrak{T}$ isomorphe à $\overrightarrow{\mathcal{V}}$.

2. Les isométries

2.1. ***Une transformation de $\mathcal{P}$ est une bijection $\mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$.***
Tout vecteur $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{V}}$ en définit une :

$$\tau_{\overrightarrow{u}} : M \in \mathcal{P} \longrightarrow \tau_{\overrightarrow{u}}(M) = M' \in \mathcal{P}$$

avec $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{u}$. Le point M' est aussi noté $M + \overrightarrow{u}$ pour bien montrer que M est "poussé" vers M' par la "force" $\overrightarrow{u}$.

La correspondance $\overrightarrow{u} \longmapsto \tau_{\overrightarrow{u}}$ est telle que :

- $\tau_{\overrightarrow{u}} = \textit{identité} \Longleftrightarrow \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.
- $\tau_{\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}} = \tau_{\overrightarrow{v}} \circ \tau_{\overrightarrow{u}}$.
- $\tau_{\overrightarrow{u}}^{-1} = \tau_{-\overrightarrow{u}}$.

La transformation $\tau_{\overrightarrow{u}}$ est appelée translation de vecteur $\overrightarrow{u}$.

Les translations forment un groupe noté $\mathfrak{T}$ isomorphe à $\overrightarrow{\mathcal{V}}$.

2. Les isométries

***2.1.* Une transformation de $\mathcal{P}$ est une bijection $\mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$.**
Tout vecteur $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{V}}$ en définit une :

$$\tau_{\overrightarrow{u}} : M \in \mathcal{P} \longrightarrow \tau_{\overrightarrow{u}}(M) = M' \in \mathcal{P}$$

avec $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{u}$. Le point M' est aussi noté $M + \overrightarrow{u}$ pour bien montrer que M est "poussé" vers M' par la "force" $\overrightarrow{u}$.

La correspondance $\overrightarrow{u} \longmapsto \tau_{\overrightarrow{u}}$ est telle que :

- $\tau_{\overrightarrow{u}} = \mathit{identit\acute{e}} \Longleftrightarrow \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.
- $\tau_{\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}} = \tau_{\overrightarrow{v}} \circ \tau_{\overrightarrow{u}}$.
- $\tau_{\overrightarrow{u}}^{-1} = \tau_{-\overrightarrow{u}}$.

La transformation $\tau_{\overrightarrow{u}}$ est appelée translation de vecteur $\overrightarrow{u}$.

Les translations forment un groupe noté $\mathfrak{T}$ isomorphe à $\overrightarrow{\mathcal{V}}$.

2. Les isométries

2.1. Une transformation de $\mathcal{P}$ est une bijection $\mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$.
Tout vecteur $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{V}}$ en définit une :

$$\tau_{\overrightarrow{u}} : M \in \mathcal{P} \longrightarrow \tau_{\overrightarrow{u}}(M) = M' \in \mathcal{P}$$

avec $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{u}$. Le point M' est aussi noté $M + \overrightarrow{u}$ pour bien montrer que M est "poussé" vers M' par la "force" $\overrightarrow{u}$.

La correspondance $\overrightarrow{u} \longmapsto \tau_{\overrightarrow{u}}$ est telle que :

- $\tau_{\overrightarrow{u}} = \textit{identité} \Longleftrightarrow \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.
- $\tau_{\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}} = \tau_{\overrightarrow{v}} \circ \tau_{\overrightarrow{u}}$.
- $\tau_{\overrightarrow{u}}^{-1} = \tau_{-\overrightarrow{u}}$.

La transformation $\tau_{\overrightarrow{u}}$ est appelée translation de vecteur $\overrightarrow{u}$.

Les translations forment un groupe noté $\mathfrak{T}$ isomorphe à $\overrightarrow{\mathcal{V}}$.

2. Les isométries

2.1. ***Une transformation de $\mathcal{P}$ est une bijection $\mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$.***
Tout vecteur $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{V}}$ en définit une :

$$\tau_{\overrightarrow{u}} : M \in \mathcal{P} \longrightarrow \tau_{\overrightarrow{u}}(M) = M' \in \mathcal{P}$$

avec $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{u}$. Le point M' est aussi noté $M + \overrightarrow{u}$ pour bien montrer que M est "poussé" vers M' par la "force" $\overrightarrow{u}$.

La correspondance $\overrightarrow{u} \longmapsto \tau_{\overrightarrow{u}}$ est telle que :

- $\tau_{\overrightarrow{u}} =$ ***identité*** $\Longleftrightarrow \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.
- $\tau_{\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}} = \tau_{\overrightarrow{v}} \circ \tau_{\overrightarrow{u}}$.
- $\tau_{\overrightarrow{u}}^{-1} = \tau_{-\overrightarrow{u}}$.

La transformation $\tau_{\overrightarrow{u}}$ est appelée translation de vecteur $\overrightarrow{u}$.

Les translations forment un groupe noté $\mathfrak{T}$ isomorphe à $\overrightarrow{\mathcal{V}}$.

2. Les isométries

2.1. ***Une transformation de $\mathcal{P}$ est une bijection $\mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$. Tout vecteur $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{V}}$ en définit une :***

$$\tau_{\overrightarrow{u}} : M \in \mathcal{P} \longrightarrow \tau_{\overrightarrow{u}}(M) = M' \in \mathcal{P}$$

avec $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{u}$. Le point M' est aussi noté $M + \overrightarrow{u}$ pour bien montrer que M est "poussé" vers M' par la "force" $\overrightarrow{u}$.

La correspondance $\overrightarrow{u} \longmapsto \tau_{\overrightarrow{u}}$ est telle que :

- $\tau_{\overrightarrow{u}} =$ ***identité*** $\Longleftrightarrow \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.
- $\tau_{\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}} = \tau_{\overrightarrow{v}} \circ \tau_{\overrightarrow{u}}$.
- $\tau_{\overrightarrow{u}}^{-1} = \tau_{-\overrightarrow{u}}$.

La transformation $\tau_{\overrightarrow{u}}$ est appelée translation de vecteur $\overrightarrow{u}$.

Les translations forment un groupe noté $\mathfrak{T}$ isomorphe à $\overrightarrow{\mathcal{V}}$.

2. Les isométries

2.1. ***Une transformation de $\mathcal{P}$ est une bijection $\mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$.***
Tout vecteur $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{V}}$ en définit une :

$$\tau_{\overrightarrow{u}} : M \in \mathcal{P} \longrightarrow \tau_{\overrightarrow{u}}(M) = M' \in \mathcal{P}$$

avec $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{u}$. Le point M' est aussi noté $M + \overrightarrow{u}$ pour bien montrer que M est "poussé" vers M' par la "force" $\overrightarrow{u}$.

La correspondance $\overrightarrow{u} \longmapsto \tau_{\overrightarrow{u}}$ est telle que :

- $\tau_{\overrightarrow{u}} =$ ***identité*** $\Longleftrightarrow \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.
- $\tau_{\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}} = \tau_{\overrightarrow{v}} \circ \tau_{\overrightarrow{u}}$.
- $\tau_{\overrightarrow{u}}^{-1} = \tau_{-\overrightarrow{u}}$.

La transformation $\tau_{\overrightarrow{u}}$ est appelée translation de vecteur $\overrightarrow{u}$.

Les translations forment un groupe noté $\mathfrak{T}$ isomorphe à $\overrightarrow{\mathcal{V}}$.

2. Les isométries

2.1. Une transformation de $\mathcal{P}$ est une bijection $\mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$. Tout vecteur $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{V}}$ en définit une :

$$\tau_{\overrightarrow{u}} : M \in \mathcal{P} \longrightarrow \tau_{\overrightarrow{u}}(M) = M' \in \mathcal{P}$$

avec $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{u}$. Le point M' est aussi noté $M + \overrightarrow{u}$ pour bien montrer que M est "poussé" vers M' par la "force" $\overrightarrow{u}$.

La correspondance $\overrightarrow{u} \longmapsto \tau_{\overrightarrow{u}}$ est telle que :

- $\tau_{\overrightarrow{u}} =$ ***identité*** $\Longleftrightarrow \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.
- $\tau_{\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}} = \tau_{\overrightarrow{v}} \circ \tau_{\overrightarrow{u}}$.
- $\tau_{\overrightarrow{u}}^{-1} = \tau_{-\overrightarrow{u}}$.

La transformation $\tau_{\overrightarrow{u}}$ est appelée translation de vecteur $\overrightarrow{u}$.

Les translations forment un groupe noté $\mathfrak{T}$ isomorphe à $\overrightarrow{\mathcal{V}}$.

2. Les isométries

*2.1. Une **transformation** de $\mathcal{P}$ est une bijection $\mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$.*
Tout vecteur $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{V}}$ en définit une :

$$\tau_{\overrightarrow{u}} : M \in \mathcal{P} \longrightarrow \tau_{\overrightarrow{u}}(M) = M' \in \mathcal{P}$$

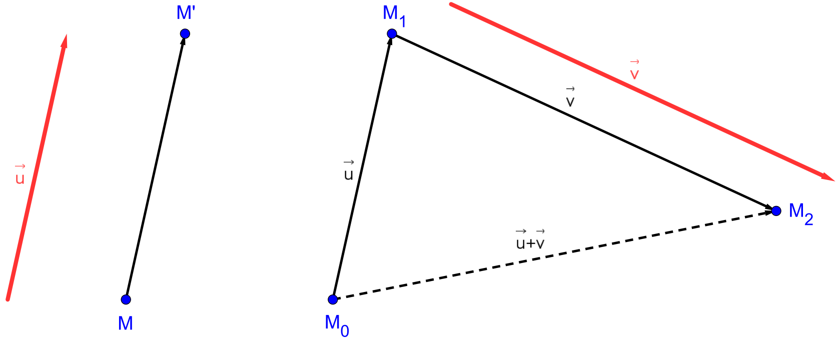
avec $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{u}$. Le point M' est aussi noté $M + \overrightarrow{u}$ pour bien montrer que M est “poussé” vers M' par la “force” $\overrightarrow{u}$.

La correspondance $\overrightarrow{u} \longmapsto \tau_{\overrightarrow{u}}$ est telle que :

- $\tau_{\overrightarrow{u}} = \textit{identité} \Longleftrightarrow \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.
- $\tau_{\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}} = \tau_{\overrightarrow{v}} \circ \tau_{\overrightarrow{u}}$.
- $\tau_{\overrightarrow{u}}^{-1} = \tau_{-\overrightarrow{u}}$.

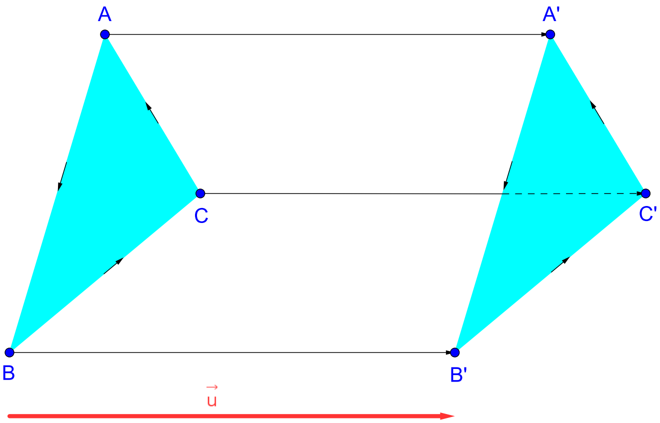
*La transformation $\tau_{\overrightarrow{u}}$ est appelée **translation de vecteur** $\overrightarrow{u}$.*

Les translations forment un groupe noté $\mathfrak{T}$ isomorphe à $\overrightarrow{\mathcal{V}}$.

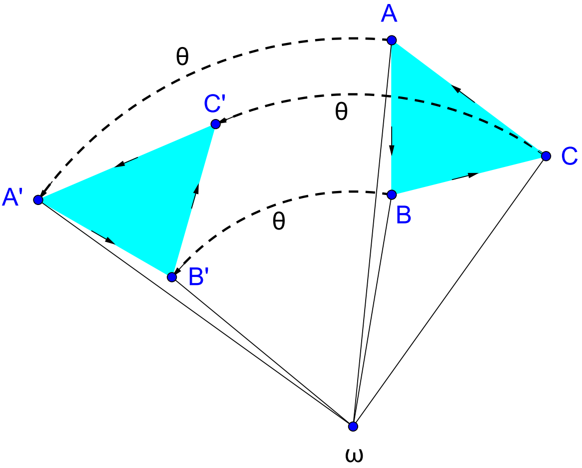


M'
M
$\vec{u}$
M_1
M_0
M_2
$\vec{u}$
$\vec{v}$
$\vec{v}$
$\vec{u}+\vec{v}$

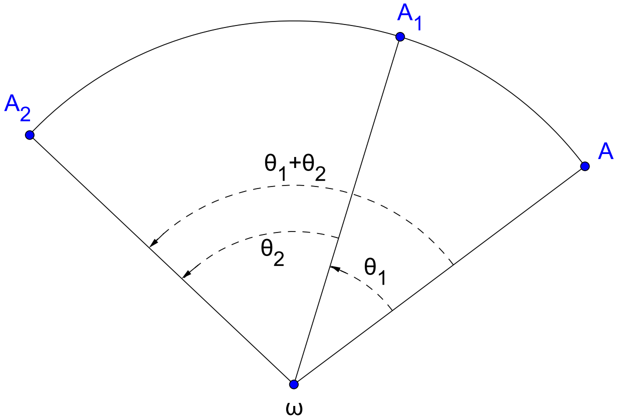
Une translation conserve les distances et l'orientation.
*C'est une **isométrie directe** ou **déplacement**.*



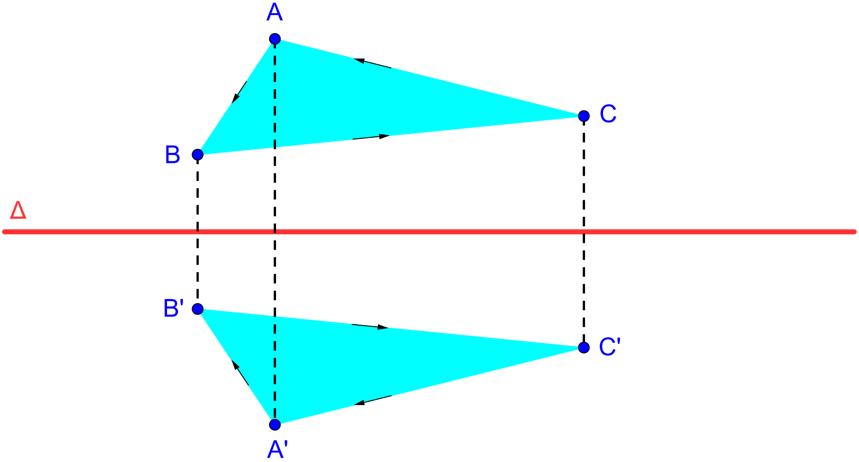
2.2. Une rotation de $\mathcal{P}$ est définie par un centre ω et un angle θ. Elle conserve les distances et l'orientation ; c'est donc un déplacement du plan.



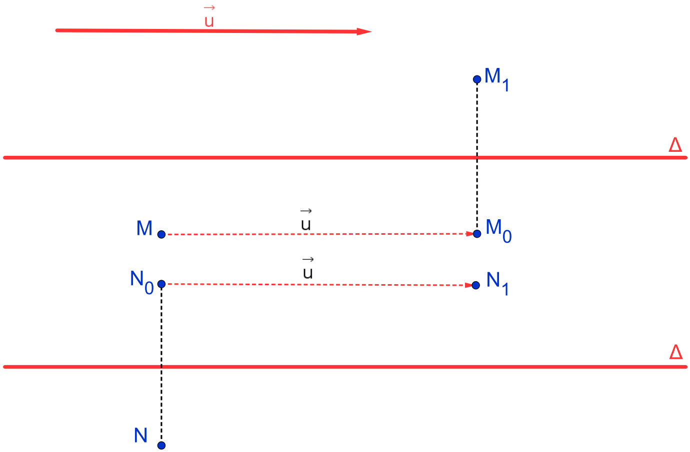
La composée de deux rotations r_1 et r_2 de même centre et d'angles respectifs θ_1 et θ_2 est une rotation de même centre et d'angle $\theta_1 + \theta_2$.



2.3. ***Une réflexion ou symétrie axiale de $\mathcal{P}$ est définie par un axe Δ. Elle conserve les distances mais pas l'orientation !***



*2.4. Une **symétrie glissée** est la composée d'une réflexion et d'une translation. Ses éléments sont un vecteur $\overrightarrow{u}$ et un axe Δ parallèle à $\overrightarrow{u}$. Elle conserve les distances mais pas l'orientation ! (L'ordre de composition ne compte pas.)*



2.5. *Remarque*

- *On regarde le plan affine euclidien $\mathcal{P}$ comme la surface d'un sol parfaitement plan.*
- *On dépose dessus un objet $\mathcal{O}$ sans épaisseur, un triangle par exemple.*
- *Si on fait subir à $\mathcal{O}$ une isométrie directe, c'est-à-dire un élément de $Isom^+(\mathcal{P})$, on ne fera que le déplacer tout en le gardant constamment sur le sol !*
- *Mais si on lui fait subir une isométrie indirecte (ou négative), on le retourne et on est obligé, à cet effet, de le faire décoller du sol !*

Les isométries forment un groupe noté $Isom(\mathcal{P})$.
Celles qui sont directes en forment un sous-groupe $Isom^+(\mathcal{P})$ appelé aussi groupe des déplacements du plan et est noté quelquefois $Dép(\mathcal{P})$.

2.5. *Remarque*

- ***On regarde le plan affine euclidien $\mathcal{P}$ comme la surface d'un sol parfaitement plan.***
- ***On dépose dessus un objet $\mathcal{O}$ sans épaisseur, un triangle par exemple.***
- ***Si on fait subir à $\mathcal{O}$ une isométrie directe, c'est-à-dire un élément de $Isom^+(\mathcal{P})$, on ne fera que le déplacer tout en le gardant constamment sur le sol !***
- ***Mais si on lui fait subir une isométrie indirecte (ou négative), on le retourne et on est obligé, à cet effet, de le faire décoller du sol !***

Les isométries forment un groupe noté $Isom(\mathcal{P})$. Celles qui sont directes en forment un sous-groupe $Isom^+(\mathcal{P})$ appelé aussi groupe des déplacements du plan et est noté quelquefois $Dép(\mathcal{P})$.

2.5. *Remarque*

- ***On regarde le plan affine euclidien $\mathcal{P}$ comme la surface d'un sol parfaitement plan.***
- ***On dépose dessus un objet $\mathcal{O}$ sans épaisseur, un triangle par exemple.***
- ***Si on fait subir à $\mathcal{O}$ une isométrie directe, c'est-à-dire un élément de $Isom^+(\mathcal{P})$, on ne fera que le déplacer tout en le gardant constamment sur le sol !***
- ***Mais si on lui fait subir une isométrie indirecte (ou négative), on le retourne et on est obligé, à cet effet, de le faire décoller du sol !***

Les isométries forment un groupe noté $Isom(\mathcal{P})$. Celles qui sont directes en forment un sous-groupe $Isom^+(\mathcal{P})$ appelé aussi groupe des déplacements du plan et est noté quelquefois $Dép(\mathcal{P})$.

2.5. *Remarque*

- ***On regarde le plan affine euclidien $\mathcal{P}$ comme la surface d'un sol parfaitement plan.***
- ***On dépose dessus un objet $\mathcal{O}$ sans épaisseur, un triangle par exemple.***
- ***Si on fait subir à $\mathcal{O}$ une isométrie directe, c'est-à-dire un élément de $Isom^{+}(\mathcal{P})$, on ne fera que le déplacer tout en le gardant constamment sur le sol !***
- ***Mais si on lui fait subir une isométrie indirecte (ou négative), on le retourne et on est obligé, à cet effet, de le faire décoller du sol !***

Les isométries forment un groupe noté $Isom(\mathcal{P})$. Celles qui sont directes en forment un sous-groupe $Isom^{+}(\mathcal{P})$ appelé aussi groupe des déplacements du plan et est noté quelquefois $Dép(\mathcal{P})$.

2.5. Remarque

- *On regarde le plan affine euclidien $\mathcal{P}$ comme la surface d'un sol parfaitement plan.*
- *On dépose dessus un objet $\mathcal{O}$ sans épaisseur, un triangle par exemple.*
- *Si on fait subir à $\mathcal{O}$ une isométrie directe, c'est-à-dire un élément de $\mathrm{Isom}^+(\mathcal{P})$, on ne fera que le déplacer tout en le gardant constamment sur le sol !*
- *Mais si on lui fait subir une isométrie indirecte (ou négative), on le retourne et on est obligé, à cet effet, de le faire décoller du sol !*

*Les isométries forment un groupe noté $\mathrm{Isom}(\mathcal{P})$.
Celles qui sont directes en forment un sous-groupe
$\mathrm{Isom}^+(\mathcal{P})$ appelé aussi groupe des déplacements
du plan et est noté quelquefois $\mathrm{Dép}(\mathcal{P})$.*

2.5. *Remarque*

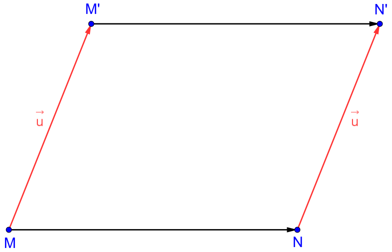
- *On regarde le plan affine euclidien $\mathcal{P}$ comme la surface d'un sol parfaitement plan.*
- *On dépose dessus un objet $\mathcal{O}$ sans épaisseur, un triangle par exemple.*
- *Si on fait subir à $\mathcal{O}$ une isométrie directe, c'est-à-dire un élément de **Isom**$^+(\mathcal{P})$, on ne fera que le déplacer tout en le gardant constamment sur le sol !*
- *Mais si on lui fait subir une isométrie indirecte (ou négative), on le retourne et on est obligé, à cet effet, de le faire décoller du sol !*

*Les isométries forment un groupe noté **Isom**$(\mathcal{P})$.*
Celles qui sont directes en forment un sous-groupe
Isom**$^+(\mathcal{P})$ appelé aussi groupe des **déplacements
*du plan et est noté quelquefois **Dép**$(\mathcal{P})$.*

2.6. Propriétés caractéristiques

Soit $f : M \longrightarrow M'$ une transformation du plan. Comment déterminer sa nature ?

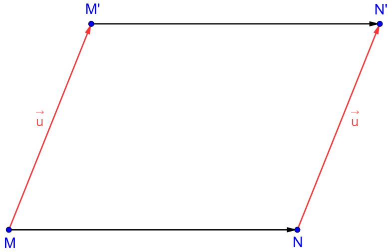
- *Si f est une translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ alors, pour tout couple (M, N) de points, on a $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{NN'} = \overrightarrow{u}$. Par suite $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{M'N'}$. En fait cette propriété caractérise complètement la translation : f est une translation si, et seulement si, $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{M'N'}$ pour tout couple (M, N).*



2.6. *Propriétés caractéristiques*

Soit $f : M \longrightarrow M'$ une transformation du plan. Comment déterminer sa nature ?

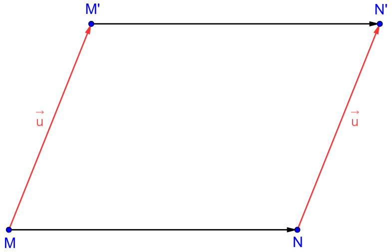
- *Si f est une translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ alors, pour tout couple (M, N) de points, on a $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{NN'} = \overrightarrow{u}$. Par suite $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{M'N'}$. En fait cette propriété caractérise complètement la translation : f est une translation si, et seulement si, $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{M'N'}$ pour tout couple (M, N).*



2.6. *Propriétés caractéristiques*

Soit $f : M \longrightarrow M'$ ***une transformation du plan. Comment déterminer sa nature ?***

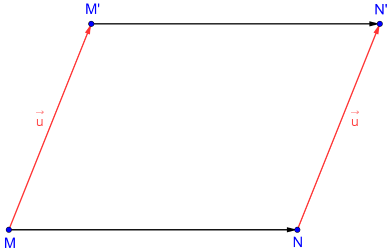
- ***Si*** f ***est une translation de vecteur*** $\overrightarrow{u}$ ***alors, pour tout couple*** (M, N) ***de points, on a*** $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{NN'} = \overrightarrow{u}$. ***Par suite*** $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{M'N'}$. ***En fait cette propriété caractérise complètement la translation :*** f ***est une translation si, et seulement si,*** $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{M'N'}$ ***pour tout couple*** (M, N).



2.6. *Propriétés caractéristiques*

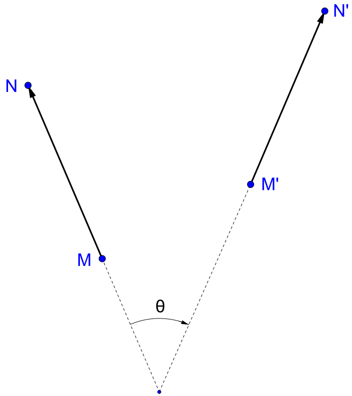
Soit $f : M \longrightarrow M'$ une transformation du plan. Comment déterminer sa nature ?

- ***Si f est une translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ alors, pour tout couple (M, N) de points, on a $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{NN'} = \overrightarrow{u}$. Par suite $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{M'N'}$. En fait cette propriété caractérise complètement la translation : f est une translation si, et seulement si, $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{M'N'}$ pour tout couple (M, N).***



• ***De la même manière,*** f ***est une rotation d'angle*** θ ***si, et seulement si, pour tout couple*** (M, N) ***de points on a :***

$$MN = M'N' \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'}) = \theta.$$



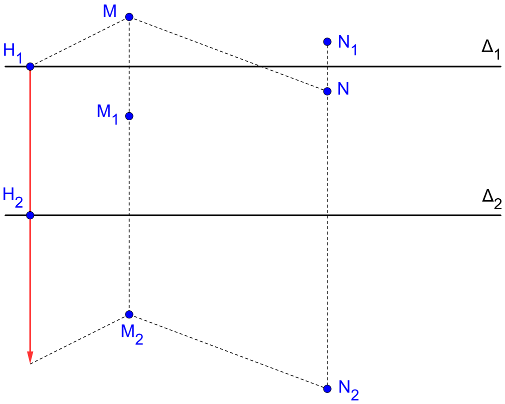
3. Le groupe des isométries

3.1. Produit de deux réflexions

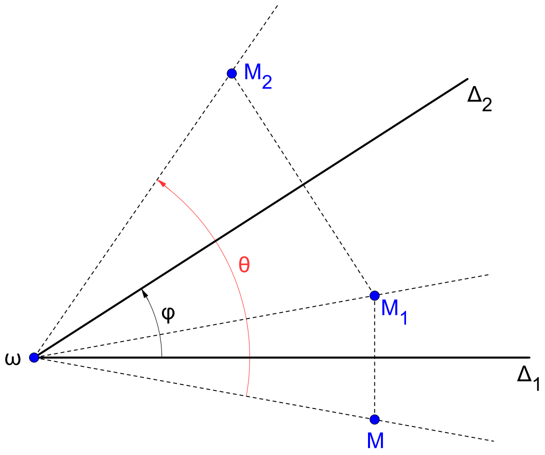
Soient f_1 et f_2 deux réflexions d'axes respectifs Δ_1 et Δ_2.

Quel est leur produit $f = f_2 \circ f_1$?

- ***Δ_1 et Δ_2 parallèles***



- ***Δ_1 et Δ_2 se coupent en ω***



- *Soit maintenant τ une translation de vecteur $\overrightarrow{u}$. Peut-on la décomposer en deux réflexions ? La réponse est oui, et d'une infinité de façons : on choisit une droite Δ_1 orthogonale à $\overrightarrow{u}$; on la translate par le vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{u}$; la translatée est une droite Δ_2 parallèle à Δ_1. On voit alors facilement que τ est le produit de la réflexion d'axe Δ_1 suivie de la réflexion d'axe Δ_2.*

- *Soit r une rotation de centre ω et d'angle θ. Peut-on la décomposer en deux réflexions ? La réponse est oui, et d'une infinité de façons : on choisit une droite Δ_1 passant par ω ; on lui applique la rotation de centre ω et d'angle $\frac{1}{2}\theta$ qui devient une droite Δ_2 passant par ω. On voit alors facilement que r est le produit de la réflexion d'axe Δ_1 suivie de la réflexion d'axe Δ_2.*

Le groupe des isométries du plan
est donc engendré par les réflexions.
Tout n'est alors qu'un jeu de miroirs !

• ***Soit maintenant τ une translation de vecteur $\overrightarrow{u}$.Peut-on la décomposer en deux réflexions ?*** *La réponse est oui, et d'une infinité de façons : on choisit une droite Δ_1 orthogonale à $\overrightarrow{u}$; on la translate par le vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{u}$; la translatée est une droite Δ_2 parallèle à Δ_1. On voit alors facilement que τ est le produit de la réflexion d'axe Δ_1 suivie de la réflexion d'axe Δ_2.*

• *Soit r une rotation de centre ω et d'angle θ. Peut-on la décomposer en deux réflexions ? La réponse est oui, et d'une infinité de façons : on choisit une droite Δ_1 passant par ω ; on lui applique la rotation de centre ω et d'angle $\frac{1}{2}\theta$ qui devient une droite Δ_2 passant par ω. On voit alors facilement que r est le produit de la réflexion d'axe Δ_1 suivie de la réflexion d'axe Δ_2.*

Le groupe des isométries du plan
est donc engendré par les réflexions.
Tout n'est alors qu'un jeu de miroirs !

• ***Soit maintenant τ une translation de vecteur $\overrightarrow{u}$.Peut-on la décomposer en deux réflexions ? La réponse est oui, et d'une infinité de façons :*** *on choisit une droite Δ_1 orthogonale à $\overrightarrow{u}$; on la translate par le vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{u}$; la translatée est une droite Δ_2 parallèle à Δ_1. On voit alors facilement que τ est le produit de la réflexion d'axe Δ_1 suivie de la réflexion d'axe Δ_2.*

• *Soit r une rotation de centre ω et d'angle θ. Peut-on la décomposer en deux réflexions ? La réponse est oui, et d'une infinité de façons : on choisit une droite Δ_1 passant par ω ; on lui applique la rotation de centre ω et d'angle $\frac{1}{2}\theta$ qui devient une droite Δ_2 passant par ω. On voit alors facilement que r est le produit de la réflexion d'axe Δ_1 suivie de la réflexion d'axe Δ_2.*

Le groupe des isométries du plan
est donc engendré par les réflexions.
Tout n'est alors qu'un jeu de miroirs !

• ***Soit maintenant τ une translation de vecteur $\overrightarrow{u}$.Peut-on la décomposer en deux réflexions ? La réponse est oui, et d'une infinité de façons : on choisit une droite Δ_1 orthogonale à $\overrightarrow{u}$; on la translate par le vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{u}$; la translatée est une droite Δ_2 parallèle à Δ_1. On voit alors facilement que τ est le produit de la réflexion d'axe Δ_1 suivie de la réflexion d'axe Δ_2.***

• ***Soit r une rotation de centre ω et d'angle θ. Peut-on la décomposer en deux réflexions ? La réponse est oui, et d'une infinité de façons : on choisit une droite Δ_1 passant par ω ; on lui applique la rotation de centre ω et d'angle $\frac{1}{2}\theta$ qui devient une droite Δ_2 passant par ω. On voit alors facilement que r est le produit de la réflexion d'axe Δ_1 suivie de la réflexion d'axe Δ_2.***

Le groupe des isométries du plan
est donc engendré par les réflexions.
Tout n'est alors qu'un jeu de miroirs !

- *Soit maintenant τ une translation de vecteur $\overrightarrow{u}$.Peut-on la décomposer en deux réflexions ? La réponse est oui, et d'une infinité de façons : on choisit une droite Δ_1 orthogonale à $\overrightarrow{u}$; on la translate par le vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{u}$; la translatée est une droite Δ_2 parallèle à Δ_1. On voit alors facilement que τ est le produit de la réflexion d'axe Δ_1 suivie de la réflexion d'axe Δ_2.*

- *Soit r une rotation de centre ω et d'angle θ. Peut-on la décomposer en deux réflexions ? La réponse est oui, et d'une infinité de façons : on choisit une droite Δ_1 passant par ω ; on lui applique la rotation de centre ω et d'angle $\frac{1}{2}\theta$ qui devient une droite Δ_2 passant par ω. On voit alors facilement que r est le produit de la réflexion d'axe Δ_1 suivie de la réflexion d'axe Δ_2.*

Le groupe des isométries du plan
est donc engendré par les réflexions.
Tout n'est alors qu'un jeu de miroirs !

• *Soit maintenant τ une translation de vecteur $\overrightarrow{u}$. Peut-on la décomposer en deux réflexions ? La réponse est oui, et d'une infinité de façons : on choisit une droite Δ_1 orthogonale à $\overrightarrow{u}$; on la translate par le vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{u}$; la translatée est une droite Δ_2 parallèle à Δ_1. On voit alors facilement que τ est le produit de la réflexion d'axe Δ_1 suivie de la réflexion d'axe Δ_2.*

• *Soit r une rotation de centre ω et d'angle θ. Peut-on la décomposer en deux réflexions ? La réponse est oui, et d'une infinité de façons : on choisit une droite Δ_1 passant par ω ; on lui applique la rotation de centre ω et d'angle $\frac{1}{2}\theta$ qui devient une droite Δ_2 passant par ω. On voit alors facilement que r est le produit de la réflexion d'axe Δ_1 suivie de la réflexion d'axe Δ_2.*

Le groupe des isométries du plan
est donc engendré par les réflexions.
Tout n'est alors qu'un jeu de miroirs !

• *Soit maintenant τ une translation de vecteur $\overrightarrow{u}$.Peut-on la décomposer en deux réflexions ? La réponse est oui, et d'une infinité de façons : on choisit une droite Δ_1 orthogonale à $\overrightarrow{u}$; on la translate par le vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{u}$; la translatée est une droite Δ_2 parallèle à Δ_1. On voit alors facilement que τ est le produit de la réflexion d'axe Δ_1 suivie de la réflexion d'axe Δ_2.*

• *Soit r une rotation de centre ω et d'angle θ. Peut-on la décomposer en deux réflexions ? La réponse est oui, et d'une infinité de façons : on choisit une droite Δ_1 passant par ω ; on lui applique la rotation de centre ω et d'angle $\frac{1}{2}\theta$ qui devient une droite Δ_2 passant par ω. On voit alors facilement que r est le produit de la réflexion d'axe Δ_1 suivie de la réflexion d'axe Δ_2.*

Le groupe des isométries du plan
est donc engendré par les réflexions.
Tout n'est alors qu'un jeu de miroirs !

- *Soit maintenant τ une translation de vecteur $\overrightarrow{u}$. Peut-on la décomposer en deux réflexions ? La réponse est oui, et d'une infinité de façons : on choisit une droite Δ_1 orthogonale à $\overrightarrow{u}$; on la translate par le vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{u}$; la translatée est une droite Δ_2 parallèle à Δ_1. On voit alors facilement que τ est le produit de la réflexion d'axe Δ_1 suivie de la réflexion d'axe Δ_2.*

- *Soit r une rotation de centre ω et d'angle θ. Peut-on la décomposer en deux réflexions ? La réponse est oui, et d'une infinité de façons : on choisit une droite Δ_1 passant par ω ; on lui applique la rotation de centre ω et d'angle $\frac{1}{2}\theta$ qui devient une droite Δ_2 passant par ω. On voit alors facilement que r est le produit de la réflexion d'axe Δ_1 suivie de la réflexion d'axe Δ_2.*

Le groupe des isométries du plan
est donc engendré par les réflexions.
Tout n'est alors qu'un jeu de miroirs !

• *Soit maintenant τ une translation de vecteur $\overrightarrow{u}$. Peut-on la décomposer en deux réflexions ? La réponse est oui, et d'une infinité de façons : on choisit une droite Δ_1 orthogonale à $\overrightarrow{u}$; on la translate par le vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{u}$; la translatée est une droite Δ_2 parallèle à Δ_1. On voit alors facilement que τ est le produit de la réflexion d'axe Δ_1 suivie de la réflexion d'axe Δ_2.*

• *Soit r une rotation de centre ω et d'angle θ. Peut-on la décomposer en deux réflexions ? La réponse est oui, et d'une infinité de façons : on choisit une droite Δ_1 passant par ω ; on lui applique la rotation de centre ω et d'angle $\frac{1}{2}\theta$ qui devient une droite Δ_2 passant par ω. On voit alors facilement que r est le produit de la réflexion d'axe Δ_1 suivie de la réflexion d'axe Δ_2.*

Le groupe des isométries du plan
est donc engendré par les réflexions.
Tout n'est alors qu'un jeu de miroirs !

• *Soit maintenant* τ *une translation de vecteur* $\overrightarrow{u}$*.Peut-on la décomposer en deux réflexions ? La réponse est oui, et d'une infinité de façons : on choisit une droite* Δ_1 *orthogonale à* $\overrightarrow{u}$ *; on la translate par le vecteur* $\frac{1}{2}\overrightarrow{u}$ *; la translatée est une droite* Δ_2 *parallèle à* Δ_1*. On voit alors facilement que* τ *est le produit de la réflexion d'axe* Δ_1 *suivie de la réflexion d'axe* Δ_2*.*

• *Soit* r *une rotation de centre* ω *et d'angle* θ*. Peut-on la décomposer en deux réflexions ? La réponse est oui, et d'une infinité de façons : on choisit une droite* Δ_1 *passant par* ω *; on lui applique la rotation de centre* ω *et d'angle* $\frac{1}{2}\theta$ *qui devient une droite* Δ_2 *passant par* ω*. On voit alors facilement que* r *est le produit de la réflexion d'axe* Δ_1 *suivie de la réflexion d'axe* Δ_2*.*

Le groupe des isométries du plan
est donc engendré par les réflexions.
Tout n'est alors qu'un jeu de miroirs !

• *Soit maintenant* τ *une translation de vecteur* $\overrightarrow{u}$*.Peut-on la décomposer en deux réflexions ? La réponse est oui, et d'une infinité de façons : on choisit une droite* Δ_1 *orthogonale à* $\overrightarrow{u}$ *; on la translate par le vecteur* $\frac{1}{2}\overrightarrow{u}$ *; la translatée est une droite* Δ_2 *parallèle à* Δ_1*. On voit alors facilement que* τ *est le produit de la réflexion d'axe* Δ_1 *suivie de la réflexion d'axe* Δ_2*.*

• *Soit* r *une rotation de centre* ω *et d'angle* θ*. Peut-on la décomposer en deux réflexions ? La réponse est oui, et d'une infinité de façons : on choisit une droite* Δ_1 *passant par* ω *; on lui applique la rotation de centre* ω *et d'angle* $\frac{1}{2}\theta$ *qui devient une droite* Δ_2 *passant par* ω*. On voit alors facilement que* r *est le produit de la réflexion d'axe* Δ_1 *suivie de la réflexion d'axe* Δ_2*.*

Le groupe des isométries du plan
est donc engendré par les réflexions.
Tout n'est alors qu'un jeu de miroirs !

• *Soit maintenant* τ *une translation de vecteur* $\overrightarrow{u}$*.Peut-on la décomposer en deux réflexions ? La réponse est oui, et d'une infinité de façons : on choisit une droite* Δ_1 *orthogonale à* $\overrightarrow{u}$ *; on la translate par le vecteur* $\frac{1}{2}\overrightarrow{u}$ *; la translatée est une droite* Δ_2 *parallèle à* Δ_1*. On voit alors facilement que* τ *est le produit de la réflexion d'axe* Δ_1 *suivie de la réflexion d'axe* Δ_2*.*

• *Soit* r *une rotation de centre* ω *et d'angle* θ*. Peut-on la décomposer en deux réflexions ? La réponse est oui, et d'une infinité de façons : on choisit une droite* Δ_1 *passant par* ω *; on lui applique la rotation de centre* ω *et d'angle* $\frac{1}{2}\theta$ *qui devient une droite* Δ_2 *passant par* ω*. On voit alors facilement que* r *est le produit de la réflexion d'axe* Δ_1 *suivie de la réflexion d'axe* Δ_2*.*

Le groupe des isométries du plan
est donc engendré par les réflexions.
Tout n'est alors qu'un jeu de miroirs !

- *Soit maintenant τ une translation de vecteur $\overrightarrow{u}$. Peut-on la décomposer en deux réflexions ? La réponse est oui, et d'une infinité de façons : on choisit une droite Δ_1 orthogonale à $\overrightarrow{u}$; on la translate par le vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{u}$; la translatée est une droite Δ_2 parallèle à Δ_1. On voit alors facilement que τ est le produit de la réflexion d'axe Δ_1 suivie de la réflexion d'axe Δ_2.*

- *Soit r une rotation de centre ω et d'angle θ. Peut-on la décomposer en deux réflexions ? La réponse est oui, et d'une infinité de façons : on choisit une droite Δ_1 passant par ω ; on lui applique la rotation de centre ω et d'angle $\frac{1}{2}\theta$ qui devient une droite Δ_2 passant par ω. On voit alors facilement que r est le produit de la réflexion d'axe Δ_1 suivie de la réflexion d'axe Δ_2.*

Le groupe des isométries du plan
est donc engendré par les réflexions.
Tout n'est alors qu'un jeu de miroirs !

• *Soit maintenant* τ *une translation de vecteur* $\overrightarrow{u}$*.Peut-on la décomposer en deux réflexions ? La réponse est oui, et d'une infinité de façons : on choisit une droite* Δ_1 *orthogonale à* $\overrightarrow{u}$ *; on la translate par le vecteur* $\frac{1}{2}\overrightarrow{u}$ *; la translatée est une droite* Δ_2 *parallèle à* Δ_1*. On voit alors facilement que* τ *est le produit de la réflexion d'axe* Δ_1 *suivie de la réflexion d'axe* Δ_2*.*

• *Soit* r *une rotation de centre* ω *et d'angle* θ*. Peut-on la décomposer en deux réflexions ? La réponse est oui, et d'une infinité de façons : on choisit une droite* Δ_1 *passant par* ω *; on lui applique la rotation de centre* ω *et d'angle* $\frac{1}{2}\theta$ *qui devient une droite* Δ_2 *passant par* ω*. On voit alors facilement que* r *est le produit de la réflexion d'axe* Δ_1 *suivie de la réflexion d'axe* Δ_2*.*

Le groupe des isométries du plan
est donc engendré par les réflexions.
Tout n'est alors qu'un jeu de miroirs !

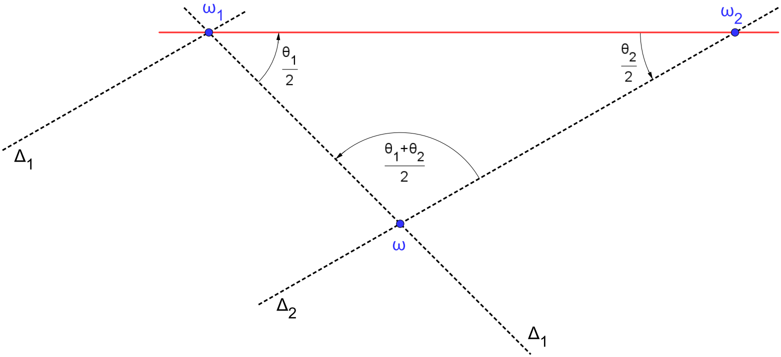
- *Soit maintenant τ une translation de vecteur $\overrightarrow{u}$. Peut-on la décomposer en deux réflexions ? La réponse est oui, et d'une infinité de façons : on choisit une droite Δ_1 orthogonale à $\overrightarrow{u}$; on la translate par le vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{u}$; la translatée est une droite Δ_2 parallèle à Δ_1. On voit alors facilement que τ est le produit de la réflexion d'axe Δ_1 suivie de la réflexion d'axe Δ_2.*

- *Soit r une rotation de centre ω et d'angle θ. Peut-on la décomposer en deux réflexions ? La réponse est oui, et d'une infinité de façons : on choisit une droite Δ_1 passant par ω ; on lui applique la rotation de centre ω et d'angle $\frac{1}{2}\theta$ qui devient une droite Δ_2 passant par ω. On voit alors facilement que r est le produit de la réflexion d'axe Δ_1 suivie de la réflexion d'axe Δ_2.*

Le groupe des isométries du plan
est donc engendré par les réflexions.
Tout n'est alors qu'un jeu de miroirs !

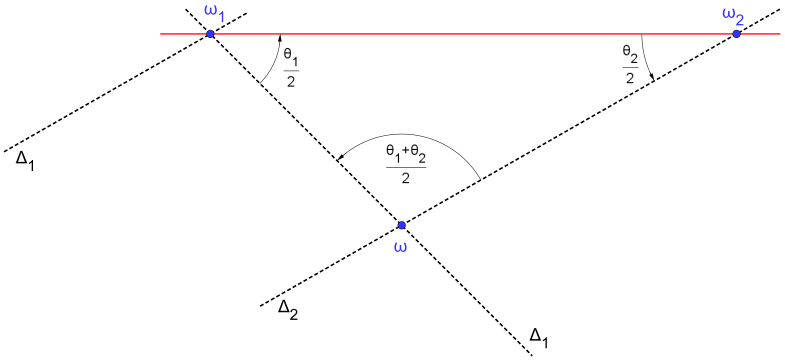
3.2. Produit de deux rotations

- ***Soient r_1 et r_2 deux rotations de centres respectifs ω_1 et ω_2 et d'angles respectifs θ_1 et θ_2. Quel est leur produit $f = r_2 \circ r_1$? Nous avons déjà considéré le cas $\omega_1 = \omega_2$. Nous supposerons désormais $\omega_1 \neq \omega_2$.***



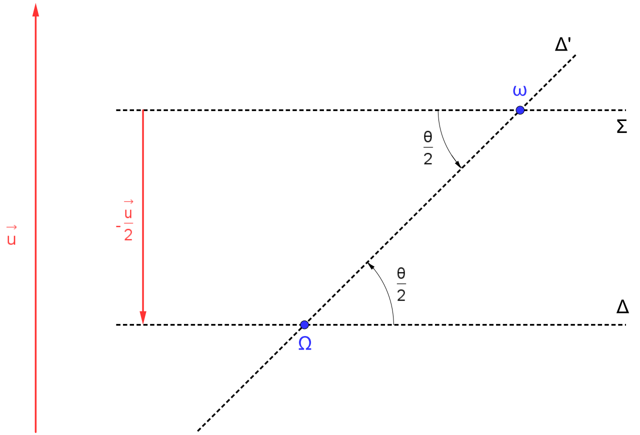
3.2. *Produit de deux rotations*

- ***Soient r_1 et r_2 deux rotations de centres respectifs ω_1 et ω_2 et d'angles respectifs θ_1 et θ_2. Quel est leur produit $f = r_2 \circ r_1$? Nous avons déjà considéré le cas $\omega_1 = \omega_2$. Nous supposerons désormais $\omega_1 \neq \omega_2$.***



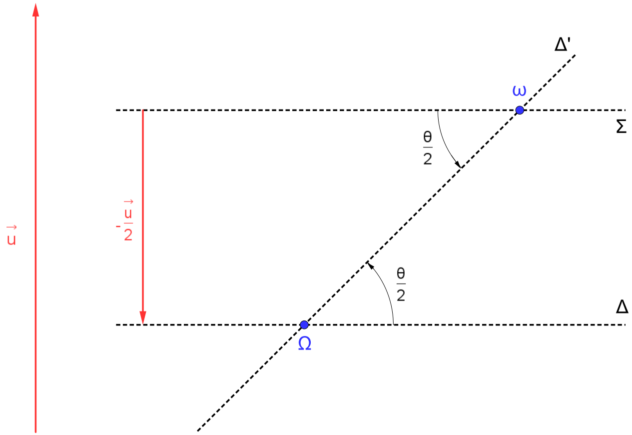
3.3. Produit d'une rotation et d'une translation

- Soient r une rotation de centre ω et d'angle θ et τ une translation de vecteur $\overrightarrow{u}$. Quel est leur produit $f = r \circ \tau$?



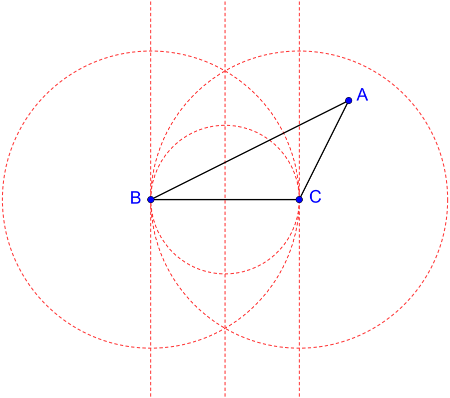
3.3. Produit d'une rotation et d'une translation

- Soient r une rotation de centre ω et d'angle θ et τ une translation de vecteur $\overrightarrow{u}$. Quel est leur produit $f = r \circ \tau$?

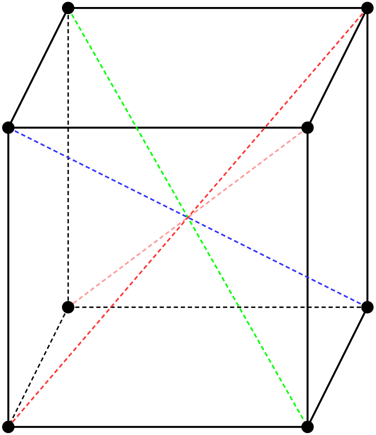


4. Exercices

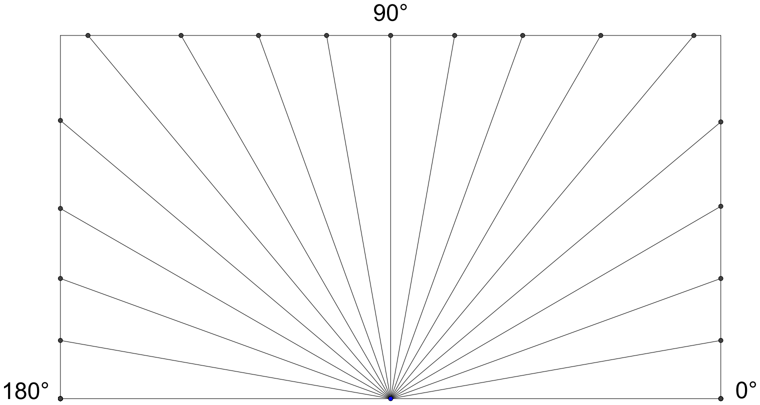
3.1. ***La résolution d'un problème de géométrie passe souvent par un dessin. Sans faire attention on peut tracer une figure avec une certaine particularité ; ce qui amène à faire des erreurs de raisonnement. Construire un triangle ABC qui ne soit ni rectangle ni isocèle.***



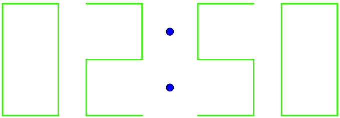
3.2. Les diagonales principales d'un cube en sont-elles des axes de symétrie ? (Dévisser les étapes du raisonnement.)



3.3. ***Expliquer, étape par étape, comment on peut fabriquer un rapporteur rectangle gradué de 10 degrés en 10 degrés.***



3.4. Donner tous les chiffres qui admettent un axe de symétrie (vertical, horizontal...), un centre de symétrie ainsi que toutes les "heures symétriques".



Heure symétrique !

3.5. ***Donner deux méthodes différentes permettant d'observer que deux droites du plan sont ou ne sont pas parallèles.***