UNIVERSITÉ DE VALENCIENNES

MASTER 1 – MATHÉMATIQUES

Géométrie différentielle

par

Aziz El Kacimi

Quelques épreuves d'évaluation

Année universitaire 2003-2004

Devoir surveillé

NOTES DE COURS ET DE TD AUTORISÉES

On note $\mathbb{E}$ l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique orthonormée $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. Quand on regarde $\mathbb{E}$ comme espace affine, on prendra pour origine O, le vecteur nul $\overrightarrow{O}$; ainsi $\mathbb{E}$ est muni du repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. Si M et N sont deux points de $\mathbb{E}$, la distance de M à N est la norme $|\overrightarrow{MN}|$ qu'on notera aussi MN.

Exercice 1

On considère la courbe γ donnée par le paramétrage $\gamma : t \in [-2\pi, 2\pi] \longmapsto (x(t), y(t), z(t)) \in \mathbb{E}$ où :

$$\begin{cases} x(t) = 1 + \cos t \\ y(t) = \sin t \\ z(t) = 2\sin\left(\frac{t}{2}\right). \end{cases}$$

1 - Montrer que γ est une courbe paramétrée régulière.

2 - Montrer que γ est l'intersection d'une sphère et d'un cylindre qu'on déterminera.

Exercice 2

On considère la courbe paramétrée $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{E}$ qui, à t associe le point $\gamma(t)$ tel que :

$$\overrightarrow{O\gamma(t)} = \begin{cases} t\overrightarrow{i} + e^{-\frac{1}{t^2}}\overrightarrow{k} & \text{si } t < 0 \\ \overrightarrow{O} & \text{si } t = 0 \\ t\overrightarrow{i} + e^{-\frac{1}{t^2}}\overrightarrow{j} & \text{si } t > 0. \end{cases}$$

1 - Montrer que γ est de classe C^∞.

2 - Montrer que cette représentation est régulière.

3 - Pour quelles valeurs de $t \in \mathbb{R}$, γ admet-elle un vecteur normal unitaire ? Le déterminer.

Exercice 3

Soient a et c deux nombres réels tels que $0 < a < c$. Dans l'espace $\mathbb{E}$, on note Γ le cercle défini par les équations $z = 0$ et $x^2 + y^2 = c^2$. Soit $\mathcal{P}$ un plan passant par l'axe Oz ; il coupe le cercle Γ en deux points diamétralement opposés F et F'. On considère tous les points $M \in \mathcal{P}$ qui vérifient la relation $|MF - MF'| = 2a$. On note S l'ensemble des points M construits de cette façon pour toutes les positions possibles du plan $\mathcal{P}$.

1 - Montrer que l'ensemble S est invariant par toutes les rotations d'axe Oz.

2 - Soit Γ l'intersection de S avec le plan d'équation $y = 0$. Montrer, en exhibant une paramétrisation adéquate au voisinage de chacun de ses points, que γ est une courbe régulière.

3 - Montrer, en exhibant une paramétrisation adéquate au voisinage de chacun de ses points, que S est une surface régulière.

4 - Calculer la première forme fondamentale de la surface S.

5 - Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que l'intersection de S avec le plan d'équation $z = \lambda$ est une courbe régulière fermée simple. Calculer sa longueur.

Année universitaire 2003-2004

Examen de première session - Janvier 2004

DOCUMENTS NON AUTORISÉS

Chacun des espaces $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ que l'on considérera sera muni de son produit scalaire usuel *i.e.* celui pour lequel la base canonique est orthonormée. Les repères orthonormés de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ seront notés respectivement $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ et $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.

Exercice 1

Soit S l'ensemble des points (x, y, z) de l'espace $\mathbb{R}^3$ qui vérifient la relation $x^2 - y^2 - z = 0$.

1 - Montrer que S est une surface régulière. (Penser à appliquer un théorème démontré en cours.)

2 - Montrer qu'une représentation paramétrique $\Phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow S$ régulière de la surface S est donnée par :

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(u+v) \\ y = \frac{1}{2}(u-v) \\ z = uv. \end{cases}$$

3 - Calculer la première forme fondamentale de la surface S associée à la représentation paramétrique Φ.

Exercice 2

Soit Σ une partie de $\mathbb{R}^3$. On appelle *arc* dans Σ toute application continue $\sigma : [0,1] \longrightarrow \Sigma$. Les points $\sigma(0)$ et $\sigma(1)$ sont appelés respectivement *origine* et *extrémité* de σ. On dira que Σ est *connexe par arcs* si, pour tous points A et B de Σ, il existe un arc σ dans Σ ayant pour origine A et pour extrémité B.

Montrer que la sphère $\mathbb{S}^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ est connexe par arcs.

Exercice 3

Soient r et R deux nombres réels tels que $R > r > 0$. Dans $\mathbb{R}^3$, on fait tourner le cercle d'équations $x^2 + z^2 = r^2$ et $y = 0$ autour de la droite vectorielle de direction $\overrightarrow{k}$. La surface engendrée est alors un tore T.

1 - Montrer que, sur le complémentaire V d'un cercle méridien et d'un cercle parallèlle (qu'on précisera), T admet comme représentation paramétrique régulière, l'application :

$$\Psi : (u, v) \in]0, 2\pi[\times]0, 2\pi[\longmapsto (x, y, z) \in V$$

donnée par :

$$\begin{cases} x = (R + r\sin v)\cos u \\ y = (R + r\sin v)\sin u \\ z = r\cos v \end{cases}$$

2 - Calculer la première forme fondamentale du tore T associée à la représentation Ψ.

3 - Calculer l'aire du tore T.

Année universitaire 2003-2004

Interrogation écrite - Séminaires

Traiter 5 exercices au choix

Chacun des espaces $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ que l'on considérera sera muni de son produit scalaire usuel *i.e.* celui pour lequel la base canonique est orthonormée.

Exercice 1. Soit Γ le cercle dans $\mathbb{R}^2$ d'équation $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ où a, b et R sont des nombres réels avec $R>0$. Caluler la courbure de Γ en chacun de ses points.

Exercice 2. Soient α et β deux nombres réels positifs ou nuls et $\mathcal{R}$ le rectangle de $\mathbb{R}^2$ de sommets les quatre points A, B, C et D de coordonnées respectives $(-\alpha,-\beta)$, $(\alpha,-\beta)$, (α,β) et $(-\alpha,\beta)$. On fait varier α et β mais de façon à ce que $\mathcal{R}$ garde un périmètre constant égal à $\ell>0$. Pour quelles valeurs de α et β l'aire de $\mathcal{R}$ est-elle maximale ?

Exercice 3. Soient S une surface régulière de $\mathbb{R}^3$ et $f:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^3$ un difféomorphisme de classe C^∞. Montrer que l'image $S'=f(S)$ de S par f est une surface régulière de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 4. Sur $\mathbb{R}^2$ on considère la forme différentielle $\omega=ydx+xdy$. Montrer que ω est exacte *i.e.* il existe une fonction $h:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ (vue comme forme différentielle de degré 0) telle que $dh=\omega$. Qu'en est-il pour la forme $\eta=ydx-xdy$?

Exercice 5. Soient r et R deux nombres réels tels que $R>r>0$. On note S l'ouvert du plan $\mathbb{R}^2$ constitué des points (x,y) tels que $r^2<x^2+y^2<R^2$. Calculer l'intégrale $\int_S\omega$ de la 2-forme différentielle $\omega=dx\wedge dy$ sur la surface S.

Exercice 6. On note $\mathbb{C}^*$ l'ensemble des nombres complexes non nuls. Soient $a\in\mathbb{C}^*$ et $\Phi:\mathbb{Z}\times\mathbb{C}^*\longrightarrow\mathbb{C}^*$ l'action de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{C}^*$ définie par $\Phi(k,z)=a^kz$. Donner les conditions nécessaires et suffisantes sur le nombre complexe a pour que Φ soit libre ?

Exercice 7. Déterminer la développée de la courbe d'équation cartésienne $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. (On pourra utiliser la paramétrisation en ch et sh de cette courbe.)

Exercice 8

a) Donner les caractéristiques de la courbe d'équation cartésienne $x^2-2y^2+6x+4y+8=0$

b) Quel est le type de la quadrique d'équation cartésienne $x^2-2y^2-3z^2=1$. On précisera ses éléments remarquables.

Exercice 9

Montrer qu'un hyperboloïde de révolution à une nappe est une surface réglée de $\mathbb{R}^3$. Est-ce une surface développable ?

Exercice 10

a) Montrer que la surface d'équation cartésienne $x^2+y^2-z^2=1$ est une surface de révolution dont on précisera l'axe et la génératrice (ou méridienne).

b) Donner un exemple de cyclique de Dupin. On en proposera un avec un dessin et une paramétrisation.

Année universitaire 2004-2005

Devoir surveillé - novembre 2004

Durée : 3 heures - Documents non autorisés

Dans tout ce texte, l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ sera muni de son produit scalaire usuel et de sa base canonique orthonormée (e_1, e_2, e_3).

Exercice 1

On considère la courbe paramétrée $\gamma : t \in \mathbb{R} \longmapsto (x(t), y(t), z(t)) \in \mathbb{R}^3$ définie par :

$$\begin{cases} x(t) = 1 + t \\ y(t) = -t^3 \\ z(t) = 1 + t^3. \end{cases}$$

1 - Montrer que cette représentation est régulière. Donner un système d'équations cartésiennes de la droite affine de $\mathbb{R}^3$ tangente à la courbe γ au point $\gamma(1)$.

2 - Donner une équation du plan affine de $\mathbb{R}^3$ normal à la courbe au point $\gamma(1)$.

Exercice 2

Soit $\gamma : s \in \mathbb{R} \longmapsto (x(s), y(s), z(s)) \in \mathbb{R}^3$ la courbe paramétrée donnée par :

$$\begin{cases} x(s) = \frac{1}{2} \sin s \\ y(s) = \left(\sin\left(\frac{s}{2}\right)\right)^2 \\ z(s) = \frac{\sqrt{3}}{2} s. \end{cases}$$

1 - Montrer que γ est une courbe régulière paramétrée par la longueur de l'arc.

2 - Pour chaque $s \in \mathbb{R}$, calculer la courbure $\kappa(s)$ et la torsion $\tau(s)$ de la courbe γ.

3 - Pour chaque $s \in \mathbb{R}$, donner explicitement le repère de Frenet $(\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s))$.

Exercice 3

Soient a et b des nombres réels strictement positifs et Γ la partie de l'espace affine $\mathbb{R}^3$ définie par les équations :

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + z^2 - 2xy = 1 \\ x + y + z = 0. \end{cases}$$

Montrer que Γ est une courbe régulière de $\mathbb{R}^3$ en la représentant à l'aide d'une paramétrisation régulière (pas forcément par la longueur de l'arc).

Exercice 4

Soient a, b et c trois nombres réels strictement positifs. On considère l'ellipsoïde $\mathcal{E}$ d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

1 - Dire pourquoi $\mathcal{E}$ est une surface régulière (énoncer de façon précise le théorème du cours qui permet de justifier cela).

2 - Soient L le demi-plan fermé de $\mathbb{R}^3$ défini par $y = 0$ et $x \geq 0$, V l'ouvert $\mathbb{R}^3 \setminus L$ (*i.e.* $\mathbb{R}^3$ privé de L) et $S = \mathcal{E} \cap V$. Donner une représentation régulière $\Phi : U \longrightarrow S$ (où U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$).

3 - Montrer que la surface $\mathcal{E}$ est difféomorphe à la sphère unité $\mathbb{S}^2$ de $\mathbb{R}^3$.

Corrigé

Exercice 1

1 - Dérivons par rapport à t l'application γ. On trouve $\gamma'(t) = (1, -3t^2, 3t^2)$. Comme $x'(t) = 1$, ce vecteur $\gamma'(t)$ ne peut pas s'annuler ; la représentation γ est donc régulière.

On a $\gamma(1) = (2, -1, 2)$ et $\overrightarrow{u} = \gamma'(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$. Un point $M = (x, y, z)$ est sur la tangente (Δ) à γ au point $M_0 = \gamma(1)$ si, et seulement si, $\overrightarrow{M_0M} = \lambda \overrightarrow{u}$ *i.e.* :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x-2 & = & \lambda \\ y+1 & = & -3\lambda \\ z-2 & = & 3\lambda \end{array} \right.$$

qui donne le système d'équations cartésiennes : $\overrightarrow{M_0M} = \lambda\gamma'(1)$ *i.e.* :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 3x - z & = & 4 \\ y+z & = & 1. \end{array} \right.$$

2 - Le point $M = (x, y, z)$ est sur le plan affine passant par $M_0 = \gamma(1)$ si et seulement si $\overrightarrow{M_0M} \cdot \overrightarrow{u} = 0$ *i.e.* :

$$\begin{pmatrix} x-2 \\ y+1 \\ z-2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} = x - 3y + 3z - 11 = 0.$$

L'équation du plan cherché est donc $x - 3y + 3z = 11$.

Exercice 2

1 - On calcule le vecteur tangent à γ : $\mathbf{t} = \gamma'(s) = \frac{1}{2}(\cos s, \sin s, \sqrt{3})$ dont la norme est $|\gamma'(s) = \frac{1}{2}\sqrt{(\cos s)^2 s + (\sin s)^2 + 3} = 1$. la courbe γ est donc régulière paramétrée par la longueur.

2 - Calculons la dérivée seconde de γ : $\gamma''(s) = \frac{1}{2}(-\sin s, \cos s, 0)$; $\mathbf{n} = (-\sin s, \cos s, 0)$ est donc le vecteur unitaire normal à γ. De façon évidente, la courbure de γ au point $\gamma(s)$ est $\kappa(s) = \frac{1}{2}$. Pour avoir la torsion on calcule $\mathbf{b} = \mathbf{t} \wedge \mathbf{n}$. Il est donné par :

$$\mathbf{b} = \frac{1}{2}\left(\begin{vmatrix} \sin s & \cos s \\ \sqrt{3} & 0 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} \cos s & -\sin s \\ \sqrt{3} & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \cos s & -\sin s \\ \sin s & \cos s \end{vmatrix} \right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\cos s, \sin s, \frac{\sqrt{3}}{3}\right).$$

On le dérivant on obtient $\mathbf{b}' = -\frac{\sqrt{3}}{2}(-\cos s, \cos s, 0) = -\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{n}$. D'où $\tau(s) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3 - Le repère $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$ est donné par son origine qui est le point $\gamma(s)$ et les vecteurs :

$$\mathbf{t} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \cos s \\ \sin s \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{n} = \begin{pmatrix} -\sin s \\ \cos s \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\begin{pmatrix} \cos s \\ \sin s \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}.$$

Exercice 3

La deuxième équation nous donne $z = -(x+y)$; en reportant dans la première, on obtient :

$$\frac{x^2}{\frac{a^2}{1+a^2}} + \frac{y^2}{\frac{b^2}{1+b^2}} = 1.$$

On pose $\alpha = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$ et $\beta = \frac{b}{\sqrt{1+b^2}}$. Ainsi les nouvelles équations qui définissent Γ sont :

$$\begin{cases} \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \\ z = -x - y. \end{cases}$$

Elles montrent que γ est une courbe dans l'espace dont la projection sur le plan d'équation $z = 0$ est une ellipse. On pourra donc prendres comme paramétrage :

$$\gamma(t) = \begin{cases} x = \alpha \cos t \\ y = \beta \sin t \\ z = -\alpha \cos t - \beta \sin t \end{cases}$$

Le vecteur tangent est donné par :

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} -\alpha \sin t \\ \beta \cos t \\ \alpha \sin t - \beta \cos t \end{pmatrix}$$

qui n'est jamais nul car les deux premières composantes ne s'annulent jamais en même temps. C'est donc une représentation régulière.

Exercice 4

1 - **Théorème.** *Soient V un ouvert de $\mathbb{R}^3$, $f : V \longrightarrow \mathbb{R}$ une application différentiable et $S = \{(x,y,z) \in V : f(x,y,z) = c\}$ où $c \in f(V)$. On suppose que pour tout $p \in S$, la différentielle $d_p f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ (qui est une application linéaire) est surjective. Alors S est une surface régulière.*

L'application $f : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \longmapsto \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 \in \mathbb{R}$ a pour différentielle au point $p = (x,y,z)$: $d_p f = \left(\frac{2x}{a^2}, \frac{2y}{b^2}, \frac{2z}{c^2}\right)$. Elle est surjective en en tout point $(x,y,z) \neq (0,0,0)$; comme $(0,0,0)$ ne fait pas partie de $\mathcal{E}$, en vertu du théorème sus-mentionné $\mathcal{E}$ est une surface régulière.

On prend $U =]0, 2\pi[\times]0, \pi[$. Le paramétrage de l'ouvert S de la surface $\mathcal{E}$ peut être donné, comme dans le cas de la sphère de centre l'origine et de rayon R par l'application

$$\Phi : (u,v) \in U \longmapsto (x,y,z) \in S \quad \text{où} \quad \begin{cases} x = a \cos u \sin v \\ y = b \sin u \sin v \\ z = c \cos v. \end{cases}$$

La différentielle de Φ en un point $(u,v) \in U$ est donnée par la matrice :

$$\begin{pmatrix} -a \sin u \sin v & a \cos u \cos v \\ b \cos u \sin v & b \sin u \cos v \\ 0 & -c \sin v \end{pmatrix}$$

dont il est facile de voir qu'elle est toujours de rang 2. Cette représentation est donc régulière.

3 - L'isomorphisme linéaire $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \longmapsto (ax, by, cz) \in \mathbb{R}^3$ induit de façon évidente un difféomorphisme $h : \mathbb{S}^2 \longrightarrow \mathcal{E}$.

Année universitaire 2004-2005

Examen - janvier 2005

Durée : 2 heures - Documents non autorisés

Dans tout ce texte, l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ sera noté $\mathbb{E}$ et muni de son produit scalaire usuel défini par $(x, y, z) \cdot (x', y', z') = xx' + yy' + zz'$.

Exercice 1

On note S l'image de l'ouvert $U = \mathbb{R} \times]0, +\infty[\subset \mathbb{R}^2$ par l'application $\Phi : (u, v) \in U \longmapsto (x, y, z) \in \mathbb{E}$ définie par :

$$\begin{cases} x(u, v) = e^{-v} \cos u \\ y(u, v) = e^{-v} \sin u \\ z(u, v) = v. \end{cases}$$

1 - Montrer que S est une surface régulière de $\mathbb{E}$.

2 - Calculer, en chaque point $p \in S$, la première forme fondamentale I_p de S.

3 - Donner, en chaque point p, des équations cartésiennes de la droite normale à S.

4 - Calculer l'aire de la surface S.

5 - Montrer que S est difféomorphe à $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Exercice 2

On pose $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{E} : x^2 + y^2 z^2 = 1\}$ et $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{E} : x^2 + y^4 + z^6 = 1\}$. On munit ces ensembles de la topologie induite par celle de $\mathbb{R}^3$.

1 - Montrer que S et Σ sont des surfaces régulières.

2 - Les surfaces S et Σ sont-elles compactes ?

Exercice 3

Soient F le point $(0, 0, 1)$ de $\mathbb{E}$ et $\mathcal{H}$ le plan d'équation $z = -1$. On pose :

$$S = \{M \in \mathbb{E} : \text{distance de } M \text{ à } F = \text{distance de } M \text{ à } \mathcal{H}\}.$$

1 - Montrer que l'ensemble S est défini par une équation de la forme $z = f(x, y)$ qu'on explicitera.

2 - Montrer que S est une surface régulière. En donner une paramétrisation régulière globale.

3 - Calculer, en chaque point $p \in S$, la première forme fondamentale I_p de S.

Année universitaire 2004-2005
Géométrie différentielle
Interrogation écrite - Séminaires

Traiter 5 exercices au choix

Chacun des espaces $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ que l'on considérera sera muni de son produit scalaire usuel *i.e.* celui pour lequel la base canonique est orthonormée.

Exercice 1

On note S la sphère de $\mathbb{R}^3$ de centre $\omega = (1,1,1)$ et de rayon 1. Donner une équation du plan tangent à S en chacun de ses points $p = (x_0, y_0, z_0)$.

Exercice 2

Dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ on considère les points $A = (1,0)$, $B = (-1,0)$, $C = (0,2)$ et $D = (0,-2)$. On pose $S_1 = \mathbb{R}^2 \setminus \{A, B\}$ et $S_2 = \mathbb{R}^2 \setminus \{C, D\}$; S_1 et S_2 sont deux surfaces régulières.

Montrer que S_1 et S_2 sont difféomorphes (exhiber un difféomorphisme $\varphi : S_1 \longrightarrow S_2$, le plus simple possible).

Exercice 3

On note S la surface $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$. Soient $\lambda \in]0,1[$ et $\Phi : \Gamma \times S \longrightarrow S$ l'action différentiable de $\Gamma = \mathbb{Z}^2$ définie par $\Phi((k,\ell),(x,t)) = (x+k, \lambda^\ell t)$.

Montrer que Φ est libre, séparante et totalement discontinue. Décrire explicitement la surface $\Sigma = S/\Gamma$.

Exercice 4

Montrer que, sur le plan $\mathbb{R}^2$, toute 2-forme différentielle $\omega = h(x,y)dx \wedge dy$ est exacte *i.e.* il existe une 1-forme différentielle $\alpha = a(x,y)dx + b(x,y)dy$ telle que $d\alpha = \omega$.

Exercice 5

Soit Δ l'ouvert de $\mathbb{R}^2$ défini par $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0,\ |x| < \frac{1}{2} \text{ et } x^2 + y^2 > 1\}$; Δ est une surface régulière.

Calculer l'intégrale $\int_\Delta \omega$ de la 2-forme différentielle $\omega = \frac{1}{y^2} dx \wedge dy$ sur Δ.

Exercice 6

Montrer que toute hyperbole admet une équation cartésienne de la forme $XY = k$, où k est un nombre réel non nul.

Exercice 7

Montrer que la surface paramétrée suivante est réglée et non développable :

$$x(u,v) = \frac{uv}{u+v}, \qquad y(u,v) = u^3 + v^3, \qquad z(u,v) = u^2 + v^2.$$

On pourra utiliser un changement de variables judicieusement choisi.

Exercice 8

On considère la surface d'équation cartésienne $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{2z}{c}$, où a, b et c sont trois réels positifs.

Préciser la nature de cette surface et déterminer son contour apparent cylindrique selon la direction de l'axe (Oy).

Année universitaire 2004-2005

Examen et Interrogation écrite - mars 2005

Durée : 2 heure - Documents non autorisés

Examen

Dans tout ce texte, l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire $(x,y,z)\cdot(x',y',z') = xx'+yy'+zz'$ sera noté $\mathbb{E}$.

Exercice 1

On considère l'application $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{E}$ qui à $s \in \mathbb{R}$ associe le point $\gamma(s) = (x(s), y(s), z(s))$ donné par :

$$\begin{cases} x(s) = \cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) \\ y(s) = \sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) \\ z(s) = \frac{s}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

1 - Montrer que γ est une représentation régulière d'une courbe de $\mathbb{E}$. Est-ce une représentation par la longueur de l'arc ?

2 - Pour tout $s \in \mathbb{R}$, calculer la courbure $\kappa(s)$ de γ au point $\gamma(s)$.

3 - Déterminer le repère de Frenet $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$ associé à la courbe γ en chacun de ses points $\gamma(s)$.

4 - Calculer la torsion de γ en chaque point $\gamma(s)$.

Exercice 2

On note $\mathbb{S}^2$ la sphère unité de l'espace $\mathbb{E}$ *i.e.* l'ensemble des points $(x,y,z) \in \mathbb{E}$ vérifiant $x^2+y^2+z^2 = 1$. On note V l'ouvert de $\mathbb{E}$ complémentaire du demi-plan fermé $\{(x,y,z) \in \mathbb{E} : y = 0 \text{ et } x \geq 0\}$ et on pose $S = \mathbb{S}^2 \cap V$; S est un ouvert de $\mathbb{S}^2$.

1 - Dire, en citant un théorème du cours, pourquoi $\mathbb{S}^2$ est une surface régulière.

2 - Donner une représentation régulière $\Phi : U \longrightarrow S$ où U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

3 - Calculer la première forme fondamentale I_p en tout point $p \in S$.

Interrogation écrite

Exercice 1

On note $S(R)$ la sphère de $\mathbb{E}$ de centre l'origine et de rayon $R > 0$. Donner une équation du plan tangent à $S(R)$ en chacun de ses points $p = (x_0, y_0, z_0)$.

Exercice 2

Dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ on considère les points $A = (1,0)$, $B = (-1,0)$, $C = (0,2)$ et $D = (0,-2)$. On pose $S_1 = \mathbb{R}^2 \setminus \{A,B\}$ et $S_2 = \mathbb{R}^2 \setminus \{C,D\}$; S_1 et S_2 sont deux surfaces régulières. Montrer que S_1 et S_2 sont difféomorphes (exhiber un difféomorphisme $\varphi : S_1 \longrightarrow S_2$, le plus simple possible).

Exercice 3

Sur $\mathbb{R}^2$ on considère la 1-forme différentielle $\omega = xdy$. Est-elle exacte ?