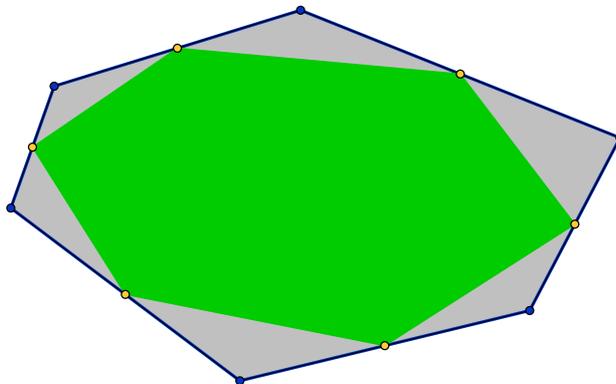


La suite des λ -dérivés d'un polygone

par

AZIZ EL KACIMI ALAOUI et ABDELLATIF ZEGGAR

(Juin 2025)

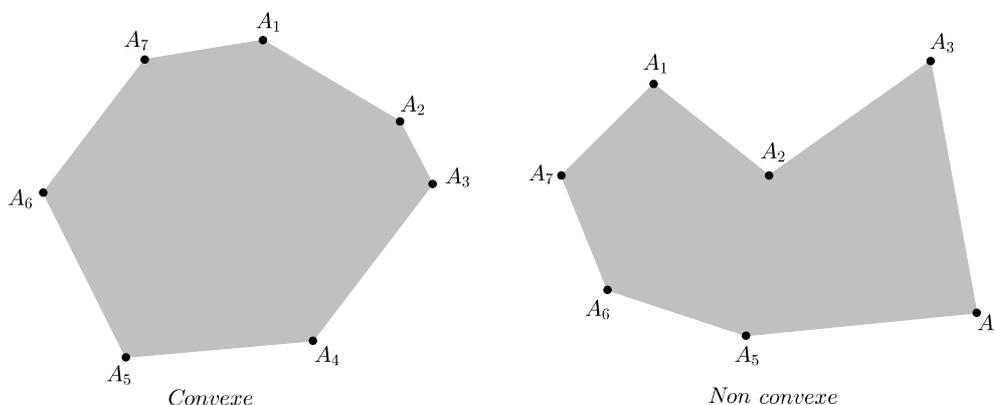


Soient $\mathcal{P} = [A_1, \dots, A_n]$ un polygone pair (i.e. son nombre de sommets n est pair) et $\lambda \in]0, 1[$. Le polygone $\mathcal{P}_1 = [A_{1,1}, \dots, A_{1,n}]$ dont les sommets $A_{1,k}$ sont les barycentres $(1 - \lambda)A_k + \lambda A_{k+1}$ (avec $A_{n+1} = A_1$) est appelé λ -dérivé de \mathcal{P} . En itérant cette opération on obtient la suite \mathcal{P}_q des polygones λ -dérivés successifs de \mathcal{P} . Sur un dessin soigneusement exécuté, on peut voir que plus q est grand, plus \mathcal{P}_q est proche d'un **multiparallélogramme** (polygone pair ayant un centre de symétrie). C'est ce que nous démontrons dans cet article en donnant d'abord un sens précis à cette notion de proximité. Le sujet étant assez proche du théorème de Varignon, nous en rappelons l'énoncé classique et en donnons une généralisation aux polygones pairs.

Ce travail est parti d'une revisite de l'article [2] et d'une remarque sur l'itération des polygones des milieux d'un polygone pair qu'on trouve dans [5] (page 57).

Une « figure du plan » est une partie de celui-ci ayant une certaine particularité. Nous pouvons la voir dans son intégralité ou nous en comprenons globalement sa forme, même lorsqu'elle échappe à notre regard. Un polygone en est probablement l'exemple le plus simple : il est bordé par un nombre fini de segments. Généralement quand les gens disent « ceci est une figure géométrique », ils dénomment ainsi tout ce qui est délimité par des segments, des arcs de cercle ou morceaux d'une courbe familière (ellipse, parabole, hyperbole...)

Les polygones du plan abondent ; ils sont de toutes formes et de tailles arbitraires. Bien évidemment, la meilleure façon d'en donner une image est d'en dessiner ; en voici deux exemples.



Nous commençons par rappeler les définitions essentielles et précises qui nous serviront dans ce que nous nous proposons d'exposer. Ce sera un peu abondant mais cela est indispensable.

Soit \mathbb{E} un plan vectoriel euclidien, c'est-à-dire un espace vectoriel réel de dimension 2, muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auquel est associé la norme $\|\vec{u}\| = \sqrt{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle}$. Sa structure *affine canonique* permet de voir tout élément M de \mathbb{E} aussi bien comme un *point* que comme le vecteur \overrightarrow{OM} (où O est l'origine de \mathbb{E}). L'écriture $\lambda M + \mu N$ a donc parfaitement un sens parce qu'elle désigne le vecteur $\lambda \overrightarrow{OM} + \mu \overrightarrow{ON}$.

Si A et B sont deux points de \mathbb{E} , $[A, B]$ sera le segment d'extrémités A et B donné par $[A, B] = \{(1-t)A + tB : t \in [0, 1]\}$. Sa *longueur* AB est la norme $\|\overrightarrow{AB}\|$ du vecteur \overrightarrow{AB} .

Si A_1, \dots, A_n sont des points et $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ de somme $\tau \neq 0$, le point $\frac{1}{\tau}(\lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_n A_n)$ est appelé *barycentre* de A_1, \dots, A_n affectés respectivement des *coefficients* (ou *poids*) $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. On le notera $\text{Bar}\{(A_1, \lambda_1), \dots, (A_n, \lambda_n)\}$. Il reste inchangé si on multiplie tous les coefficients $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ par un même réel non nul. Ce qui amène souvent à supposer $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$.

Pour tout nombre entier $n \geq 3$, on appellera *n-polygone* (on dit aussi *n-gone* ou encore polygone d'ordre n) de \mathbb{E} , tout ensemble $\{[A_1, A_2], \dots, [A_n, A_1]\}$ (ligne brisée décrite dans cet ordre) constitué de segments $[A_1, A_2], \dots, [A_n, A_1]$ de \mathbb{E} . Les points A_1, \dots, A_n sont supposés distincts deux à deux.

- Un tel ensemble sera noté $[A_1, \dots, A_n]$. On dira que $[A_1, \dots, A_n]$ est *pair* (resp. *impair*) si n est pair (resp. impair).

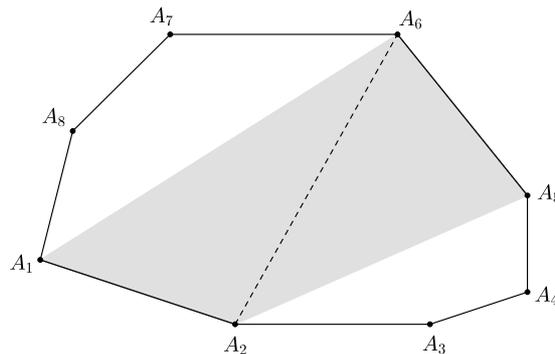
- Pour tout entier naturel p , on posera $A_p = A_k$ où k est le représentant dans $\{1, \dots, n\}$ de la classe de congruence de p modulo n . En particulier, $A_{n+1} = A_1$.

- Il est bien connu qu'un 3-polygone, un 4-polygone, un 5-polygone, un 6-polygone... sont appelés respectivement *triangle*, *quadrilatère*, *pentagone*, *hexagone*...

- Les points A_k et les segments $[A_k, A_{k+1}]$ sont respectivement les *sommets* et les *côtés* (ou *arêtes*) du n -polygone $[A_1, \dots, A_n]$. Si A_k et A_ℓ sont deux sommets non consécutifs, on dit que le segment $[A_k, A_\ell]$ est une *diagonale* du polygone.

- Le polygone $[A_1, \dots, A_n]$ sera dit *convexe* si, pour chaque côté $[A_k, A_{k+1}]$, l'un des deux demi-plans fermés de frontière la droite $(A_k A_{k+1})$ contient tous les sommets du polygone.

- Soit $[A_1, \dots, A_n]$ un n -polygone pair avec $n = 2r$. Les sommets A_k et A_{k+r} seront dits *sommets opposés*. De même, les segments $[A_k, A_\ell]$ et $[A_{k+r}, A_{\ell+r}]$ seront dits *segments opposés*. Une diagonale du type $[A_k, A_{k+r}]$ sera appelée *diagonale principale*. Un quadrilatère du type $[A_k, A_{k+1}, A_{k+r}, A_{k+r+1}]$, avec $1 \leq k \leq r$, sera appelé *quadrilatère principal*.



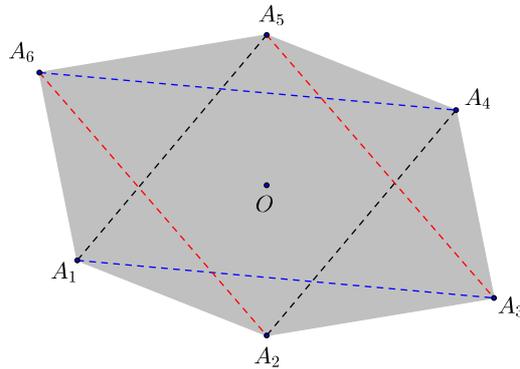
Dans cet octogone $A_2 A_6$ est une diagonale principale
et $[A_1, A_2, A_5, A_6]$ est un quadrilatère principal.

Un *parallélogramme* est un quadrilatère $[A, B, C, D]$ dont les diagonales $[A, C]$ et $[B, D]$ se coupent en leur milieu. Cette condition est équivalente à l'égalité vectorielle $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \vec{0}$.

- On appellera *multipartallélogramme* tout polygone pair \mathcal{P} dont tous les quadrilatères principaux sont des parallélogrammes. Si ces quadrilatères sont des rectangles, on dira que \mathcal{P} est un *multirectangle*. Par exemple tout polygone régulier pair est un *multirectangle*.

L'affirmation qui suit est presque immédiate à établir :

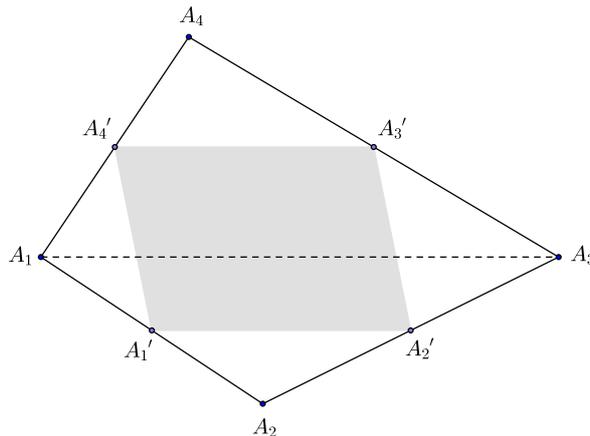
Un polygone pair $[A_1, \dots, A_{2r}]$ est un multiparallélogramme si, et seulement si, il existe une symétrie centrale qui envoie A_k sur A_{k+r} pour $k = 1, \dots, r$. Un multiparallélogramme est un multirectangle si, et seulement si, il est inscrit dans un cercle.



1 Le théorème de Varignon et ses variantes

Voici la version classique connue pour un quadrilatère par tout le monde. Sa démonstration est presque immédiate, mais ceci n'enlève rien à la beauté et l'intérêt géométrique de ce théorème.

1.1. Théorème. Soient $[A_1, A_2, A_3, A_4]$ un quadrilatère quelconque et A'_1, A'_2, A'_3 et A'_4 les milieux respectifs des cotés $[A_1, A_2], [A_2, A_3], [A_3, A_4]$ et $[A_4, A_1]$. Alors $[A'_1, A'_2, A'_3, A'_4]$ est un parallélogramme.

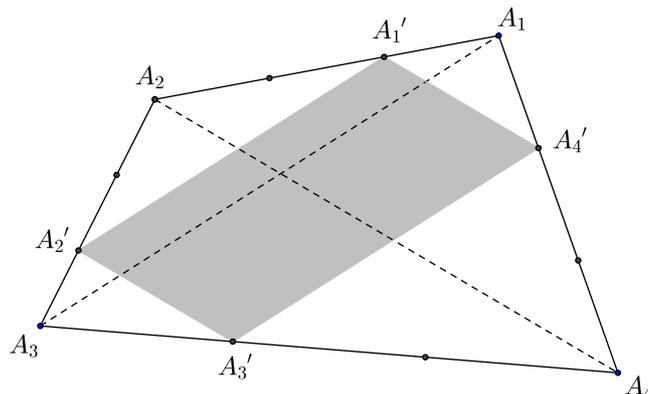


On peut généraliser cet énoncé de la façon suivante avec une démonstration similaire. Mais nous en donnerons une autre qui se transpose plus facilement au cas d'un polygone pair.

1.2. Théorème. Soient $[A_1, A_2, A_3, A_4]$ un quadrilatère et λ un nombre réel dans $]0, 1[$. On pose :

$$A'_1 = (1 - \lambda)A_1 + \lambda A_2, \quad A'_3 = (1 - \lambda)A_3 + \lambda A_4, \quad A'_2 = \lambda A_2 + (1 - \lambda)A_3 \quad \text{et} \quad A'_4 = \lambda A_4 + (1 - \lambda)A_1.$$

Alors le quadrilatère $[A'_1, A'_2, A'_3, A'_4]$ ainsi obtenu est un parallélogramme.



Preuve. Soit $O = \text{Bar}\{(A_1, (1-\lambda)), (A_2, \lambda), (A_3, (1-\lambda)), (A_4, \lambda)\}$ le barycentre des quatre points A_1, A_2, A_3 et A_4 affectés respectivement des coefficients $(1-\lambda), \lambda, (1-\lambda)$ et λ . Alors, par l'associativité des barycentres on a immédiatement :

$$O = \text{Bar}\{(A'_1, 1), (A'_3, 1)\} \text{ et } O = \text{Bar}\{(A'_2, 1), (A'_4, 1)\}.$$

Le point O est donc le milieu commun des deux diagonales $[A'_1, A'_3]$ et $[A'_2, A'_4]$ du quadrilatère $[A'_1, A'_2, A'_3, A'_4]$. Par suite ce dernier est un parallélogramme. \square

Voici maintenant une généralisation du théorème de Varignon à un polygone d'ordre pair tout à fait quelconque. Elle a la forme qui suit.

1.3. Théorème général de Varignon. Soient $[A_1, \dots, A_{2r}]$ un polygone pair et $(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ un r -uplet d'éléments de l'intervalle $]0, 1[$ tels que $\lambda_1 + \dots + \lambda_r = 1$. On pose $\lambda_{j+r} = \lambda_j$, pour $1, \dots, r$, et pour tout $k = 1, \dots, 2r$ on note G_k le barycentre $\text{Bar}\{(A_k, \lambda_k), \dots, (A_{k+r-1}, \lambda_{k+r-1})\}$. Alors le polygone $[G_1, \dots, G_{2r}]$ est un multiparallélogramme.

Preuve. Nous utiliserons à cet effet l'associativité des barycentres (comme la deuxième preuve que nous avons donnée dans le cas d'un quadrilatère).

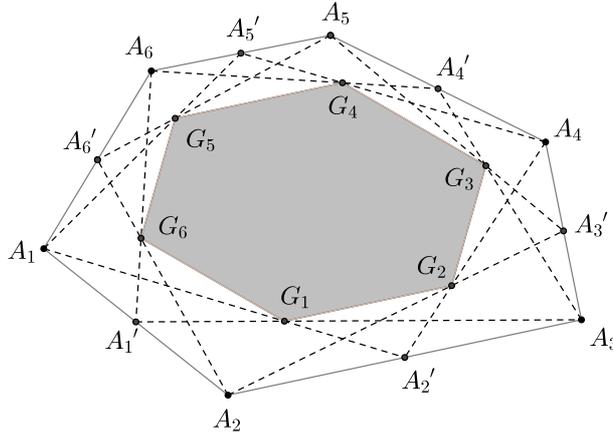
On doit prouver que toutes les diagonales principales $[G_k, G_{k+r}]$ du polygone $[G_1, \dots, G_{2r}]$ ont le même milieu. Notons G le barycentre $\text{Bar}\{(A_1, \lambda_1), \dots, (A_{2r}, \lambda_{2r})\}$. Les deux ensembles de points pondérés (où on a posé $A_{k+2r-1} = A_{k-1}$) :

$$\Gamma_k = \{(A_k, \lambda_k), \dots, (A_{k+r-1}, \lambda_{k+r-1})\} \text{ et } \Gamma'_k = \{(A_{k+r}, \lambda_{k+r}), \dots, (A_{k+2r-1}, \lambda_{k+2r-1})\}.$$

forment une partition de l'ensemble des sommets pondérés $\Gamma = \{(A_1, \lambda_1), \dots, (A_{2r}, \lambda_{2r})\}$. De plus, Γ_k , ayant un poids total égal à 1, a pour barycentre le point G_k et Γ'_k , ayant également un poids total égal à 1, admet pour barycentre le point G_{k+r} . La règle d'associativité des barycentres permet donc d'avoir la relation :

$$G = \text{Bar}\{(G_k, 1), (G_{k+r}, 1)\}.$$

Toutes les diagonales principales $[G_k, G_{k+r}]$ ont donc le point G comme milieu commun. Ce qui prouve que le polygone $[G_1, \dots, G_{2r}]$ est bien un multiparallélogramme. \square

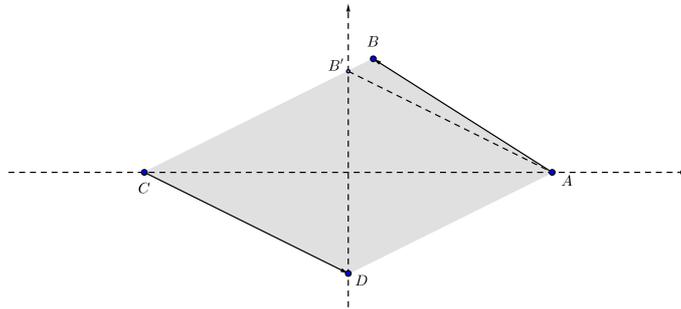


Le polygone $[A_1, \dots, A_6]$ ci-dessus est un hexagone. Pour $k = 1, \dots, 6$, A'_k est le milieu de $[A_k, A_{k+1}]$. Donc G_k est l'isobarycentre de A_k, A_{k+1} et A_{k+2} . On obtient ainsi l'hexagone $[G_1, \dots, G_6]$ dont on voit clairement sur le dessin que c'est un multiparallélogramme.

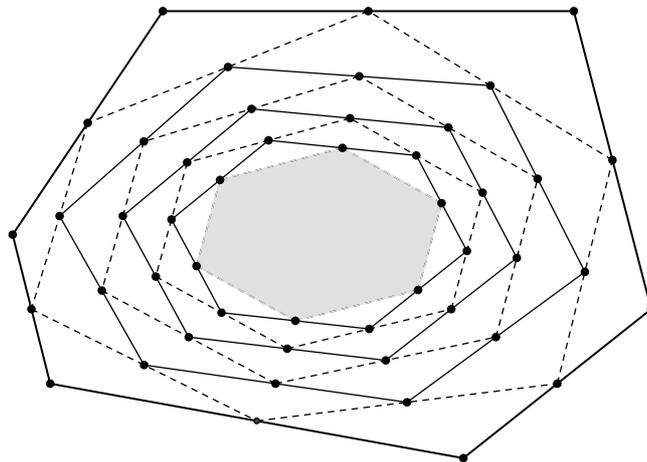
2 Les ε -multiparallélogrammes

2.1. Quelques définitions. Soit ε un nombre réel strictement positif. On dira qu'un quadrilatère $[A, B, C, D]$ est un ε -parallélogramme si $\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}\| \leq \varepsilon$. De même, un polygone pair $[A_1, \dots, A_{2r}]$ sera appelé ε -multiparallélogramme si tous ses quadrilatères principaux $[A_k, A_{k+1}, A_{k+r}, A_{k+r+1}]$, avec $k = 1, \dots, r$ sont des ε -parallélogrammes.

2.2. Exemple. Si on munit \mathbb{E} d'un repère cartésien orthonormé, les points $A(2,0)$, $B\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}, 1 + \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right)$, $C(-2,0)$ et $D(0,-1)$ sont tels que $\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}\| = \varepsilon$. Le quadrilatère $[A, B, C, D]$ est donc bien un ε -parallélogramme.



Considérons maintenant un polygone pair quelconque $\mathcal{P} = [A_1, \dots, A_{2r}]$. Pour un nombre réel λ fixé dans l'intervalle $]0, 1[$, on peut considérer le polygone $\mathcal{P}_1 = [A_{1,1}, \dots, A_{1,2r}]$ tel que, pour chaque indice k , le sommet $A_{1,k}$ est le barycentre $(1 - \lambda)A_k + \lambda A_{k+1}$; c'est le premier polygone λ -dérivé de \mathcal{P} . En itérant cette opération, on définit une suite de polygones $\mathcal{P}_q = [A_{q,1}, \dots, A_{q,2r}]$ par : $\mathcal{P}_0 = \mathcal{P}$ et \mathcal{P}_{q+1} est le premier dérivé de \mathcal{P}_q pour tout $q \in \mathbb{N}$. C'est la suite des λ -dérivés de \mathcal{P} . En voici une image avec $\lambda = \frac{1}{2}$;



Le dessin suggère que lorsque q est suffisamment grand, le $q^{\text{ème}}$ dérivé de \mathcal{P} a l'aspect d'un multiparallélogramme. C'est effectivement le cas et c'est ce qu'exprime le théorème qui suit.

2.3. Théorème principal. Soit λ un nombre réel dans l'intervalle $]0, 1[$. Pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$, il existe un rang q_ε tel que, pour tout $q \geq q_\varepsilon$, le $q^{\text{ème}}$ dérivé \mathcal{P}_q de \mathcal{P} est un ε -multiparallélogramme.

(Certains auteurs ont étudié indépendamment le cas particulier $\lambda = \frac{1}{2}$ par des méthodes légèrement différentes. On les trouve sur le net par mots clés. Par exemple la référence [1].)

Preuve. Elle est simple au niveau des idées. Elle consiste essentiellement en un processus de calcul matriciel du niveau de la Licence mais qu'il faut mener quand même.

Pour $q \in \mathbb{N}$ et $k \in \{1, \dots, r\}$, considérons le quadrilatère principal $[A_{q,k}, A_{q,k+1}, A_{q,k+r}, A_{q,k+r+1}]$ et posons :

$$v_{q,k} = \overrightarrow{A_{q,k}A_{q,k+1}} + \overrightarrow{A_{q,k+r}A_{q,k+r+1}}.$$

Notons \mathcal{V}_q le r -uplet $(v_{q,1}, \dots, v_{q,r})$; c'est un vecteur de \mathbb{E}^r dont les composantes sont les vecteurs $\overrightarrow{A_{q,k}A_{q,k+1}} + \overrightarrow{A_{q,k+r}A_{q,k+r+1}}$ des quadrilatères principaux $[A_{q,k}, A_{q,k+1}, A_{q,k+r}, A_{q,k+r+1}]$ du polygone \mathcal{P}_q . Nous avons :

$$\sum_{k=1}^r v_{q,k} = \vec{0} \text{ pour tout } q \in \mathbb{N}.$$

En effet, pour chaque rang $q \in \mathbb{N}$, avec la relation de Chasles, nous avons :

$$\sum_{k=1}^r v_{q,k} = \sum_{k=1}^r \overrightarrow{A_{q,k}A_{q,k+1}} + \sum_{k=1}^r \overrightarrow{A_{q,k+r}A_{q,k+r+1}} = \overrightarrow{A_{q,1}A_{q,r+1}} + \overrightarrow{A_{q,r+1}A_{q,1}} = \vec{0}.$$

D'autre part, pour $q \in \mathbb{N}$ et $k \in \{1, \dots, r\}$, nous avons, par définition :

$$A_{q+1,k} = (1 - \lambda)A_{q,k} + \lambda A_{q,k+1} \text{ ou encore } \overrightarrow{A_{q,k}A_{q+1,k}} = \lambda \overrightarrow{A_{q,k}A_{q,k+1}}.$$

On en déduit que :

$$\overrightarrow{A_{q+1,k}A_{q+1,k+1}} = \overrightarrow{A_{q+1,k}A_{q,k}} + \overrightarrow{A_{q,k}A_{q,k+1}} + \overrightarrow{A_{q,k+1}A_{q+1,k+1}} = (1 - \lambda)\overrightarrow{A_{q,k}A_{q,k+1}} + \lambda \overrightarrow{A_{q,k+1}A_{q,k+2}}.$$

On a donc :

$$\begin{aligned} v_{q+1,k} &= \overrightarrow{A_{q+1,k}A_{q+1,k+1}} + \overrightarrow{A_{q+1,k+r}A_{q+1,k+r+1}} \\ &= (1 - \lambda)\overrightarrow{A_{q,k}A_{q,k+1}} + \lambda \overrightarrow{A_{q,k+1}A_{q,k+2}} + (1 - \lambda)\overrightarrow{A_{q,k+r}A_{q,k+r+1}} + \lambda \overrightarrow{A_{q,k+r+1}A_{q,k+r+2}} \\ &= (1 - \lambda)\left[\overrightarrow{A_{q,k}A_{q,k+1}} + \overrightarrow{A_{q,k+r}A_{q,k+r+1}}\right] + \lambda\left[\overrightarrow{A_{q,k+1}A_{q,k+2}} + \overrightarrow{A_{q,k+r+1}A_{q,k+r+2}}\right] \\ &= (1 - \lambda)v_{q,k} + \lambda v_{q,k+1}. \end{aligned}$$

Ce qui implique que $\mathcal{V}_{q+1} = \mathcal{L}(\mathcal{V}_q)$ où \mathcal{L} est l'endomorphisme $\mathcal{L} : \mathbb{E}^r \longrightarrow \mathbb{E}^r$ qui à $Z = (z_1, \dots, z_r)$ associe :

$$\mathcal{L}(Z) = ((1 - \lambda)z_1 + \lambda z_2, (1 - \lambda)z_2 + \lambda z_3, \dots, (1 - \lambda)z_{r-1} + \lambda z_r, (1 - \lambda)z_r + \lambda z_1).$$

On a donc, pour tout $q \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathcal{V}_q = \mathcal{L}(\mathcal{V}_{q-1}) = \mathcal{L}(\mathcal{L}(\mathcal{V}_{q-2})) = \dots = \mathcal{L}^q(\mathcal{V}_0).$$

En identifiant \mathbb{E} au plan complexe \mathbb{C} , on peut représenter l'endomorphisme \mathcal{L} par sa matrice \mathcal{M} dans la base canonique de l'espace vectoriel complexe \mathbb{C}^r . Cette matrice s'écrit :

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 1 - \lambda & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 - \lambda & \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 - \lambda & \lambda \\ \lambda & 0 & \dots & 0 & 1 - \lambda \end{pmatrix}.$$

Il s'agit d'une matrice circulante de la forme :

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{r-1} \\ a_{r-1} & a_0 & \dots & a_{r-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_0 \end{pmatrix}.$$

Le déterminant d'une telle matrice est le nombre complexe (cf. [4]) :

$$\det(\mathcal{C}) = P(1)P(\omega)P(\omega^2) \dots P(\omega^{r-1})$$

où $\omega = e^{\frac{2i\pi}{r}}$ et P est le polynôme défini par : $P(X) = a_0 + a_1X + \dots + a_{r-1}X^{r-1}$.

On en déduit que si I_r est la matrice identité d'ordre r et μ un nombre complexe quelconque, nous avons :

$$\det(\mathcal{C} - \mu I_r) = P_\mu(1)P_\mu(\omega)P_\mu(\omega^2) \dots P_\mu(\omega^{r-1}) \text{ où } P_\mu(X) = (a_0 - \mu) + a_1X + \dots + a_{r-1}X^{r-1}.$$

Ce qui implique que les valeurs propres de \mathcal{C} sont les nombres complexes μ vérifiant la relation :

$$P_\mu(1)P_\mu(\omega)P_\mu(\omega^2) \dots P_\mu(\omega^{r-1}) = 0$$

Dans le cas de la matrice circulante \mathcal{M} où $a_0 = 1 - \lambda$, $a_1 = \lambda$ et $a_j = 0$ pour $j \in \{2, \dots, r-1\}$, les valeurs propres sont les nombres complexes μ tels que $P_\mu(\omega^j) = (1 - \lambda - \mu) + \lambda\omega^j = 0$ pour $j \in \{0, 1, \dots, r-1\}$ i.e. les nombres complexes $\mu_j = 1 - \lambda + \lambda\omega^j$ pour $j \in \{0, 1, \dots, r-1\}$. Ces valeurs propres étant deux à deux distinctes, la matrice \mathcal{M} est diagonalisable sur \mathbb{C} et on peut donc la décomposer sous la forme :

$$\mathcal{M} = \mathcal{N}^{-1} \times \text{diag}(1, \mu_1, \dots, \mu_{r-1}) \times \mathcal{N} \text{ où } \mathcal{N} \in \text{GL}_r(\mathbb{C}).$$

Ce qui implique que

$$\forall q \in \mathbb{N}, \mathcal{M}^q = \mathcal{N}^{-1} \times \text{diag}(1, \mu_1^q, \dots, \mu_{r-1}^q) \times \mathcal{N} \text{ avec } |\mu_j| = \left| (1 - \lambda) + \lambda e^{\frac{2i\pi j}{r}} \right| < 1 \text{ pour } 1 \leq j \leq r-1$$

En effet, comme $e^{\frac{2i\pi j}{r}} = \cos \frac{2\pi j}{r} + i \sin \frac{2\pi j}{r}$:

$$\begin{aligned} |\mu_j|^2 &= \left[(1 - \lambda) + \lambda \cos \frac{2\pi j}{r} \right]^2 + \lambda^2 \left(\sin \frac{2\pi j}{r} \right)^2 \\ &= (1 - \lambda)^2 + 2(1 - \lambda)\lambda \cos \frac{2\pi j}{r} + \lambda^2 \\ &= 1 - 2(1 - \lambda)\lambda \left(1 - \cos \frac{2\pi j}{r} \right) \\ &< 1. \end{aligned}$$

La suite $(\mathcal{M}^q)_{q \in \mathbb{N}}$ converge donc vers la matrice $\mathcal{M}^* = \mathcal{N}^{-1} \times \text{diag}(1, 0, \dots, 0) \times \mathcal{N}$ et la suite vectorielle $(\mathcal{V}_q) = (\mathcal{M}^q(\mathcal{V}_0))$ converge vers $\mathcal{V}_* = \mathcal{M}^*(\mathcal{V}_0)$. D'autre part, par passage aux limites dans la relation de récurrence $\mathcal{M}(\mathcal{V}_q) = \mathcal{V}_{q+1}$, on obtient $\mathcal{M}(\mathcal{V}_*) = \mathcal{V}_*$. Ce qui implique que \mathcal{V}_* est un élément de la droite vectorielle $\text{Ker}(\mathcal{M} - I_r) = \text{Vect}\{(1, \dots, 1)\}$. Il existe donc un nombre complexe α tel que $\mathcal{V}_* = (\alpha, \dots, \alpha)$. De plus, si $\varphi : \mathbb{C}^r \rightarrow \mathbb{C}$ est la forme linéaire (continue bien sûr) définie par :

$$\varphi(z_1, \dots, z_r) = z_1 + \dots + z_r,$$

on a $\forall q \in \mathbb{N}, \varphi(\mathcal{V}_q) = 0$. Donc, en passant à la limite on obtient $\varphi(\mathcal{V}_*) = 0$ soit $r\alpha = 0$. D'où $\alpha = 0$ et $\mathcal{V}_* = (0, \dots, 0)$.

La suite (\mathcal{V}_q) étant convergente vers $\mathcal{V}_* = (0, \dots, 0)$, on en déduit que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe q_ε tel que $\|v_{q,k}\| < \varepsilon$ pour $q \geq q_\varepsilon$ et $k \in \{1, \dots, r\}$. Ce qui prouve que \mathcal{P}_q est un ε -multi-parallélogramme dès que $q \geq q_\varepsilon$. \square

Dans [4] (en page 57), il est aussi affirmé (sans démonstration) que même si le polygone de départ n'est pas contenu dans un plan, ses λ -dérivés successifs se rapprochent d'un multiparallélogramme plan. Cela semble vrai, et nous pensons que notre démonstration pourrait être transposée presque telle quelle après avoir formulé le bon énoncé. C'est un joli problème qui intéresserait probablement certains lecteurs de Images des Maths. Bon vent aux amateurs !

2.4. Une dernière remarque. Le polygone \mathcal{P}_1 , λ -dérivé de $\mathcal{P} = \mathcal{P}_0$, a le même centre de gravité G que \mathcal{P} , car nous avons la relation vectorielle :

$$\sum_{k=1}^n \overrightarrow{GA_{1,k}} = \sum_{k=1}^n \left((1 - \lambda) \overrightarrow{GA_k} + \lambda \overrightarrow{GA_{k+1}} \right) = (1 - \lambda) \underbrace{\sum_{k=1}^n \overrightarrow{GA_k}}_{=\vec{0}} + \lambda \underbrace{\sum_{k=1}^n \overrightarrow{GA_{k+1}}}_{=\vec{0}} = \vec{0}$$

Ce qui implique (par récurrence) que le polygone \mathcal{P} et tous ses λ -dérivés successifs \mathcal{P}_q ont le même isobarycentre G et qu'on a ainsi pour chaque polygone \mathcal{P}_q la relation vectorielle : $\sum_{k=1}^n \overrightarrow{GA_{q,k}} = \vec{0}$.

Ceci permet de montrer, exactement comme dans la preuve du théorème principal, que la suite (\mathcal{P}_q) des λ -dérivés converge vers le n -polygone trivial (G, \dots, G) réduit à G .

3 Complément : La notion d'espace affine

Le contenu de cette section est constitué de fragments en partie extraits du livre [3]. Ceux qui souhaitent en savoir plus y trouveront un développement assez fourni sur le sujet.

3.1. Préliminaires

3.1.1. On se donne un espace vectoriel réel, c'est-à-dire un ensemble $\vec{\mathcal{V}}$ non vide muni d'une :

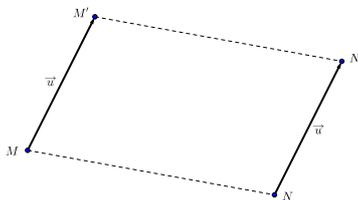
Addition $\vec{u} + \vec{v}$ vérifiant les propriétés :

- (i) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ (*commutativité*) ;
- (ii) $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$ (*associativité*) ;
- (iii) il existe un élément $\vec{0}$ (*élément neutre*) tel que $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$ pour tout $\vec{u} \in \vec{\mathcal{V}}$;
- (iv) pour tout $\vec{u} \in \vec{\mathcal{V}}$, il existe un élément \vec{u}' tel que $\vec{u} + \vec{u}' = \vec{0}$; on le note $-\vec{u}$ et on l'appelle *opposé de \vec{u}* ;

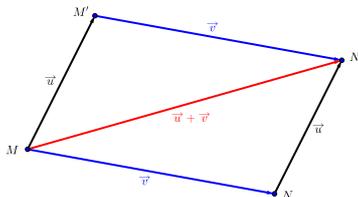
Multiplication par les réels $\lambda \vec{u}$ vérifiant les propriétés :

- (v) $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$ pour tout $\vec{u} \in \vec{\mathcal{V}}$;
- (vi) $\lambda(\mu \vec{u}) = (\lambda\mu) \vec{u}$ pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et tout $\vec{u} \in \vec{\mathcal{V}}$;
- (vii) $(\lambda + \mu) \vec{u} = \lambda \vec{u} + \mu \vec{u}$ pour pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et tout $\vec{u} \in \vec{\mathcal{V}}$;
- (viii) $\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda \vec{u} + \lambda \vec{v}$ pour pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tous $\vec{u}, \vec{v} \in \vec{\mathcal{V}}$.

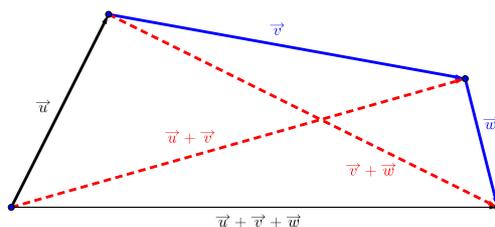
3.1.2. Un élément \vec{u} de $\vec{\mathcal{V}}$ est appelé *vecteur*. Dans le bon vieux temps on nous le définissait comme un *segment orienté* : une *force* s'exerçant sur les éléments M (appelés *points*) d'un ensemble \mathcal{P} dans une direction, un sens et avec une certaine intensité. Ceci en respectant certaines règles qui décrivent de façon géométrique les axiomes définissant l'espace $\vec{\mathcal{V}}$. Nous nous contentons d'en montrer quelques-unes sur les dessins ci-dessous.



Le vecteur \vec{u} agit de la même manière sur tous les éléments de \mathcal{P} .



On voit bien la commutativité de l'addition $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$.



On voit l'associativité de l'addition $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$.
Ce qui autorise l'écriture $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$ de la somme de trois vecteurs.

Le vecteur $\vec{0}$ représente une force nulle et n'a donc aucun effet sur les points $M \in \mathcal{P}$. Et c'est le seul ayant cette propriété.

On a donc une *action* de l'espace vectoriel $\vec{\mathcal{V}}$ sur l'ensemble \mathcal{P} , c'est-à-dire une application $\Psi : \vec{\mathcal{V}} \times \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ qui au couple (\vec{u}, M) associe son déplacé $M' = \Psi(\vec{u}, M)$ (qu'on note aussi $M + \vec{u}$) tel qu'on le voit par exemple sur le premier dessin. Cette action possède les propriétés suivantes :

- (i) $M + \vec{0} = M$ pour tout $M \in \mathcal{P}$;
- (ii) $M + (\vec{u} + \vec{v}) = (M + \vec{u}) + \vec{v}$ pour tous $\vec{u}, \vec{v} \in \vec{\mathcal{V}}$ et tout $M \in \mathcal{P}$;
- (iii) $M + \vec{u} = M$ implique $\vec{u} = \vec{0}$ (*simplicité* de l'action) ;
- (iv) pour tous M, M' de \mathcal{P} , il existe $\vec{u} \in \vec{\mathcal{V}}$ tel que $M + \vec{u} = M'$ (*transitivité* de l'action).

3.2. Espaces affines

Voici la première définition d'un espace affine que suggère tout ce qu'on vient de voir. (Les dessins montrent qu'on ne peut pas faire autrement !)

3.2.1. Définition. *Un espace affine réel est la donnée d'un couple (\mathcal{P}, Ψ) où \mathcal{P} est un ensemble non vide et $\Psi : (\vec{u}, M) \in \vec{\mathcal{V}} \times \mathcal{P} \mapsto M + \vec{u} \in \mathcal{P}$ une action de $\vec{\mathcal{V}}$ sur \mathcal{P} possédant les propriétés (i), (ii), (iii) et (iv) énumérées ci-dessus. L'espace vectoriel $\vec{\mathcal{V}}$ est appelé *direction* de \mathcal{P} .*

Il y a aussi une deuxième définition dont nous laisserons le soin au lecteur de montrer qu'elle est équivalente à la première.

3.2.2. Définition. *Un espace affine réel dirigé par $\vec{\mathcal{V}}$ est la donnée d'un couple (\mathcal{P}, Φ) où \mathcal{P} est un ensemble non vide et $\Phi : (M, N) \in \mathcal{P} \times \mathcal{P} \mapsto \overrightarrow{MN} \in \vec{\mathcal{V}}$ une application possédant les propriétés suivantes :*

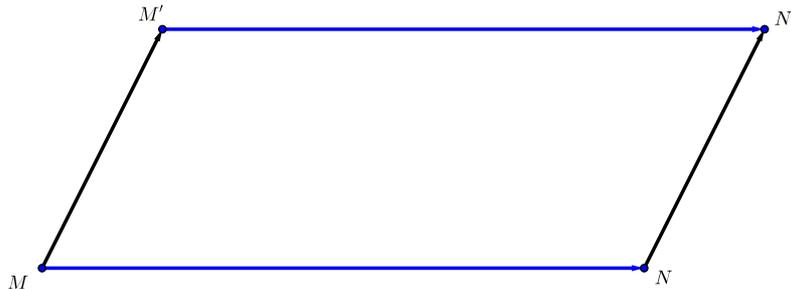
- (i) $\overrightarrow{ML} + \overrightarrow{LN} = \overrightarrow{MN}$ pour tous $M, N, L \in \mathcal{P}$; c'est la **relation de Chasles**.
- (ii) Pour tout élément $\omega \in \mathcal{P}$ fixé, l'application partielle $\Phi_\omega : M \in \mathcal{P} \mapsto \overrightarrow{\omega M} \in \vec{\mathcal{V}}$ est une bijection.

3.2.3. À toute application $f : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ est associée de façon naturelle l'application $\vec{f} : \vec{\mathcal{V}} \rightarrow \vec{\mathcal{V}}$ définie par $\vec{f}(\overrightarrow{MN}) = \overrightarrow{f(M)f(N)}$. On dira que f est *affine* si \vec{f} est linéaire ; dans ce cas \vec{f} est appelée *direction* de f . Si f est affine et bijective, on dira que f est un *automorphisme affine* de \mathcal{P} . L'ensemble $\text{Aff}(\mathcal{F})$ des automorphismes affines de \mathcal{P} est un groupe pour la composition des applications.

Si on fixe un vecteur $\vec{u} \in \vec{\mathcal{V}}$, l'application partielle $\Psi_{\vec{u}} : M \in \mathcal{P} \mapsto M + \vec{u} \in \mathcal{P}$ est une bijection. L'application $\vec{u} \mapsto \Psi_{\vec{u}}$ est un morphisme injectif du groupe additif $(\vec{\mathcal{V}}, +)$ dans le groupe des bijections de \mathcal{P} . La transformation $\Psi_{\vec{u}}$ est appelée *translation* de vecteur \vec{u} . Les translations de \mathcal{P} forment un sous-groupe (noté \mathcal{T}) du groupe $\text{Aff}(\mathcal{F})$.

3.2.4. Quelques remarques

- (i) Pour tout $M \in \mathcal{P}$, on a $\overrightarrow{MM} + \overrightarrow{MM} = \overrightarrow{MM}$ i.e. $2\overrightarrow{MM} = \overrightarrow{MM}$ donc $\overrightarrow{MM} = \vec{0}$.
- (ii) Pour tous $M, N \in \mathcal{P}$, on a $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NM} = \overrightarrow{MM} = \vec{0}$ donc $\overrightarrow{MN} = -\overrightarrow{NM}$.
- (iii) $\overrightarrow{MN} = \vec{0}$ si, et seulement si, $M = N$.
- (iv) $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{M'N'}$ si, et seulement si, $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{NN'}$; c'est la *règle du parallélogramme*.



Dans toute la suite, ce qu'on entendra par espace affine sera la donnée de l'espace vectoriel $\vec{\mathcal{V}}$, d'un ensemble \mathcal{P} et d'une application $\Phi : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \longrightarrow \vec{\mathcal{V}}$ ou une action $\Psi : (\vec{u}, M) \in \vec{\mathcal{V}} \times \mathcal{P} \longmapsto M + \vec{u} \in \mathcal{P}$ possédant les propriétés que nous avons décrites pour chacune d'elles. Reste à savoir ce qu'on peut prendre pour ensemble \mathcal{P} ; voici quelques :

3.2.5. Exemples

(a) On peut prendre $\mathcal{P} = \vec{\mathcal{V}}$ et comme application $\Phi : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \longrightarrow \vec{\mathcal{V}}$ celle donnée par $\Phi(M, N) = N - M$. On munit ainsi $\mathcal{P} = \vec{\mathcal{V}}$ d'une structure d'espace affine appelée *structure affine canonique* sur l'espace vectoriel $\vec{\mathcal{V}}$.

(b) Soient \mathcal{P} un ensemble quelconque et $f : \mathcal{P} \longrightarrow \vec{\mathcal{V}}$ une bijection. On définit $\Phi : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \longrightarrow \vec{\mathcal{V}}$ par $\Phi(M, N) = f(N) - f(M)$. Il est alors facile de voir que Φ munit \mathcal{P} d'une structure d'espace affine. Si $g : \mathcal{P} \longrightarrow \vec{\mathcal{V}}$ est une autre bijection alors elle définit la même structure affine si, et seulement si, $g \circ f^{-1}$ est une translation (la démonstration est laissée en exercice au lecteur).

3.3. Barycentres

On se situe dans un espace affine $(\mathcal{P}, \vec{\mathcal{V}})$. Soient M_1, \dots, M_n des points de \mathcal{P} , $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des réels de somme τ et $\omega \in \mathcal{P}$. On suppose $\tau \neq 0$.

3.3.1. Proposition. *Le point $\omega + \frac{1}{\tau}(\lambda_1 \overrightarrow{\omega M_1} + \dots + \lambda_n \overrightarrow{\omega M_n})$ ne dépend pas de ω . On l'appelle **barycentre** de M_1, \dots, M_n affectés respectivement des coefficients $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. On le note $\frac{1}{\tau}(\lambda_1 M_1 + \dots + \lambda_n M_n)$ ou $\text{Bar}\{(M_1, \lambda_1), \dots, (M_n, \lambda_n)\}$.*

3.3.2. Remarques

(i) Si $\lambda_i = 0$, le point M_i n'intervient pas. On peut donc supposer que chacun des λ_i est non nul. On dira alors que le couple (M_i, λ_i) est un *point massique*.

(ii) Le point $G = \text{Bar}\{(M_1, \lambda_1), \dots, (M_n, \lambda_n)\}$ ne change pas si on multiplie tous les λ_i par un même réel non nul s . On peut donc supposer que $\tau = \lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$.

(iii) Si les λ_i sont tous égaux (et non nuls), on dira que G est l'*isobarycentre* ou le *centre de gravité* des points M_1, \dots, M_n .

3.3.3. Détermination pratique des barycentres

On se donne toujours des points M_1, \dots, M_n et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des réels. On pose $\tau = \lambda_1 + \dots + \lambda_n$ qu'on suppose non nul. Le lecteur est invité à établir les assertions qui suivent.

(i) *Origine quelconque ω :* $G = \frac{1}{\tau} \sum_{i=1}^n \lambda_i M_i \iff \overrightarrow{\omega G} = \frac{1}{\tau} \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{\omega M_i}$.

(ii) *Origine en G :* $G = \frac{1}{\tau} \sum_{i=1}^n \lambda_i M_i \iff \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{G M_i} = \vec{0}$.

(iii) *Origine en M_j :* $G = \frac{1}{\tau} \sum_{i=1}^n \lambda_i M_i \iff \overrightarrow{M_j G} = \frac{1}{\tau} \sum_{i \neq j} \lambda_i \overrightarrow{M_j M_i}$.

La proposition qui suit dit comment on détermine le barycentre d'un ensemble de points massiques en utilisant une partition de celui-ci.

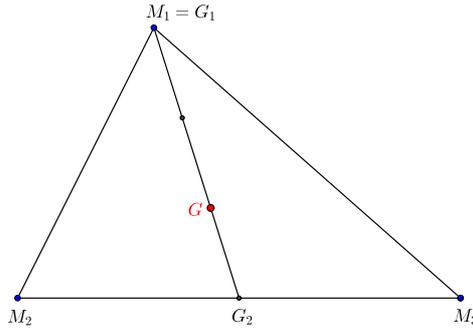
3.3.4. Proposition. *Soient $(M_1, \lambda_1), \dots, (M_n, \lambda_n)$ n points massiques. On se donne une partition de $\{1, \dots, n\}$ par des parties $J_1 = \{1, \dots, n_1\}, \dots, J_k = \{n_{k-1} + 1, \dots, n_k\}$ où $n_k = n$. On suppose que les nombres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont tels que $\lambda_1 + \dots + \lambda_n \neq 0$ et $\tau_\ell = \sum_{j \in J_\ell} \lambda_j \neq 0$ pour tout $\ell \in \{1, \dots, k\}$. On*

note G_ℓ le barycentre des points massiques $\{(M_j, \lambda_j) : j \in J_\ell\}$.

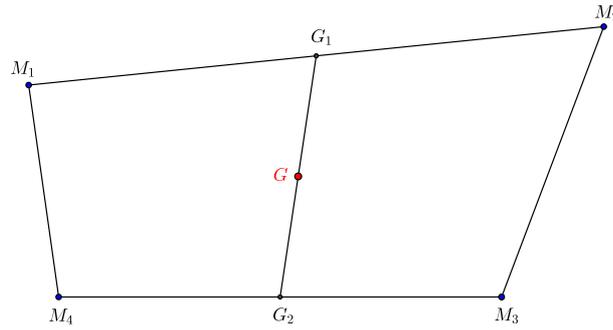
Alors le barycentre G des points massiques $(M_1, \lambda_1), \dots, (M_n, \lambda_n)$ est égal à celui des points massiques $\{(G_\ell, \tau_\ell) : \ell \in \{1, \dots, k\}\}$. C'est l'associativité du calcul du barycentre.

3.3.5. Exemples

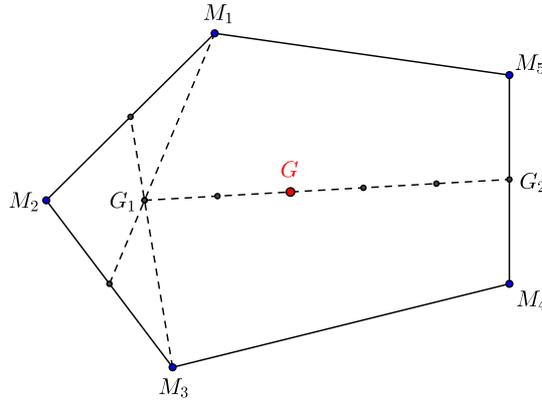
Détermination du centre de gravité G d'un triangle $[M_1, M_2, M_3]$, d'un quadrilatère $[M_1, M_2, M_3, M_4]$ et d'un pentagone $[M_1, M_2, M_3, M_4, M_5]$ (cf. dessins ci-dessous livrés volontairement sans commentaire).



$G = \text{Bar}\{(M_1, 1), (M_2, 1), (M_3, 1)\} = \text{Bar}\{(G_1, 1), (G_2, 2)\}$.
 La partition est $\{M_1\} \cup \{M_2, M_3\}$; $G_1 = \text{Bar}\{(M_1, 1)\} = M_1$.



$G = \text{Bar}\{(M_1, 1), (M_2, 1), (M_3, 1), (M_4, 1)\} = \text{Bar}\{(G_1, 2), (G_2, 2)\}$.



$G = \text{Bar}\{(M_1, 1), (M_2, 1), (M_3, 1), (M_4, 1), (M_5, 1)\} = \text{Bar}\{(G_1, 3), (G_2, 2)\}$.

Références

- [1] Calmès, B. *Itération du polygone des milieux*. Prépublication LML, Université d'Artois (Juin 2022).
- [2] El Kacimi Alaoui, A. *Le problème de Sin Pan*. Images des Mathématiques (Avril 2014).
- [3] El Kacimi Alaoui, A. *Géométrie euclidienne élémentaire*. Éditions Ellipses (2012).
- [4] Fresnel, J. et Matignon, M. *Algèbre et Géométrie*. Éditions Ellipses (2017).
- [5] Wells D. *Le dictionnaire Penguin des curiosités géométriques*. Éditions Eyrolles (1996).

Université Polytechnique Hauts-de-France
 DMATHS-CERAMATHS
 F-59313 Valenciennes Cedex 9
 France

aziz.elkacimi@uphf.fr
 abdellatif.zeggar@uphf.fr