EXTRACTION DE LA RACINE CARRÉE

A. El Kacimi

Cela fait belle lurette que j'avais appris (en classe de cinquième) la méthode d'extraction, à une unité près par défaut, de la racine carrée d'un entier. Il me semble que depuis lors, je n'en ai plus entendu parler. Je ne crois pas que les collégiens d'aujourd'hui savent ce que c'est et, évidemment, ils n'en ont pas besoin du tout : ils utilisent une machine à calculer ; c'est simple, ils appuient sur quelques touches et ils ont le résultat. Pourquoi devraient-ils se poser des questions ? J'ai eu dernièrement à effectuer un calcul qui passait par celui de la racine carrée d'un entier (assez grand pour que je ne puisse pas le faire de tête, ou mentalement comme on dit). J'ai voulu essayer par cette "vieille" méthode mais je n'ai plus su comment ! J'ai alors pris mon mal en patience et décidé de passer le temps qu'il faut pour réapprendre et, surtout, pour comprendre comment ça marche (à l'époque je n'ai eu que la "recette" à "exécuter de manière automatique"). Ce n'était vraiment pas si immédiat que je le pensais !

• On sait que tout entier naturel a s'écrit de manière unique dans le *système décimal* habituel sous la forme :

$$a = a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_1a_0$$

avec $0 \leq a_i \leq 9$ pour tout $i = 0, 1, \cdots, n-2$ et $0 < a_{n-1} \leq 9$. Ceci signifie :

$$a = a_{n-1}\cdot 10^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot 10 + a_0 \cdot 10^0$$

La condition $a_{n-1} \neq 0$ assure l'unicité de l'écriture ; sans elle on pourrait évidemment avoir des choses du type :

$$1556 = 01556 = 0001556 = 000000001556 = \cdots$$

qui sont toutes des écritures du même nombre 1556. Le nombre a a donc exactement n chiffres $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}$ pris dans $\{0, 1, \cdots, 9\}$.

• Soit a un nombre réel positif. On appelle *racine carrée* de a le nombre réel positif x tel que $x^2 = a$ et qu'on note $\sqrt{a}$. Supposons a entier. La racine carrée de a à une *unité près par défaut* (en abrégé RCPD) est l'entier positif x tel que :

$$x^2 \leq a < (x+1)^2.$$

1. Question : *Comment calculer cette* RCPD ?

Pour les petits entiers ou ceux d'apparence proche d'un carré parfait, on peut à peu près le faire à la main. Mais pour a assez grand (tout le monde comprend ce qu'on entend par là), ce n'est pas si évident que ça !

• Remarquons tout d'abord (c'est un exercice très facile laissé au lecteur) que si le nombre a utilise $2n$ ou $2n-1$ chiffres, sa RCPD en utilise exactement n, c'est-à-dire : si $a = a_{2n-1}a_{2n-2}\cdots a_1a_0$ ou $a = a_{2n-2}\cdots a_1a_0$, on a $x = x_{n-1}x_{n-2}\cdots x_1x_0$ (avec bien sûr $x_{n-1} \neq 0$).

• Supposons que a a $k = 2n$ ou $k = 2n-1$ chiffres $a_0, a_1, \cdots, a_{k-1}$ (avec $a_{k-1} \neq 0$). Dans l'écriture $a = a_{2n-1}a_{2n-2}\cdots a_1a_0$ ou $a = a_{2n-2}\cdots a_1a_0$ regroupons ces chiffres en blocs de deux à partir de la droite :

$$a = (a_{2n-1}a_{2n-2})(a_{2n-3}a_{2n-4})\cdots(a_3a_2)(a_1a_0)$$

si $k = 2n$ ou :

$$a = (a_{2n-2})(a_{2n-3}a_{2n-4})\cdots(a_3a_2)(a_1a_0)$$

si $k = 2n-1$. Posons $\xi_0 = a_1a_0$, $\xi_1 = a_3a_2, \cdots$, $\xi_{n-1} = a_{2n-1}a_{2n-2}$ ou $\xi_{n-1} = a_{2n-2}$.

2. Lemme. *Le chiffre x_{n-1} de la* RCPD *x de a est la* RCPD *du nombre (à un ou deux chiffres) ξ_{n-1}.*

Preuve. Faisons d'abord une remarque. Avec les notations que nous avons choisies, le nombre a peut s'écrire $a = \xi_{n-1}\cdot 10^{2n-2} + \tau$ avec $\tau < 10^{2n-2}$. Si jamais on a une inégalité $\alpha \cdot 10^{2n-2} \leq \xi_{n-1}\cdot 10^{2n-2} + \tau$ pour un α tel que $1 \leq \alpha \leq 99$, alors on a nécessairement $\alpha \cdot 10^{2n-2} \leq \xi_{n-1}\cdot 10^{2n-2}$ *i.e.* $\alpha \leq \xi_{n-1}$ (le lecteur méditera là-dessus). Démontrons maintenant le lemme.

Comme $x = x_{n-1}\cdot 10^{n-1} + \cdots + x_1 \cdot 10 + x_0$, on a :

$$x_{n-1}\cdot 10^{n-1} \leq x < (x_{n-1}+1)\cdot 10^{n-1}$$

(avec bien sûr $(x_{n-1}+1)\cdot 10^{n-1} = 10^n$ si jamais $x_{n-1} = 9$) et par suite :

$$x_{n-1}\cdot 10^{n-1} \leq x < x+1 \leq (x_{n-1}+1)\cdot 10^{n-1}.$$

Comme x est la RCPD de a, on a $x^2 \leq a < (x+1)^2$; ce qui implique :

$$x_{n-1}^2 \cdot 10^{2n-2} \leq a < (x_{n-1}+1)^2 \cdot 10^{2n-2}$$

ou encore, tenant compte de la remarque par laquelle on a débuté la preuve :

$$x_{n-1}^2 \cdot 10^{2n-2} \leq \xi_{n-1}\cdot 10^{2n-2} < (x_{n-1}+1)^2 \cdot 10^{2n-2}.$$

Après simplification par 10^{2n-2}, on obtient :

$$x_{n-1}^2 \leq \xi_{n-1} < (x_{n-1}+1)^2$$

ce qui est exactement ce qu'on cherche à démontrer. $\diamondsuit$

• Nous venons de voir comment déterminer le premier chiffre x_{n-1} du nombre x. Les autres s'obtiennent de proche en proche mais différemment. Supposons connus les $(k-1)$ premiers chiffres $x_{n-1}, \cdots, x_{n-k+1}$ et essayons de déterminer le $k^{\text{ème}}$ qui est le chiffre x_{n-k}. Posons $X_{k-1} = x_{n-1} \cdots x_{n-k+1}$. On peut écrire :

$$x = X_{k-1} \cdot 10^{n-k+1} + x_{n-k} \cdot 10^{n-k} + \eta \quad \text{avec} \quad \eta < 10^{n-k}.$$

On a :

$$X_{k-1} \cdot 10^{n-k+1} + x_{n-k} \cdot 10^{n-k} \leq x < x+1 \leq X_{k-1} \cdot 10^{n-k+1} + (x_{n-k}+1) \cdot 10^{n-k}$$

ou encore :

$$(10X_{k-1} + x_{n-k}) \cdot 10^{n-k} \leq x < x+1 \leq (10X_{k-1} + x_{n-k} + 1) \cdot 10^{n-k}.$$

En élevant chaque membre au carré, on obtient :

$$(10X_{k-1} + x_{n-k})^2 \cdot 10^{2n-2k} \leq x^2 < (x+1)^2 \leq (10X_{k-1} + x_{n-k} + 1)^2 \cdot 10^{2n-2k}$$

ou encore, puisque x est RCPD de a :

$$(10X_{k-1} + x_{n-k})^2 \cdot 10^{2n-2k} \leq a < (10X_{k-1} + x_{n-k} + 1)^2 \cdot 10^{2n-2k}.$$

D'autre part, on peut écrire a sous la forme :

$$a = (\xi_{n-1} \cdots \xi_{n-k}) \cdot 10^{2n-2k} + \gamma \quad \text{avec} \quad \gamma < 10^{2n-2k}.$$

D'où :

$$(10X_{k-1} + x_{n-k})^2 \cdot 10^{2n-2k} \leq (\xi_{n-1} \cdots \xi_{n-k}) 10^{2n-2k} < (10X_{k-1} + x_{n-k} + 1)^2 \cdot 10^{2n-2k}$$

qui nous donne, après simplification par 10^{2n-2k} :

$$(10X_{k-1} + x_{n-k})^2 \leq Z_k < (10X_{k-1} + x_{n-k} + 1)^2$$

où $Z_k = \xi_{n-1} \cdots \xi_{n-k}$. On en déduit que le nombre $10X_{k-1} + x_{n-k}$ est la RCPD de l'entier $Z_k = \xi_{n-1} \cdots \xi_{n-k}$ et donc x_{n-k} est le plus grand entier tel que :

$$(10X_{k-1} + x_{n-k})^2 \leq Z_k,$$

c'est-à-dire (après calcul) :

$$(20X_{k-1} + x_{n-k})x_{n-k} \leq Z_k - 100X_{k-1}^2.$$

3. Et l'algorithme ? *Comment extrait-on la* RCPD *de façon pratique* ?

• On a $a = a_{2n-1}a_{2n-2}\cdots a_3a_2a_1a_0$ ou $a = a_{2n-2}a_{2n-3}\cdots a_3a_2a_1a_0$. On regroupe les chiffres en blocs de deux en commençant par la droite :

$$a = (a_{2n-1}a_{2n-2})(a_{2n-3}a_{2n-4})\cdots(a_3a_2)(a_1a_0)$$

ou :

$$a = (a_{2n-2})(a_{2n-3}a_{2n-4})\cdots(a_3a_2)(a_1a_0).$$

Donc (avec les notations qu'on a adoptées) :

$$\xi_{n-1} = a_{2n-1}a_{2n-2} \text{ ou } \xi_{n-1} = a_{2n-2},\ \xi_{n-2} = a_{2n-3}a_{2n-4}, \cdots, \xi_1 = a_3a_2,\ \xi_0 = a_1a_0.$$

On pose :

$$Z_k = \xi_{n-1}\cdots\xi_{n-k} \quad \text{et} \quad X_k = x_{n-1}\cdots x_{n-k} \quad \text{pour} \quad k = 1, \cdots, n.$$

Le nombre Z_k a $2k$ ou $2k-1$ chiffres et X_k en a exactement k.

• Le chiffre x_{n-1} est la RCPD du nombre $1 \leq \xi_{n-1} \leq 99$ (donc facile à déterminer). On a alors $X_1 = x_{n-1}$, $Z_2 = \xi_{n-1}\xi_{n-2}$ (et $Z_1 = \xi_{n-1}$ dont on n'a pas besoin en fait).

• Le chiffre x_{n-2} est le plus grand entier $0 \leq \varepsilon \leq 9$ tel que l'on ait :

$$\varepsilon(20X_1 + \varepsilon) \leq Z_2 - 100X_1^2.$$

On a ainsi déterminé $X_2 = x_{n-1}x_{n-2}$. Continuons ! On a $Z_3 = \xi_{n-1}\xi_{n-2}\xi_{n-3}$ et le chiffre x_{n-3} est le plus grand entier $0 \leq \varepsilon \leq 9$ tel que l'on ait :

$$\varepsilon(20X_2 + \varepsilon) \leq Z_3 - 100X_2^2.$$

• Ainsi, de proche en proche et en suivant la même démarche, on détermine tous les chiffres $x_{n-1}, \cdots, x_0$ qui permettent d'écrire (dans la base 10) la RCPD par défaut x de l'entier a. Regardons de façon concrète ce qui se passe sur un :

4. Exemple : *Extraction de la racine carrée de* $a = 136540967$

On regroupe les chiffres par tranches de deux à partir de la droite $a = 1\ 36\ 54\ 09\ 67$. On a ainsi :

$$\xi_4 = 1,\ \ \xi_3 = 36,\ \ \xi_2 = 54,\ \ \xi_1 = 09,\ \ \xi_0 = 67.$$

Ceci nous dit déjà que l'écriture de la racine carrée x utilise exactement 5 chiffres *i.e.* $x = x_4x_3x_2x_1x_0$ avec $x_4 \neq 0$.

(∗) La racine carrée de $\xi_4 = 1$ est $x_4 = 1$. D'où $X_1 = x_4 = 1$ et donc :

$$Z_2 - 100X_1^2 = 136 - 100 \cdot 1^2 = 36.$$

(∗) Le plus grand entier $0 \leq \varepsilon \leq 9$ tel que $\varepsilon(20.1 + \varepsilon) \leq 36$ est $x_3 = 1$. Par suite $X_2 = 11$.

(∗) On a $Z_3 = 13654$ et $X_2 = 11$. D'où $Z_3 - 100X_2^2 = 13654 - 100 \cdot 11^2 = 1554$. Le plus grand entier $0 \leq \varepsilon \leq 9$ tel que :

$$\varepsilon(20.11 + \varepsilon) \leq 1554$$

est $x_2 = 6$. Par suite $X_3 = 116$.

(∗) On a $Z_4 = 1365409$ et $X_3 = 116$. D'où $Z_4 - 100X_3^2 = 1365409 - 100 \cdot 116^2 = 19809$. Le plus grand entier $0 \leq \varepsilon \leq 9$ tel que :

$$\varepsilon(20.116 + \varepsilon) \leq 19809$$

est $x_1 = 8$. Par suite $X_4 = 1168$.

(∗) On a $Z_5 = 136540967$ et $X_4 = 1168$. D'où $Z_5 - 100X_4^2 = 136540967 - 100 \cdot 1168^2 = 118567$. Le plus grand entier $0 \leq \varepsilon \leq 9$ tel que :

$$\varepsilon(20.1168 + \varepsilon) \leq 118567$$

est $x_0 = 5$.

La RCPD du nombre $a = 136540967$ est donc $x = 11685$. On vérie facilement la double inégalité :

$$x^2 = (11685)^2 = 136539225 \leq a = 136540967 < (11686)^2 = 136562596 = (x + 1)^2.$$

5. Extraction de la racine carrée à 10^{-k} près

Sur l'exemple qu'on vient de traiter on voit que l'écart $a - x^2 = 1742$ est quand même assez grand. On pourrait donc avoir besoin de se rapprocher plus de a ; x ne sera plus un entier mais un nombre décimal. On considère alors le nombre $A = a \cdot 10^{2k}$; on en extrait la RCPD X comme on vient de le faire. Ensuite on prend $x = X \cdot 10^{-k}$ et on obtient ainsi la racine carrée par défaut de a à un $\frac{1}{10^k}$ près.