UNIVERSITÉ DE VALENCIENNES
Institut des Sciences et Techniques

Licence 3 – Mathématiques
Probabilités
Exercices corrigés

A. El Kacimi

Année universitaire 2006-2007

ANALYSE COMBINATOIRE

Exercice I

En supposant qu'il n'y a pas de répétitions :

i)combien de nombres de 3 chiffres peut-on former à l'aide des 6 chiffres 2 , 3 , 5 , 6 , 7 et 9 ?

ii)combien de ces nombres sont inferieurs à 400 ?

iii)combien sont pairs ?

iv) combien sont impairs ?

v) combien sont des multiples de 5 ?

Exercice II

De combien de façons peut-on répartir un groupe de 7 personnes

i)sur une rangée de 7 chaises ?

ii)autour d'une table ronde ?

Exercice III

Sachant que les personnes de même nationalité s'asseoient les unes à côté des autres,de combien de façons 3 américains, 4 français, 4 danois et 2 italiens peuvent-ils prendre place sur un banc ?

Résoudre le même problème en supposant que les personnes s'asseoient autour d'une table ronde.

Exercice IV

De combien de manières peut-on offrir 7 jouets à 3 enfants dont le plus jeune reçoit 3 jouets et chacun des autres reçoit 2 jouets ?

Exercice V

Démontrer le résultat suivant :

Soit A un ensemble contenant n éléments et soient $n_1,\dots,n_r$ r entiers strictement positifs tels que : $n = n_1 + \dots + n_r$,

alors il y a :

$$x = \frac{n!}{n_1!.n_2!\dots n_r!}$$

partitions différentes de A,de la forme $(A_1,\dots,A_r)$ où A_1 contient n_1 éléments,A_2 n_2 éléments etc...

Solutions

Exercice I

i)Pour former un nombre de 3 chiffres parmi 2 ,3 ,5 ,6 ,7 et 8 on commence par choisir le chiffre des centaines,par exemple.Pour cela on a 6 possibilités.A chacune de ces possibilités correspond le nombre de possibilités pour choisir le chiffre des dizaines parmi les 5 qui restent et le chiffre des unités parmi les 4 qui restent.On peut donc former :

$$6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$$

nombres de 3 chiffres parmi les 6 indiqués précédemment.

Ce nombre n'est d'ailleurs rien d'autre que le nombre d'arrangements A_n^k de n objets avec n=6 pris k à k avec,bien sûr,k=3.On sait que le nombre A_n^k est égal à :

$$\frac{n!}{(n-k)!} \ .$$

D'où :

$$A_6^3 = \frac{6!}{(6-3)!} = 120 \ .$$

ii)Parmi tous ces nombres,ceux qui sont inferieurs à 400 ont le chiffre des centaines qui ne peut être que 2 ou 3.Il y a donc :

$$2 \cdot 5 \cdot 4 = 40$$

nombres inferieurs à 400 et à 3 chiffres choisis parmi 2 ,3 ,5 ,6 ,7 et 9.

iii)Ceux qui sont pairs ont le chiffre des unités pair et ne peut donc être que 2 ou 6.Par conséquent ils sont au nombre de :

$$4 \cdot 5 \cdot 2 = 40 \ .$$

iv)On en déduit que les impairs sont au nombre de :

$$120 - 40 = 80 \ .$$

v)Les multiples de 5 se terminent par 0 ou 5;mais comme il n'y a pas de 0 le nombre de possibilités est égal à :

$$5 \cdot 4 \cdot 1 = 20 \ .$$

Exercice II

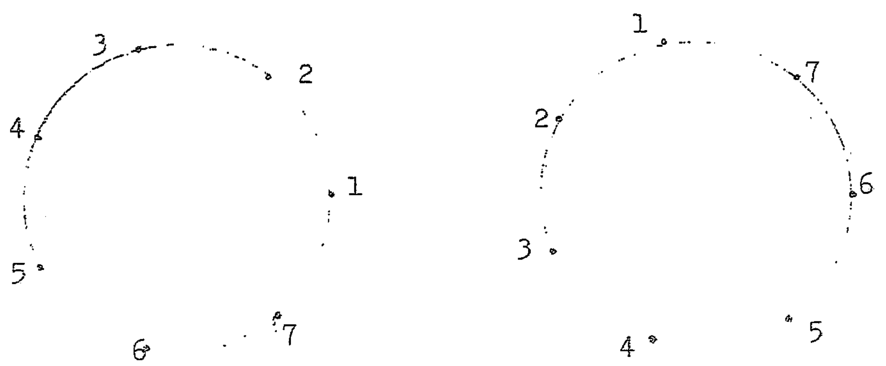
i)Pour répartir les 7 personnes sur un banc,on place la $1^{\text{ère}}$ qui a 7 possibilités;la seconde en a 6 et la $3^{\text{ème}}$ les 5 qui restent etc...

En tout il y a :

$$7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$$

possibilités pour les placer sur un banc.

ii)Sur une table ronde 2 dispositions obtenues l'une à partir de l'autre par permutation circulaire sont supposées identiques.Par exemple les 2 dispositions suivantes :



Il y a donc $7!/7 = 6! = 720$ possibilités de placer les 7 personnes sur une table ronde.

Exercice III

On peut disposer les nationalités de 4! façons différentes.A chacune de ces dispositions correspond :

i) 3! dispositions diffé rentes des 3 américains;

ii) 4! " " 4 français;

iii) 4! " " 4 danois;

iv) 2! " " 2 italiens.

En tout,les différentes personnes considérées ont $4!.3!.4!.4!.2! = 165888$ possiblités de s'asseoir sur un banc.

En raisonnant de la même manière que pour l'exercice II ii),on montre facilement qu'il y a $3!.3!.4!.4!.2! = 41472$ possibilités sur une table ronde.

Exercice IV

Notons J l'ensemble des jouets.Le nombre cherché est le nombre de partitions ordonnées (J_1,J_2,J_3) de l'ensemble J avec $J_1 = 3$ et $J_2 = J_3 = 2$. Ce nombre est égal à :

$$\frac{7!}{3!.2!.2!} = 210 .$$

Exercice V

Le nombre de choix possibles de l'ensemble A_1 est égal au nombre de combinaisons des n éléments de A pris n_1 à n_1 i.e :

$$C_n^{n_1} = \frac{n!}{n_1!(n-n_1)!} .$$

Pour choisir A_2,on choisit ses éléments parmi les $(n-n_1)$ qui restent. Encore là on a :

$$C_{n-n_1}^{n_2} = \frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!}$$

choix possibles.

Finalement on a :

$$x = \frac{n!}{n_1!(n-n_1)} . \frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!} . \dots . \frac{(n-n_1-n_2- \dots -n_{r-1})!}{n_r!(n-n - \dots\dots -n_r)!};$$

mais comme $n-n_1-n_2- \dots -n_r = 0$ on a $(n-n_1-n_2- \dots n_r)! = 1$;on a finalement :

$$x = \frac{n!}{n_1!. \dots .n_r!} .$$

ENSEMBLE FONDAMENTAL - EVENEMENTS

Exercice I

Soit E un ensemble ayant n éléments. On note P(E) l'ensemble des parties de E.

Montrer en utilisant le binôme de Newton que P(E) a 2^n éléments.

Exercice II

Soient E un ensemble, A et B deux parties de E.

Démontrer la formule de Morgan :

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

En déduire la formule duale :

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

Exercice III

On jette un dé deux fois et on observe le résultat obtenu.

Quel est l'ensemble fondamental ?

Exercice IV

On jette une pièce de monnaie trois fois et on observe le résultat obtenu.

i) Quel est l'ensemble fondamental ?

ii) Expliciter les événements suivants :

- obtenir au moins une fois "pile";
- obtenir au plus deux fois "face".

Exercice V

On jette une pièce de monnaie jusqu'à ce qu'on obtienne "pile" et on observe le nombre de jets.

Quel est l'ensemble fondamental ?

Exercice VI

Sur l'axe reel on choisit 2 points M et N dont les abscisses x et y sont comprises respectivement entre -2 et 0, 0 et +3.

Expliciter l'événement : la distance de M à N est superieure ou égale à 3.

Solutions

Exercice I

L'ensemble P(E) est constitué de toutes les parties à :

- 0 éléments et qui sont au nombre de $C_n^o = 1$;

- 1 éléments " " $C_n^1 = n$;

- ... ...

- p éléments et qui sont au nombre de $C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$;

etc...

Le cardinal de P(E) est donc égal à :

$$C_n^o + C_n^1 + \dots + C_n^n = \sum_{p=o}^{n} C_n^p \quad .$$

Pour calculer cette somme on considère le polynôme de Newton :

$$(x + 1)^n = \sum_{p=o}^{n} C_n^p x^p$$

Cette égalité est vraie pour tout x reel;elle est donc vraie a fortiori pour x = 1. On obtient donc :

$$2^n = \sum_{p=o}^{n} C_n^p \qquad \text{i.e} \qquad \boxed{P(E) = 2^n} \quad .$$

Exercice II

L'égalité $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ est équivalente aux deux inclusions :

$\overline{A \cup B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$ et $\bar{A} \cap \bar{B} \subset \overline{A \cup B}$

i)Montrons que tout élément x de $\overline{A \cup B}$ est aussi élément de $\bar{A} \cap \bar{B}$.

En effet $x \in \overline{A \cup B}$ signifie que x n'appartient pas à $A \cup B$, donc n'appartient ni à A ni à B et par conséquent x appartient au complémentaire de A et au complémentaire de B, c'est-à-dire à $\bar{A} \cap \bar{B}$.

L'autre inclusion se démontre de manière analogue.

La seconde formule découle de la première en posant $A = \bar{C}$ et en remarquant que le complémentaire du complémentaire d'une partie de E n'est rien d'autre que cette partie elle même.

Exercice III

L'ensemble des résultats possibles est l'ensemble de tous les couples (x,y) où x et y sont des éléments de $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Exercice IV

i) L'ensemble fondamental s'identifie naturellement à l'ensemble à 8 éléments :

$$\Omega = \{PPP, PPF, PFF, PFP, FFF, FFP, FPP, FPF\}$$

ii) L'événement "obtenir au moins une fois pile" est la partie de Ω :

$$A = \{PPP, PPF, PFF, PFP, FFP, FPP, FPF\}$$

et il n'est pas difficile de voir qu'il coincide avec l'événement "obtenir au plus deux fois face".

Exercice V

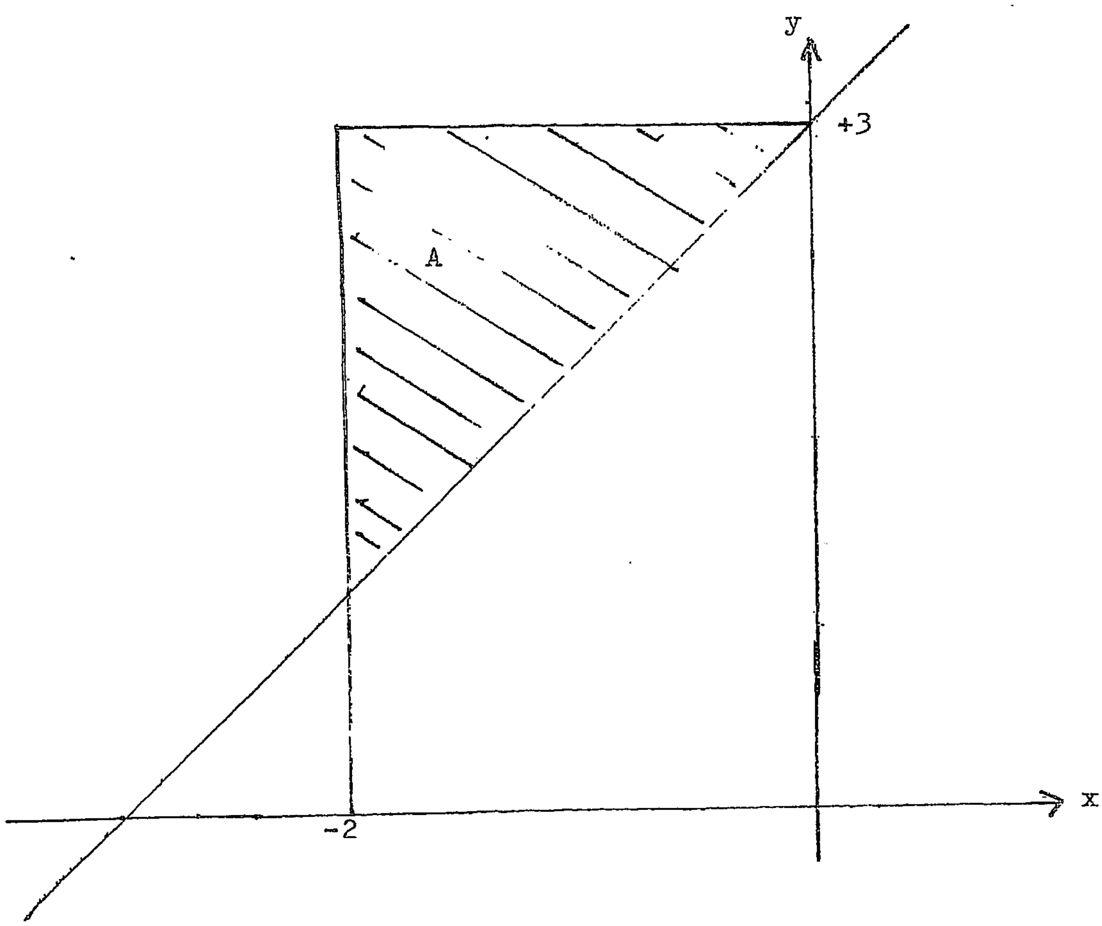
On peut obtenir "pile" au bout du 1^er^ jet ou du 2^ème^ jet etc...
L'ensemble fondamental est donc l'ensemble de tous les entiers strictement positifs i.e :

$$\Omega = N^{*} = \{1, 2, 3, \ldots\ldots\} .$$

Exercice VI

Considèrons l'axe reel sur lequel on a choisi une unité de longueur.
Choisir les points M et N revient à choisir x et y donc le couple (x,y).
Mais un couple (x,y) represente toujours un point du plan relativement à un repère orthonormé. L'ensemble fondamental Ω est donc :

$$\Omega = \{(x,y) \in R^2 \ / \ -2 \leqslant x \leqslant 0 \quad \text{et} \quad 0 \leqslant y \leqslant +3\}$$



De manière générale on a distance de M à N = dis(M,N) = $|y - x|$ i.e dis(M,N) = $y - x$ puisque $x \leqslant y$.

L'événement A = "distance de M à N superieure ou égale à 3 " est la partie de Ω donnée par :

$$A = \{(x,y) \in \Omega \quad / \; y - x \geqslant 3\}$$

La droite d'équation $y - x = 3$ partage le plan en deux parties ayant cette droite en commun. Sur l'une des parties on a $y - x \leqslant 3$; sur l'autre partie on a $y - x \geqslant 3$. On constate aisément que la partie qui convient est celle qui ne contient pas l'origine des coordonnées.

CALCUL DES PROBABILITES

Exercice I

Un lot contient 12 articles dont 4 sont défectueux. On tire au hasard 3 articles du lot, l'un après l'autre. Calculer la probabilité p pour que les 3 articles ne soient pas défectueux.

Exercice II

Trois machines A, B et C produisent respectivement 50% , 30% et 20% du nombre total des pièces fabriquées dans une usine. Les pourcentages de pièces défectueuses de ces machines sont de 3% , 4% et 5%. Si l'on prend une pièce au hasard, quelle est la probabilité pour qu'elle soit défectueuse ?

Exercice III

Dans un lycée 25% des élèves échouent en mathématiques, 15% échouent en chimie et 10% échouent à la fois en mathématiques et en chimie. On choisit un élève au hasard.

i) Si l'élève a échoué en chimie, quelle est la probabilité pour qu'il ait aussi échoué en mathématiques ?

ii) Si l'élève a échoué en mathématiques, quelle est la probabilité pour qu'il ait aussi échoué en chimie ?

iii) Quelle est la probabilité pour qu'il ait échoué en mathématiques ou en chimie ?

Exercice IV

On jette un dé bien équilibré. Soit X la variable representant le double du nombre obtenu, et soit Y une variable prenant les valeurs 1 ou 3 suivant que l'on obtient un nombre impair ou un nombre pair. Calculer la distribution et l'espérance mathématique de X , Y , X + Y et X.Y .

Solutions

Exercice I

L'ensemble fondamental est l'ensemble de toutes les parties à trois articles que l'on peut former à partir du lot. Il a pour cardinal :

$$|\Omega| = C_{12}^3 = \frac{12!}{3!.9!} = 220 \quad .$$

Notons A l'événement "les trois articles tirés ne sont pas defectueux".

1°-Les articles non defectueux seront tirés parmi 8. D'où :

$$|A| = C_8^3 = \frac{8!}{3!.5!} = 56 \quad .$$

Donc : $\boxed{p(A) = \frac{56}{220} = \frac{14}{55}}$.

2°-Retrouvons ce résultat en utilisant les probabilités conditionnelles.

Soient :

A_1 = "1er article tiré non defectueux"

A_2 = "2èmearticle tiré non defectueux"

et A_3 = "3èmearticle tiré non defectueux" .

On a bien-sûr : $A = A_1 \cap A_2 \cap A_3$ et :

$p(A) = p(A_1).p(A_2/A_1).p(A_3/A_1 \cap A_2)$.

Mais : $p(A_1) = \frac{8}{12}$, $p(A_2/A_1) = \frac{7}{11}$ et $p(A_3/A_1 \cap A_2) = \frac{6}{10}$. D'où :

$$p(A) = \frac{8}{12} \cdot \frac{7}{11} \cdot \frac{6}{10} = \frac{14}{55} \quad .$$

Exercice II

Notons A , B et C respectivement les événements suivants :

A = "la pièce tirée provient de A " ,

B = "la pièce tirée provient de B " ,

C = "la pièce tirée provient de C "

et E = "la pièce tirée est defectueuse".

Les parties A , B et C constituent une partition de Ω i.e :

$$\Omega = A \cup B \cup C \quad \text{avec} \quad A \cap B = B \cap C = C \cap A = \emptyset \quad .$$

On a donc :

$$p(E) = p(A \cap E) + p(B \cap E) + p(C \cap E) .$$

Mais comme $p(A \cap E) = p(A).p(E/A)$ etc... on obtient :

$$p(E) = p(A).p(E/A) + p(B).p(E/B) + p(C).p(E/C)$$, c'est-à-dire :

$$p(E) = 0,5.0,03 + 0,3.0,04 + 0,2.0,05 .$$

i.e $\boxed{p(E) = 0,037}$.

Exercice III

Notons :

M l'événement "l'élève échoue en mathématiques "

C " "l'élève échoue en chimie " .

On a :

i) $p(M/C) = \dfrac{p(M \cap C)}{p(C)} = \dfrac{0,10}{0,15} = \dfrac{2}{3}$;

ii) $p(C/M) = \dfrac{p(C \cap M)}{p(M)} = \dfrac{0,10}{0,25} = \dfrac{2}{5}$;

iii) $p(M \cup C) = p(M) + p(C) - p(M \cap C)$

$= 0,25 + 0,15 - 0,10 = 0,30$.

Exercice IV

Appelons R le résultat du jet. Il prend 6 valeurs 1 , 2 , 3 , 4 , 5 et 6 avec la probabilité 1/6; donc X prend 6 valeurs 2 , 4 , 6 , 8 , 10 et 12 avec la même probabilité 1/6. On dresse le tableau suivant :

R	1	2	3	4	5	6
X	2	4	6	8	10	12
Y	1	3	1	3	1	3
X + Y	3	7	7	11	11	15
X.Y	2	12	6	24	10	36

Ce qui nous donne les distributions de X , Y , X + Y et X.Y :

Valeurs de X	2	4	6	8	10	12
Probabiltés	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Valeurs de Y	1	3
Probabilités	1/2	1/2

Valeurs de X + Y	3	7	11	15
Probabilités	1/6	1/3	1/3	1/6

Valeurs de X.Y	2	6	10	12	24	36
Probabilités	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Rappel

Soit $X : \Omega \longrightarrow R$ une variable aléatoire reelle sur Ω fini. Elle prend donc un nombre fini de valeurs qu'on notera $x_1, \dots, x_n$ où n est le cardinal de Ω. Soit $p_i = p(X=x_i)$ la probabilité pour que X prenne la valeur x_i.

L'espérance mathématique de X est le nombre E(X) défini par :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i .$$

Ce nombre n'est rien d'autre que la moyenne de toutes les valeurs x_i de X pondérées par les probabilités p_i.

A partir des distributions de X , Y , X + Y et X.Y on obtient :

$$E(X) = \frac{1}{6}(2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12) = 7 \;;$$

$$E(Y) = \frac{1}{2}(1 + 3) = 2 \;;$$

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y) = 7 + 2 = 9$$

et $$E(X.Y) = \frac{1}{6}(2 + 6 + 10 + 12 + 24 + 36) = 15 \;.$$

VARIABLES ALEATOIRES

Exercice I

Une boite contient 5 jetons de forme identique , mais numérotés de 1 à 5.

L'expérience consiste à extraire un jeton de la boite, à noter son numéro x; puis, après avoir remis dans la boite ce premier jeton, à extraire à nouveau un jeton de la boite et à noter son numéro y. Le couple (x,y) est ainsi le résultat de l'expérience. A chaque extraction on suppose évidemment l'équiprobabilité.

On définit la variable aléatoire Z par :

$$Z = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad x = y \\ 0 & \text{si} \quad x < y \\ -1 & \text{si} \quad x > y \end{cases}$$

1°-Donner la loi de probabilité de Z.

2°-Calculer l'espérance mathématique $E(Z)$ de Z.

Exercice II

On considère une pièce de monnaie telle que si on la jette la probabilité d'avoir "pile" est $p > 0$ et donc celle d'avoir "face" est $q = 1 - p$.

On jette n fois cette pièce de monnaie et on note X_i la variable aléatoire définie par :

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si "pile" apparaît au } i^{\text{ème}} \text{ jet,} \\ 0 & \text{si "face" apparaît au } i^{\text{ème}} \text{ jet.} \end{cases}$$

1° - Pour chaque i trouver la loi de probabilité de X_i.

2° - Calculer l'espérance mathématique de X_i.

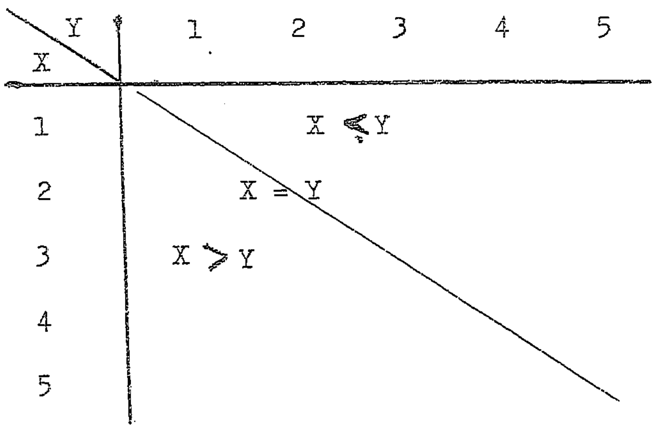
3° - Donner la loi de probabilité de la v.a $X = X_1 + \dots + X_n$; calculer son espérance mathématique.

Solutions

Exercice I

Les variables x et y prennent leurs valeurs dans l'ensemble $\{1,2,3,4,5\}$.

L'ensemble fondamental associé à l'épreuve a 25 éléments et tous les événements élémentaires sont équiprobables.



1°- La loi de Z est donnée par le tableau :

Z	-1	0	2
$p(Z=z_i)$	2/5	2/5	1/5

2°- L'espérance de Z est le nombre :

$$E(Z) = \frac{2}{5}(-1) + \frac{2}{5}.0 + \frac{1}{5}.2 = 0 .$$

Ainsi Z est une variable aléatoire centrée.

Exercice II

Pour tout i la variable aléatoire X_i prend deux valeurs 1 et 0.

1°- La loi de probabilité de X est donnée par le tableau :

X_i	1	0
$p(X_i=x)$	p	q

C'est la loi de Bernoulli de paramètre p.

2°- <u>Espérance de Z</u> : On a :

$E(Z) = p.1 + q.0 = p$

3°- La variable $X = X_1 + \dots + X_n$ prend ses valeurs dans l'ensemble $\{0,1,\dots,n\}$. Pour calculer la loi de X notons A_i et B_k les événements "X_i prend la valeur 1 " et "X prend la valeur k". Nous voulons calculer la probabilité de l'événement B_k. Dire que X est égale à k , c'est dire que parmi les variables $X_1 , \dots , X_n$ il y en a k qui valent 1 et les n-k autres valent 0.

Soient $\{i_1 , \dots ,i_k\}$ une partie à k éléménts et $\{j_1 , \dots , j_{n-k}\}$ son complémentaire. On a :

$$B_k = \bigcup (A_{i_1} \cap \dots A_{i_k} \cap \overline{A}_{j_1} \dots \cap \overline{A}_{j_{n-k}})$$

où la réunion porte sur toutes les combinaisons à k éléments qu'on peut former à partir de $\{1 , \dots , n\}$ et qui sont au nombre de C_n^k.

i)Les événements $C_{i_1\dots i_k} = A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k} \cap \overline{A}_{j_1} \cap \dots \cap \overline{A}_{j_{n-k}}$ et $C_{i'_1\dots i'_k} = A_{i'_1} \cap \dots \cap A_{i'_k} \cap \overline{A}_{j'_1} \cap \dots \cap \overline{A}_{j'_{n-k}}$ sont disjoints si la combinaison $\{i_1,\dots,i_k\}$ est différente de $\{i'_1,\dots,i'_k\}$. En effet il existe $i_s \in \{i_1,\dots,i_k\}$ et $i_s \notin \{i'_1,\dots,i'_k\}$ et donc $i_s \in \{j'_1,\dots,j'_{n-k}\}$.
Comme $A_{i_s} \cap \overline{A}_{i_s} = \emptyset$ on en déduit que $C_{i_1\dots i_k} \cap C_{i'_1\dots i'_k} = \emptyset$.

ii)Tous les événements $A_{i_1} ,\dots,A_{i_k} , A_{j_1} ,\dots, A_{j_{n-k}}$ sont indépendants et tels que pour tout $i \in \{1, \dots , n\}$ $p(A_i) = p$ et $p(\overline{A}_i) = q$.

En vertu de ces deux remarques on obtient que pour toute partie $\{i_1 , \dots ,i_k\}$ de $\{1,\dots,n\}$ on a :

$$p(C_{i_1\dots i_k}) = p(A_{i_1}). \dots .p(A_{i_k}).p(A_{j_1}). \dots .p(A_{j_{n-k}}) \quad \text{i.e}$$

$$p(C_{i_1 \dots i_k}) = p^k q^{n-k} .$$

Finalement :

$$p(B_k) = \sum_{i_1, \dots, i_k} p(C_{i_1 \dots i_k})$$

$$p(B_k) = C_n^k \, p^k q^{n-k} .$$

La loi de X est donc définie par :

$$p(X=k) = C_n^k \, p^k q^{n-k} .$$

C'est la loi binomiale de taille n et de paramètre p. Nous reviendrons sur cette loi par la suite.

Espérance mathématique de X .

On a :

$$E(X) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) .$$

Comme $E(X_i) = p$ pour tout i (cf. 2°) on a :

$$E(X) = np .$$

VARIABLES ALEATOIRES

(suite)

Fonctions de répartition densités

Execice I

Soit X une variable aléatoire continue dont la distribution f est constante sur un intervalle $[a , b]$ et vaut 0 ailleurs :

$$f(x) = \begin{cases} k & \text{si} \quad x \leqslant [a , b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1°-Calculer k et E(X);

2°-Dêterminer la fonction de répartition F de X.

Exercice II

Deux amis A et B, se donnent rendez-vous à la sortie de leur travail entre 18^h et 19^h.

On appelle X la fraction d'heure qui s'écoule entre 18^h et l'arrivée de A et Y celle qui s'écoule entre 18^h et l'arrivée de B. On définit ainsi deux variables aléatoires à valeurs dans l'intervalle $[0 , 1]$. On suppose qu'elles sont indépendantes et uniformes.

On note T le temps d'attente du premier ami arrivé.

1°-Calculer T en fonction de X et Y .

2°-Calculer la fonction de répartition de T et en déduire la densité de probabilité de cette variable.

3°-Calculer l'espérance mathématique de T et son moment centré d'ordre deux.

4°-Les deux amis ont convenu que le premier arrivé attendrait l'autre au plus 30 minutes. Quelle est la probabilité pour que le rendez-vous ait lieu ?

Solutions

Exercice I

1°-La fonction f est continue sauf peut-être en a et b. Pour qu'elle soit la densité de probabilité d'une variable aléatoire X il faut qu'elle soit non négative et que son intégrale sur R soit égale à 1. On a donc :

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{b} f(x)dx + \int_{b}^{+\infty} f(x)dx$$

Mais comme f est nulle en dehors de l'intervalle $[a, b]$ cette integrale se réduit à :

$$1 = \int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{b} kdx = \Big[k.x \Big]_{a}^{b} \quad \text{i.e} \quad 1 = k(b - a).$$

D'où $k = 1/(b - a)$ (on a supposé bien-entendu que a est distinct de b).

L'espérance mathématique de X est donnée par :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{a}^{b} k.xdx = \Big[k.x^2/2 \Big]_{a}^{b} = \frac{k}{2}(b^2 - a^2) \quad \text{i.e}$$

$$E(X) = \frac{a + b}{2}.$$

2°-Par définition la fonction de répartition de X est la fonction réelle F donnée par :

$$F(x) = p(X \leqslant x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

Pour $t \leqslant a$ on a $f(t) = 0$ donc $F(x) = 0$; si $t \in [a, b]$ on décompose l'integrale de la façon suivante :

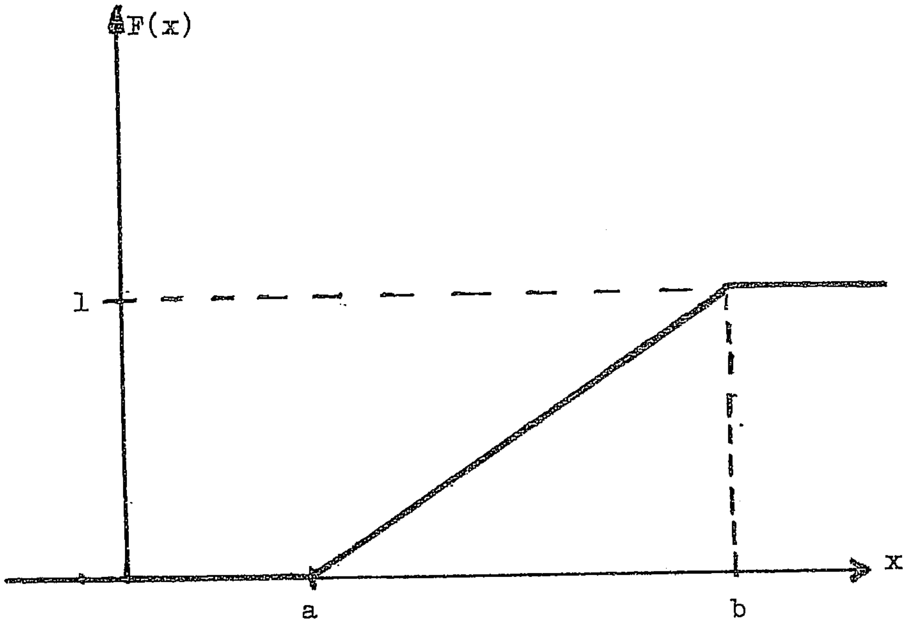
$$F(x) = \int_{-\infty}^{a} f(t)dt + \int_{a}^{x} f(t)dt = \int_{a}^{x} kdt = \Big[kt \Big]_{a}^{x} = k(x - a) = \frac{x - a}{b - a}.$$

Si $t > b$ on a :

$$F(x) = \int_{a}^{b} f(t)dt = 1$$ d'après la question qui précède. En résumé :

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ pour } x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} \text{ pour } a \leqslant x \leqslant b \\ 1 \text{ pour } x > b \end{cases}$$

F est une fonction affine par morceaux. Sa representation graphique est donnée ci-dessus :



<u>Exercice II</u>

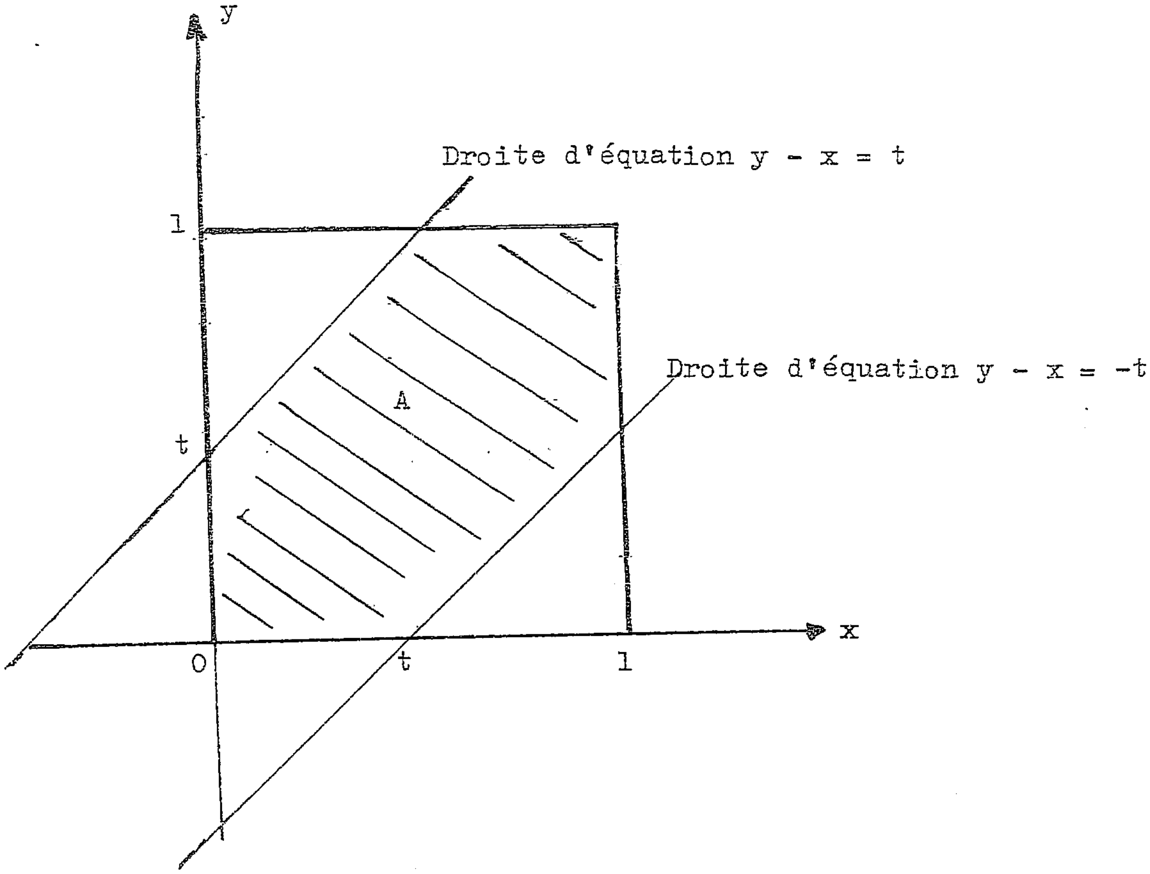
1°-La variable aléatoire T represente le temps d'attente du premier ami arrivé. Elle est positive; donc elle est égale à $|X - Y|$.

2°-Les variables X et Y prennent leurs valeurs dans $[0 , 1]$. Un évènement élémentaire est representé par un point du plan de coordonnées (x,y) où x et y sont des éléments de $[0 , 1]$. L'évènement $A = \{T < t\}$ est donc l'ensemble des points du plan défini par les inéquations :

$$0 \leqslant x \leqslant 1 \quad , \quad 0 \leqslant y \leqslant 1$$

$$x - y < t \qquad y - x < t$$

representé ci-dessous :



La probabilité de A est l'aire de la partie hachurée :

$F(t) = p(A) = 1 - (1 - t)^2 = t(2 - t)$ pour $t \in [0\ ,\ 1]$

Pour $t < 0$ l'ensemble A est vide et donc $F(t) = 0$; pour $t > 1$ l'ensemble A est l'ensemble fondamental tout entier. D'où $F(t) = 1$.

Finalement la fonction de répartition associée à la variable aléatoire T s'écrit :

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 0 \\ t(2 - t) & \text{si} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ 1 & \text{si} \quad t > 1 \end{cases}$$

On remarque que F est continue partout, dérivable sauf en 0. On peut donc prendre comme densité la fonction :

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 0 \\ 2(1-t) & \text{si} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ 0 & \text{si} \quad t > 1 \end{cases}$$

<u>Remarque</u> : La densité de probabilité n'est pas unique; choisir comme dérivée en 0 la dérivée à gauche 0 ou la dérivée à droite 2 ne change en rien la fonction de répartition F de T.

3°- L'espérance mathématique de T est donnée par l'integrale :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt = \int_0^1 2t(1-t)dt = \left[t^2 - \frac{2}{3}t^3 \right]_0^1 = 1/3 .$$

Le moment centré d'ordre 2 de T n'est rien d'autre que la variance de T qui est égale à :

$$\mathrm{Var}(T) = \int_{-\infty}^{+\infty} 2(t - \frac{1}{3})^2(1-t)dt = \frac{2}{3}\int_0^1 (3t-1)^2(1-t)dt$$

$$= \frac{2}{3}\left[-\frac{9}{4}t^4 + \frac{15}{3}t^3 - \frac{7}{2}t^2 + t \right]_0^1 = \frac{1}{6}$$

4°- La probabilité pour que le rendez-vous ait lieu est la probabilité de l'évènement $\{T < 1/2\}$ i.e :

$$F(1/2) = \frac{1}{2}(2 - 1/2) = 3/4 .$$

VARIABLES ALEATOIRES

(suite)

Exercice I

Soit (X,Y) un couple aléatoire dont la distribution de probabilité est donnée par le tableau qui suit :

X \ Y	1	-1
-1	$\frac{p}{2}$	$\frac{1-p}{2}$
1	$\frac{1-p}{2}$	$\frac{p}{2}$

où p est un réel strictement compris entre 0 et 1 et distinct de 1/2 .

On pose $Z = X.Y$.

1°-Calculer la distribution de probabilité de Z et son espérance mathématique.

2°-Calculer l'espérance mathématique de X et celle de Y.

3°-Montrer que X et Y sont dépendantes.

Exercice II

Un essai pouvant conduire à un succès ou à un échec, on fait n essais indépendants. On note p_i la probabilité d'un succès au $i^{\text{ème}}$ essai et on pose :

$$\bar{p} = \frac{1}{n}(p_1 + \dots + p_n) \quad .$$

Soit X le nombre de succès rencontrés au cours de ces essais.

1°-Calculer l'espérance mathématique de X et sa variance.

2°-Démontrer l'inégalité :

$$p\left(\left|\frac{X}{n} - \bar{p}\right| \geqslant c\right) \leqslant \frac{1}{4nc^2}$$

Solutions

Exercice I

1° - La variable aléatoire Z prend deux valeurs : -1 et +1. Sa distribution de probabilité est donnée par le tableau qui suit :

Z	-1	+1
p_i	p	$1 - p$

Son espérance mathématique est : $E(Z) = -p + (1 - p) = 1 - 2p$; elle est non nulle car p est différent de $\frac{1}{2}$ par hypothèse.

2°- Les lois de X et Y sont les lois marginales respectives du couple aléatoire (X,Y) :

X	-1	+1
p_i	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Y	-1	+1
p_i	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

On a $E(X) = E(Y) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0.$

3°- Les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes car E(Z) est non nulle alors que le produit E(X)E(Y) est nul (si deux variables aléatoires sont indépendantes alors $E(X.Y) = E(X)E(Y)$).

Exercice II

Pour tout $i = 1,\ldots,n$ soit X_i la variable aléatoire définie par

$$X_i = \begin{cases} 1 \text{ si le } i^{\text{ème}} \text{ essai donne un succès} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Les essais sont indépendants les v.a X_i sont aussi indépendantes et vérifient clairement :

$$X = X_1 + \ldots + X_n$$

1°- On a : $E(X) = E(X_1 + \dots + X_n) = E(X_1) + \dots + E(X_n)$

$$Var(X) = Var(X_1) + \dots + Var(X_n)$$

Comme X_i suit une loi de Bernoulli de paramètre p_i on a $E(X_i) = p_i$ et $Var(X_i) = p_i(1 - p_i)$. D'où :

$$E(X) = p_1 + \dots + p_n = n\,\bar{p}$$

$$Var(X) = p_1(1 - p_1) + \dots + p_n(1 - p_n) .$$

2°- L'inégalité $\left|\frac{X}{n} - \bar{p}\right| \geqslant c$ est équivalente à $\left|X - n\,\bar{p}\right| \geqslant nc$ i.e

$$\left|X - E(X)\right| \geqslant nc$$

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tcheycheff on a :

$$P(\left|X - E(X)\right| \geqslant nc) \leqslant \frac{Var(X)}{n^2c^2}$$

c'est-à-dire :

$$P(\left|\frac{X}{n} - \bar{p}\right| \geqslant c) \leqslant \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i(1 - p_i)}{n^2c^2}$$

Considèrons le terme $p_i(1 - p_i)$. C'est une fonction de p_i . Notons la $f(p_i)$. Elle a pour dérivée $f'(p_i) = 1 - 2p_i$ qui s'annule au point $p_i = \frac{1}{2}$ en lequel f atteint son maximum qui est $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$.

Le maximum de Var(X) est donc $n.\frac{1}{4}$; ce qui implique que le maximum de $\frac{Var(X)}{n^2c^2}$ est $\frac{1}{nc^2}$. Ce qui démontre l'inégalité :

$$P(\left|\frac{X}{n} - \bar{p}\right| \geqslant c) \leqslant \frac{1}{nc^2} .$$

LOIS DE PROBABILITE

Exercice I

La probabilité pour qu'un tireur atteigne une cible est $p = \frac{1}{4}$.

i)En supposant qu'il tire 7 fois quelle est la probabilité pour qu'il atteigne la cible au moins 2 fois ?

ii)Combien de fois doit-il tirer pour que la probabilité qu'il atteigne la cible au moins une fois soit plus grande que $\frac{2}{3}$.

Exercice II

On suppose que dans un livre de 500 pages,il y a 300 fautes d'impression distribuées au hasard.

Calculer la probabilité pour qu'une page donnée contienne :

i)exactement 2 fautes d'impression ;

ii) 2 fautes d'impression ou plus .

Exercice III

On suppose que 2% des articles produits par une usine sont défectueux.

Calculer la probabilité pour que dans un échantillon de 100 articles,il y ait 3 articles défectueux .

Solutions

Exercice I

Soit X_i la variable aléatoire définie comme suit :

$$X_i = \begin{cases} 1 \text{ si la cible est atteinte au } i^{\text{ème}} \text{ tir} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Cette variable suit une loi de Bernoulli de paramètre $p = \frac{1}{4}$. La variable

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

represente le nombre de fois où la cible est atteinte au bout de n tirs. Elle suit une loi binômiale de taille n et de paramètre p.

i)On cherche la probabilité de l'évènement $A = \{X \geqslant 2\}$. Il est plus simple de calculer celle de $\bar{A} = \{X \leqslant 1\}$. Mais $\bar{A}$ est la réunion disjointe des évènements $\{X=0\}$ et $\{X=1\}$. D'où :

$$P(\bar{A}) = P(X=0) + P(X=1) = (\tfrac{1}{4})^0(\tfrac{3}{4})^7 + 7.(\tfrac{1}{4}).(\tfrac{3}{4})^6 = \frac{7290}{16384}$$

D'où $P(A) = 1 - \frac{7290}{16384} = \frac{4547}{8192} = 0{,}555$.

ii)Soit $E = \{X \geqslant 1\}$ .On cherche n tel que $P(E) \geqslant \frac{2}{3}$. Ce qui est équivalent à $1 - P(\bar{E}) \geqslant \frac{2}{3}$ ou encore $P(\bar{E}) \leqslant \frac{1}{3}$.

Mais $P(\bar{E}) = P(X=0) = (1 - p)^n = (\frac{3}{4})^n$. Ce qui donne $(\frac{3}{4})^n \leqslant 1/3$. En appliquant la fonction Log aux deux membres de cette inégalité on obtient

$$n\text{Log}(\tfrac{3}{4}) \leqslant \text{Log}(\tfrac{1}{3}) \quad \text{i.e} \quad n(\text{Log}3 - \text{Log}4) \leqslant -\text{Log}3$$

ou encore :

$$n \geqslant \frac{\text{Log } 3}{\text{Log}4 - \text{Log}3} = 3{,}81$$

Le nombre de tirs doit donc être supérieur ou égal à 4 .

Exercice II

On prend une page au hasard parmi les 500. La probabilité pour que cette page contienne une faute d'impression est $p = \frac{1}{500}$. Le nombre X de fautes d'impression dans une page est une variable aléatoire qui suit une loi binômiale de taille $n = 300$ et de paramètre $p = \frac{1}{500}$. Comme n est assez grand et p assez petit on peut supposer que X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = np = 300 . \frac{1}{500} = 0,6$.

i)La probabilité pour que la page considérée contienne exactement 2 fautes d'impression est :

$$P(X=2) = \frac{e^{-0,6}\ (0,6)^2}{2!} = \frac{0,19764}{2} = 0,1$$

ii)La probabilité pour que cette même page contienne 2 fautes d'impression ou plus est :

$$P(X \geqslant 2) = 1 - P(X \leqslant 1) = 1 - \frac{e^{-0,6}(0,6)^0}{0!} - \frac{e^{-0,6}(0,6)^1}{1!}$$

$$\simeq 0,122$$

Exercice III

Le nombre X des articles défectueux suit une loi binômiale de taille n=100 et de paramètre p=0,02 . Mais comme n est grand et p petit on peut considérer que X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda=np=2$. D'où :

$$P(X=3) = \frac{2^3\ e^{-2}}{3!} = \frac{1,08}{6} = 0,18 .$$

LOIS DE PROBABILITE
(Suite)

1°- Un directeur de société a son domicile dans la localité A. Il quitte son domicile à 8^h45 et se rend en voiture à son bureau qui ouvre à 9^h. La durée de son trajet est en moyenne de 13 mn, avec un écart-type de 3 mn.

Quelle est la probabilité pour le directeur d'arriver en retard ?

2°- La secrétaire du directeur a son domicile en A, mais elle se rend au bureau en empruntant en A le train de 8^h32; elle descend à la station B. Elle se rend de B à son bureau par l'autobus qui part de B à 8^h50 et qui s'arrête devant le bureau. La durée du trajet en train a pour moyenne 16 mn, pour écart-type 2 mn et la durée du trajet en autobus a pour moyenne 9 mn, pour écart-type 1 mn.

Quelle est la probabilité pour la secrétaire d'arriver à l'heure ?

3°- Quelle est la probabilité pour que le directeur ou la secrétaire arrive à l'heure ?

Les durées de trajet du train, de voiture et de l'autobus sont supposées indépendantes et suivent toutes des lois normales.

Solution

Notons X la durée du trajet en voiture du directeur , Y et Z les durées de trajet de la secrétaire respectivement en train et en autobus. On obtient ainsi 3 variables aléatoires X , Y et Z suivant respectivement des lois normales $N(13,3)$, $N(16,2)$ et $N(9,1)$.

1°-Le directeur sera en retard s'il arrive après 9^h. Comme il quitte son domicile à 8^h45, ceci signifie que la durée de son trajet est strictement supérieure à 15 mn. La probabilité cherchée est donc :

$$P(X > 15)$$

Pour le calcul effectif de cette probabilité, nous procédons à un changement de variable afin de nous ramener à une loi normale centrée réduite pour pouvoir utiliser les tables numériques. On pose alors :

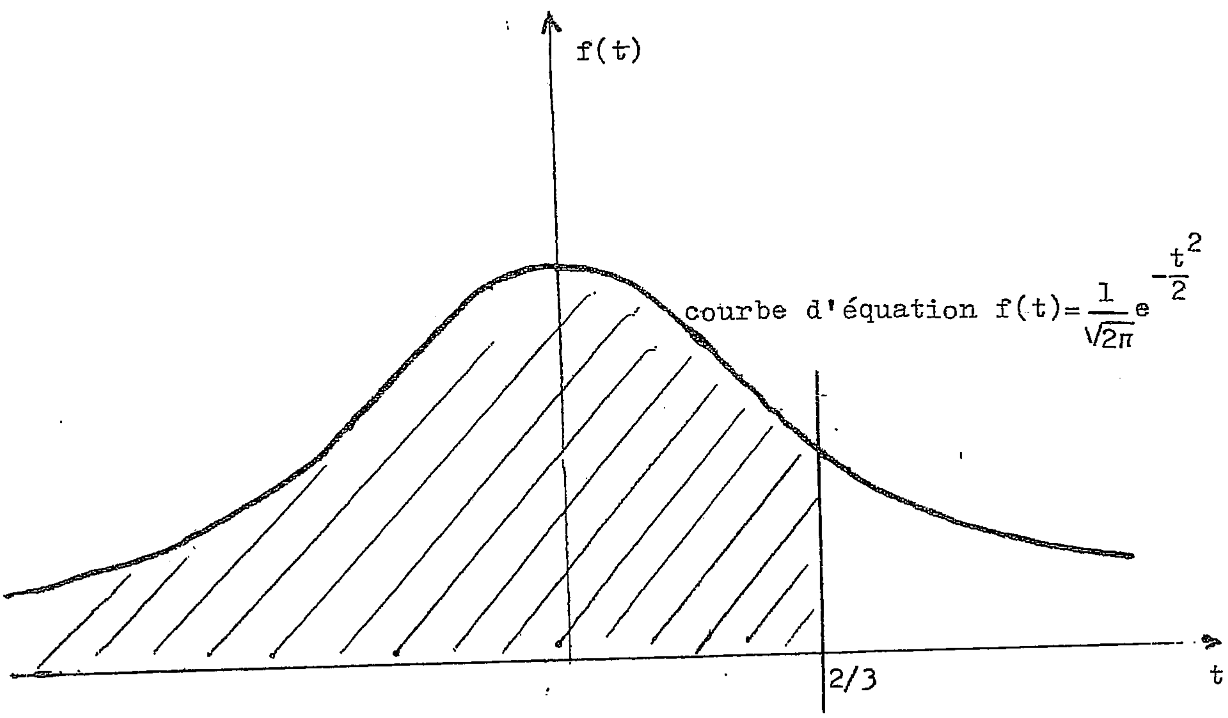
$$X' = \frac{X - 13}{3}$$

Dire que $X > 15$, c'est dire que $X' > \frac{15 - 13}{3} = \frac{2}{3}$. D'où :

$$P(X > 15) = P\left(X' > \frac{2}{3}\right) = 1 - P\left(X' \leqslant \frac{2}{3}\right)$$

Mais $P(X' \leqslant \frac{2}{3})$ = Aire de la partie hachurée i.e la partie délimitée par l'axe des abscisses, la droite d'équation $x = 2/3$ et le graphe de la fonction $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$ qui est la densité de probabilité de la loi normale $N(0\ ,\ 1)$. On a :

$$P(X > 15) = 1 - P\left(X' \leqslant \frac{2}{3}\right) = 1 - 0{,}7454 = 0{,}2546 .$$



2°-La secrétaire arrive à l'heure si la durée du trajet en train est inférieure ou égale à 18 mn et celle du trajet en autobus est inférieure ou égale à 10 mn. La probabilité cherchée est donc :

$$P(Y \leqslant 18 \text{ et } Z \leqslant 10) = P(Y \leqslant 18).P(Z \leqslant 10)$$

puisque Y et Z sont indépendantes.

En posant : $Y' = \dfrac{Y - 16}{2}$ et $Z' = \dfrac{Z - 9}{1}$

on trouve : $P(Y \leqslant 18) = P(Y' \leqslant 1)$ et $P(Z \leqslant 10) = P(Z' \leqslant 1)$ et donc :

$$P(Y \leqslant 18 \text{ et } Z \leqslant 10) = (0,8413)^2 = 0,7078 .$$

3°-Soient E et F respectivement les évènements "le directeur arrive à l'heure" et "la secrétaire arrive à l'heure". On a :

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F) .$$

Or $P(E) = 1 - P(\bar{E}) = 0,7454$ d'après 1° et $P(F) = 0,7078$ d'après 2° et E et F sont indépendants. D'où :

$$P(E \cup F) = 0,7454 + 0,7078 - 0,7454.0,7078 = 0,9256 .$$

LOIS DE PROBABILITE

Droite de Henry

La distribution des poids de 1000 individus est donnée par le tableau suivant :

Poids en Kg	Effectifs
[50 , 55[	35
[55 , 60[	70
[60 , 65[	120
[65 , 70[	185
[70 , 75[	210
[75 , 80[	175
[80 , 85[	115
[85 , 90[	65
[90 , 95[	25

On note X la variable aléatoire "poids". On veut alors vérifier graphiquement, à l'aide de la droite de Henry, si X suit une loi normale.

1°- Calculer la fonction de répartition observée de X.

2°- Déterminer à l'aide de la table de N(0,1) les valeurs de la variable Z correspondant à cette fonction.

3°- Representer dans le plan (X,Z) les points dont les abscisses sont les bornes supérieures des classes et les ordonnées les valeurs de Z correspondantes.

4°- Ajuster le nuage de points ainsi obtenu en utilisant la méthode des moindres carrés.

5°- Estimer la moyenne m et l'écart-type σ de la variable aléatoire normale qui ajuste X.

Solution

1° - La fonction de répartition observée de X associe à la borne supérieure de chaque classe la fréquence cumulée de cette classe. Les valeurs de cette fonction F_c sont données dans le tableau qui suit :

Poids	Borne supérieure	F_c
[50 , 55[	55	0,035
[55 , 60[	60	0,105
[60 , 65[	65	0,225
[65 , 70[	70	0,410
[70 , 75[	75	0,620
[75 , 80[	80	0,795
[80 , 85[	85	0,910
[85 , 90[	90	0,975
[90 , 95[	95	1,000

2° - Calculons les valeurs de la variable normale centrée réduite Z correspondant à F_c. La première valeur z_1 est telle que :

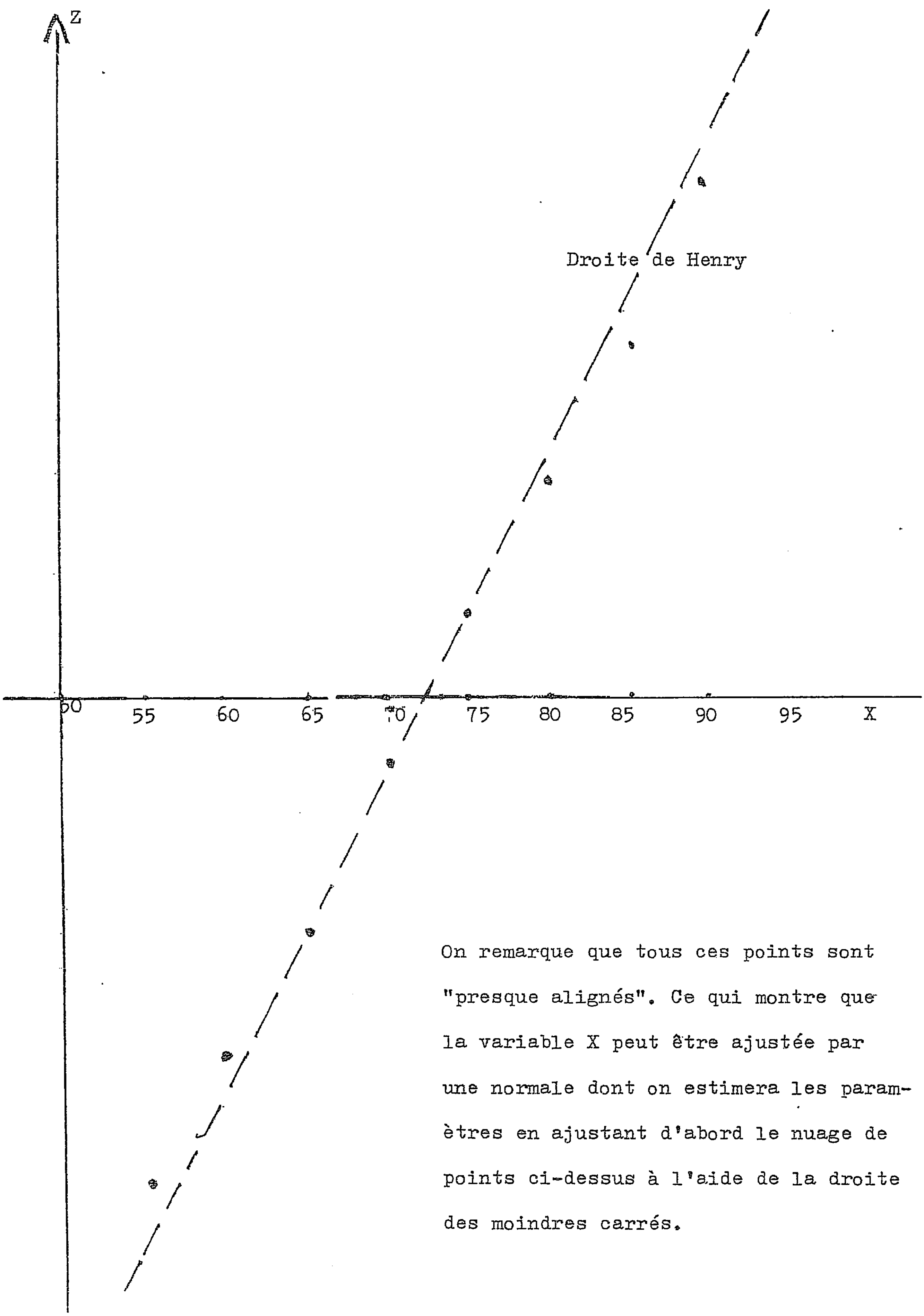
Probabilité$(Z < z_1) = 0,035$.

En utilisant la table de N(0,1) on obtient $z_1 = -1,82$.

La même démarche permet de déterminer les autres valeurs de Z. Elles sont données dans le tableau suivant :

z_i	-1,82	-1,25	-0,76	-0,25	0,31	0,82	1,34	1,96	3

3° - Representation du nuage de points défini par (X,Z).



On remarque que tous ces points sont "presque alignés". Ce qui montre que la variable X peut être ajustée par une normale dont on estimera les paramètres en ajustant d'abord le nuage de points ci-dessus à l'aide de la droite des moindres carrés.

4°- Ajustement du nuage de points par la droite des moindres carrés.

On cherche la relation linéaire qui donne Z en fonction de X. Elle est de la forme :

$$Z = aX + b \quad \text{où} \quad a = \frac{\mathrm{Cov}(X,Z)}{\mathrm{Var}(X)} \quad \text{et} \quad b = \overline{Z} - a.\overline{X} \; ;$$

(cf appendice pour ces formules).

Posons $X' = \dfrac{X - 75}{5}$. D'où $X = 5.X' + 75$

Par suite $\mathrm{Var}(X) = 25\mathrm{Var}(X')$ et $\mathrm{Cov}(X,Z) = 5\ \mathrm{Cov}(X',Z)$. Nous résumons les calculs dans le tableau ci-après :

X	Z	X'	X'^2	X'Z
55	-1,82	-4	16	7,28
60	-1,25	-3	9	3,75
65	-0,76	-2	4	1,52
70	-0,25	-1	1	0,25
75	0,31	0	0	0
80	0,82	1	1	0,82
85	1,34	2	4	1,68
90	1,96	3	9	5,88
95	3	4	16	12
	3,15	0	60	33,18

En utilisant ce tableau on calcule :

$\overline{X'} = 0$, d'où $\overline{X} = 75$ $\qquad \overline{X'^2} = 6,66$

$\overline{Z} = \dfrac{3,15}{9} = 0,35 \qquad \overline{X'Z} = \dfrac{33,18}{9} = 3,68$.

Ce qui donne :

$$\mathrm{Var}(X) = 25\ \mathrm{Var}(X') = 25.\overline{X'^2} = 25.6,66 = 166,66$$

$$\mathrm{Cov}(X,Z) = 5\ \mathrm{Cov}(X',Z) = 5.\overline{X'Z} = 5.3,68 = 18,4\ .$$

On a utilisé le fait que $\overline{X'} = 0$ pour calculer Var(X') et Cov(X',Z).

On obtient finalement :

$$a = \frac{18,4}{166,6} = 0,11 \quad \text{et} \quad b = 0,35 - 0,11.75 = -7,9\ .$$

L'équation cherchée est donc $\boxed{Z = 0,11X - 7,9}$.

5° - La variable Z est la normale centrée réduite associée à la normale X dont les paramètres sont m et σ que l'on va estimer. On a :

$$Z = \frac{X - m}{\sigma}$$ d'une part; et d'autre part d'après la question qui précède on a $Z = 0,11.X - 7,9$.

En identifiant ces deux équations on obtient les égalités suivantes:

$$\frac{1}{\sigma} = 0,11 \quad \text{et} \quad \frac{m}{\sigma} = 7,9\ .$$

Ceci donne $m = 71,89$ et $\sigma = 9,1$.

En conclusion on peut considérer que X suit une loi normale N(71,89;9,1).

Appendice — Droite des moindres carrés

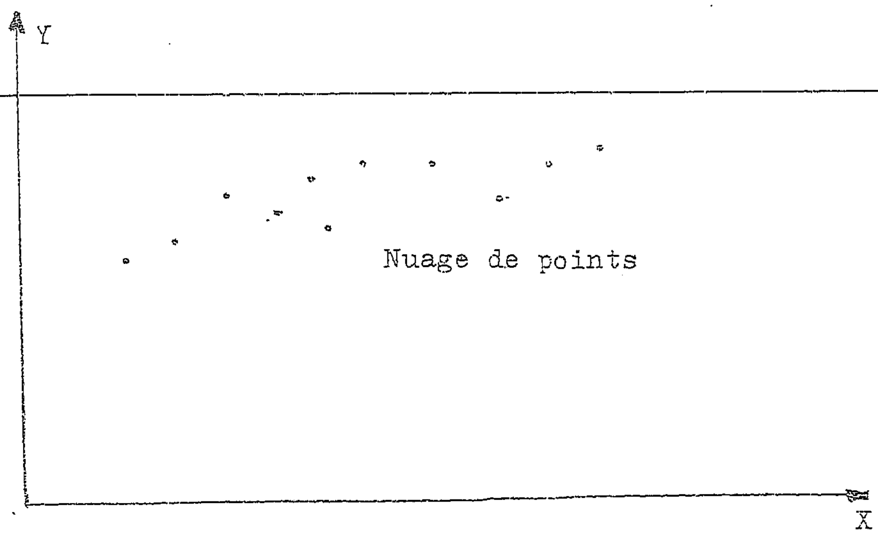
1° - Position du problème.

Soit S une population de N individus qu'on numérotera de 1 à N. On suppose définis sur cette population deux caractères quantitatifs X et Y : à n'importe quel individu $i = 1, \dots, N$ on associe deux valeurs x_i et y_i. On obtient ainsi deux séries statistiques (ou deux variables aléatoires reelles) X et Y dont les distributions sont données par le tableau qui suit :

X	x_1	x_2	......	x_N
Y	y_1	y_2	......	y_N
Fréquence	$\frac{1}{N}$	$\frac{1}{N}$	......	$\frac{1}{N}$

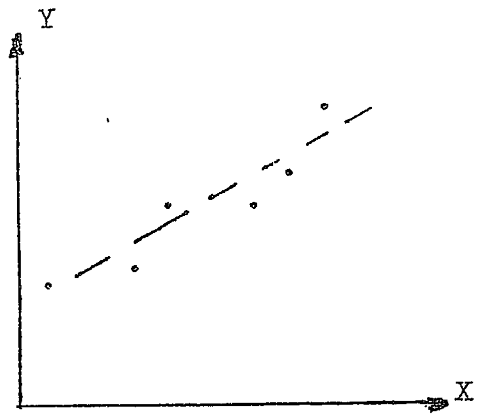
Les deux variables aléatoires X et Y suivent toutes les deux une même loi uniforme.

Pour chaque i le couple (x_i, y_i) définit un point dans le plan (qu'on suppose muni d'un repère orthonormé par exemple) dont l'abscisse est x_i et l'ordonnée y_i. On obtient alors un <u>nuage de points</u>.

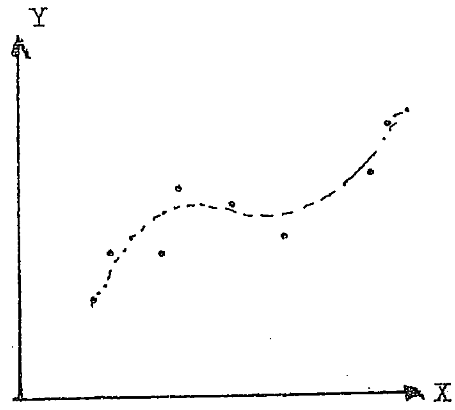


Il est alors naturel de se demander s'il existe une courbe qui soit "la plus proche de tous les points" (en un sens qu'on précisera par la suite). L'interêt d'une telle courbe est, bien-entendu, d'établir une relation fonctionnelle entre X et Y qui permettra de calculer par exemple Y connaissant X. Rechercher cette courbe, c'est faire un <u>ajustement</u> du nuage de points.

Le choix de la courbe n'est pas facile, encore moins son calcul. Nous nous contenterons de traiter la question dans le cas d'une droite. Dans ce cas, on dira que l'<u>ajustement est linéaire</u>.



Ajustement linéaire



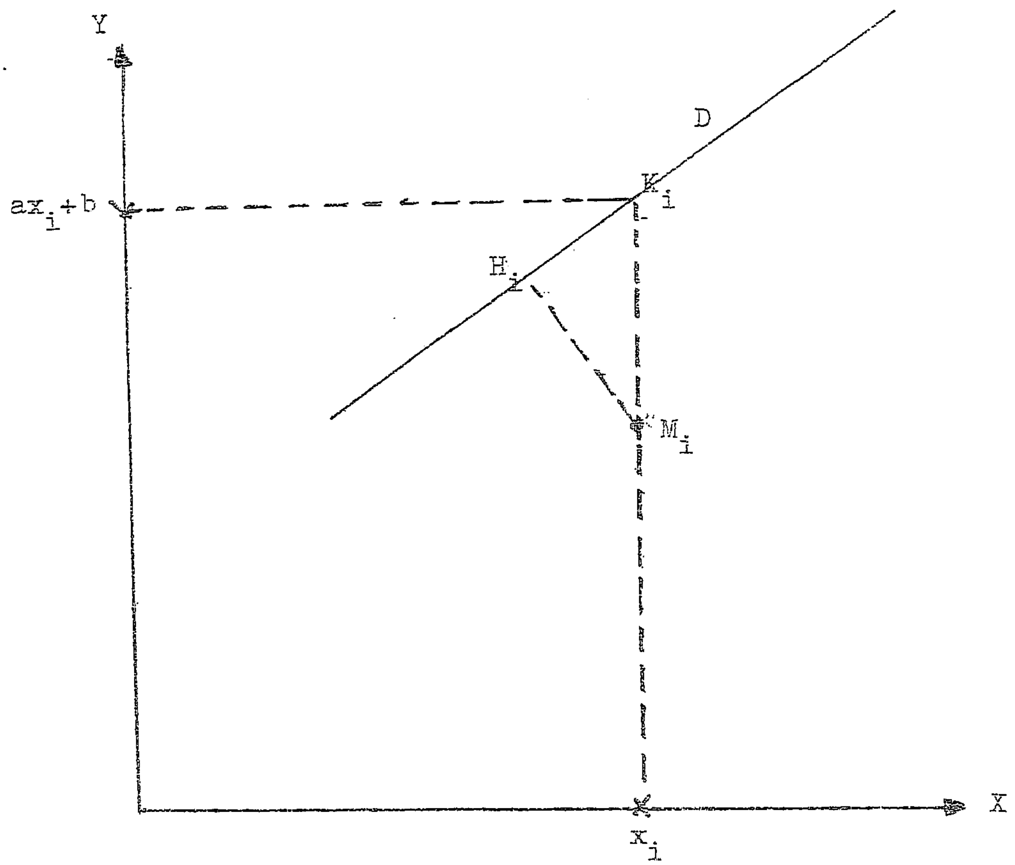
Ajustement non linéaire

2° - <u>Ajustement par la droite des moindres carrés.</u>

Considérons les N points M_i $i=1,\ldots,N$ définis par les deux séries X et Y et notons D la droite cherchée. La distance de M_i à D est la mesure du segment M_iH_i où H_i est le pied de la perpendiculaire à D passant par M_i. Le calcul de cette distance est relativement compliqué. On utilisera plutôt la distance "verticale" de M_i à D. Notons K_i le point de rencontre de D et de la droite d'équation $X=x_i$ et supposons que l'équation de D est de la forme :

$$Y = aX + b$$

où a et b sont des réels.



La distance de M_i à K_i est le nombre positif ou nul :

d_i = Valeur absolue de (ordonnée de K_i - ordonnée de M_i).

Or le point K_i est sur la droite D; donc si son abscisse est x_i (la même que celle de M_i) son ordonnée est ax_i+b puisque tout point de la droite D vérifie l'équation $Y = aX + b$. D'où :

$$d_i = \left| ax_i + b - x_i \right| .$$

Nous chercherons la droite D de telle sorte que la somme des carrés de tous les d_i :

$$U = \sum_{i=1}^{N} d_i^2$$

soit minimale.

Une telle droite est appelée droite des moindres carrés de Y en X .

Pour déterminer completement et uniquement cette droite il suffit de montrer que a et b existent, sont uniques et rendent U minimale.

Reprenons la quantité :

$$U = \sum_{i=1}^{N} (ax_i + b - x_i)^2$$

On a d'abord :

$$(ax_i + b - x_i)^2 = x_i^2 a^2 - 2x_i(y_i - b)a + (y_i - b)^2$$

et par suite :

$$U = (\sum_{i=1}^{N} x_i^2)a - 2\ (\sum_{i=1}^{N} x_i(y_i - b))a + \sum_{i=1}^{N}(y_i - b)^2$$

On pose $A = \sum_{i=1}^{N} x_i^2$ $\qquad B = \sum_{i=1}^{N} x_i(y_i - b)$ $\quad$ et $\quad C = \sum_{i=1}^{N}(y_i - b)^2$

L'expression U est alors un polynôme du second degré en a :

$$U = A\,a^2 - 2B\,a + C \quad .$$

Puisque A est positif ce polynôme atteint son minimum au point a qui est racine de la dérivée de U considérée comme fonction de a :

$$U'(a) = 2A\,a - 2B.$$

D'où $U'(a) = 0$ si et seulement si :

$$a = \frac{B}{A}$$

c'est-à-dire

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i(y_i - b)}{\sum_{i=1}^{N} x_i^2}$$

(1) : $a = \dfrac{\overline{X.Y} - b.\overline{X}}{\overline{X^2}}$ où la notation $\overline{Z}$ designe pour la série Z

sa moyenne arithmétique.

Si on considère cette fois-ci U comme un polynôme du second degré en b, un calcul analogue à celui qu'on vient de faire donne :

$$b = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} y_i - \frac{a}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i$$

qui n'est rien d'autre que :

(2) : $b = \overline{Y} - a.\overline{X}$

On montre donc que le point moyen $G = (\overline{X},\overline{Y})$ dont les coordonnées sont les moyennes arithmétiques respectives de X et Y est sur la droite des moindres carrés.

Les équations (1) et (2) donnent finalement :

$$a = \frac{\overline{X.Y} - \overline{X}.\overline{Y}}{\overline{X^2} - \overline{X}^2} = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\mathrm{Var}(X)}$$

$$b = \overline{Y} - a.\overline{X} .$$

LOIS DE PROBABILITE
(Suite)

Exercice I

On suppose que le nombre de personnes fréquentant un grand magasin dans une journée est une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de parmètre λ et que chaque personne fréquentant ce magasin a une probabilité p de se faire voler son portefeuille.

1°- a)Calculer la probabilité pour que k portefeuilles soient volés sachant que n personnes ont fréquenté le magasin.

b)Calculer la probabilité $p(n,k)$ pour que n personnes fréquentent le magasin et k d'entre elles se fassent voler le portefeuille.

2°-On désigne par $q(k)$ la probabilité pour que k vols de portefeuilles soient effectués dans une journée.

a)Démontrer que $q(k) = \sum_{n=k}^{\infty} p(n,k)$.

b)En utilisant la formule $e^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}$ déterminer $q(0)$ puis $q(k)$.

c)Quelle est la loi de probabilité du nombre de portefeuilles volés dans une journée ?

Exercice II

La probabilité d'obtenir l'as dans le jet d'un dé donné est égale à 1/6. On lance le dé n fois.

Déterminer des valeurs de n telles que la proportion d'apparitions de l'as soit égale à 1/6, à 1/100 près , avec une probabilité au moins égale à 0,98 :

$$P\left(\left| X - \frac{1}{6} \right| < \frac{1}{100} \right) \geq 0,98 .$$

Solutions

Exercice I

Soient X et Y respectivement le nombre de personnes qui ont fréquenté le magasin et le nombre de portefeuilles volés.

1°-L'évènement "k portefeuilles ont été volés sachant que n personnes ont fréquenté le magasin" où $0 \leq k \leq n$ est "associé" à une loi binomiale de taille n et de paramètre p. D'où :

a) $$P(Y=k/X=n) = C_n^k\, p^k (1-p)^{n-k} \quad .$$

b)On a :

$$P(X=n \text{ et } Y=k) = P(X=n).P(Y=k/X=n) = p(n,k).$$

Mais :

$$P(X=n) = \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}$$

car X suit une loi de Poisson de paramètre λ . Ce qui donne :

$$p(n,k) = C_n^k\, \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}\, p^k (1-p)^{n-k} \quad .$$

Comme $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ p(n,k) peut s'écrire encore :

$$p(n,k) = \frac{e^{-\lambda}(\lambda p)^k}{k!}\, \frac{(\lambda(1-p))^{n-k}}{(n-k)\,!} \quad .$$

2°-L'évènement "k portefeuilles ont été volés au cours d'une journée" s'écrit :

$$\{Y=k\} = \bigcup_{n \geq k} \{X=n \text{ et } Y=k\} \quad .$$

Comme les évènements $\{X=n \text{ et } Y=k\}$ et $\{X=n' \text{ et } Y=k\}$ sont disjoints pour $n \neq n'$ on a :

a) $$q(k) = P(Y=k) = \sum_{n=k}^{\infty} P(X=n \text{ et } Y=k)$$

soit $q(k) = \sum_{n=k}^{\infty} p(n,k)$.

En remplaçant p(n,k) par sa valeur obtenue à la question précédente on trouve :

$$q(k) = \frac{e^{-\lambda}(\lambda p)^k}{k!} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(\lambda(1-p))^{n-k}}{(n-k)!}$$

b) Si k=0 on a :

$$q(0) = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda(1-p))^n}{n\,!} \quad .$$

En posant $t = \lambda(1-p)$ et en utilisant la formule $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} = e^t$ on obtient : $q(0) = e^{-\lambda} e^t = e^{-\lambda} e^{\lambda(1-p)} = e^{-\lambda p}$.

Si k est quelconque on fait un changement d'indice $m = n-k$; on utilise à nouveau le developpement de l'exponentielle e^t sous forme de série et on obtient :

$$\sum_{n=k}^{\infty} \frac{t^{n-k}}{(n-k)!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!} = e^t \quad .$$

Ce qui donne finalement :

$$q(k) = \frac{e^{-\lambda}(\lambda p)^k e^{\lambda(1-p)}}{k!}$$

i.e $q(k) = \dfrac{e^{-\lambda p}(\lambda p)^k}{k!} = \dfrac{e^{-\lambda'}(\lambda')^k}{k!}$

avec $\lambda' = \lambda p$.

c) Ce qui précède montre que la variable aléatoire Y suit une loi de Poisson de paramètre λ' .

Exercice II

Soit Y la variable aléatoire qui compte le nombre d'apparitions de l'as. Elle suit une loi binômiale de taille n et de paramètre $p = 1/6$. Elle a donc pour espérance mathématique $E(Y) = \frac{n}{6}$ et pour variance $\sigma_Y^2 = \frac{5n}{36}$. Si X est la proportion des as obtenus, l'évènement $\left\{|X - \frac{1}{6}| < \frac{1}{100}\right\}$ est égal à l'évènement $\left\{|Y - \frac{n}{6}| < \frac{n}{100}\right\}$. Il suffit donc de déterminer des valeurs de n telles que :

$$P\left(|Y - \frac{n}{6}| < \frac{n}{100}\right) \geqslant 0,98 \qquad (1) \quad .$$

Comme $P\left(|Y - \frac{n}{6}| < \frac{n}{100}\right) = 1 - P\left(|Y - \frac{n}{6}| \geqslant \frac{1}{100}\right)$ l'inégalité (1) est équivalente à :

$$P\left(|Y - \frac{n}{6}| \geqslant \frac{n}{100}\right) \leqslant 0,02 \qquad (2) \quad .$$

Mais d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebycheff on a :

$$P\left(|Y - \frac{n}{6}| \geqslant \frac{n}{100}\right) \leqslant \frac{\sigma_Y^2}{\left(\frac{n}{100}\right)^2} \qquad \text{i.e} \quad P\left(|Y - \frac{n}{6}| \quad \frac{n}{100}\right) \leqslant \frac{5.10^4}{36n}$$

Pour que (1) soit vérifiée il suffit (ce n'est pas nécessaire) d'avoir :

$$\frac{5.10^4}{36n} \leqslant 0,02 \qquad \text{i.e} \quad n \geqslant \frac{5.10^6}{72} \quad .$$

Ce qui donne $n \geqslant 69445$.

Que peut-on obtenir si on utilise une approximation de Y par une variable aléatoire Y' suivant une loi normale ?

Supposons que n est grand de telle sorte que Y se confond avec Y'. Elle a pour moyenne $m = \frac{n}{6}$ et pour écart-type $\sigma = \frac{5n}{6}$. Posons :

$$Z = \frac{Y' - m}{\sigma} \quad .$$

La variable Z suit une loi normale centrée réduite. L'inégalité (2) devient

$$P\left(|Z| \geqslant \frac{n}{100\sigma}\right) \leqslant 0,02$$

ou $$P(|Z| \geqslant \alpha) \leqslant 0,02 \qquad \text{avec } \alpha = \frac{n}{100\sigma} = \frac{3}{50}\sqrt{\frac{n}{5}}$$

En utilisant la table de la loi normale on obtient :

$$\alpha \geqslant 0,26 \; .$$

D'où $\frac{3}{50}\sqrt{\frac{n}{5}} \geqslant 0,26$ i.e $n \geqslant \left(\frac{50 \cdot 0,26 \cdot \sqrt{5}}{3}\right)^2$

$$n \gtrsim 94 \; .$$

On voit donc que la différence est appréciable ! Ceci explique pourquoi l'inégalité de Bienaymé-Tchebycheff, bien qu'elle soit intéressante du point de vue théorique (elle permet par exemple de démontrer certains théorèmes de convergence), n'a pas une grande utilité pratique.

Probabilités et Statistiques

Partiel I

Exercice I

On affecte p tâches à n personnes. De combien de manières ceci est-il possible si :

i) Les tâches sont discernables, chaque personne ne pouvant accomplir qu'une seule tâche ?

ii) Les tâches sont discernables, chaque personne pouvant accomplir un nombre quelconque de tâches ?

iii) Les tâches sont indiscernables, chaque personne ne pouvant accomplir qu'une seule tâche ?

Exercice II

Alors que monsieur Hasard s'habillait pour aller à une réception il se produit une panne d'éléctricité. Sa chambre était dans une obscurité totale, il se dirige vers le tiroir où étaient jetés dans un désordre complet ses chaussettes (10 noires et 10 vertes) et ses gants (2 paires de noirs et 4 paires de verts); il y prit 2 chaussettes et 2 gants.

i) Quelle est la probabilité pour qu'il soit correctement habillé ?

ii) Quelle est la probabilité pour que les chaussettes et les gants pris soient de la même couleur ?

iii) Sachant qu'il porte des chaussettes et des gants de la même couleur quelle est la probabilité pour que cette couleur soit noire ?

Exercice III

Un laboratoire fabrique un alcool-test et les essais montrent que :

i) 2% des personnes qui subissent cet alcool-test sont en état d'ébriété .

ii) 96 fois sur 100 l'alcool-test a donné un résultat positif alors que la personne était vraiment en état d'ébriété.

iii) 97 fois sur 100 l'alcool-test a donné un résultat négatif alors que la personne n'était pas en état d'ébriété.

On essaie l'appareil sur une personne et on constate que le résultat est positif. Quelle est la probabilité pour qu'elle ne soit pas en état d'ébriété ?

Exercice IV

Soit (X,Y) un couple aléatoire dont la loi de probabilité est donnée par le tableau qui suit :

(X,Y)	(0,1)	(0,2)	(1,1)	(1,2)
Probabilité	1/3	1/6	1/6	1/3

i) Donner la loi de X et celle de Y. Calculer E(X) et E(Y).

ii) On pose Z = X.Y . Donner la loi de Z.

iii) Calculer E(Z) et en déduire que X et Y ne sont pas indépendantes.

VOIR LE CORRIGE EN PAGE SUIVANTE

Corrigé du Partiel I

Exercice I

Notons $t_1,\dots,t_p$ les tâches dans l'ordre d'affectation.

i) t_1 peut être affectée de n manières différentes parce que il y a n personnes. La tâche t_2 peut être affectée de (n-1) manières. En effet une personne ne pouvant accomplir qu'une seule tâche, il ne reste plus que (n-1) personnes.

En poursuivant le même raisonnement, on montre aisément que le nombre x cherché est égal au nombre de p-arrangements parmi n objets i.e :

$$x = A_n^p = n(n-1)(n-2)\dots(n-p+1) \quad .$$

ii) Une personne pouvant accomplir plusieurs tâches à la fois, chaque tâche t_i pour $i=1,\dots,p$ peut être affectée de n manières différentes. D'où le nombre y cherché :

$$y = \underbrace{n.\ \dots\ .n}_{p \text{ fois}} = n^p \quad .$$

iii) Dans ce cas le nombre z cherché n'est rien d'autre que le nombre de p-combinaisons de n objets i.e :

$$z = C_n^p = \frac{p!}{p!(n-p)!} \quad .$$

Exercice II

Le résultat d'un tirage suivant le cas sera noté :

D = "gant droit" G = "gant gauche"

V = "couleur verte" N = "couleur noire" .

On notera i l'ordre du tirage d'un gant qui peut prendre 2 valeurs 1 et 2.

i) L'évènement A = "Monsieur Hasard est correctement habillé" signifie qu'il a pris 2 gants de la même couleur dont l'un est droit, l'autre est gauche et 2 chaussettes de la même couleur. D'où :

$$A = \left[(CN_1 \cap CN_2) \cup (CV_1 \cap CV_2)\right] \cap \left[(DN_1 \cap GN_2) \cup (DV_1 \cap GV_2) \cup (GV_1 \cap DV_2) \cup (GN_1 \cap DN_2)\right]$$

Pour simplifier on posera :

$$A_1 = CN_1 \cap CN_2 \qquad A_2 = CV_1 \cap CV_2 \qquad A'_1 = DN_1 \cap GN_2$$

$$A'_2 = DV_1 \cap GV_2 \qquad A''_1 = GN_1 \cap DN_2 \qquad A''_2 = GV_1 \cap DV_2$$

Toutes ces 2-intersections qui composent A sont des évènements incompatibles et indépendants. D'où :

$$P(A) = \left[P(A_1) + P(A_2)\right] . \left[P(A'_1) + P(A'_2) + P(A''_1) + P(A''_2)\right].$$

Calculons par exemple $P(A'_2)$. On a 4 possibiltés sur 12 pour choisir un gant droit vert. Il restera donc 11 gants parmi lesquels il y a 4 gants gauches verts. Ce qui donne :

$$P(A'_2) = \frac{4}{12} . \frac{4}{11} .$$

Un raisonnement du même type permet de calculer les probabilités des autres évènements qui composent A. On obtient finalement :

$$P(A) = \left(\frac{10}{20} . \frac{9}{19} + \frac{10}{20} . \frac{9}{10}\right) . \left(\frac{2}{12} . \frac{2}{11} + \frac{4}{12} . \frac{4}{11} + \frac{2}{12} . \frac{2}{11} + \frac{4}{12} \frac{4}{11}\right)$$

i.e $\boxed{P(A) = 0,1435}$.

ii) Soit B l'évènement "Les chaussettes et les gants sont de la même couleur". On a :

$$B = \left[A_1 \cap (A'_1 \cup A''_1)\right] \cup \left[A_2 \cap (A'_2 \cup A''_2)\right] .$$

Donc :

$$P(A) = P(A_1) . \left[P(A'_1) + P(A''_1)\right] + P(A_2) . \left[P(A'_2) + P(A''_2)\right]$$

$$= \left(\frac{10}{20} . \frac{9}{19}\right) . \left(\frac{2}{12} \frac{2}{11} + \frac{2}{12} . \frac{2}{11}\right) + \left(\frac{10}{20} . \frac{9}{19}\right) . \left(\frac{4}{12} \frac{4}{11} + \frac{4}{12} . \frac{4}{11}\right) = 0,0718 .$$

iii) Soit N l'évènement "Monsieur Hasard porte des gants et des chaussettes noirs". On a :

$$P(N/B) = \frac{P(N \cap B)}{P(B)} \quad .$$

Mais $N \cap B = A_1 \cap (A_1' \cup A_1'')$. D'où : $P(N/B) = \frac{P(A_1).(P(A_1') + P(A_1''))}{P(B)}$

$$P(N/B) = \frac{(\frac{10}{20}.\frac{9}{19})(\frac{2}{12}.\frac{2}{11} + \frac{2}{12}.\frac{2}{11})}{0,718} = 0,2 \quad .$$

Exercice III

Pour une personne qui a subi un alcool-test notons les évènements :

E = "état d'ébriété"

A^+ = "Alcool-test positif"

A^- = "Alcool-test négatif" .

On a :

$P(\bar{E}/A^+) = \frac{P(\bar{E} \cap A^+)}{P(A^+)}$ par définition d'une probabilité conditionnelle.

D'après le théorème de Bayes on a :

$$P(\bar{E}/A^+) = \frac{P(\bar{E}).P(A^+/\bar{E})}{P(\bar{E}).P(A^+/\bar{E}) + P(E).P(A^+/E)} \; .$$

D'après les données du problème on a :

$$P(\bar{E}) = 1 - P(E) = 1 - 0,02 = 0,98$$

$$P(A^+/\bar{E}) = 1 - P(A^-/\bar{E}) = 1 - 0,97$$

$$P(A^+/E) = 0,96 \quad .$$

On obtient finalement :

$$P(\bar{E}/A^+) = \frac{0,98 \; . \; 0,03}{0,98 \; . \; 0,03 + 0,02 \; . \; 0,96} = 0,6049 \quad .$$

Exercice IV-

i) Loi de X . La variable aléatoire X prend 2 valeurs qui sont 0 et 1. Sa distribution est donnée par le tableau qui suit :

X	0	1
$P(X = x_i)$	1/2	1/2

C'est donc une loi de Bernouilli de paramètre p = 1/2. Elle a pour espérance mathématique :

$$E(X) = 1/2 . 0 + 1/2 . 1 = 1/2 .$$

Pour Y on trouve la distribution suivante :

Y	1	2
$P(Y = y_j)$	1/2	1/2

Son espérance mathématique est :

$$E(Y) = 1/2 . 1 + 1/2 . 2 = 3/2 .$$

ii) Loi de Z = X.Y

La v. a Z prend 3 valeurs : 0 , 1 et 2 . Elle a pour distribution :

Z	0	1	2
$P(Z = z_k)$	1/2	1/6	1/3

Son espérance mathématique est :

$$E(Z) = 1/2 . 0 + 1/6 . 1 + 1/3 . 2 = 5/6 .$$

iii) On remarque que $E(Z) = E(X.Y)$ n'est pas égale au produit des espérances E(X) et E(Y). Ceci implique que les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes.

Probabilités et Statistiques

Partiel II

Exercice I

Le Directeur se précipite sur ses 2 secrétaires pour la frappe d'un texte de 2 parties chacune de 1000 caractères. Il confie à chacune une partie. La probabilité que la $1^{ère}$ fasse une erreur de frappe est 0,002 par caractère (0,001 pour la seconde).

Quelle est la probabilité de trouver dans le texte frappé 3 erreurs au moins ? Faire une approximation s'il y a lieu.

Exercice II

Les notes obtenues lors d'un partiel Philosophie, d'un échantillon de 100 étudiants se répartissent comme suit :

X	$[0, 5[$	$[5, 8[$	$[8, 10[$	$[10, 12[$	$[12, 15[$	$[15, 20[$
n_i	5	18	20	26	21	10

Peut on dire que X suit une loi normale ? Si oui estimer ses paramètres.

Exercice III

Dans une entreprise le nombre d'employés absents un jour quelconque est une variable aléatoire X dont la distribution de probabilités est la suivante :

X	1	2	3	4	5	6
Prob	0,3	0,25	0,2	0,15	0,07	0,03

Observer par une simulation, à l'aide des nombres au hasard qui suivent, le nombre d'absents aux 10 jours ouvrables de 2 semaines consécutives.

Nombres au hasard : 6 3 8 2 6 1 4 1 4 6 4 0 9 9 3 9 3 8 4 9 .

Exercice IV

Les 400 inscrits en $2^{ème}$ année AES ont un poids dont la moyenne est $m = 65$ Kg et un écart-type $\sigma = 5$ Kg.

On choisit au hasard 100 étudiants pour visiter les entreprises de la région. Pour cela on dispose de 2 bus de charge maximum (les 2 ensemble) de 6600 Kg.

Avec quelle probabilité ces 2 bus suffisent-ils pour transporter -sans bagages - ces 100 étudiants ?

Corrigé du Partiel II

Exercice I

Pour $i=1,\ldots,1000$ soit X_i la variable aléatoire définie par :

$$X_i = \begin{cases} 1 \text{ si la première secrétaire commet une erreur au } i^{ème} \text{ caractère} \\ 0 \quad \text{sinon} \end{cases}$$

La v.a X_i suit une loi de Bernouilli de paramètre $p_1 = 0{,}002$. Toutes les v.a X_i sont indépendantes et suivent la même loi. La somme :

$$X = X_1 + \ldots + X_{1000}$$

represente le nombre total d'erreurs commises par la première secrétaire et suit une loi binômiale de taille $n = 1000$ et de paramètre $p_1 = 0{,}002$. Soit Y le nombre total d'erreurs commises par la seconde secrétaire. En raisonnant comme précédemment on montre que Y suit une loi binômiale de taille $n = 1000$ et de paramètre $p_2=0{,}001$.

Les variables aléatoires X et Y sont indépendantes. Leur somme $S = X + Y$ represente le nombre total d'erreurs de frappe commises par les 2 secrétaires.

Soit A l'évènement "Le texte frappé comporte 3 erreurs au moins". L'évènement contraire s'écrit :

$A^c = \{ S \leqslant 2 \}$.

On remarque que n est grand n=1000 , $p_1=0{,}002$ petit et $np_1=2$. On peut donc supposer que X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda_1 = np_1=2$. De la même manière on peut supposer que Y suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda_2 = np_2 = 1$. Par suite S = X + Y peut être approximée par une v.a suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 = 3$. D'où :

$$\begin{aligned} P(A) &= 1 - P(A^c) = 1 - P(S \leqslant 2) \\ &= 1 - \left[P(S=0) + P(S=1) + P(S=2) \right] \\ &= 1 - \left[\frac{e^{-3}3^0}{0!} + \frac{e^{-3}3^1}{1!} + \frac{e^{-3}3^2}{2!} \right] \\ &= 0{,}5767 \end{aligned}$$

Exercice II

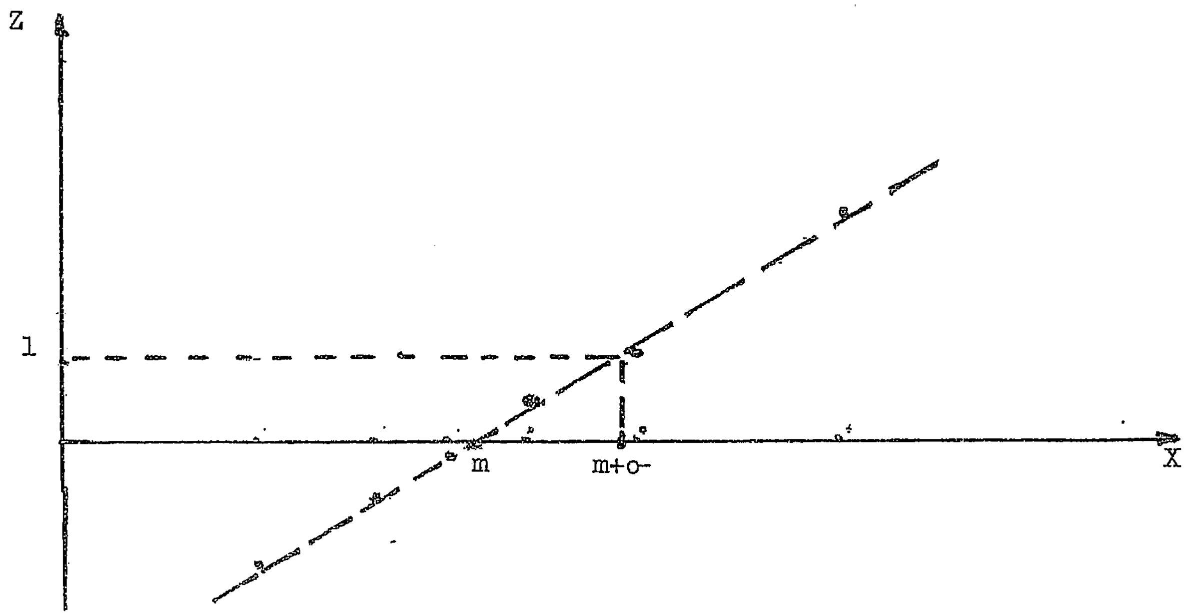
Pour tester la normalité de X nous allons utiliser la droite de Henry.

Nous aurons besoin de calculer les fréquences cumulées et les valeurs associées z_i de la normale centrée réduite. La valeur z_i est telle que

$$P(Z < z_i) = f_{ic}$$

X	[0 , 5[	[5 , 8[	[8 , 10[	[10 , 12[	[12 , 15[	[15 , 20[
n_i	5	18	20	26	21	10
f_{ic}	0,05	0,23	0,43	0,69	0,90	1
z_i	-1,64	-0,74	-0,18	0,49	1,28	3

On represente le nuage de points défini par (X,Z) :



On constate que les points sont presque alignés. On peut donc écrire :

$$Z = \frac{X - m}{\sigma} .$$

Nous estimerons graphiquement les valeurs de m et σ.

Si Z = 0 on a X = m ; la droite de Henry coupe l'axe des x en $\hat{m}$=10,2.

Si Z = 1 on a X = σ + m ; d'où σ = 13,5 - 10,2 = 3,3 .

La variable X suit donc une loi normale de moyenne 10,2 et d'écart-type 3,3.

Exercice III

On considère 10 tranches de 2 chiffres chacune parmi les 20 Proposés.

63-82-61-41-46-40-99-39-38-49

A chaque valeur de X on associe un ensemble d'entiers de la façon suivante :

1 $\longrightarrow \{00, \dots, 29\}$

2 $\{30, \dots, 54\}$

3 $\{55, \dots, 74\}$

4 $\{75, \dots, 89\}$

5 $\{90, \dots, 96\}$

6 $\{97, \dots, 99\}$

La première tranche considérée 63 se trouve dans l'ensemble $\{55, \dots, 74\}$ qui est associée à la valeur $X = 3$.

En procédant de manière analogue on obtient finalement les valeurs suivantes

3 , 4 , 3 , 2 , 2 , 2 , 6 , 2 , 2 , 2 .

Exercice IV

Les 400 inscrits en 2$^{\text{ème}}$ année AES forment une population sur laquelle on a considéré le caractère "poids" noté X de moyenne m = 65 et d'écart-type $\sigma = 5$. Les étudiants choisis au hasard pour visiter les entreprises de la région constituent un 100-échantillon exhaustif dont la moyenne X et l'écart-type β sont tels que :

$$X = m \quad \text{et} \quad \beta = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \quad \text{i.e} \quad m=65 \quad \text{et} \quad \beta = 0{,}4335.$$

D'après le théorème central limite la variable X peut être approximée par la normale de moyenne 65 et d'écart-type 0,4335 .

Dire que les 2 bus suffisent pour les 100 étudiants, c'est dire que le poids moyen X d'un individu de cet échantillon est inférieur ou égal à 66 . Ce qui donne :

$$P(\text{les 2 bus suffisent}) = P(X \leq 66) = \Pi\left(\frac{66 - 65}{0{,}4335}\right) = 0{,}989 .$$