ANNALES

DE

L'INSTITUT FOURIER

Aziz EL KACIMI ALAOUI & Jihène SLIMÈNE

Cohomologie de dolbeault le long des feuilles de certains feuilletages complexes

Tome 60, nº 2 (2010), p. 727-757.

<http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2010__60_2_727_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
60, 2 (2010) 727-757

COHOMOLOGIE DE DOLBEAULT LE LONG DES FEUILLES DE CERTAINS FEUILLETAGES COMPLEXES

par Aziz EL KACIMI ALAOUI & Jihène SLIMÈNE

Résumé. — La cohomologie de Dolbeault feuilletée mesure l'obstruction à résoudre le problème de Cauchy-Riemann le long des feuilles d'un feuilletage complexe. En utilisant des méthodes de cohomologie des groupes, nous calculons cette cohomologie pour deux classes de feuilletages : i) le feuilletage complexe affine de Reeb de dimension (complexe) 2 sur la variété de Hopf de dimension 5 ; ii) les feuilletages complexes sur le tore hyperbolique (fibration en tores de dimension n au-dessus d'un cercle et de monodromie une matrice hyperbolique à coefficients entiers diagonalisable et de valeurs propres réelles positives) donnés par des actions localement libres du groupe des transformations affines de la droite réelle.

Abstract. — Leafwise Dolbeault cohomology measures the obstruction to solve the Cauchy-Riemann problem along the leaves of a complex foliation. Using essentially methods of cohomology of groups, we compute this cohomology for two classes of complex foliations: i) the two dimensional complex affine Reeb foliations on the Hopf 5-manifold; ii) complex foliations on the hyperbolic torus (fibration over the circle whose fibre is the n-dimensional torus and its monodromy is a hyperbolic and diagonalizable matrix all of whose eigenvalues are real and positive) obtained by locally free actions of the real affine Lie group.

Introduction

Soit M une variété différentiable munie d'un feuilletage de dimension réelle $2m$. On dira que $\mathcal{F}$ est *complexe* si ses feuilles sont munies d'une structure complexe de telle sorte que les changements de coordonnées soient holomorphes (en restriction aux feuilles). On peut donc transposer tout problème de l'analyse complexe classique en son analogue le long des feuilles, en particulier le problème du $\overline{\partial}_{\mathcal{F}}$ (ou $\overline{\partial}$ feuilleté). Il peut être interprété

Mots-clés : feuilletage complexe, $\mathcal{F}$-holomorphie, cohomologie de Dolbeault feuilletée.
Classification math. : 32W05, 32G05, 32Q58, 58A30.

comme une version paramétrée (par l'espace des feuilles $M/\mathcal{F}$) du problème du $\overline{\partial}$ usuel. De façon similaire au cas classique, la cohomologie de Dolbeault feuilletée $H^{0,*}_{\mathcal{F}}(M)$ apparaît comme obstruction à la résolution de ce problème. Dans les diverses tentatives pour résoudre le $\overline{\partial}_{\mathcal{F}}$ ou, de manière équivalente, pour calculer les espaces vectoriels $H^{0,*}_{\mathcal{F}}(M)$, une difficulté majeure apparaît souvent : la régularité des solutions (quand elles existent) n'est pas a priori acquise ; ceci est dû au fait que l'opérateur $\overline{\partial}_{\mathcal{F}}$ n'est pas elliptique (il l'est seulement le long des feuilles) contrairement au cas classique. On peut toutefois citer des avancées dans cette direction qu'on peut trouver dans [3], [4], [7] et [12]. Dans ce travail, nous nous proposons de résoudre ce problème pour les feuilletages complexes qui suivent.

1 - On note $\widetilde{M}$ la variété $(\mathbb{C}^2 \times \mathbb{R}) \setminus \{0\}$ munie du feuilletage complexe $\widetilde{\mathcal{F}}$ de dimension 2 défini par l'équation $dt = 0$ ((z_1, z_2, t) désignent les coordonnées sur $\widetilde{M}$). Ce feuilletage est invariant par le difféomorphisme $\gamma : (z_1, z_2, t) \in \widetilde{M} \longmapsto (\lambda z_1, \lambda z_2, \lambda t) \in \widetilde{M}$ (où $\lambda \in]0, 1[$) et induit donc un feuilletage complexe $\mathcal{F}$ de dimension 2 sur la variété quotient $M = \widetilde{M}/\Gamma$ où Γ est le groupe des automorphismes de $\widetilde{\mathcal{F}}$ engendré par γ.

2 - Soit $A \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$ une matrice diagonalisable ayant toutes ses valeurs propres $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ réelles positives et différentes de 1 (on dit que A est *hyperbolique*). On a une action du groupe $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^n$: $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longmapsto A^t x \in \mathbb{R}^n$ qui permet de construire un groupe de Lie résoluble $G = \mathbb{R}^n \rtimes_A \mathbb{R}$ ayant $\Gamma = \mathbb{Z}^n \rtimes_A \mathbb{Z}$ comme réseau cocompact. Le quotient G/Γ est une variété compacte notée $\mathbb{T}^{n+1}_A$ et appelée *tore hyperbolique* de dimension $n+1$. Soit v un vecteur propre de A associé à une valeur propre $\lambda \in]0, 1[$. Les champs de vecteurs $X = \lambda^t v$ et $Y = \frac{\partial}{\partial t}$ sont linéairement indépendants et induisent des champs sur la variété $\mathbb{T}^{n+1}_A$ sur laquelle ils définissent un feuilletage $\mathcal{F}$ de dimension 2 réelle. Ce feuilletage est muni d'une structure complexe définie à l'aide de la structure presque complexe intégrable donnée par $J_{\mathcal{F}}(X) = Y$ et $J_{\mathcal{F}}(Y) = -X$.

Ces exemples sont extrêmement riches et leurs structures sont assez diversifiées. Le premier a une structure conforme tangentiellement et transversalement et n'est pas riemannien. Le deuxième a une dynamique compliquée et la croissance de ses feuilles (il y a des cylindres et des plans) est exponentielle. Il est aussi C^∞-stable (*cf.* [5]). (Toutefois la structure complexe de long des feuilles peut a priori se déformer !) Nous en avons aussi décrit beaucoup d'objets géométriques qui lui sont rattachés tels que les 1-formes $\mathcal{F}$-holomorphes ou encore les fonctionnelles $\mathcal{F}$-analytiques invariantes *etc.* Nos démonstrations utilisent des méthodes d'analyse réelle et complexe mais aussi des outils de cohomologie des groupes discrets et des techniques de suites spectrales (la référence qu'on utilise est [1]).

Sauf mention expresse du contraire ou précision, tous les objets que l'on considérera (variétés, applications, feuilletages...) seront supposés de classe C^∞.

1. Feuilletages complexes

Soit M une variété différentiable munie d'un feuilletage $\mathcal{F}$ de dimension réelle $2m$. On notera $T\mathcal{F}$ le fibré tangent à $\mathcal{F}$.

DÉFINITION 1.1. — *On dira que $\mathcal{F}$ est* ***complexe*** *s'il peut être défini par un recouvrement ouvert $\{U_i\}$ de M et des difféomorphismes*

$$\phi_i : \Omega_i \times \mathcal{O}_i \longrightarrow U_i$$

(où Ω_i est un ouvert de $\mathbb{C}^m$ et $\mathcal{O}_i$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$) tels que les changements de coordonnées :

$$\phi_{ij} = \phi_j^{-1} \circ \phi_i : (z,t) \in \phi_i^{-1}(U_i \cap U_j) \longrightarrow (z',t') \in \phi_j^{-1}(U_i \cap U_j)$$

soient de la forme $(z',t') = \big(\phi_{ij}^1(z,t), \phi_{ij}^2(t)\big)$ avec $\phi_{ij}^1(z,t)$ holomorphe en z pour t fixé.

Il est facile de voir que tout feuilletage orientable par surfaces possède une structure complexe. Mais qu'en est-il en dimension (paire) supérieure ou égale à 4 ? Le premier auteur a posé la question de l'existence de ces feuilletages (en codimension 1) sur les sphères impaires $\mathbb{S}^{2n+1}$. Pour le moment seule sur $\mathbb{S}^5$ une réponse positive a été donnée (*cf.* [11]).

Soient $(M,\mathcal{F})$ et $(M',\mathcal{F}')$ deux feuilletages complexes. On appelle *morphisme* de $(M,\mathcal{F})$ vers $(M',\mathcal{F}')$ toute application $f : M \longrightarrow M'$ de classe C^∞ et telle que l'image de toute feuille F de $\mathcal{F}$ est contenue dans une feuille F' de $\mathcal{F}'$ et l'application $f : F \longrightarrow F'$ est holomorphe. On dira qu'un morphisme $f : (M,\mathcal{F}) \longrightarrow (M',\mathcal{F}')$ est un *isomorphisme de feuilletages complexes* si c'est un difféomorphisme qui est un biholomorphisme sur les feuilles. Lorsque $M = M'$ et $\mathcal{F} = \mathcal{F}'$ on parlera simplement d'automorphisme de $(M,\mathcal{F})$. On notera $\mathrm{Aut}(M,\mathcal{F})$ le groupe des automorphismes de $(M,\mathcal{F})$.

Dans toute la suite, on se donne une variété M munie d'un feuilletage complexe $\mathcal{F}$ de dimension m. Lorsqu'on travaillera en coordonnées locales, on les notera $(z,t) = (z_1,\cdots,z_m,t_1,\cdots,t_n)$ où n est la codimension réelle de $\mathcal{F}$. Pour chaque $j = 1,\cdots,m$, $z_j = x_j + iy_j$. Ainsi, pour $j = 1,\cdots,m$, $dz_j = dx_j + idy_j$ et $d\overline{z}_j = dx_j - idy_j$. Pour tous multi-indices $I = (i_1,\ldots,i_p)$

et $J = (j_1, \dots, j_q)$ dans $\{1, \dots, m\}$, on adoptera les notations suivantes $dz_I = dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_p}$ et $d\overline{z}_J = d\overline{z}_{j_1} \wedge \dots \wedge d\overline{z}_{j_q}$. Une forme différentielle α de degré $r = p+q$ est dite *feuilletée de type* (p,q) si elle s'écrit localement $\alpha = \sum_{|I|=p,|J|=q} \alpha_{IJ}(z,t)\, dz_I \wedge d\overline{z}_J$ où les $\alpha_{IJ}(z,t)$ sont des fonctions C^∞. On notera $\Omega_{\mathcal{F}}^{p,q}(M)$ l'espace des formes différentielles feuilletées de type (p,q) sur $(M,\mathcal{F})$. On définit un opérateur de Cauchy-Riemann le long des feuilles $\overline{\partial}_{\mathcal{F}} : \Omega_{\mathcal{F}}^{p,q}(M) \longrightarrow \Omega_{\mathcal{F}}^{p,q+1}(M)$ localement par :

$$\overline{\partial}_{\mathcal{F}}\alpha = \sum_{I,J} \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial \alpha_{IJ}}{\partial \overline{z}_k}(z,t) d\overline{z}_k \wedge dz_I \wedge d\overline{z}_J. \tag{1}$$

Il vérifie $\overline{\partial}_{\mathcal{F}} \circ \overline{\partial}_{\mathcal{F}} = 0$; pour tout p fixé dans $\{0, \dots, m\}$, on obtient donc un complexe différentiel :

(2)
$$0 \longrightarrow \Omega_{\mathcal{F}}^{p,0}(M) \xrightarrow{\overline{\partial}_{\mathcal{F}}} \Omega_{\mathcal{F}}^{p,1}(M) \xrightarrow{\overline{\partial}_{\mathcal{F}}} \cdots \xrightarrow{\overline{\partial}_{\mathcal{F}}} \Omega_{\mathcal{F}}^{p,m-1}(M) \xrightarrow{\overline{\partial}_{\mathcal{F}}} \Omega_{\mathcal{F}}^{p,m}(M) \longrightarrow 0$$

appelé *complexe de Dolbeault feuilleté* (ou *complexe* du $\overline{\partial}_{\mathcal{F}}$) de $\mathcal{F}$. On fixe p et on pose :

$$Z_{\mathcal{F}}^{p,q}(M) = \text{noyau}\{\Omega_{\mathcal{F}}^{p,q}(M) \xrightarrow{\overline{\partial}_{\mathcal{F}}} \Omega_{\mathcal{F}}^{p,q+1}(M)\}$$

et

$$B_{\mathcal{F}}^{p,q}(M) = \text{image}\{\Omega_{\mathcal{F}}^{p,q-1}(M) \xrightarrow{\overline{\partial}_{\mathcal{F}}} \Omega_{\mathcal{F}}^{p,q}(M)\}.$$

Le quotient $H_{\mathcal{F}}^{p,*}(M) = Z_{\mathcal{F}}^{p,*}(M)/B_{\mathcal{F}}^{p,*}(M)$ est appelé $\overline{\partial}_{\mathcal{F}}$-*cohomologie* ou *cohomologie de Dolbeault feuilletée*. L'espace vectoriel topologique $H_{\mathcal{F}}^{p,q}(M)$ (les espaces de formes feuilletées de type (p,q) sont munis de la topologie C^∞) peut ne pas être séparé ! On appelle alors *cohomologie de Dolbeault feuilletée réduite* le quotient $\overline{H}_{\mathcal{F}}^{p,q}(M) = Z_{\mathcal{F}}^{p,q}(M)/\overline{B_{\mathcal{F}}^{p,q}(M)}$ où $\overline{B_{\mathcal{F}}^{p,q}(M)}$ est l'adhérence de $B_{\mathcal{F}}^{p,q}(M)$.

On a une version feuilletée du Lemme de Dolbeault-Grothendieck. Localement, la cohomologie de Dolbeault feuilletée est donc triviale. On peut ainsi décrire $H_{\mathcal{F}}^{p,*}(M)$ à l'aide d'un faisceau qui joue un rôle analogue au faisceau des germes de formes holomorphes sur une variété analytique complexe. Une p-forme α est dite $\mathcal{F}$-*holomorphe* si elle est feuilletée de type $(p,0)$ et vérifie $\overline{\partial}_{\mathcal{F}}\alpha = 0$. Localement, une p-forme $\mathcal{F}$-holomorphe s'écrit $\alpha = \sum \alpha_{j_1 \cdots j_p}(z,t) dz_{j_1} \wedge \cdots \wedge dz_{j_p}$ avec $\alpha_{j_1 \cdots j_p}$ holomorphe en z.

Soient $\mathcal{H}_{\mathcal{F}}^p$ (plus simplement $\mathcal{H}_{\mathcal{F}}$ lorsque $p = 0$) le faisceau des p-formes $\mathcal{F}$-holomorphes sur M et $\widetilde{\Omega}_{\mathcal{F}}^{p,q}$ celui des germes de formes différentielles de type (p,q) sur $\mathcal{F}$; ce dernier est un faisceau fin sur M. Le lemme de Dolbeault-Grothendieck feuilleté implique la :

Proposition 1.2. — *La suite* $0 \longrightarrow \mathcal{H}^p_{\mathcal{F}} \hookrightarrow \widetilde{\Omega}^{p,0}_{\mathcal{F}} \xrightarrow{\overline{\partial}_{\mathcal{F}}} \cdots \xrightarrow{\overline{\partial}_{\mathcal{F}}} \widetilde{\Omega}^{p,m}_{\mathcal{F}} \longrightarrow 0$ *est une résolution fine de* $\mathcal{H}^p_{\mathcal{F}}$*. On a alors* $H^q(M, \mathcal{H}^p_{\mathcal{F}}) = H^{p,q}_{\mathcal{F}}(M)$*, pour tous* $p, q = 0, 1, \ldots m$*.*

Si $n \geqslant 1$, cette résolution n'est pas elliptique ; elle l'est seulement le long des feuilles. La cohomologie $H^*(M, \mathcal{H}^p_{\mathcal{F}})$ n'est donc pas toujours de dimension finie même si M est compacte.

1.1. Fonctionnelles $\mathcal{F}$-analytiques invariantes

L'espace $\mathcal{H}_{\mathcal{F}}(M)$ des fonctions $\mathcal{F}$-holomorphes est un sous-espace de l'espace $C^\infty(M)$; il y est fermé pour la topologie C^∞. La topologie induite sur $\mathcal{H}_{\mathcal{F}}(M)$ est celle de la convergence uniforme sur les compacts des dérivées par rapport au paramètre transverse (il n'est pas nécessaire de dériver le long des feuilles). Une *fonctionnelle $\mathcal{F}$-analytique* sur $(M, \mathcal{F})$ est une forme linéaire continue $\zeta : h \in \mathcal{H}_{\mathcal{F}}(M) \longmapsto \langle \zeta, h \rangle \in \mathbb{C}$. Elle généralise la notion classique de fonctionnelle analytique de Martineau [10].

Soit Γ un groupe d'automorphismes du feuilletage complexe $(M, \mathcal{F})$. On a une action continue $(\gamma, h) \in \Gamma \times \mathcal{H}_{\mathcal{F}}(M) \longrightarrow h \circ \gamma^{-1} \in \mathcal{H}_{\mathcal{F}}(M)$. Par transposition, elle induit une action continue sur l'espace $\mathcal{H}'_{\mathcal{F}}(M)$ des fonctionnelles $\mathcal{F}$-analytiques (dual topologique de $\mathcal{H}_{\mathcal{F}}(M)$). Un point fixe ζ de cette action est appelé fonctionnelle $\mathcal{F}$-analytique Γ-*invariante.*

Supposons Γ isomorphe à $\mathbb{Z}$ engendré par un élément $\gamma \in \mathrm{Aut}(M, \mathcal{F})$. Dans cette situation on a un opérateur $\delta : h \in \mathcal{H}_{\mathcal{F}}(M) \longmapsto (h - h \circ \gamma) \in \mathcal{H}_{\mathcal{F}}(M)$. Son conoyau est fondamental dans la détermination de l'espace $\mathcal{H}'_{\mathcal{F},\Gamma}(M)$ des fonctionnelles $\mathcal{F}$-analytiques Γ-invariantes. En effet, une fonctionnelle $\mathcal{F}$-analytique Γ-invariante est nulle sur l'image de δ qui n'est rien d'autre que l'espace $\mathcal{C}$ engendré par les éléments de la forme $h - h \circ \gamma$ avec h variant dans $\mathcal{H}_{\mathcal{F}}(M)$; elle induit donc une forme linéaire continue sur le quotient $\mathcal{H}_{\mathcal{F}}(M)/\mathcal{C}$ qui est exactement le premier groupe de cohomologie $H^1(\mathbb{Z}, \mathcal{H}_{\mathcal{F}}(M))$ à valeurs dans le $\mathbb{Z}$-module $\mathcal{H}_{\mathcal{F}}(M)$. Son calcul se ramème à la résolution du problème qui se formule comme suit : *Étant donnée* $g \in \mathcal{H}_{\mathcal{F}}(M)$*, existe-t-il* $h \in \mathcal{H}_{\mathcal{F}}(M)$ *telle que* $h - h \circ \gamma = g$ *?* Pour cette raison, cette équation sera appelée *équation cohomologique $\mathcal{F}$-analytique.* Pour g donnée dans $\mathcal{H}_{\mathcal{F}}(M)$, une condition nécessaire pour que l'équation $h - h \circ \gamma = g$ admette une solution h dans $\mathcal{H}_{\mathcal{F}}(M)$ est que $\langle \zeta, g \rangle = 0$ pour toute fonctionnelle $\mathcal{F}$-analytique γ-invariante sur $(M, \mathcal{F})$.

Terminons cette section par la proposition qui suit et dont la démonstration est une simple conséquence du principe du maximum.

Proposition 1.3. — *Supposons M compacte et que toutes les feuilles sont denses. Alors toute fonction $M \longrightarrow \mathbb{C}$ continue et $\mathcal{F}$-holomorphe est constante.*

La condition « M compacte » est substantielle : nous verrons un exemple (*cf.* 3.6) de feuilletage complexe $\mathcal{F}$ dont toutes les feuilles sont denses sur une variété non compacte pour lequel l'espace des fonctions C^∞ et $\mathcal{F}$-holomorphes est de dimension infinie. On pourrait penser qu'une fonction continue et $\mathcal{F}$-holomorphe sur $(M, \mathcal{F})$ avec M compacte est basique (*i.e.* constante sur les feuilles). Il n'en est rien : dans [6] R. Feres et A. Zeghib ont construit un contre exemple à cet effet.

Tout le reste de ce papier sera consacré au calcul de la cohomologie de Dolbeault feuilletée pour les deux exemples de feuilletages complexes mentionnés dans l'introduction.

2. Feuilletage complexe de Reeb sur $\mathbb{S}^4 \times \mathbb{S}^1$

C'est un feuilletage complexe de dimension 2 sur la variété de Hopf $\mathbb{S}^4 \times \mathbb{S}^1$. Du point de vue réel, c'est le feuilletage affine de Reeb. Ses feuilles sont toutes holomorphiquement équivalentes à $\mathbb{C}^2$ sauf celle qui provient de $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ qui est équivalente à la surface de Hopf $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^1$; le feuilletage $\mathcal{F}$ n'est donc pas kählérien.

2.1. Les espaces $H^{0,*}_{\widetilde{\mathcal{F}}}(\widetilde{M})$

En degré $* = 0$

• Un élément de $H^{0,0}_{\widetilde{\mathcal{F}}}(\widetilde{M})$ est une fonction $f(z_1, z_2, t)$ qui est C^∞ et holomorphe en (z_1, z_2) pour tout (z_1, z_2) tel que $(z_1, z_2, t) \neq (0, 0, 0)$. D'après le théorème de Hartogs (voir [9] par exemple) et un raisonnement élémentaire utilisant la formule de Cauchy, f se prolonge à $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{R}$ en une fonction C^∞ et $\widetilde{\mathcal{F}}$-holomorphe. Donc $H^{0,0}_{\widetilde{\mathcal{F}}}(\widetilde{M}) = \mathcal{H}_{\widetilde{\mathcal{F}}}(\mathbb{C}^2 \times \mathbb{R})$. Une fonction $f \in \mathcal{H}_{\widetilde{\mathcal{F}}}(\mathbb{C}^2 \times \mathbb{R})$ s'écrit : $f(z_1, z_2, t) = \displaystyle\sum_{\substack{m_1 \in \mathbb{N} \\ m_2 \in \mathbb{N}}} a_{m_1 m_2}(t) z_1^{m_1} z_2^{m_2}$ où les $a_{m_1 m_2}$ sont des fonctions C^∞ telles que, pour tout compact $K \times C \subset \mathbb{C}^2 \times \mathbb{R}$ et tout entier naturel s la série $\displaystyle\sum_{\substack{m_1 \in \mathbb{N} \\ m_2 \in \mathbb{N}}} \frac{\partial^s a_{m_1 m_2}}{\partial t^s}(t) z_1^{m_1} z_2^{m_2}$ converge uniformément sur le compact $K \times C$.

• On pose $U_0 = \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{R}^*$ et, pour $i = 1, 2$, on note U_i l'ouvert de $\widetilde{M}$ tel que $z_i \neq 0$; $\mathcal{U} = \{U_0, U_1, U_2\}$ est un recouvrement ouvert de $\widetilde{M}$. Les ouverts U_1 et U_2 sont respectivement égaux à $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ et $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^* \times \mathbb{R}$. On a : $U_{01} = U_0 \cap U_1 = \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \times \mathbb{R}^*$, $U_{02} = U_0 \cap U_2 = \mathbb{C} \times \mathbb{C}^* \times \mathbb{R}^*$, $U_{12} = U_1 \cap U_2 = \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^* \times \mathbb{R}$ et $U_{012} = U_0 \cap U_1 \cap U_2 = \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^* \times \mathbb{R}^*$. Les feuilletages $\widetilde{\mathcal{F}}_0$, $\widetilde{\mathcal{F}}_1$, $\widetilde{\mathcal{F}}_2$, $\widetilde{\mathcal{F}}_{01}$, $\widetilde{\mathcal{F}}_{02}$, $\widetilde{\mathcal{F}}_{12}$ et $\widetilde{\mathcal{F}}_{012}$ induits respectivement sur les ouverts U_0, U_1, U_2, U_{01} U_{02}, U_{12} et U_{012} sont des produits de variétés de Stein par $\mathbb{R}$ ou par $\mathbb{R}^*$. On a donc, pour $* \geqslant 1$: $H^{0,*}_{\widetilde{\mathcal{F}}_0}(U_0) = 0$, $H^{0,*}_{\widetilde{\mathcal{F}}_1}(U_1) = 0$, $H^{0,*}_{\widetilde{\mathcal{F}}_2}(U_2) = 0$, $H^{0,*}_{\widetilde{\mathcal{F}}_{01}}(U_{01}) = 0$, $H^{0,*}_{\widetilde{\mathcal{F}}_{02}}(U_{02}) = 0$, $H^{0,*}_{\widetilde{\mathcal{F}}_{12}}(U_{12}) = 0$ et $H^{0,*}_{\widetilde{\mathcal{F}}_{012}}(U_{012}) = 0$. Le recouvrement $\mathcal{U} = \{U_0, U_1, U_2\}$ est alors de Leray ; il permet donc de calculer la cohomologie $H^{0,*}_{\widetilde{\mathcal{F}}}(\widetilde{M})$. Pour $* = 0$, les éléments des espaces $H^{0,0}_{\widetilde{\mathcal{F}}_0}(U_0)$, $H^{0,0}_{\widetilde{\mathcal{F}}_1}(U_1)$, $H^{0,0}_{\widetilde{\mathcal{F}}_2}(U_2)$, $H^{0,0}_{\widetilde{\mathcal{F}}_{01}}(U_{01})$, $H^{0,0}_{\widetilde{\mathcal{F}}_{02}}(U_{02})$, $H^{0,0}_{\widetilde{\mathcal{F}}_{12}}(U_{12})$ et $H^{0,0}_{\widetilde{\mathcal{F}}_{012}}(U_{012})$ s'écrivent respectivement sous les formes suivantes :

$$(3.1) : \sum_{\substack{m_1 \in \mathbb{N} \\ m_2 \in \mathbb{N}}} a_{m_1 m_2}(t) z_1^{m_1} z_2^{m_2} \qquad (3.2) : \sum_{\substack{m_1 \in \mathbb{Z} \\ m_2 \in \mathbb{N}}} b_{m_1 m_2}(t) z_1^{m_1} z_2^{m_2}$$

$$(3.3) : \sum_{\substack{m_1 \in \mathbb{N} \\ m_2 \in \mathbb{Z}}} c_{m_1 m_2}(t) z_1^{m_1} z_2^{m_2} \qquad (3.4) : \sum_{\substack{m_1 \in \mathbb{Z} \\ m_2 \in \mathbb{N}}} \alpha_{m_1 m_2}(t) z_1^{m_1} z_2^{m_2}$$

$$(3.5) : \sum_{\substack{m_1 \in \mathbb{N} \\ m_2 \in \mathbb{Z}}} \beta_{m_1 m_2}(t) z_1^{m_1} z_2^{m_2} \qquad (3.6) : \sum_{\substack{m_1 \in \mathbb{Z} \\ m_2 \in \mathbb{Z}}} \gamma_{m_1 m_2}(t) z_1^{m_1} z_2^{m_2}$$

$$(3.7) : \sum_{\substack{m_1 \in \mathbb{Z} \\ m_2 \in \mathbb{Z}}} d_{m_1 m_2}(t) z_1^{m_1} z_2^{m_2}$$

où $a_{m_1 m_2}$, $\alpha_{m_1 m_2}$, $\beta_{m_1 m_2}$ et $d_{m_1 m_2}$ sont des fonctions C^∞ sur $\mathbb{R}^*$ et $b_{m_1 m_2}$, $c_{m_1 m_2}$ et $\gamma_{m_1 m_2}$ sont des fonctions C^∞ sur $\mathbb{R}$ et les séries en question doivent converger uniformément sur tout compact ainsi que toutes leurs dérivées par rapport à t. Comme le recouvrement $\mathcal{U} = \{U_0, U_1, U_2\}$ est constitué de trois ouverts, on a $U_{i_1} \cap \cdots \cap U_{i_q} = \emptyset$ pour $q \geqslant 4$. Pour $k \geqslant 3$, tous les k-cocycles sont donc nuls ; ce qui donne $H^{0,k}_{\widetilde{\mathcal{F}}}(\widetilde{M}) = 0$ pour $k \geqslant 3$.

<u>En degré $* = 1$</u>

Un 1-cocycle sur le recouvrement $\mathcal{U}$ à valeurs dans le faisceau $\mathcal{H}_{\widetilde{\mathcal{F}}}$ est la donnée d'un triplet (f_{12}, f_{02}, f_{01}) avec $f_{12} \in \mathcal{H}_{\widetilde{\mathcal{F}}_{12}}(U_{12})$, $f_{02} \in \mathcal{H}_{\widetilde{\mathcal{F}}_{02}}(U_{02})$ et $f_{01} \in \mathcal{H}_{\widetilde{\mathcal{F}}_{01}}(U_{01})$ tel que $f_{12} - f_{02} + f_{01} = 0$ sur U_{012} ; il sera un cobord s'il existe un triplet (f_0, f_1, f_2) avec $f_0 \in \mathcal{H}_{\widetilde{\mathcal{F}}_0}(U_0)$, $f_1 \in \mathcal{H}_{\widetilde{\mathcal{F}}_1}(U_1)$ et $f_2 \in$

$\mathcal{H}_{\widetilde{\mathcal{F}}_2}(U_2)$ tel que $\begin{cases} f_2 - f_1 = f_{12} \\ f_2 - f_0 = f_{02} \\ f_1 - f_0 = f_{01} \end{cases}$. En remplaçant chacune de ces fonctions par son développement en série entière, ce système se transforme en le suivant :

(S)

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{\substack{m_1\in\mathbb{N}\\ m_2\in\mathbb{Z}}} c_{m_1m_2}(t)z_1^{m_1}z_2^{m_2} - \sum_{\substack{m_1\in\mathbb{Z}\\ m_2\in\mathbb{N}}} b_{m_1m_2}(t)z_1^{m_1}z_2^{m_2} = \sum_{\substack{m_1\in\mathbb{Z}\\ m_2\in\mathbb{Z}}} \gamma_{m_1m_2}(t)z_1^{m_1}z_2^{m_2} \\ \displaystyle\sum_{\substack{m_1\in\mathbb{N}\\ m_2\in\mathbb{Z}}} c_{m_1m_2}(t)z_1^{m_1}z_2^{m_2} - \sum_{\substack{m_1\in\mathbb{N}\\ m_2\in\mathbb{N}}} a_{m_1m_2}(t)z_1^{m_1}z_2^{m_2} = \sum_{\substack{m_1\in\mathbb{N}\\ m_2\in\mathbb{Z}}} \beta_{m_1m_2}(t)z_1^{m_1}z_2^{m_2} \\ \displaystyle\sum_{\substack{m_1\in\mathbb{Z}\\ m_2\in\mathbb{N}}} b_{m_1m_2}(t)z_1^{m_1}z_2^{m_2} - \sum_{\substack{m_1\in\mathbb{N}\\ m_2\in\mathbb{N}}} a_{m_1m_2}(t)z_1^{m_1}z_2^{m_2} = \sum_{\substack{m_1\in\mathbb{Z}\\ m_2\in\mathbb{N}}} \alpha_{m_1m_2}(t)z_1^{m_1}z_2^{m_2} \end{cases}$$

Les fonctions $\alpha_{m_1m_2}$, $\beta_{m_1m_2}$ et $\gamma_{m_1m_2}$ vérifient (là où elles sont définies) la relation suivante qui vient du fait que (f_{12}, f_{02}, f_{01}) est un cocycle :

$$\gamma_{m_1m_2} - \beta_{m_1m_2} + \alpha_{m_1m_2} = 0 \quad \text{pour tous} \quad m_1, m_2 \in \mathbb{Z}.$$

Cette relation se simplifie suivant la position du couple (m_1, m_2) dans le réseau $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Plus précisément, on aura ce qui suit :

i) Si $m_1 \geqslant 0$ et $m_2 \geqslant 0$, on a $\gamma_{m_1m_2} - \beta_{m_1m_2} + \alpha_{m_1m_2} = 0$. Le système a une solution particulière $a_{m_1m_2} = -\alpha_{m_1m_2}$, $b_{m_1m_2} = 0$ et $c_{m_1m_2} = \gamma_{m_1m_2}$.

ii) Si $m_1 \geqslant 0$ et $m_2 < 0$ alors $\alpha_{m_1m_2} = 0$, $a_{m_1m_2} = 0$ et $b_{m_1m_2} = 0$ et l'équation se réduit à $\gamma_{m_1m_2} - \beta_{m_1m_2} = 0$. Ceci force alors la fonction $\beta_{m_1m_2}$ à être C^∞ sur $\mathbb{R}$ tout entier (a priori elle ne l'était que sur $\mathbb{R}^*$). Le système a une solution $(a_{m_1m_2}, b_{m_1m_2}, c_{m_1m_2})$ avec $b_{m_1m_2} = a_{m_1m_2} = 0$ et $c_{m_1m_2} = \gamma_{m_1m_2} = \beta_{m_1m_2}$.

iii) Si $m_1 < 0$ et $m_2 \geqslant 0$ alors $\beta_{m_1m_2} = 0$, $a_{m_1m_2} = 0$ et $c_{m_1m_2} = 0$ et l'équation se réduit à $\gamma_{m_1m_2} + \alpha_{m_1m_2} = 0$. Ceci force alors la fonction $\alpha_{m_1m_2}$ à être C^∞ sur $\mathbb{R}$ tout entier (a priori elle ne l'était que sur $\mathbb{R}^*$). Le système a une solution $(a_{m_1m_2}, b_{m_1m_2}, c_{m_1m_2})$ en posant $b_{m_1m_2} = \alpha_{m_1m_2} = -\gamma_{m_1m_2}$.

iv) Si $m_1 < 0$ et $m_2 < 0$, $\alpha_{m_1m_2} = 0$ et $\beta_{m_1m_2} = 0$; le système se réduit à l'équation $\gamma_{m_1m_2} = 0$. C'est la condition nécessaire et suffisante pour que le système admette une solution $(a_{m_1m_2}, b_{m_1m_2}, c_{m_1m_2})$.

Conclusion

Le 1-cocycle (f_{12}, f_{02}, f_{01}) où

$$f_{12} = \sum_{\substack{m_1 \in \mathbb{Z} \\ m_2 \in \mathbb{Z}}} \gamma_{m_1 m_2}(t) z_1^{m_1} z_2^{m_2}, \quad f_{02} = \sum_{\substack{m_1 \in \mathbb{N} \\ m_2 \in \mathbb{Z}}} \beta_{m_1 m_2}(t) z_1^{m_1} z_2^{m_2}$$

et

$$f_{01} = \sum_{\substack{m_1 \in \mathbb{Z} \\ m_2 \in \mathbb{N}}} \alpha_{m_1 m_2}(t) z_1^{m_1} z_2^{m_2}$$

est un cobord si et seulement si $\sum_{\substack{m_1 < 0 \\ m_2 < 0}} \gamma_{m_1 m_2}(t) z_1^{m_1} z_2^{m_2} = 0$. On en déduit alors que $H^{0,1}_{\widetilde{\mathcal{F}}}(\widetilde{M}) = \left\{ \sum_{\substack{m_1 \in \mathbb{N}^* \\ m_2 \in \mathbb{N}^*}} \frac{\gamma_{m_1 m_2}(t)}{z_1^{m_1} z_2^{m_2}} \right\}$ où les fonctions $\gamma_{m_1 m_2}$ sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et telles que la série $\sum_{\substack{m_1 \in \mathbb{N}^* \\ m_2 \in \mathbb{N}^*}} \frac{\gamma_{m_1 m_2}(t)}{z_1^{m_1} z_2^{m_2}}$ converge uniformément sur tout compact ainsi que toutes les dérivées par rapport à t.

En degré $* = 2$

On se donne une 2-cochaîne f_{012} ; c'est une fonction $\widetilde{\mathcal{F}}$-holomorphe sur l'ouvert $U_{012} = \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^* \times \mathbb{R}^*$ et qui s'écrit donc sous forme de la série (3.7) avec les coefficients vérifiant les conditions de convergence susmentionnées. Comme le recouvrement ne contient que trois ouverts, toute 4-intersection est vide et donc f_{012} est un cocycle. C'est un cobord s'il existe une 1-cochaîne (f_{12}, f_{02}, f_{01}) avec $f_{12} \in \mathcal{H}_{\widetilde{\mathcal{F}}_{12}}(U_{12})$, $f_{02} \in \mathcal{H}_{\widetilde{\mathcal{F}}_{02}}(U_{02})$ et $f_{01} \in \mathcal{H}_{\widetilde{\mathcal{F}}_{01}}(U_{01})$ telle que $f_{12} - f_{02} + f_{01} = f_{012}$ sur U_{012}. Rappelons que f_{01} est donné par la série (3.4), f_{02} par la série (3.5) et f_{12} par la série (3.6). L'équation à résoudre $f_{12} - f_{02} + f_{01} = f_{012}$ donne alors le système :

$$\gamma_{m_1 m_2} - \beta_{m_1 m_2} + \alpha_{m_1 m_2} = d_{m_1 m_2} \qquad \text{pour} \qquad m_1, m_2 \in \mathbb{Z}.$$

Comme précédemment, nous allons examiner ce qui se passe suivant la position du point (m_1, m_2) dans le réseau $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Cela va permettre de dire dans quelles conditions on peut résoudre ce système.

i) Si $m_1 \geqslant 0$ et $m_2 \geqslant 0$, l'équation reste la même $\gamma_{m_1 m_2} - \beta_{m_1 m_2} + \alpha_{m_1 m_2} = d_{m_1 m_2}$. Elle a une solution : $\beta_{m_1 m_2}$ quelconque, $\gamma_{m_1 m_2} = \beta_{m_1 m_2}$ et $\alpha_{m_1 m_2} = d_{m_1 m_2}$.

ii) Si $m_1 \geqslant 0$ et $m_2 < 0$, $\alpha_{m_1 m_2} = 0$ et l'équation devient $\gamma_{m_1 m_2} - \beta_{m_1 m_2} = d_{m_1 m_2}$. Elle a une solution $\gamma_{m_1 m_2} = 0$, $\beta_{m_1 m_2} = -d_{m_1 m_2}$.

iii) Si $m_1 < 0$ et $m_2 \geqslant 0$, $\beta_{m_1m_2} = 0$ et l'équation devient $\gamma_{m_1m_2} + \alpha_{m_1m_2} = d_{m_1m_2}$. Elle a une solution $\gamma_{m_1m_2} = 0$, $\alpha_{m_1m_2} = d_{m_1m_2}$.

iv) Si $m_1 < 0$ et $m_2 < 0$, $\alpha_{m_1m_2} = 0$ et $\beta_{m_1m_2} = 0$ et l'équation se réduit à l'égalité $\gamma_{m_1m_2} = d_{m_1m_2}$. Comme $\gamma_{m_1m_2} \in C^\infty(\mathbb{R})$ et $d_{m_1m_2} \in C^\infty(\mathbb{R}^*)$, l'équation n'a de solution que si, et seulement si, la fonction $d_{m_1m_2}$ s'étend en un élément de $C^\infty(\mathbb{R})$ *i.e.* $d_{m_1m_2}$ est dans l'image de l'application restriction $\rho : C^\infty(\mathbb{R}) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{R}^*)$.

Considérons les espaces de Fréchet $C^\infty(\mathbb{R})$ et $C^\infty(\mathbb{R}^*)$ des fonctions complexes de classe C^∞ respectivement sur $\mathbb{R}$ et son ouvert $\mathbb{R}^*$. L'application restriction $\rho : f \in C^\infty(\mathbb{R}) \longmapsto f_{|\mathbb{R}^*} \in C^\infty(\mathbb{R}^*)$ est injective et permet d'identifier $C^\infty(\mathbb{R})$ à un sous-espace non fermé de $C^\infty(\mathbb{R}^*)$. Le difféomorphisme $\sigma : t \in \mathbb{R} \longmapsto \lambda t \in \mathbb{R}$ préserve l'ouvert $\mathbb{R}^*$. Il permet de définir des actions de $\mathbb{Z}$ sur les espaces $C^\infty(\mathbb{R})$ et $C^\infty(\mathbb{R}^*)$:

$$(k, f) \in \mathbb{Z} \times C^\infty(\mathbb{R}) \longmapsto f \circ \sigma^k \in C^\infty(\mathbb{R})$$

et

$$(k, f) \in \mathbb{Z} \times C^\infty(\mathbb{R}^*) \longmapsto f \circ \sigma^k \in C^\infty(\mathbb{R}^*)$$

qui deviennent donc des $\mathbb{Z}$-modules. On note W quotient $C^\infty(\mathbb{R}^*)/\, C^\infty(\mathbb{R})$ (qui est non séparé) et $\pi : C^\infty(\mathbb{R}^*) \longrightarrow W$ la projection canonique. Comme $C^\infty(\mathbb{R})$ n'est pas un idéal de l'anneau $C^\infty(\mathbb{R}^*)$, W n'est malheureusement qu'un espace vectoriel et ne possède pas de structure d'anneau induite par celle de $C^\infty(\mathbb{R}^*)$. Comme l'action de $\mathbb{Z}$ sur $C^\infty(\mathbb{R}^*)$ laisse stable $C^\infty(\mathbb{R})$, elle induit une action sur W qui devient aussi un $\mathbb{Z}$-module. On a une suite exacte de $\mathbb{Z}$-modules :

$$0 \longrightarrow C^\infty(\mathbb{R}) \overset{j}{\hookrightarrow} C^\infty(\mathbb{R}^*) \overset{\pi}{\longrightarrow} W \longrightarrow 0.$$

On prend la cohomologie du groupe discret $\mathbb{Z}$ à valeurs dans chacun de ces $\mathbb{Z}$-modules et on obtient une suite exacte longue de cohomologie :

$$0 \longrightarrow H^0(\mathbb{Z}, C^\infty(\mathbb{R})) \xrightarrow{j_*^0} H^0(\mathbb{Z}, C^\infty(\mathbb{R}^*)) \xrightarrow{\pi_*^0} H^0(\mathbb{Z}, W) \xrightarrow{c} \cdots$$

$$\cdots \xrightarrow{c} H^1(\mathbb{Z}, C^\infty(\mathbb{R})) \xrightarrow{j_*^1} H^1(\mathbb{Z}, C^\infty(\mathbb{R}^*)) \xrightarrow{\pi_*^1} H^1(\mathbb{Z}, W) \longrightarrow 0$$

où c est l'homomorphisme de connexion habituel. Cette suite s'arrête aux termes du premier degré car la cohomologie de $\mathbb{Z}$ (à valeurs dans n'importe quel module) est toujours nulle en degré supérieur ou égal à 2. Nous allons calculer explicitement les différents espaces qui y interviennent.

• L'espace $H^0(\mathbb{Z}, C^\infty(\mathbb{R}))$ est constitué des fonctions $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ invariantes par σ *i.e.* telles que $f(\lambda t) = f(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$; ce sont donc les constantes. Par suite $H^0(\mathbb{Z}, C^\infty(\mathbb{R})) = \mathbb{C}$.

• L'espace $H^0(\mathbb{Z}, C^\infty(\mathbb{R}^*))$ est constitué des fonctions $f \in C^\infty(\mathbb{R}^*)$ invariantes par σ *i.e.* telles que $f(\lambda t) = f(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}^*$. Comme les actions de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{R}^*_+$ et $\mathbb{R}^*_-$ engendrées respectivement par $t \in \mathbb{R}^*_+ \longmapsto \lambda t \in \mathbb{R}^*_+$ et $t \in \mathbb{R}^*_- \longmapsto \lambda t \in \mathbb{R}^*_-$ sont conjuguées (via la fonction logarithme) à l'action de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{R}$ engendrée par la translation $t \longmapsto t+1$, l'espace des fonctions σ-invariantes sur $\mathbb{R}^*$ s'identifie à la somme directe de deux copies de l'espace des fonctions complexes C^∞ et 1-périodiques sur $\mathbb{R}$ donc à la somme directe de deux copies de l'espace $C^\infty(\mathbb{S}^1)$ des fonctions complexes C^∞ sur le cercle $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. On le notera V ; on a ainsi $V = C^\infty(\mathbb{S}^1) \oplus C^\infty(\mathbb{S}^1)$. On a une application linéaire continue $I : f \in V \longmapsto \int_\lambda^1 f(t)dt \in \mathbb{C}$. On notera V_0 son noyau. D'où une décomposition en somme directe $V = V_0 \oplus (\mathbb{C} \otimes \mathbf{1})$ où $\mathbf{1}$ est la fonction constante égale à 1 sur $\mathbb{R}^*$.

• On rappelle que, pour tout espace vectoriel E muni d'une action de $\mathbb{Z}$ engendrée par un automorphisme $\sigma : E \longrightarrow E$, $H^1(\mathbb{Z}, E) = E/\langle f - \sigma f\rangle$ où $\langle f - \sigma f\rangle$ est le sous-espace de E engendré par les éléments de la forme $f - \sigma f$ avec f parcourant E. Dans notre situation $H^1(\mathbb{Z}, C^\infty(\mathbb{R}))$ est le quotient de $C^\infty(\mathbb{R})$ par le sous-espace engendré par les fonctions $g \in C^\infty(\mathbb{R})$ de la forme $g = f - f \circ \sigma$. Nous sommes donc amenés à résoudre l'équation fonctionnelle : étant donnée $g \in C^\infty(\mathbb{R})$, existe-t-il $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que $g(t) = f(t) - f(\lambda t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Une condition nécessaire est $g(0) = 0$. En fait, elle est suffisante ; la solution est donnée par la série (convergente pour la topologie C^∞) $f(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} g(\lambda^n t)$. Par suite le sous-espace $\langle f - \sigma f\rangle$ est exactement le noyau de la forme linéaire continue $g \in C^\infty(\mathbb{R}) \longmapsto g(0) \in \mathbb{C}$ et donc $H^1(\mathbb{Z}, C^\infty(\mathbb{R}))$ est isomorphe à $\mathbb{C}$ et est représenté par les fonctions constantes.

• L'action de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{R}^*$ via σ est libre et propre ; le quotient est la somme disjointe de deux copies du cercle $\mathbb{S}^1$. Comme $\mathbb{R}^*$ est acyclique (en cohomologie réelle), on a :

$$H^1(\mathbb{Z}, C^\infty(\mathbb{R}^*)) = H^1(\mathbb{Z}, H^0(\mathbb{R}^*, \widetilde{C}^\infty(\mathbb{R}^*))) = H^1(\mathbb{R}^*/\mathbb{Z}, \mathbb{C}) = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$$

où $\widetilde{C}^\infty(\mathbb{R}^*)$ est le faisceau des germes de fonctions complexes C^∞ sur $\mathbb{R}^*$. (La première égalité découle de la dégénérescence au deuxième terme de la suite spectrale associée au revêtement de groupe $\mathbb{Z} : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}^*/\mathbb{Z}$.)

Dans la suite exacte en cohomologie, les applications j^0_* et j^1_* sont données respectivement par $j^0_*(a) = \mathbf{a}$ (fonction constante égale à a) et $j^1_*(b) = (b, b)$. L'application j^1_* est donc injective ; par suite l'homomorphisme de connexion c est l'application nulle. La suite exacte se partage donc en deux sous-suites exactes courtes :

$$0 \longrightarrow \mathbb{C} \xrightarrow{j_*^0} V \xrightarrow{\pi_*^0} W^\sigma \longrightarrow 0$$

et

$$0 \longrightarrow \mathbb{C} \xrightarrow{j_*^1} \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \xrightarrow{\pi_*^1} H^1(\mathbb{Z}, W) \longrightarrow 0$$

(Ici W^σ est l'espace $H^0(\mathbb{Z}, W)$ qui est constitué des invariants de W par l'action de $\mathbb{Z}$ induite par σ.) De ces deux suites exactes on déduit que $W^\sigma = V/\mathbb{C} \simeq V_0$ et $H^1(\mathbb{Z}, W) \simeq \mathbb{C}$.

• Soit Θ^* l'espace des fonctions C^∞ et $\mathcal{F}$-holomorphes sur l'ouvert $U_{012} = \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^* \times \mathbb{R}^*$ et qui s'écrivent

$$f(z_1, z_2, t) = \sum_{m_1, m_2 \in \mathbb{N}^*} \frac{\gamma_{m_1 m_2}(t)}{z_1^{m_1} z_2^{m_2}}$$

où $\gamma_{m_1 m_2} \in C^\infty(\mathbb{R}^*)$ avec les conditions de convergence C^∞ habituelles. Il contient l'espace Θ des fonctions C^∞ et $\mathcal{F}$-holomorphes sur l'ouvert $U_{012} = \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^* \times \mathbb{R}$ et qui s'écrivent sous la même forme mais cette fois-ci $\gamma_{m_1 m_2} \in C^\infty(\mathbb{R})$ (avec aussi les conditions de convergence C^∞ habituelles). On a donc une injection $\Theta \hookrightarrow \Theta^*$ et le quotient Θ^*/Θ s'identifie à l'espace vectoriel de cohomologie $H^2(\widetilde{M}, \mathcal{H}_{\widetilde{\mathcal{F}}})$. Ses éléments peuvent s'interpréter comme des séries $\displaystyle\sum_{m_1, m_2 \in \mathbb{N}^*} \frac{\gamma_{m_1 m_2}(t)}{z_1^{m_1} z_2^{m_2}}$ dont les coefficients sont dans le groupe W.

Reprenons maintenant le difféomorphisme $\sigma : t \longmapsto \lambda t \in \mathbb{R}$ qui définit comme nous l'avons vu une action de $\mathbb{Z}$ sur l'espace de Fréchet $C^\infty(\mathbb{R})$. Celle-ci induit une action (qu'on notera encore σ) de $\mathbb{Z}$ sur l'espace $H^{0,1}_{\widetilde{\mathcal{F}}}(\widetilde{M}) = \left\{ \displaystyle\sum_{\substack{m_1 \in \mathbb{N}^* \\ m_2 \in \mathbb{N}^*}} \frac{\gamma_{m_1 m_2}(t)}{z_1^{m_1} z_2^{m_2}} \right\}$ donnée par

$$\sigma(f)(z_1, z_2, t) = \sum_{\substack{m_1 \in \mathbb{N}^* \\ m_2 \in \mathbb{N}^*}} \frac{\gamma_{m_1 m_2}(\lambda t)}{\lambda^{m_1 + m_2} z_1^{m_1} z_2^{m_2}}$$

et qui fait donc de l'espace $H^{0,1}_{\widetilde{\mathcal{F}}}(\widetilde{M})$ un $\mathbb{Z}$-module qu'on notera L (pour simplifier les notations dans les calculs qui vont suivre).

Posons $\Delta = H^2(\widetilde{M}, \mathcal{H}_{\widetilde{\mathcal{F}}}) = \Theta^*/\Theta$. On a une action de $\mathbb{Z}$ sur Δ induite par l'automorphisme du feuilletage $\widetilde{\mathcal{F}} : \gamma : (z_1, z_2, t) \in \widetilde{M} \longmapsto (\lambda z_1, \lambda z_2, \lambda t) \in$

$\widetilde{M}$ et ses restrictions aux divers ouverts invariants :

$$[f] = \left[\sum_{m_1,m_2\in\mathbb{N}^*} \frac{\gamma_{m_1m_2}(t)}{z_1^{m_1}z_2^{m_2}}\right] \longmapsto \gamma[f] = \left[\sum_{m_1,m_2\in\mathbb{N}^*} \frac{\gamma_{m_1m_2}(\lambda t)}{\lambda^{m_1+m_2}z_1^{m_1}z_2^{m_2}}\right]$$

où, pour $f \in \Theta^*$, $[f]$ désigne sa classe d'équivalence dans Δ. On notera Δ^γ le sous-espace de Δ dont les éléments sont les γ-invariants. Bien entendu, un élément de Δ^γ est représenté par une fonction $f(z_1, z_2, t) = \sum_{m_1,m_2\in\mathbb{N}^*} \frac{\gamma_{m_1m_2}(t)}{z_1^{m_1}z_2^{m_2}}$ avec $\gamma_{m_1m_2} \in C^\infty(\mathbb{R}^*)$ telle que $\gamma f - f$ représente la classe nulle dans Δ *i.e.*, pour tout $(m_1, m_2) \in \mathbb{N}^{*2}$, la fonction $\widetilde{\gamma}_{m_1m_2}(t) = \frac{\gamma_{m_1m_2}(t)}{\lambda^{m_1+m_2}} - \gamma_{m_1m_2}(t)$ est dans l'image de la restriction $\rho : C^\infty(\mathbb{R}^*) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{R})$. On a finalement le :

Théorème 2.1. — *On a :*

$$H^{0,*}_{\mathcal{F}}(M) = \begin{cases} \mathbb{C} & si\ * = 0 \\ \mathbb{C} \oplus \left\{ \displaystyle\sum_{\substack{m_1\in\mathbb{N}^* \\ m_2\in\mathbb{N}^*}} c_{m_1m_2} \frac{t^{m_1+m_2}}{z_1^{m_1}z_2^{m_2}} \right\} & si\ * = 1 \\ H^1(\mathbb{Z}, L) \oplus \Delta^\gamma & si\ * = 2 \\ 0 & si\ * \geqslant 3 \end{cases} \tag{4}$$

où, pour tout $(m_1, m_2) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, *les* $c_{m_1m_2}$ *sont des constantes complexes telles que la série* $\sum_{\substack{m_1\in\mathbb{N}^* \\ m_2\in\mathbb{N}^*}} c_{m_1m_2} \frac{t^{m_1+m_2}}{z_1^{m_1}z_2^{m_2}}$ *converge uniformément sur tout compact de* $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^* \times \mathbb{R}$*.*

Démonstration. — Pour des raisons évidentes de degré, $H^q(M, \mathcal{H}_{\mathcal{F}}) = 0$ pour $q \geqslant 3$. Reste à calculer seulement $H^q(M, \mathcal{H}_{\mathcal{F}}) = 0$ pour $0 \leqslant q \leqslant 2$.

On a un revêtement feuilleté $\pi : \widetilde{M} \longrightarrow M$ de groupe $\Gamma \simeq \mathbb{Z}$ engendré par l'automorphisme γ du feuilletage $\widetilde{\mathcal{F}}$. Le faisceau $\mathcal{H}_{\widetilde{\mathcal{F}}}$ des germes de fonctions $\widetilde{\mathcal{F}}$-holomorphes sur $\widetilde{M}$ est le relevé par π du faisceau $\mathcal{H}_{\mathcal{F}}$ des germes de fonctions $\mathcal{F}$-holomorphes sur M. On a alors une suite spectrale de terme $E_2^{p,q} = H^p(\Gamma, H^q(\widetilde{M}, \mathcal{H}_{\widetilde{\mathcal{F}}}))$ et convergeant vers $H^{0,*}_{\mathcal{F}}(M)$. Comme $\Gamma = \mathbb{Z}$, la différentielle $d_2 : E_2^{pq} \longrightarrow E_2^{p+2,q-1}$ est nulle et donc la suite stationne déjà au terme E_2. Ce qui nous donne, pour tout $\ell \in \mathbb{N}$ $H^{0,\ell}_{\mathcal{F}}(M) = \bigoplus_{p+q=\ell} E_2^{pq}$.

De façon plus précise :

$$\begin{aligned} H^{0,0}_{\mathcal{F}}(M) &= E_2^{00} = H^0(\Gamma, H^0(\widetilde{M}, \mathcal{H}_{\widetilde{\mathcal{F}}})) = E^\sigma \\ &= \{\text{éléments de } \mathcal{H}_{\widetilde{\mathcal{F}}}(\widetilde{M}) \text{ invariants par } \gamma\} \end{aligned}$$

$$H^{0,1}_{\mathcal{F}}(M) = E_2^{01} \oplus E_2^{10} = H^0(\Gamma, H^1(\widetilde{M}, \mathcal{H}_{\widetilde{\mathcal{F}}})) \oplus H^1(\Gamma, H^0(\widetilde{M}, \mathcal{H}_{\widetilde{\mathcal{F}}}))$$

c'est-à-dire $H^{0,1}_{\mathcal{F}}(M) = \{$éléments de L invariants par $\sigma\} \oplus H^1(\Gamma, \mathcal{H}_{\widetilde{\mathcal{F}}}(\widetilde{M}))$. De même :

$$H^{0,2}_{\mathcal{F}}(M) = E_2^{02} \oplus E_2^{11} \oplus E_2^{20} = H^0(\Gamma, H^2(\widetilde{M}, \mathcal{H}_{\widetilde{\mathcal{F}}})) \oplus H^1(\Gamma, H^0(\widetilde{M}, \mathcal{H}_{\widetilde{\mathcal{F}}}))$$

Ici on a utilisé le fait que $E_2^{20} = H^2(\Gamma, H^0(\widetilde{M}, \mathcal{H}_{\widetilde{\mathcal{F}}})) = 0$ car $\Gamma \simeq \mathbb{Z}$. Mais $H^0(\Gamma, H^2(\widetilde{M}, \mathcal{H}_{\widetilde{\mathcal{F}}}))$ n'est rien d'autre que l'espace des invariants de $H^2(\widetilde{M}, \mathcal{H}_{\widetilde{\mathcal{F}}})$ par l'automorphisme induit par le difféomorphisme

$$\gamma : (z_1, z_2, t) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^* \times \mathbb{R}^* \longmapsto (\lambda z_1, \lambda z_2, \lambda t) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^* \times \mathbb{R}^*$$

que nous allons calculer de façon précise.

<u>En degré $* = 0$</u>

Rappelons qu'on a l'égalité $\mathcal{H}_{\widetilde{\mathcal{F}}}(\widetilde{M}) = \mathcal{H}_{\widetilde{\mathcal{F}}}(\mathbb{C}^2 \times \mathbb{R})$. Il est alors clair que toute fonction $f \in \mathcal{H}_{\widetilde{\mathcal{F}}}(\mathbb{C}^2 \times \mathbb{R})$ invariante par γ est constante ; d'où $H^{0,0}_{\mathcal{F}}(M) = \mathbb{C}$ engendré par la fonction constante égale à 1.

<u>En degré $* = 1$</u>

Donner explicitement l'espace $H^{0,1}_{\mathcal{F}}(M)$, revient à calculer l'espace $H^1(\mathbb{Z}, \mathcal{H}_{\widetilde{\mathcal{F}}}(\mathbb{C}^2 \times \mathbb{R}))$ et les éléments de $H^{0,1}_{\widetilde{\mathcal{F}}}(\widetilde{M}) = \left\{ \sum_{\substack{m_1 \in \mathbb{N}^* \\ m_2 \in \mathbb{N}^*}} \dfrac{\gamma_{m_1 m_2}(t)}{z_1^{m_1} z_2^{m_2}} \right\}$ invariants par σ. □

• **L'espace** $H^1(\mathbb{Z}, \mathcal{H}_{\widetilde{\mathcal{F}}}(\mathbb{C}^2 \times \mathbb{R}))$

On sait qu'il s'identifie canoniquement au conoyau de l'opérateur linéaire (et continu) $\delta : \mathcal{H}_{\widetilde{\mathcal{F}}}(\mathbb{C}^2 \times \mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{H}_{\widetilde{\mathcal{F}}}(\mathbb{C}^2 \times \mathbb{R})$ défini par $\delta(f) = f - f \circ \gamma$. Cela revient à se donner $g \in \mathcal{H}_{\widetilde{\mathcal{F}}}(\mathbb{C}^2 \times \mathbb{R})$ et à chercher $f \in \mathcal{H}_{\widetilde{\mathcal{F}}}(\mathbb{C}^2 \times \mathbb{R})$ telle que, pour tout $(z_1, z_2, t) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{R}$, on ait :

$$f(z_1, z_2, t) - f(\lambda z_1, \lambda z_2, \lambda t) = g(z_1, z_2, t).$$

Une condition nécessaire pour que cette équation cohomologique ait une solution est $g(0,0,0) = 0$. On va la supposer remplie. On a alors une solution formelle $f(z_1, z_2, t) = \sum_{k=0}^{\infty} g(\lambda^k z_1, \lambda^k z_2, \lambda^k t)$. La « dérivée » (formelle) d'ordre $s \in \mathbb{N}^*$ en t s'écrit

$$\frac{\partial^s f}{\partial t^s}(z_1, z_2, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{ks} \frac{\partial^s g}{\partial t^s}(\lambda^k z_1, \lambda^k z_2, \lambda^k t).$$

Soient $R > 0$ et K la boule fermée de $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{R}$ de centre l'origine et de rayon R ; alors, comme λ^{ks} tend vers 0 quand $k \to +\infty$, la famille $\frac{\partial^s g}{\partial t^s}(\lambda^k z_1, \lambda^k z_2, \lambda^k t)$ y est bornée par une constante $C > 0$ indépendante de k. Ceci permet de montrer que toutes les séries dérivées en question convergent uniformément sur tout compact. Comme la série elle-même converge au point 0, elle converge finalement (au sens de ce qu'il faut) vers une fonction $f \in \mathcal{H}_{\widetilde{\mathcal{F}}}(\mathbb{C}^2 \times \mathbb{R})$ solution de l'équation $f - f \circ \gamma = g$. L'image de l'opérateur δ est donc le noyau de la fonctionnelle $\widetilde{\mathcal{F}}$-analytique $g \in \mathcal{H}_{\widetilde{\mathcal{F}}}(\mathbb{C}^2 \times \mathbb{R}) \longmapsto g(0) \in \mathbb{C}$. Ceci montre que l'espace vectoriel $H^1(\mathbb{Z}, \mathcal{H}_{\widetilde{\mathcal{F}}}(\mathbb{C}^2 \times \mathbb{R}))$ est isomorphe à $\mathbb{C}$ et est engendré par la fonction constante égale à 1.

• **Les invariants de $H^{0,1}_{\widetilde{\mathcal{F}}}(\widetilde{M})$**

On doit chercher les éléments de $H^{01}_{\widetilde{\mathcal{F}}}(\widetilde{M}) = \left\{ \sum_{\substack{m_1 \in \mathbb{N}^* \\ m_2 \in \mathbb{N}^*}} \frac{\phi_{m_1 m_2}(t)}{z_1^{m_1} z_2^{m_2}} \right\}$ qui sont invariants par l'action de σ donnée par

$$(\sigma \cdot f)(z_1, z_2, t) = \sum_{\substack{m_1 \in \mathbb{N}^* \\ m_2 \in \mathbb{N}^*}} \frac{\phi_{m_1 m_2}(\lambda t)}{\lambda^{m_1+m_2} z_1^{m_1} z_2^{m_2}}.$$

De tels éléments doivent satisfaire la condition d'invariance $\phi_{m_1 m_2}(\lambda t) = \lambda^{m_1+m_2}\phi_{m_1 m_2}(t)$ pour tout couple $(m_1, m_2) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$. Posons $k = m_1 + m_2$ et cherchons les fonctions complexes $\phi \in C^\infty(\mathbb{R})$ qui vérifient $\phi(\lambda t) = \lambda^k \phi(t)$. La fonction $b(t) = t^k$ vérifie la condition $b(\lambda t) = \lambda^k b(t)$. Soit $\phi \in C^\infty(\mathbb{R})$ une autre fonction vérifiant la même condition ; alors, pour $t \neq 0$, la fonction $\psi(t) = \frac{\phi(t)}{t^k}$ vérifie $\psi(\lambda t) = \psi(t)$. On doit avoir $\phi(t) = \psi(t) t^k$ avec ψ définie sur $\mathbb{R}^*$ et telle que $\psi(\lambda t) = \psi(t)$. Soit $\varepsilon > 0$ assez petit et développons ϕ en série de Taylor sur l'ouvert $U =]-\varepsilon, +\varepsilon[$: $\phi(t) = \phi(0) + \phi'(0)t + \cdots + \frac{\phi^{(k)}(0)}{k!} t^k + \cdots$ Comme la fonction $\frac{\phi(t)}{t^k}$ est bornée sur $U^* =]-\varepsilon, +\varepsilon[\setminus \{0\}$ (car coïncide sur $]0, \varepsilon[$ avec ψ qui est invariante par l'homothétie $t \in]0, +\infty[\longmapsto \lambda t \in]0, +\infty[$), on a forcément $\phi^{(i)}(0) = 0$ pour $i = 0, 1, \cdots, k-1$. Par suite $\phi(t) = t^k \psi(t)$ sur U. La fonction ψ est donc en fait définie sur U ; comme elle vérifie $\psi(\lambda t) = \psi(t)$, elle est constante. Par suite ϕ est un multiple par une constante de la fonction $b(t) = t^k$. On en déduit que le sous-espace des invariants de $H^{0,1}_{\widetilde{\mathcal{F}}}(\widetilde{M})$ est $\left\{ \sum_{\substack{m_1 \in \mathbb{N}^* \\ m_2 \in \mathbb{N}^*}} c_{m_1 m_2} \frac{t^{m_1+m_2}}{z_1^{m_1} z_2^{m_2}} \right\}$.

Ce qui donne $H^{0,1}_{\mathcal{F}}(M) = \mathbb{C} \oplus \left\{ \sum_{\substack{m_1 \in \mathbb{N}^* \\ m_2 \in \mathbb{N}^*}} c_{m_1 m_2} \frac{t^{m_1+m_2}}{z_1^{m_1} z_2^{m_2}} \right\}$ où les coefficients

$c_{m_1 m_2}$ sont des constantes telles que la série $\displaystyle\sum_{\substack{m_1\in\mathbb{N}^*\\ m_2\in\mathbb{N}^*}} c_{m_1m_2}\frac{t^{m_1+m_2}}{z_1^{m_1}z_2^{m_2}}$ converge uniformément sur tout compact.

En degré $* = 2$

Comme précédemment, E_2^{11} est l'espace $H^1(\mathbb{Z}, L)$ et qu'on ne sait pas déterminer explicitement pour l'instant ! L'espace $E_2^{02} = H^0(\mathbb{Z}, H^2(\widetilde{M}, \mathcal{H}_{\widetilde{\mathcal{F}}}))$ n'est rien d'autre que Δ^γ *i.e.* celui des éléments de $\Delta = H^2(\widetilde{M}, \mathcal{H}_{\widetilde{\mathcal{F}}}) = \Theta^*/\Theta$ invariants par γ et qu'on a déjà décrit.

Ceci termine la démonstration du théorème et donc le calcul de la cohomologie de Dolbeault feuilletée pour le feuilletage complexe affine de Reeb sur la variété de Hopf $\mathbb{S}^4 \times \mathbb{S}^1$.

3. Un feuilletage complexe sur le tore hyperbolique $\mathbb{T}_A^{n+1}$

On va d'abord introduire les ingrédients et les divers espaces fonctionnels qui serviront dans les calculs et à l'investigation de la cohomologie de Dolbeault feuilletée $H_{\mathcal{F}}^{0,*}(\mathbb{T}_A^{n+1})$ ainsi que d'autres invariants rattachés à ce feuilletage complexe.

3.1. Quelques préliminaires

On note $v_1, \cdots, v_n$ des vecteurs propres unitaires associés respectivement aux valeurs propres $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ de la matrice A. (Les composantes de v_i seront notées $(\kappa_1^i, \cdots, \kappa_n^i)$.) On vérifie facilement que les champs de vecteurs $Y = \frac{\partial}{\partial t}$ et $X_i = \lambda_i^t v_i = \lambda_i^t\left(\kappa_1^i\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + \kappa_n^i\frac{\partial}{\partial x_n}\right)$ avec $i = 1, \cdots, n$ induisent des champs sur $\mathbb{T}_A^{n+1}$. Ils vérifient les relations de crochet $\begin{cases}[X_i, X_j] = 0\\ [Y, X_i] = (\ln\lambda_i)X_i.\end{cases}$ Soit X l'un des champs $X_1, \cdots, X_n$ (X_1 par exemple) de coordonnées $(\kappa_1, \cdots, \kappa_n)$ associé à $\lambda \in \{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$; on suppose $\lambda < 1$ et donc $\nu = \ln\lambda < 0$. Les champs X, Y engendrent un sous-fibré intégrable du fibré tangent à $\mathbb{T}_A^{n+1}$ et définissent donc un feuilletage $\mathcal{F}$. En fait, $\mathcal{F}$ est aussi défini par le sous-groupe H de G, produit semi-direct de la direction propre $E_\lambda = \mathbb{R}X$ par $\mathbb{R}$ agissant (sur E_λ bien sûr) par multiplication par λ^t ; H est isomorphe au groupe affine GA (groupe des transformations affines préservant l'orientation de la droite réelle).

On rappelle que la structure complexe sur les feuilles est donnée par la structure presque complexe intégrable $J_{\mathcal{F}}(X) = Y$ et $J_{\mathcal{F}}(Y) = -X$. Les fibrés $T^{10}\mathcal{F}$ et $T^{01}\mathcal{F}$ respectivement $\mathcal{F}$-holomorphe et $\mathcal{F}$-anti-holomorphe sont respectivement engendrés par les champs $Z = \frac{1}{2}(X - iY)$ et $\overline{Z} = \frac{1}{2}(X + iY)$ qui sont donnés exactement par les formules :

$$Z = \frac{1}{2}\left[\lambda^t\left(\kappa_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + \kappa_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right) - i\frac{\partial}{\partial t}\right],$$

$$\overline{Z} = \frac{1}{2}\left[\lambda^t\left(\kappa_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + \kappa_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right) + i\frac{\partial}{\partial t}\right]$$

Ces champs forment une base $(Z, \overline{Z})$ du complexifié $T\mathcal{F}\otimes\mathbb{C}$ du fibré tangent au feuilletage ; $(Z, \overline{Z})$ admet pour base duale $(\omega, \overline{\omega})$ où ω et $\overline{\omega}$ sont les 1-formes feuilletées respectivement de type $(1, 0)$ et de type $(0, 1)$ données explicitement par :

$$\omega = \lambda^{-t}(\kappa_1 dx_1 + \cdots + \kappa_n dx_n) + idt \quad \text{et} \quad \overline{\omega} = \lambda^{-t}(\kappa_1 dx_1 + \cdots + \kappa_n dx_n) - idt.$$

La $(1, 0)$-forme ω vérifie $\overline{\partial}_{\mathcal{F}}\omega = \nu\omega \wedge dt$ et n'est donc pas $\mathcal{F}$-holomorphe. Il n'y a en fait aucune 1-forme $\mathcal{F}$-holomorphe sur $(\mathbb{T}^{n+1}_A, \mathcal{F})$ comme nous le verrons plus loin. Le complexe de Dolbeault feuilleté s'écrit

$$0 \longrightarrow \Omega^{0,0}_{\mathcal{F}}(\mathbb{T}^{n+1}_A) \xrightarrow{\overline{\partial}_{\mathcal{F}}} \Omega^{0,1}_{\mathcal{F}}(\mathbb{T}^{n+1}_A) \longrightarrow 0.$$

On a, de façon plus précise :

$$\Omega^{0,*}_{\mathcal{F}}(\mathbb{T}^{n+1}_A) = \begin{cases} C^\infty(\mathbb{T}^{n+1}_A) & \text{si } * = 0 \\ C^\infty(\mathbb{T}^{n+1}_A) \otimes \overline{\omega} & \text{si } * = 1 \end{cases}$$

et l'opérateur $\overline{\partial}_{\mathcal{F}}$ est défini par :

$$\overline{\partial}_{\mathcal{F}} f = \frac{1}{2}\left[\lambda^t\left(\kappa_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + \kappa_n\frac{\partial f}{\partial x_n}\right) + i\frac{\partial f}{\partial t}\right] \otimes \overline{\omega}. \tag{5}$$

3.2. Une description hiérarchique de $\mathcal{F}$

Pour simplifier, on pose $G = \mathbb{R}^n \rtimes_A \mathbb{R}$, $\widehat{M} = \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}$ et $M = \mathbb{T}^{n+1}_A$. Le groupe Γ (qui est $\mathbb{Z}^n \rtimes_A \mathbb{Z}$) est une extension scindée $0 \longrightarrow \Gamma_0 = \mathbb{Z}^n \longrightarrow \Gamma \longrightarrow \Sigma = \mathbb{Z} \longrightarrow 0$. La variété $\widehat{M}$ est le quotient de G par l'action du sous-groupe Γ_0 (distingué dans Γ) à l'aide des difféomorphismes $\tau_i : (x_1, \cdots, x_n, t) \in G \longmapsto (x_1, \cdots, x_{i-1}, x_i + 1, x_{i+1}, \cdots, x_n, t) \in G$ pour $i = 1, \cdots, n$. La variété M est obtenue comme quotient de $\widehat{M}$ par l'action de $\Sigma = \mathbb{Z}$ engendrée par le difféomorphisme $\sigma : (x, t) \in \mathbb{T}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow (Ax, t + 1) \in \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}$.

Le feuilletage $\widetilde{\mathcal{F}}$ sur G est un produit complexe : chaque feuille $\widetilde{F}$ de $\widetilde{\mathcal{F}}$ est holomorphiquement équivalente au groupe affine muni de la structure complexe invariante donnée par l'automorphisme $J_{\mathcal{F}}$ qu'on a défini précédemment. Les flots des champs $X_2, \cdots, X_n$ engendrent un sous-groupe T isomorphe à $\mathbb{R}^{n-1}$ et on a $G = \widetilde{F} \times T$. Les difféomorphismes $\tau_1, \cdots, \tau_n$ sont en fait des éléments de $\mathrm{Aut}(G, \widetilde{\mathcal{F}})$ et σ est un élément de $\mathrm{Aut}(\widehat{M}, \widehat{\mathcal{F}})$. Pour chaque $i = 1, \cdots, n$, on pose :

$$C_i = \underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{(i-1)\text{ fois}} \times \mathbb{S}^1 \times \underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{(n-i)\text{ fois}}.$$

Alors le quotient de G par le sous-groupe engendré par τ_i est une variété $\widehat{M_i}$ difféomorphe à $C_i \times \mathbb{R}$. Le feuilletage $\widetilde{\mathcal{F}}$ est invariant par l'action de τ_i et induit un feuilletage $\widehat{\mathcal{F}_i}$ sur $\widehat{M_i}$ qui est aussi un produit complexe : ses feuilles sont obtenues en multipliant par le facteur $\mathbb{R}_+^*$ le flot linéaire en droites fermées de direction le champ X_i et sont toutes holomorphiquement équivalentes à GA. Aussi bien pour $(G, \widetilde{\mathcal{F}})$ que pour les feuilletages $(\widehat{M_i}, \widehat{\mathcal{F}_i})$ on a :

$$H^{0,*}_{\widetilde{\mathcal{F}}}(G) = \begin{cases} 0 & \text{si } * \geqslant 1 \\ \mathcal{H}_{\widetilde{\mathcal{F}}}(G) & \text{si } * = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad H^{0,*}_{\widehat{\mathcal{F}}}(\widehat{M_i}) = \begin{cases} 0 & \text{si } * \geqslant 1 \\ \mathcal{H}_{\widehat{\mathcal{F}_i}}(\widehat{M_i}) & \text{si } * = 0. \end{cases}$$

3.3. Fonctions sur $\mathbb{T}_A^{n+1}$

La forme volume $\mu = dx \wedge dt = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \wedge dt$ sur $G = \mathbb{R}^n \rtimes_A \mathbb{R}$ est invariante par l'action de $\Gamma = \mathbb{Z}^n \rtimes_A \mathbb{Z}$ et induit donc une forme volume sur $\mathbb{T}_A^{n+1}$.

Une fonction sur $\mathbb{T}_A^{n+1}$ est une fonction sur $G = \mathbb{R}^n \rtimes_A \mathbb{R}$ invariante par $\Gamma = \mathbb{Z}^n \rtimes \mathbb{Z}$. D'après ce qui précède, une telle fonction est identifiée à une fonction n-périodique, de période 1 en $x_1, \cdots, x_n$ et invariante par $\sigma : (x,t) \in \mathbb{T}^n \times \mathbb{R} \longmapsto (Ax, t+1) \in \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}$ *i.e.* $f(Ax, t+1) = f(x,t)$ pour tout $(x,t) \in \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}$. Si une telle fonction f est *intégrable* (ou L^1), elle admet un développement de Fourier $\displaystyle\sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n} f_{\mathbf{m}}(t) e^{2i\pi\langle \mathbf{m}, x\rangle}$ où les f_m sont ses coefficients de Fourier donnés par les formules intégrales $f_{\mathbf{m}}(t) = \int_{\mathbb{T}^n} f(x,t) e^{-2i\pi\langle \mathbf{m}, x\rangle} dx$. La condition d'invariance sur la fonction f se traduit au niveau des $f_{\mathbf{m}}$ par la relation :

$$\text{(CI)} \qquad f_{\mathbf{m}}(t+1) = f_{B\mathbf{m}}(t)$$

où B est la matrice transposée de A. En particulier $f_{\mathbf{0}}$ est une fonction périodique de période 1 en t. Toute fonction L^1 sur $\mathbb{T}_A^{n+1}$ est donc une fonction $f : (\mathbf{m}, t) \in \mathbb{Z}^n \times \mathbb{R} \longmapsto f_{\mathbf{m}}(t) \in \mathbb{C}$ où les valeurs $f_{\mathbf{m}}(t)$ vérifient la condition (CI). Nous travaillerons de cette façon tout le long de ce papier.

Pour chaque $R \in \mathbb{N}^*$, notons C_R le compact $[-R, R]$. La suite $(C_R)_{R\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et recouvre $\mathbb{R}$. Il est bien connu que, pour tout $(r, s) \in \mathbb{N}^2$, tout $R \in \mathbb{N}^*$ et toute fonction $f \in C^\infty(\mathbb{T}^n \times \mathbb{R})$, les quantités suivantes existent :

$$|f_{\mathbf{m}}|^R_{s,\infty} = \sup_{t\in C_R} \left|\frac{d^s f_{\mathbf{m}}}{dt^s}(t)\right| \quad \text{et} \quad ||f||^R_{r,s} = |f_{\mathbf{0}}|^R_{s,\infty} + \sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^n\setminus\{\mathbf{0}\}} |\mathbf{m}|^r |f_{\mathbf{m}}|^R_{s,\infty}.$$

Alors $|| \ ||^R_{r,s}$ est une semi-norme sur $C^\infty(\mathbb{T}^n \times \mathbb{R})$ et la famille $(|| \ ||^R_{r,s})$ (indexée par r, s et R) y définit la topologie C^∞. Pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, $|| \ ||^R_\ell = \sum_{r+s\leqslant\ell} || \ ||^R_{r,s}$ est une semi-norme sur $C^\infty(\mathbb{T}^n \times \mathbb{R})$.

Sur l'espace $C^\infty(\mathbb{T}^{n+1}_A)$, considéré comme le sous-espace des fonctions de $C^\infty(\mathbb{T}^n \times \mathbb{R})$ vérifiant la condition (CI), il suffit de considérer les normes :

$$(6) \qquad ||f||_{r,s} = |f_{\mathbf{0}}|_{s,\infty} + \sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^n\setminus\{\mathbf{0}\}} |\mathbf{m}|^r |f_{\mathbf{m}}|_{s,\infty} \quad \text{et} \quad || \ ||_\ell = \sum_{r+s\leqslant\ell} || \ ||_{r,s}$$

où $|f_{\mathbf{m}}|_{s,\infty} = \sup_{t\in[0,1]} \left|\frac{d^s f_{\mathbf{m}}}{dt^s}(t)\right|$. Pour chaque $\ell \in \mathbb{N}$, on note W^ℓ le complété de $(C^\infty(\mathbb{T}^{n+1}_A), || \ ||_\ell)$. On a $\bigcap_{\ell\in\mathbb{N}} W^\ell = C^\infty(\mathbb{T}^{n+1}_A)$. Cela signifie qu'une fonction $f : \mathbb{T}^{n+1}_A \longrightarrow \mathbb{C}$ est C^∞ si, et seulement si, pour tout $(r, s) \in \mathbb{N}^2$ on a $\sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^n} |\mathbf{m}|^r |f_{\mathbf{m}}|_{s,\infty} < +\infty$.

La matrice B agit linéairement sur le réseau $\mathbb{Z}^n$. Soit Λ une partie de $\mathbb{Z}^n$ contenant un et un seul représentant de chaque orbite de cette action. L'orbite de $\mathbf{0}$ est réduite à $\{\mathbf{0}\}$. Il est clair qu'on a une partition $\mathbb{Z}^n = \bigcup_{\mathbf{m}\in\Lambda} \{B^j\mathbf{m} : j \in \mathbb{Z}\}$.

Pour tout $\mathbf{m} \in \Lambda$, soit $V_{\mathbf{m}}$ le sous-espace de $C^\infty(\mathbb{T}^{n+1}_A)$ engendré par la famille de fonctions $\{e_{B^j\mathbf{m}} : j \in \mathbb{Z}\}$ *i.e.* toutes les fonctions $f \in C^\infty(\mathbb{T}^{n+1}_A)$ qui s'écrivent $f = \sum_{j\in\mathbb{Z}} f_{B^j\mathbf{m}} e_{B^j\mathbf{m}}$. L'espace $V_{\mathbf{0}}$ est constitué des fonctions qui ne dépendent que de la variable t et périodiques de période 1. Nous avons une décomposition en somme directe $C^\infty(\mathbb{T}^{n+1}_A) = \bigoplus_{\mathbf{m}\in\Lambda} V_{\mathbf{m}}$.

3.4. Formulation du problème du $\overline{\partial}_{\mathcal{F}}$

Dans notre situation précise, nous allons nous intéresser au complexe différentiel de Dolbeault feuilleté pour $p = 0$ *i.e.* $0 \longrightarrow \Omega^{0,0}_{\mathcal{F}}(\mathbb{T}^{n+1}_A) \xrightarrow{\overline{\partial}_{\mathcal{F}}} \Omega^{0,1}_{\mathcal{F}}(\mathbb{T}^{n+1}_A) \longrightarrow 0$ où l'opérateur $\overline{\partial}_{\mathcal{F}}$ est donné de façon exacte par la formule

$$\overline{\partial}_{\mathcal{F}} f = \frac{1}{2}\left[\lambda^t \left(\kappa_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + \kappa_n \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) + i\frac{\partial f}{\partial t}\right] \otimes \overline{\omega}.$$

Le feuilletage $\mathcal{F}$ étant de dimension (complexe) 1, les espaces $H^{0,q}_{\mathcal{F}}(\mathbb{T}^{n+1}_A)$ sont triviaux pour $q \geqslant 2$. D'après la proposition 1.4, l'espace $H^{0,0}_{\mathcal{F}}(\mathbb{T}^{n+1}_A)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$. Le problème se réduit uniquement à la détermination de $H^{0,1}_{\mathcal{F}}(\mathbb{T}^{n+1}_A)$ et de son séparé associé $\overline{H}^{0,1}_{\mathcal{F}}(\mathbb{T}^{n+1}_A)$. Il consiste à se donner $\alpha = g \otimes \overline{\omega} \in \Omega^{0,1}_{\mathcal{F}}(\mathbb{T}^{n+1}_A)$ et à trouver $f \in \Omega^{0,0}_{\mathcal{F}}(\mathbb{T}^{n+1}_A) = C^\infty(\mathbb{T}^{n+1}_A)$ telle que $\overline{\partial}_{\mathcal{F}} f = \alpha$, ce qui revient à résoudre l'équation :

$$\frac{1}{2}\left[\lambda^t \left(\kappa_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + \kappa_n \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) + i\frac{\partial f}{\partial t}\right] = g \tag{7}$$

dans l'espace $C^\infty(\mathbb{T}^{n+1}_A)$.

Comme nous l'avons déjà fait remarquer, les fonctions L^1 sur $\mathbb{T}^{n+1}_A$ peuvent être regardées comme des fonctions $\phi : (\mathbf{m}, t) \in \mathbb{Z}^n \times \mathbb{R} \longmapsto \phi_{\mathbf{m}}(t)$ telles que $\phi_{B\mathbf{m}}(t) = \phi_{\mathbf{m}}(t+1)$ (c'est la condition (CI)). Par exemple la fonction suivante $\Delta(\mathbf{m}, t) = \Delta_{\mathbf{m}}(t) = e^{-\frac{2\pi}{\nu}\langle \mathbf{m}, v\rangle \lambda^t}$ qui s'introduira naturellement par la suite, vérifie la condition (CI).

3.5. La quantité $\Delta(B^j\mathbf{m}, t)$

Son comportement sur l'orbite $\{B^j\mathbf{m} : j \in \mathbb{Z}\}$ d'un élément $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ nous sera essentiel. Explicitons-le. Rappelons que $0 < \lambda < 1$ et que $\langle B^j\mathbf{m}, v\rangle = \langle \mathbf{m}, A^j v\rangle = \langle \mathbf{m}, \lambda^j v\rangle = \lambda^j\langle \mathbf{m}, v\rangle$.

i) <u>Cas $\langle \mathbf{m}, v\rangle > 0$</u>

La quantité $\langle B^j\mathbf{m}, v\rangle$ reste positive pour tout $j \in \mathbb{Z}$. On a ainsi $\lim_{j\to-\infty} \Delta(B^j\mathbf{m}, t) = +\infty$ et $\lim_{j\to+\infty} \Delta(B^j\mathbf{m}, t) = 1$.

ii) <u>Cas $\langle \mathbf{m}, v\rangle < 0$</u>

La quantité $\langle B^j\mathbf{m}, v\rangle$ reste négative pour tout $j \in \mathbb{Z}$. On a ainsi $\lim_{j\to-\infty} \Delta(B^j\mathbf{m}, t) = 0$ et $\lim_{j\to+\infty} \Delta(B^j\mathbf{m}, t) = 1$.

3.6. Les fonctions $\widehat{\mathcal{F}}$-holomorphes sur $(\widehat{M}, \widehat{\mathcal{F}})$

Rappelons que, via sa décomposition en série de Fourier, une fonction C^∞ : $f = \sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^n} f_{\mathbf{m}} e_{\mathbf{m}}$ sur $\widehat{M} = \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}$ est une fonction $f : (\mathbf{m}, t) \in \mathbb{Z}^n \times \mathbb{R} \longmapsto f_{\mathbf{m}}(t) \in \mathbb{C}$ telle que, pour tout $R \in \mathbb{N}^*$ et tout $\ell \in \mathbb{N}$ on ait $||f||_\ell^R < +\infty$ où :

$$|f_{\mathbf{m}}|_{s,\infty}^R = \sup_{t\in C_R} \left| \frac{d^s f_{\mathbf{m}}}{dt^s}(t) \right|$$

et

$$||f||_\ell^R = \sum_{r+s\leqslant\ell} \left(|f_{\mathbf{0}}|_{s,\infty}^R + \sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^n\setminus\{\mathbf{0}\}} |\mathbf{m}|^r |f_{\mathbf{m}}|_{s,\infty}^R \right).$$

On a alors, par continuité de l'opérateur $\overline{\partial}_{\widehat{\mathcal{F}}}$ pour la topologie C^∞ :

$$\overline{\partial}_{\widehat{\mathcal{F}}} f(x,t) = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^n} \left(2i\pi\langle \mathbf{m}, v\rangle \lambda^t f_{\mathbf{m}}(t) + i f'_{\mathbf{m}}(t)\right) e_{\mathbf{m}}(x).$$

Donc f est $\widehat{\mathcal{F}}$-holomorphe si, et seulement si, on a $2i\pi\langle \mathbf{m}, v\rangle\lambda^t f_{\mathbf{m}}(t) + i f'_{\mathbf{m}}(t) = 0$ pour tout $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n$ et tout $t \in \mathbb{R}$. Si $\mathbf{m} = \mathbf{0}$, $f'_{\mathbf{0}}(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et donc $f_{\mathbf{0}}$ est une constante. Si $\mathbf{m} \neq \mathbf{0}$ alors $f_{\mathbf{m}}(t) = C_{\mathbf{m}} e^{-\frac{2\pi}{\nu}\langle \mathbf{m},v\rangle\lambda^t}$ avec $C_{\mathbf{m}}$ constante pour tout $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n$. Nous allons examiner les conditions que doivent satisfaire les constantes $C_{\mathbf{m}}$. Soit $s \in \mathbb{N}$ et posons $\beta_{\mathbf{m}}(t) = e^{-\frac{2\pi}{\nu}\langle \mathbf{m},v\rangle\lambda^t}$. Un calcul facile mais lourd à mener donne $\frac{d^s\beta_{\mathbf{m}}}{dt^s}(t) = P_s(\langle \mathbf{m}, v\rangle, \lambda^t) e^{-\frac{2\pi}{\nu}\langle \mathbf{m},v\rangle\lambda^t}$ où P_s est un polynôme de degré $2s$ s'écrivant $P_s(U,V) = \sum_{d,\ell=0}^{s} a_{d\ell} U^d V^\ell$ où $a_{d\ell}$ sont des constantes réelles. La condition qu'on doit avoir est que, pour tous $R, d, \ell \in \mathbb{N}$ on ait $\sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^n} |C_{\mathbf{m}}| \cdot |\langle \mathbf{m}, v\rangle|^d \rho_{\mathbf{m}}(\ell, R) < +\infty$ où :

$$\begin{aligned} \rho_{\mathbf{m}}(\ell, R) &= \sup_{t\in C_R} \left\{ \lambda^{\ell t} e^{-\frac{2\pi}{\nu}\langle \mathbf{m},v\rangle\lambda^t} \right\} \\ &= \begin{cases} \lambda^{-\ell R} e^{-\frac{2\pi}{\nu}\langle \mathbf{m},v\rangle\lambda^R} & \text{si } \langle \mathbf{m}, v\rangle \text{ est négatif} \\ \lambda^{-\ell R} e^{-\frac{2\pi}{\nu}\langle \mathbf{m},v\rangle\lambda^{-R}} & \text{si } \langle \mathbf{m}, v\rangle \text{ est positif.} \end{cases} \end{aligned}$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a $|\langle \mathbf{m}, v\rangle| \leqslant |\mathbf{m}| \cdot |v| = |\mathbf{m}|$ (v étant de norme 1) ; on doit donc avoir finalement $\sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^n} |C_{\mathbf{m}}| \cdot |\mathbf{m}|^d \rho_{\mathbf{m}}(\ell, R) < +\infty$.

Ainsi :

$$\mathcal{H}_{\widehat{\mathcal{F}}}(\widehat{M}) = \left\{ f(x,t) = \sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^n} f_{\mathbf{m}} e^{-\frac{2\pi}{\nu}\langle \mathbf{m},v\rangle\lambda^t} e_{\mathbf{m}}(x) \right\}$$

où les $f_{\mathbf{m}}$ sont des constantes complexes telles que $\displaystyle\sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^n} |f_{\mathbf{m}}|\cdot|\mathbf{m}|^d \rho_{\mathbf{m}}(\ell, R) < +\infty$ pour tous $\ell, d \in \mathbb{N}$ et tout $R \in \mathbb{N}^*$.

3.7. Les 1-formes ($\widehat{\mathcal{F}}$ ou $\mathcal{F}$)-holomorphes

Rappelons qu'on a deux formes ω et $\overline{\omega}$ respectivement de type $(1,0)$ et de type $(0,1)$ et qui forment un coparallélisme sur les feuilles de $\mathcal{F}$. Elles sont données comme suit :

$$\omega = \lambda^{-t}(\kappa_1 dx_1 + \cdots + \kappa_n dx_n) + idt$$

et

$$\overline{\omega} = \lambda^{-t}(\kappa_1 dx_1 + \cdots + \kappa_n dx_n) - idt.$$

Un calcul immédiat donne $\overline{\partial}_{\mathcal{F}}\omega = \frac{\nu}{4}\omega \wedge \overline{\omega}$.

• **Sur** $(\widehat{M}, \widehat{\mathcal{F}})$

Une 1-forme $\widehat{\mathcal{F}}$-holomorphe sur $\widehat{M}$ s'écrit $\alpha = h\omega$ avec $\overline{\partial}_{\widehat{\mathcal{F}}}\alpha = 0$. Mais $\overline{\partial}_{\widehat{\mathcal{F}}}\alpha$ a pour expression $\overline{\partial}_{\widehat{\mathcal{F}}}(h\omega) = \overline{\partial}_{\widehat{\mathcal{F}}}h \wedge \omega + h\overline{\partial}_{\widehat{\mathcal{F}}}\omega$, c'est-à-dire $\overline{\partial}_{\widehat{\mathcal{F}}}\alpha = \left(-\overline{\partial}^0_{\widehat{\mathcal{F}}}h + \frac{\nu}{4}h\right)\omega \wedge \overline{\omega}$ où $\overline{\partial}^0_{\widehat{\mathcal{F}}}$ est l'opérateur sur l'espace $C^\infty(\mathbb{T}^n \times \mathbb{R})$ défini par :

$$\overline{\partial}^0_{\widehat{\mathcal{F}}}h = \frac{1}{2}\left[\lambda^t\left(\kappa_1\frac{\partial h}{\partial x_1} + \cdots + \kappa_n\frac{\partial h}{\partial x_n}\right) + i\frac{\partial h}{\partial t}\right].$$

La 1-forme α est donc $\widehat{\mathcal{F}}$-holomorphe si, et seulement si, la fonction h vérifie $\overline{\partial}^0_{\widehat{\mathcal{F}}}h = \frac{\nu}{4}h$. L'équation différentielle associée est donc :

$$\frac{1}{2}\left[\lambda^t\left(\kappa_1\frac{\partial h}{\partial x_1} + \cdots + \kappa_n\frac{\partial h}{\partial x_n}\right) + i\frac{\partial h}{\partial t}\right] = \frac{\nu}{4}h.$$

Cette équation est équivalente au système :

$$\left(2\pi\langle\mathbf{m}, v\rangle\lambda^t + \frac{i\nu}{2}\right)h_{\mathbf{m}}(t) + h'_{\mathbf{m}}(t) = 0 \quad \text{pour tout } \mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n.$$

Pour chaque $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n$, on a une solution $h_{\mathbf{m}}(t) = h_{\mathbf{m}}e^{-\frac{2\pi}{\nu}\langle\mathbf{m},v\rangle\lambda^t - \frac{i\nu}{2}t}$ avec $h_{\mathbf{m}}$ constante pour tout $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n$. Ainsi l'espace $\mathcal{H}^1_{\widehat{\mathcal{F}}}(\widehat{M})$ des 1-formes $\widehat{\mathcal{F}}$-holomorphes s'écrit :

$$\mathcal{H}^1_{\widehat{\mathcal{F}}}(\widehat{M}) = \left\{h(x,t) = \sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^n} h_{\mathbf{m}}e^{-\frac{2\pi}{\nu}\langle\mathbf{m},v\rangle\lambda^t - \frac{i\nu}{2}t}e_{\mathbf{m}}(x)\right\}$$

où les $h_{\mathbf{m}}$ sont des constantes complexes. Comme pour le cas des fonctions $\widehat{\mathcal{F}}$-holomorphes les constantes $f_{\mathbf{m}}$ sont assujeties à une condition de convergence $\sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^n\setminus\{\mathbf{0}\}} |h_{\mathbf{m}}|\cdot|\mathbf{m}|^d\rho_{\mathbf{m}}(\ell,R)<+\infty$ pour tous $\ell,d\in\mathbb{N}$ et tout $R\in\mathbb{N}^*$. Ici :

$$\rho_{\mathbf{m}}(\ell,R)=\sup_{t\in C_R}\left|\lambda^{\ell t}e^{-\frac{2\pi}{\nu}\langle\mathbf{m},v\rangle\lambda^t-\frac{i\nu}{2}t}\right|=\sup_{t\in C_R}\left\{\lambda^{\ell t}e^{-\frac{2\pi}{\nu}\langle\mathbf{m},v\rangle\lambda^t}\right\}.$$

• **Sur** $(\mathbb{T}_A^{n+1},\mathcal{F})$

Une 1-forme $\mathcal{F}$-holomorphe sur $(\mathbb{T}_A^{n+1},\mathcal{F})$ est une 1-forme $\widehat{\mathcal{F}}$-holomorphe $\alpha=h\omega$ sur $(\widehat{M},\widehat{\mathcal{F}})$ invariante par l'automorphisme $\sigma:(x,t)\in\mathbb{T}^n\times\mathbb{R}\longmapsto(Ax,t+1)\in\mathbb{T}^n\times\mathbb{R}$ (du feuilletage $\widehat{\mathcal{F}}$). Mais comme ω est déjà σ-invariante, h doit satisfaire la condition $h\circ\sigma=h$. Si :

$$h(x,t)=\sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^n}h_{\mathbf{m}}e^{-\frac{2\pi}{\nu}\langle\mathbf{m},v\rangle\lambda^t-\frac{i\nu}{2}t}e_{\mathbf{m}}(x),$$

cette relation impose aux coefficients $h_{\mathbf{m}}(t)=h_{\mathbf{m}}e^{-\frac{2\pi}{\nu}\langle\mathbf{m},v\rangle\lambda^t-\frac{i\nu}{2}t}$ de vérifier la condition (CI) *i.e.* $h_{\mathbf{m}}(t+1)=h_{B\mathbf{m}}(t)$ pour tout $t\in\mathbb{R}$ et tout $\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^n$. Un calcul simple montre alors que les constantes $h_{\mathbf{m}}$ doivent satisfaire $h_{B\mathbf{m}}=e^{-\frac{i\nu}{2}}h_{\mathbf{m}}$ pour tout $\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^n$. On a forcément $h_{\mathbf{0}}=0$. Si $\mathbf{m}\neq\mathbf{0}$, on a $|h_{B^j\mathbf{m}}|=|h_{\mathbf{m}}|$ pour tout $j\in\mathbb{Z}$. Si $h_{\mathbf{m}}\neq 0$, la condition de convergence est alors mise en défaut. Il n'y a donc aucune 1-forme $\mathcal{F}$-holomorphe non nulle sur $(\mathbb{T}_A^{n+1},\mathcal{F})$ *i.e.* l'espace vectoriel $H_{\mathcal{F}}^{1,0}(\mathbb{T}_A^{n+1})$ est nul. □

Rappelons qu'on a une partition $\mathbb{Z}^n=\{\mathbf{0}\}\cup\bigcup_{\mathbf{m}\in\Lambda_*}\{B^j\mathbf{m}:j\in\mathbb{Z}\}$ où $\Lambda_*=\Lambda\setminus\{\mathbf{0}\}$ qui est la partie de $\mathbb{Z}^n\setminus\{\mathbf{0}\}$ constituée par un et un seul élément de chaque orbite de B agissant sur $\mathbb{Z}^n\setminus\{\mathbf{0}\}$. Pour tout $\mathbf{m}\in\Lambda$, on note $H_{\mathbf{m}}$ le sous-espace de $\mathcal{H}_{\widehat{\mathcal{F}}}(\widehat{M})$:

$$H_{\mathbf{m}}=\left\{h(x,t)=\sum_{j\in\mathbb{Z}}h_{B^j\mathbf{m}}e^{-\frac{2\pi}{\nu}\langle B^j\mathbf{m},v\rangle\lambda^t}e_{B^j\mathbf{m}}(x)\right\}.$$

Le sous-espace $H_{\mathbf{0}}$ est réduit aux constantes, donc isomorphe à $\mathbb{C}$. Chaque $H_{\mathbf{m}}$ est fermé et on a une décomposition en somme directe :

$$\mathcal{H}_{\widehat{\mathcal{F}}}(\widehat{M})=H_{\mathbf{0}}\oplus\bigoplus_{\mathbf{m}\in\Lambda_*}H_{\mathbf{m}}.$$

L'opérateur $\delta:\mathcal{H}_{\widehat{\mathcal{F}}}(\widehat{M})\longrightarrow\mathcal{H}_{\widehat{\mathcal{F}}}(\widehat{M})$ défini par $\delta h=h-h\circ\sigma^{-1}$ respecte cette décomposition et son noyau est exactement $H_{\mathbf{0}}$. Sa restriction à chaque $H_{\mathbf{m}}$ est une injection $H_{\mathbf{m}}\longrightarrow H_{\mathbf{m}}$. Enfin pour tout $\mathbf{m}\in\Lambda$, soit $H_{\mathbf{m}}^-$ l'espace des fonctions $h=\sum_{j\in\mathbb{Z}}h_{B^j\mathbf{m}}e^{-\frac{2\pi}{\nu}\langle B^j\mathbf{m}|v\rangle\lambda^t}e_{B^j\mathbf{m}}(x)$ dans $H_{\mathbf{m}}$ telles que $h_{B^j\mathbf{m}}=0$ pour $j<j_0$ ou $j_0\in\mathbb{Z}$ ne dépend que de la fonction h.

Pour $\mathbf{m} \in \Lambda_+ \cup \{\mathbf{0}\}$ (où $\Lambda_+ = \{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n : \langle \mathbf{m}, v\rangle > 0\}$), on définit les applications linéaires $\mathcal{L}_{\mathbf{m}} : \mathcal{H}_{\widehat{\mathcal{F}}}(\widehat{M}) \longrightarrow \mathbb{C}$ comme suit. Pour :

$$g(x,t) = \sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^n} g_{\mathbf{m}} e^{-\frac{2\pi}{\nu}\langle \mathbf{m}, v\rangle \lambda^t} e_{\mathbf{m}}(x)$$

on pose :

$$\mathcal{L}_{\mathbf{m}}(g) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} g_{B^j\mathbf{m}} \quad \text{et} \quad \mathcal{L}_{\mathbf{0}}(g) = \int_{\mathbb{T}^n}\int_0^1 g(x,t)dxdt = g_{\mathbf{0}}.$$

On vérifie facilement que $\mathcal{L}_{\mathbf{m}}$ et $\mathcal{L}_{\mathbf{0}}$ ainsi définies sont des fonctionnelles $\widehat{\mathcal{F}}$-analytiques non nulles et σ-invariantes sur $(\widehat{M}, \widehat{\mathcal{F}})$. On note $\mathcal{N}_{\mathbf{m}}$ l'intersection de $H_{\mathbf{m}}$ avec le noyau de $\mathcal{L}_{\mathbf{m}}$.

Théorème 3.1. — *i) On a* $H^{0,1}_{\mathcal{F}}(\mathbb{T}^{n+1}_A) = H^1(\Sigma, \mathcal{H}_{\widehat{\mathcal{F}}}(\widehat{M}))$.

ii) Si $g \in H_{\mathbf{m}}$ *avec* $\mathbf{m}$ *dans* $\Lambda_+ \cup \{\mathbf{0}\}$, *alors l'équation cohomologique* $\widehat{\mathcal{F}}$*-analytique* $g = h - h\circ\sigma^{-1}$ *a une solution* $h \in H_{\mathbf{m}}$ *si, et seulement si,* $g \in \mathcal{N}_{\mathbf{m}}$ *; ce qui implique que* $H^1(\Sigma, H_{\mathbf{m}})$ *est isomorphe à* $\mathbb{C}$. *Ainsi l'espace vectoriel* $H^{0,1}_{\mathcal{F}}(\mathbb{T}^{n+1}_A)$ *est de dimension infinie.*

iii) Pour tout $g \in H^-_{\mathbf{m}}$ *avec* $\mathbf{m} \in \Lambda_- = \{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n : \langle \mathbf{m}, v\rangle < 0\}$, *l'équation cohomologique* $g = h - h\circ\sigma^{-1}$ *a une solution unique* $h \in H_{\mathbf{m}}$.

iv) L'espace des fonctionnelles $\widehat{\mathcal{F}}$*-analytiques* σ*-invariantes sur* $(\widehat{M}, \widehat{\mathcal{F}})$ *est engendré par les fonctionnelles* $\mathcal{L}_{\mathbf{m}}$ *avec* $\mathbf{m} \in \Lambda_+ \cup \{\mathbf{0}\}$.

Démonstration. — i) On a une extension de groupes :

$$0 \longrightarrow \Gamma_0 = \mathbb{Z}^n \longrightarrow \Gamma \longrightarrow \Sigma = \mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

Les groupes Γ et Γ_0 agissent sur $H^{0,*}_{\widetilde{\mathcal{F}}}(G)$ qui se réduit à l'espace $H^{0,0}_{\widetilde{\mathcal{F}}}(G) = \mathcal{H}_{\widetilde{\mathcal{F}}}(G)$ d'après la sous-section 3.2 ; Σ agit sur $H^*(\Gamma_0, \mathcal{H}_{\widetilde{\mathcal{F}}}(G))$. La suite spectrale de Hochschild-Lyndon-Serre associée à l'extension ci-dessus a pour terme :

$$E_2^{pq} = H^p(\Sigma, H^q(\Gamma_0, \mathcal{H}_{\widetilde{\mathcal{F}}}(G)))$$

et converge vers $H^*(\Gamma, \mathcal{H}_{\widetilde{\mathcal{F}}}(G)) = H^{0,*}_{\mathcal{F}}(\mathbb{T}^{n+1}_A)$. Il faut donc calculer tous les espaces et morphismes qui interviennent dans cette suite spectrale. On peut déjà remarquer que, comme $\Sigma = \mathbb{Z}$, la différentielle $d_2 : E_2^{pq} \longrightarrow E_2^{p+2,q-1}$ est nulle et donc la suite spectrale converge au terme E_2 ; ce qui donne :

$$\begin{aligned} H^{0,1}_{\mathcal{F}}(\mathbb{T}^{n+1}_A) &= E_2^{01} \oplus E_2^{10} \\ &= H^0(\Sigma, H^1(\Gamma_0, \mathcal{H}_{\widetilde{\mathcal{F}}}(G))) \oplus H^1(\Sigma, H^0(\Gamma_0, \mathcal{H}_{\widetilde{\mathcal{F}}}(G))). \end{aligned}$$

Mais :

$$H^1(\Sigma, H^0(\Gamma_0, \mathcal{H}_{\widetilde{\mathcal{F}}}(G))) = H^1(\Sigma, \mathcal{H}_{\widehat{\mathcal{F}}}(\widehat{M})).$$

Nous allons montrer que l'espace vectoriel $H^1(\Gamma_0, \mathcal{H}_{\widetilde{\mathcal{F}}}(G))$ est trivial.

• **Le calcul de** $H^1(\Gamma_0, \mathcal{H}_{\widetilde{\mathcal{F}}}(G))$

L'espace $\mathcal{H}_{\widetilde{\mathcal{F}}}(G)$ est un Γ_0-module. Comme les espaces vectoriels $H^{0,*}_{\widetilde{\mathcal{F}}}(G)$ sont triviaux pour $* \geqslant 1$, la suite spectrale (D_r) associée au revêtement $\Gamma_0 \longrightarrow G \longrightarrow \widehat{M}$ dégénère au terme D_2 et on a l'égalité :

$$D_2^{*,0} = H^{0,*}_{\widehat{\mathcal{F}}}(\widehat{M}) = H^*(\Gamma_0, \mathcal{H}_{\widetilde{\mathcal{F}}}(G)).$$

On peut écrire $\Gamma_0 = \Gamma_0^1 \oplus \cdots \oplus \Gamma_0^n$ où, pour tout $i = 1, \cdots, n$, Γ_0^i est engendré par l'automorphisme τ_i ; on pose alors $\overline{\Gamma}_0^i = \Gamma_0^i \oplus \cdots \oplus \Gamma_0^n$. Bien sûr $\overline{\Gamma}_0^1 = \Gamma_0$ et $\overline{\Gamma}_0^n = \Gamma_0^n$. On a ainsi $\overline{\Gamma}_0^i = \Gamma_0^i \oplus \overline{\Gamma}_0^{i+1}$ pour tout $i = 1, \cdots, n-1$. Chacun des Γ_0^i est une copie de $\mathbb{Z}$ et tous les groupes Γ_0^i et $\overline{\Gamma}_0^i$ (avec $i = 1, \cdots, n$) agissent sur l'espace vectoriel $\mathcal{H}_{\widetilde{\mathcal{F}}}(G)$. La formule de Künneth en cohomologie des groupes discrets donne alors, en l'appliquant à la somme directe $\Gamma_0 = \Gamma_0^1 \oplus \overline{\Gamma}_0^2$:

$$\begin{aligned} H^1(\Gamma_0, \mathcal{H}_{\widetilde{\mathcal{F}}}(G)) = {} & \underbrace{H^0(\overline{\Gamma}_0^2, \mathcal{H}_{\widetilde{\mathcal{F}}}(G)) \otimes H^1(\Gamma_0^1, \mathcal{H}_{\widetilde{\mathcal{F}}}(G))} \oplus \\ & \underbrace{H^1(\overline{\Gamma}_0^2, \mathcal{H}_{\widetilde{\mathcal{F}}}(G)) \otimes H^0(\Gamma_0^1, \mathcal{H}_{\widetilde{\mathcal{F}}}(G))}. \end{aligned}$$

Mais :

$$H^1(\Gamma_0^1, \mathcal{H}_{\widetilde{\mathcal{F}}}(G)) = H^{01}_{\widehat{\mathcal{F}}_1}(\widehat{M}_1) = 0$$

et donc :

$$H^1(\Gamma_0, \mathcal{H}_{\widetilde{\mathcal{F}}}(G)) = H^1(\overline{\Gamma}_0^2, \mathcal{H}_{\widetilde{\mathcal{F}}}(G)) \otimes H^0(\Gamma_0^1, \mathcal{H}_{\widetilde{\mathcal{F}}}(G)).$$

Le même raisonnement appliqué à la somme directe $\overline{\Gamma}_0^2 = \Gamma_0^2 \oplus \overline{\Gamma}_0^3$ donne :

$$H^1(\Gamma_0, \mathcal{H}_{\widetilde{\mathcal{F}}}(G)) = H^1(\overline{\Gamma}_0^3, \mathcal{H}_{\widetilde{\mathcal{F}}}(G)) \otimes H^0(\Gamma_0^2, \mathcal{H}_{\widetilde{\mathcal{F}}}(G)) \otimes H^0(\Gamma_0^1, \mathcal{H}_{\widetilde{\mathcal{F}}}(G)).$$

En répétant ce processus, on arrive finalement à la formule :

$$H^1(\Gamma_0, \mathcal{H}_{\widetilde{\mathcal{F}}}(G)) = H^1(\overline{\Gamma}_0^n, \mathcal{H}_{\widetilde{\mathcal{F}}}(G)) \otimes \left(\bigotimes_{j=1}^{n-1} H^0(\Gamma_0^j, \mathcal{H}_{\widetilde{\mathcal{F}}}(G)) \right).$$

Mais :

$$H^1(\overline{\Gamma}_0^n, \mathcal{H}_{\widetilde{\mathcal{F}}}(G)) = H^1(\Gamma_0^n, \mathcal{H}_{\widetilde{\mathcal{F}}}(G)) = H^{01}_{\widehat{\mathcal{F}}}(\widehat{M}_n) = 0$$

et par suite $H^1(\Gamma_0, \mathcal{H}_{\widetilde{\mathcal{F}}}(G)) = 0$. Ce qui donne

$$H^{01}_{\mathcal{F}}(\mathbb{T}_A^{n+1}) = H^1(\Sigma, \mathcal{H}_{\widehat{\mathcal{F}}}(\widehat{M})).$$

• L'action du groupe Σ sur l'espace $H_{\mathbf{m}}$ s'écrit $\sigma : h \in H_{\mathbf{m}} \longmapsto h \circ \sigma^{-1} \in H_{\mathbf{m}}$. On note $\mathcal{C}_{\mathbf{m}}$ le sous-espace de $H_{\mathbf{m}}$ engendré par les éléments de la forme

$h - h\circ\sigma^{-1}$ avec h parcourant $H_{\mathbf{m}}$. On sait alors que $H^1(\Sigma, H_{\mathbf{m}}) = H_{\mathbf{m}}/\mathcal{C}_{\mathbf{m}}$. Le problème se ramène donc à résoudre l'équation cohomologique :

Étant donnée $g \in H_{\mathbf{m}}$, existe-t-il $h \in H_{\mathbf{m}}$ telle que $h - h\circ\sigma^{-1} = g$?

Une condition nécessaire pour que cette équation ait une solution est que $\langle \mu, g\rangle = 0$ pour toute fonctionnelle σ-invariante μ sur $H_{\mathbf{m}}$. Écrivons h et g sous forme de séries :

$$h(x,t) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} h_{B^j\mathbf{m}} e^{-\frac{2\pi}{\nu}\langle B^j\mathbf{m}, v\rangle\lambda^t} e_{B^j\mathbf{m}}(x)$$

et

$$g(x,t) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} g_{B^j\mathbf{m}} e^{-\frac{2\pi}{\nu}\langle B^j\mathbf{m}, v\rangle\lambda^t} e_{B^j\mathbf{m}}(x)$$

où les $h_{\mathbf{m}}$ et $g_{\mathbf{m}}$ sont des constantes complexes devant satisfaire la condition de convergence :

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} |h_{B^j\mathbf{m}}| \cdot |B^j\mathbf{m}|^d \rho_{B^j\mathbf{m}}(\ell, R) < +\infty$$

et

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} |g_{B^j\mathbf{m}}| \cdot |B^j\mathbf{m}|^d \rho_{B^j\mathbf{m}}(\ell, R) < +\infty$$

pour tous $\ell, d \in \mathbb{N}$ et tout $R \in \mathbb{R}^*$. On sait que les $g_{\mathbf{m}}$ satisfont cette condition de convergence (c'est la donnée du problème) et toute solution formelle h qu'on trouvera doit aussi satisfaire cette condition pour être une vraie solution de l'équation cohomologique susmentionnée. Cette équation est équivalente au système :

$$h_{\mathbf{p}} - h_{B\mathbf{p}} = g_{\mathbf{p}} \quad \text{pour } \mathbf{p} \in \{B^j\mathbf{m} : j \in \mathbb{Z}\}. \tag{8}$$

Si $\mathbf{m} = \mathbf{0}$, $g_{\mathbf{0}} = 0$ nécessairement ; ceci n'est rien d'autre que la condition $\mathcal{L}_{\mathbf{0}}(g) = 0$. Ce qui donne $H^1(\Sigma, H_{\mathbf{0}}) = \ker\{\delta : H_{\mathbf{0}} \longrightarrow H_{\mathbf{0}}\} = \mathbb{C}$.

Supposons $\mathbf{m} \neq \mathbf{0}$. On a deux solutions formelles :

$$h_{\mathbf{p}} = \sum_{j=0}^{\infty} g_{B^j\mathbf{p}} \quad \text{et} \quad h_{\mathbf{p}} = -\sum_{j=1}^{\infty} g_{B^{-j}\mathbf{p}}.$$

ii) Comme δ est injectif, on doit avoir $\sum_{j\in\mathbb{Z}} g_{B^j\mathbf{p}} = 0$ *i.e.* g doit vérifier $\mathcal{L}_{\mathbf{m}}(g) = 0$ c'est-à-dire g doit être un élément de l'espace $\mathcal{N}_{\mathbf{m}}$. Cette condition est donc nécessaire et nous allons montrer qu'elle est suffisante.

• Pour ce faire, nous aurons besoin de choisir l'ensemble $\Lambda \subset \mathbb{Z}^n$ bien adapté à notre problème. Il est donné par le :

LEMME [2]. — *On peut choisir l'ensemble* Λ *de telle sorte que pour* $\mathbf{m} \in \Lambda \setminus \{\mathbf{0}\}$, *les suites* $(|B^j\mathbf{m}|)$ *et* $(|B^{-j}\mathbf{m}|)$ *(indexées par* $j \geqslant 0$*) soient strictement croissantes et que, pour tout* $j \in \mathbb{Z}$, *on ait :*

$$|B^j\mathbf{m}|^2 \geqslant (|j|+1). \tag{9}$$

• Pour démontrer que les $h_{\mathbf{p}} = \sum_{j=0}^{\infty} g_{B^j\mathbf{p}}$ ou $h_{\mathbf{p}} = -\sum_{j=-1}^{-\infty} g_{B^j\mathbf{p}}$ répondent à ce que nous cherchons, il reste à vérifier la convergence de la série $\sum_{j\in\mathbb{Z}} |h_{B^j\mathbf{m}}| \cdot |B^j\mathbf{m}|^d \rho_{B^j\mathbf{m}}(\ell, R)$ pour tout $R \in \mathbb{N}^*$ et tous $\ell, d \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} S &= \sum_{j\in\mathbb{Z}} |B^j\mathbf{m}|^d \rho_{B^j\mathbf{m}}(\ell,R)|h_{B^j\mathbf{m}}| \\ &= \sum_{j\geqslant 0} |B^j\mathbf{m}|^d \rho_{B^j\mathbf{m}}(\ell,R)|h_{B^j\mathbf{m}}| + \sum_{j<0} |B^j\mathbf{m}|^d \rho_{B^j\mathbf{m}}(\ell,R)|h_{B^j\mathbf{m}}|. \end{aligned}$$

Posons

$$S_+ = \sum_{j\geqslant 0} |B^j\mathbf{m}|^d \rho_{B^j\mathbf{m}}(\ell,R)|h_{B^j\mathbf{m}}|$$

et

$$S_- = \sum_{j<0} |B^j\mathbf{m}|^d \rho_{B^j\mathbf{m}}(\ell,R)|h_{B^j\mathbf{m}}|.$$

On a :

$$S_+ \leqslant \sum_{j\geqslant 0} \left(\sum_{k=0}^{j} |B^k\mathbf{m}|^d \rho_{B^k\mathbf{m}}(\ell,R) \right) |g_{B^j\mathbf{m}}|.$$

Rappelons que $|\mathbf{m}|^d \leqslant |B\mathbf{m}|^d \leqslant \cdots \leqslant |B^{j-1}\mathbf{m}|^d \leqslant |B^j\mathbf{m}|^d$ et que $|B^j\mathbf{m}|^2 \geqslant j+1$. D'autre part :

$$\begin{aligned} \rho_{B^k\mathbf{m}}(\ell,R) &= \sup_{t\in C_R} \left| \lambda^\ell e^{-\frac{2\pi}{\nu}\langle B^k\mathbf{m}, v\rangle \lambda^t} \right| \\ &= \lambda^\ell e^{-\frac{2\pi}{\nu}\langle B^k\mathbf{m}, v\rangle \lambda^{-R}} \\ &= \lambda^\ell e^{-\frac{2\pi}{\nu}\lambda^k\langle \mathbf{m}, v\rangle \lambda^{-R}} \end{aligned}$$

et donc $\rho_{\mathbf{m}}(\ell,R) \geqslant \rho_{B\mathbf{m}}(\ell,R) \geqslant \cdots \geqslant \rho_{B^j\mathbf{m}}(\ell,R)$. On obtient donc :

$$\begin{aligned} S_+ &\leqslant \rho_{\mathbf{m}}(\ell,R) \sum_{j\geqslant 0} (j+1)|B^j\mathbf{m}|^d \cdot |g_{B^j\mathbf{m}}| \\ &\leqslant \rho_{\mathbf{m}}(\ell,R) \sum_{j\geqslant 0} |B^j\mathbf{m}|^{d+2} \cdot |g_{B^j\mathbf{p}}| \quad \text{(par l'inégalité (9))} \\ &< +\infty. \end{aligned}$$

La dernière inégalité vient du fait que la donnée g est dans $\mathcal{H}_{\widehat{\mathcal{F}}}(\widehat{M})$. Nous avons donc montré que la série S_+ converge.

Pour démontrer la convergence de la série

$$S_- = \sum_{j<0} |B^j\mathbf{m}|^d \rho_{B^j\mathbf{m}}(\ell,R)|h_{B^j\mathbf{m}}|,$$

on remplace cette fois-ci le terme $h_{B^j\mathbf{m}}$ par l'expression

$$h_{B^j\mathbf{m}} = -\sum_{k=-1}^{-\infty} g_{B^{j+k}\mathbf{m}}$$

et on procède exactement par le même type de majorations que pour la série S_+.

On vient donc de montrer que l'image de l'opérateur $\delta : h \in H_{\mathbf{m}} \longrightarrow (h - h\circ\sigma) \in H_{\mathbf{m}}$ est égale au noyau de la fonctionnelle $\mathcal{L}_{\mathbf{m}} : H_{\mathbf{m}} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie précédemment. On en déduit que l'espace $H^1(\Sigma, H_{\mathbf{m}})$ est isomorphe à $\mathbb{C}$ (car la fonctionnelle $\mathcal{L}_{\mathbf{m}}$ est non nulle). Comme l'inclusion naturelle $H_{\mathbf{m}} \hookrightarrow \mathcal{H}_{\widehat{\mathcal{F}}}(\widehat{M})$ induit une injection de $H^1(\Sigma, H_{\mathbf{m}})$ dans $H^1(\Sigma, \mathcal{H}_{\widehat{\mathcal{F}}}(\widehat{M})) = H^{0,1}_{\mathcal{F}}(\mathbb{T}^{n+1}_A)$, l'espace $H^{0,1}_{\mathcal{F}}(\mathbb{T}^{n+1}_A)$ « contient » tous les espaces $H^1(\Sigma, H_{\mathbf{m}})$ (avec $\mathbf{m} \in \Lambda_+$) qui sont transverses l'un à l'autre ; il est donc de dimension infinie.

iii) Soit g une fonction dans $H^-_{\mathbf{m}}$; il existe $j_0 \in \mathbb{Z}$ tel que g soit de la forme :

$$g(x,t) = \sum_{j\geqslant j_0} g_{B^j\mathbf{m}} e^{-\frac{2\pi}{\nu}\langle B^j\mathbf{m}, v\rangle\lambda^t} e_{B^j\mathbf{m}}(x).$$

Les coefficients h_{B^jm} de la solution $h = \sum_{j\in\mathbb{Z}} h_{B^j\mathbf{m}} e^{-\frac{2\pi}{\nu}\langle B^j\mathbf{m}, v\rangle\lambda^t} e_{\mathbf{m}}(x)$ dans $H_{\mathbf{m}}$ de l'équation cohomologique $h - h\circ\sigma^{-1} = g$ sont donnés par la formule $h_{B^j\mathbf{m}} = \sum_{k\in\mathbb{N}} g_{B^{j+k}\mathbf{m}}$. La quantité $-\sum_{k<0} g_{B^{j+k}\mathbf{m}}$ ne convient plus car la série en question n'est plus toujours convergente (dû au comportement pour $j \to -\infty$ de la quantité $\Delta(B^j\mathbf{m}, t)$ qui n'oblige plus les coefficients $g_{B^j\mathbf{m}}$ à avoir la décroissance qu'il faut). Comme ce qu'on a fait au point ii), on doit montrer que cette solution formelle est en fait une vraie solution *i.e.* on doit établir la convergence de la série :

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} |h_{B^j\mathbf{m}}| \cdot |B^j\mathbf{m}|^d \rho_{B^j\mathbf{m}}(\ell,R)$$

pour tout $R \in \mathbb{N}^*$ et tous $\ell, d \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned}S &= \sum_{j\in\mathbb{Z}} |B^j\mathbf{m}|^d \rho_{B^j\mathbf{m}}(\ell,R)|h_{B^j\mathbf{m}}| \\ &= \sum_{j\geqslant 0} |B^j\mathbf{m}|^d \rho_{B^j\mathbf{m}}(\ell,R)|h_{B^j\mathbf{m}}| + \sum_{j<0} |B^j\mathbf{m}|^d \rho_{B^j\mathbf{m}}(\ell,R)|h_{B^j\mathbf{m}}|.\end{aligned}$$

Posons

$$S_+ = \sum_{j\geqslant 0} |B^j\mathbf{m}|^d \rho_{B^j\mathbf{m}}(\ell,R)|h_{B^j\mathbf{m}}|$$

et

$$S_- = \sum_{j<0} |B^j\mathbf{m}|^d \rho_{B^j\mathbf{m}}(\ell,R)|h_{B^j\mathbf{m}}|.$$

On a :

$$\begin{aligned}S_+ &= \sum_{j\geqslant 0} |B^j\mathbf{m}|^d \rho_{B^j\mathbf{m}}(\ell,R)\left|\sum_{k=0}^{\infty} g_{B^{(j+k)}\mathbf{m}}\right| \\ &\leqslant \sum_{j\geqslant 0}\left(\sum_{k=0}^{j} |B^k\mathbf{m}|^d \rho_{B^k\mathbf{m}}(\ell,R)\right)|g_{B^j\mathbf{m}}| \\ &\leqslant \sum_{j\geqslant 0}\left(\sum_{k=0}^{j} |B^k\mathbf{m}|^d\right)\rho_{B^j\mathbf{m}}(\ell,R)|g_{B^j\mathbf{m}}| \\ &\leqslant \sum_{j\geqslant 0}(j+1)|B^j\mathbf{m}|^d \rho_{B^j\mathbf{m}}(\ell,R)|g_{B^j\mathbf{m}}| \\ &\leqslant \sum_{j\geqslant 0} |B^j\mathbf{m}|^{d+2} \rho_{B^j\mathbf{m}}(\ell,R)|g_{B^j\mathbf{m}}| \\ &< +\infty.\end{aligned}$$

Occupons-nous maintenant de la somme S_-. On supposera, pour la commodité de l'écriture, que l'indice j_0 est strictement négatif (ceci ne fait perdre aucune généralité). On a alors :

$$\begin{aligned}S_- &= \sum_{j<0} |B^j\mathbf{m}|^d \rho_{B^j\mathbf{m}}(\ell,R)\left|\sum_{k=0}^{\infty} g_{B^{(j+k)}\mathbf{m}}\right| \\ &\leqslant \sum_{j_0\leqslant k\leqslant -1}\left(\sum_{j\leqslant k} |B^j\mathbf{m}|^d \rho_{B^j\mathbf{m}}(\ell,R)\right)|g_{B^k\mathbf{m}}| \\ &\qquad + \left(\sum_{j\leqslant 0} |B^j\mathbf{m}|^d \rho_{B^j\mathbf{m}}(\ell,R)\right)\left(\sum_{k\geqslant 0} |g_{B^k\mathbf{m}}|\right).\end{aligned}$$

Pour des raisons similaires à celles qui ont été évoquées précédemment, toutes les séries du terme de droite convergent. Par suite la fonction h est bien dans $H_{\mathbf{m}}$.

iv) Nous avons montré que l'espace $\mathcal{N}_{\mathbf{m}}$ intersection de $H_{\mathbf{m}}$ avec le noyau de la fonctionnelle analytique $\mathcal{L}_{\mathbf{m}}$ (pour $\mathbf{m} \in \Lambda_+ \cup \{\mathbf{0}\}$) ainsi que l'espace $H^-_{\mathbf{m}}$ (pour $\mathbf{m} \in \Lambda_-$) sont dans l'image de l'opérateur $\delta : h \in \mathcal{H}_{\widehat{\mathcal{F}}}(\widehat{M}) \longrightarrow (h - h \circ \sigma^{-1}) \in \mathcal{H}_{\widehat{\mathcal{F}}}(\widehat{M})$. Il n'est pas difficile de montrer que le sous-espace qu'ils engendrent (algébriquement) a pour adhérence $\mathcal{E} = \bigcap_{\mathbf{m}\in\Lambda_+\cup\{\mathbf{0}\}} \text{noyau}(\mathcal{L}_{\mathbf{m}})$. Ceci montre clairement que l'espace des fonctionnelles $\widehat{\mathcal{F}}$-analytiques σ-invariantes sur $(\widehat{M}, \widehat{\mathcal{F}})$ (qui est le dual de $\overline{H}^{0,1}_{\mathcal{F}}(\mathbb{T}^{n+1}_A)$) est engendré par les $\mathcal{L}_{\mathbf{m}}$ avec $\mathbf{m} \in \Lambda_+ \cup \{\mathbf{0}\}$. On a par conséquent $\overline{H}^{0,1}_{\mathcal{F}}(\mathbb{T}^{n+1}_A) = \mathcal{H}_{\widehat{\mathcal{F}}}(\widehat{M})/\mathcal{E}$. Ce qui termine la démonstration du théorème énoncé. $\square$

Remerciements. Jean-Pierre Demailly nous a suggéré une correction dans les calculs de la cohomologie du premier feuilletage. Nous l'en remercions.

BIBLIOGRAPHIE

[1] K. Brown, *Cohomology of Groups*, GTM, vol. 87, Springer-Verlag, 1982.

[2] A. Dehghan-Nezhad & A. El Kacimi Alaoui, « Équations cohomologiques de flots riemanniens et de difféomorphismes d'Anosov », *Journal of the Mathematical Society of Japan* **54** (2007), n° 4, p. 1105-1134.

[3] K. Diederich & T. Ohsawa, « On the parameter dependence of solutions to the $\overline{\partial}$-equation », *Math. Ann.* (1991), n° 289, p. 581-588.

[4] A. El Kacimi Alaoui, *The $\overline{\partial}$ along the leaves and Guichard's Theorem for a simple complex foliation*, Prépublication de l'Université de Valenciennes, Avril 2008, soumise.

[5] A. El Kacimi Alaoui & M. Nicolau, « A class of C^∞-stable foliations », *Ergod. Th. & Dynam. Sys.* (1993), n° 13, p. 697-704.

[6] R. Feres & A. Zeghib, « Leafwise holomorphic functions », *Proc. AMS* **131** (2003), n° 6, p. 1717-1725.

[7] G. Gigante & G. Tomassini, « Foliations with complex leaves », *Diff. Geo. and its Applications* (1995), n° 5, p. 33-49.

[8] A. Grothendieck, « Sur quelques points d'algèbre homologique », *Tohoku Math. J.* **9** (1957), p. 119-221.

[9] L. Hörmander, *An Introduction to Complex Analysis in Several Variables*, D. Van Nostrand Compagny. Inc., 1966.

[10] A. Martineau, « Sur les fonctionnelles analytiques et la transformation de Fourier-Borel », *J. Analyse Math.* (1963), n° 9, p. 1-164.

[11] L. Meersseman & A. Verjovsky, « A smooth foliation of the 5-sphere by complex surfaces », *Annals of Math.* (2002), n° 156, p. 915-930.

[12] J. Slimène, « Deux exemples de calcul explicite de cohomologie de Dolbeault feuilletée », *Proyecciones* **27** (2008), n° 1, p. 63-80.

Manuscrit reçu le 9 juin 2008,
accepté le 2 février 2009.

Aziz EL KACIMI ALAOUI
Université de Valenciennes
LAMAV ISTV 2, Le Mont Houy
59313 Valenciennes Cedex 9 (France)
aziz.elkacimi@univ-valenciennes.fr

Jihène SLIMÈNE
Faculté des Sciences de Monastir
Département de Mathématiques
5919 Monastir (Tunisie)
jihene.slimene@isimm.rnu.tn