Aziz El Kacimi Alaoui

Mathématiques pour l'enseignement

Master 1, MEÉF

- nombres complexes
- topologie métrique
- intégrales
- séries
- courbes paramétrées
- équations différentielles
- fonctions convexes
- probabilités

ellipses

AVANT-PROPOS

Ce texte est une rédaction succincte du cours de *Mathématiques pour l'enseignement* que je dispense depuis quelques années en Master MEÉF à l'Université de Valenciennes. On y trouve un peu de tout : nombres complexes, topologie métrique, intégrales, séries, courbes paramétrées, équations différentielles, fonctions convexes et probabilités. Tous ces thèmes sont des extraits des programmes des classes préparatoires et de la Licence 3 et forment le programme d'analyse et probabilités du Master enseignement. Ils sont suffisants à la formation d'un futur enseignant du secondaire. Certes, celui-ci n'aura pas à les enseigner à ses élèves mais leur acquisition lui donnera une hauteur et une capacité de réflexion indispensables dans le métier. C'est un cours moins formel que d'habitude et présenté avec beaucoup de motivation. Je n'ai pas estimé nécessaire de démontrer tous les théorèmes (certains le sont et d'autres pas). Mais j'ai beaucoup insisté sur les exemples qui sont le support le plus solide pour la transmission du savoir mathématique. De manière plus précise voici le contenu.

0. Choses à savoir. Cette partie est brève et consiste en un résumé de ce qu'on doit connaître pour suivre le reste. Il s'agit de notations habituellement utilisées, de certaines définitions élémentaires... comme la hiérarchie numérique $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, la valeur absolue, la notation d'un intervalle...

1. Nombres complexes. On construit le corps $(\mathbb{C}, +, \times)$ à partir de $(\mathbb{R}, +, \times)$. On donne une interprétation géométrique des nombres complexes ainsi que les opérations qu'on met dessus, c'est-à-dire l'addition et la multiplication qui consistent à appliquer respectivement une translation et une similitude. Tout ce qu'on peut dire d'élémentaire et de fondamental sur le corps $(\mathbb{C}, +, \times)$ est évoqué.

2. Topologie métrique. C'est la partie la plus développée parce qu'elle est importante pour le reste. Elle a pour but d'introduire aux éléments de base de la *topologie métrique* et a donc parfaitement sa place ici.

Quatre chapitres la composent. Le premier introduit la notion de métrique et ses propriétés. Celle-ci amène à la notion d'ouvert (et de fermé) et donc celle de topologie (canoniquement associée). Les suites s'introduisent de façon naturelle et, bien entendu, la notion de convergence. La complétude, qui est une notion fondamentale, est aussi étudiée. Le chapitre II est consacré aux applications continues entre espaces métriques et tout ce qui tourne autour. La continuité uniforme et la condition de Lipschitz apparaissent aussi avec leurs propriétés. Les différentes notions d'équivalence de métriques sont explicitées. Le théorème du point fixe pour une contraction d'un espace métrique complet est démontré en détail et illustré par un exemple d'application. Le chapitre se termine par la connexité qui est une propriété topologique substantielle. Dans le chapitre III nous étudions la compacité dont tout le monde connaît l'importance. Les belles propriétés qu'elle confère aux fonctions continues la mettent au premier rang de la topologie. Le chapitre IV est dédié à l'étude des propriétés remarquables des applications linéaires continues entre espaces normés (qui sont des cas particuliers d'espaces métriques). Des exemples concrets sont visualisés sur certains espaces fonctionnels assez présents en analyse.

3. Intégrales. On étudie l'intégrale mais tout en mettant une limite à la généralisation. On commence par construire l'intégrale de Riemann sur un intervalle compact : par les sommes de Riemann et par les sommes de Darboux. On donne les premières propriétés. Ensuite, on se focalise sur les fonctions continues ou plus généralement continues par morceaux. On donne les principales méthodes de calcul : changement de variable, intégration par parties, utilisation de la décomposition en éléments simples quand les fonctions sont des fractions rationnelles ou quand elles s'y ramènent. On passe ensuite à l'intégrale généralisée dans toutes les situations possibles, l'intégrale à paramètre, le passage à la limite sous le signe somme, intégrales de suites de fonctions et, bien sûr, le théorème de la convergence dominée.

4. Séries. Les premières définitions : convergence, convergence absolue...Les différents critères, celui de Cauchy, celui de d'Alembert, le lemme d'Abel, le critère de comparaison à une intégrale. Une introduction élémentaire aux familles sommables. On étudie ensuite les séries de fonctions, leurs convergences simple, uniforme, normale ainsi que les conditions de conservation de propriétés par passage à la limite comme la continuité, la dérivabilité et l'intégrabilité. L'essentiel sur les séries entières est aussi traité : disque de convergence, sur ce qui peut se passer sur le cercle limite, la différentiabilité de la somme... Et un petit clin d'œil à la notion de fonction analytique.

5. Courbes paramétrées planes. On commence bien sûr par la définition d'une courbe avec pas mal de dessins pour que la notion soit visible. On introduit ce qu'est un paramétrage régulier ainsi que celui par la longueur de l'arc avec des exemples concrets. Pour les courbes régulières on définit la courbure, invariant géométrique fondamental avec des exemples de calcul et notamment pour le graphe d'une fonction dans sa version générale. Dans le dernier volet on fait l'étude locale d'une courbe, particulièrement au voisinage d'un point stationnaire et ses différentes natures, les branches infinies et la représentation géométrique.

6. Équations différentielles. On donne la définition générale d'une équation différentielle ordinaire d'ordre n et on se limite ensuite au premier ordre sous forme résolue. On démontre alors les théorèmes d'existence : Cauchy-Kovalevskaya et celui du cas spécial des équations linéaires. Toutefois, les méthodes de résolution qu'on expose se limitent à l'équation linéaire du premier ordre et à celle du second à coefficients constants. L'utilisation des séries entières est illustrée sur un exemple. L'aspect 1-forme différentielle amenant à une équation à variables séparées est aussi traité sur un exemple : on se donne une famille de courbes et on cherche une autre famille de courbes qui leur sont orthogonales.

7. Fonctions convexes. Cette partie et celle sur les "courbes paramétrées planes" sont presque les seules où les outils géométriques sont les plus opérants. Aussi, nous avons pris soin d'utiliser le plus de géométrie possible : dans la définition, la croissance des pentes, le graphe, sa position par rapport à la tangente en un point... Une belle promenade !

8. Probabilités élémentaires. On a commencé l'introduction au thème par des exemples d'épreuves aléatoires pour arriver à la notion d'espace probabilisé. Les propriétés basiques sont exposées, les premières méthodes ainsi que les notions de probabilité conditionnelle, d'indépendance... Vient après cela l'étude des variables aléatoires avec tout ce qu'il faut et juste ce qu'il faut : loi de probabilité, fonction de répartition, moyenne, variance, les inégalités de Tchebychev, Markov et Bienaymé-Tchebychev. Les définitions des différents modes de convergence (en moyenne quadratique, en probabilité, en loi, convergence presque sûre) sont données. Les théorèmes de convergence et les liens entre eux sont énoncés (sans démonstration). Le dernier chapitre expose les lois usuelles : de Bernoulli, binomiale, de Poisson et bien sûr la loi normale à qui on a cédé un peu plus de place.

9. Quelques compléments. Quatre thèmes sont proposés dans cette section : le premier sur l'introduction de la fonction logarithme comme "solution" d'une certaine équation fonctionnelle, le deuxième sur l'approximation diophantienne d'un nombre algébrique et le troisième sur la recherche du quadrilatère d'aire maximale à périmètre prescrit. Le quatrième porte sur deux petites friandises en géométrie élémentaire plane.

On a pris soin, dans la mesure du possible, d'accompagner tout par des exemples. Et à la fin de chacune des parties, on a proposé quelques exercices corrigés, assez représentatifs de ce qui y a été traité.

TABLE DES MATIÈRES

4. Séries

5. Courbes paramétrées planes

6. Équations différentielles

7. Fonctions convexes

8. Probabilités

9. Quelques compléments

QUELQUES COMPLÉMENTS

Ce sont des thèmes qu'on peut voir comme de petites digressions à ce cours. Ils sont sûrement d'un intérêt substantiel dans la formation d'un enseignant du secondaire et peuvent être abordés sous forme d'exercice ou d'atelier.

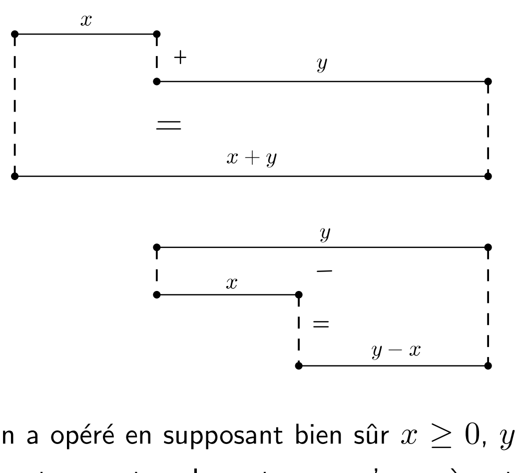
LOGARITHME ET EXPONENTIELLE

Dans les manuels récents de Terminale (c'est ce qui figure aussi dans les programmes officiels), la fonction *logarithme* est définie comme la primitive qui s'annule en 1 de la fonction $\frac{1}{x}$ (la formule "Primitive(x^n) $= \frac{1}{n+1}x^{n+1}$" n'est pas valide pour $n = -1$) ; ou alors comme la réciproque de la fonction *exponentielle*. Mais pour introduire cette dernière, on fait admettre aux élèves l'existence de l'unique solution valant 1 en 0 de l'équation différentielle $y' = y$. Ces deux manières de procéder n'amènent malheureusement pas le *logarithme* de façon naturelle. Une bonne motivation devrait passer par sa propriété essentielle : transformer la multiplication en l'addition. Une de ses premières applications est la "réalisation physique" de la multiplication des nombres réels : elle est à la base, par exemple, de la règle à calcul (ceux qui ont eu l'occasion d'en faire usage en ont certainement apprécié la portée).

Notre but ici est de rappeler qu'il y a une méthode élémentaire (certainement bien connue de beaucoup de gens mais passée tout le temps sous silence) pour introduire, avec motivation, le *logarithme* (et donc aussi l'*exponentielle*). Celle-ci ne demande pas (à des élèves de Terminale) d'admettre un théorème aussi fort que celui de l'existence et l'unicité des solutions des équations différentielles même les plus simples. Et en plus, elle impose, sans autre choix, la formule $\ell n(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}$. Alors pourquoi ne pas l'adopter ?

0. Motivation

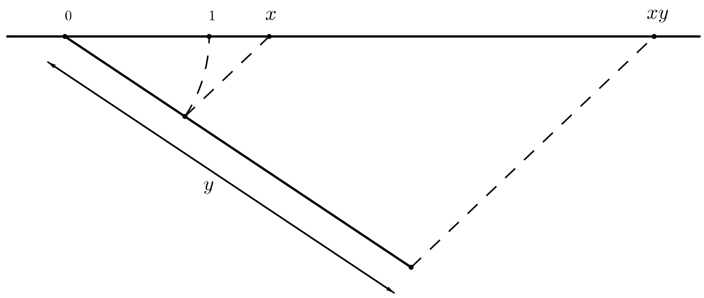
L'addition de deux nombres réels $x \geq 0$ et $y \geq 0$ est facile à réaliser physiquement en partant du fait qu'ils peuvent toujours être représentés par les longueurs respectives de deux segments d'une droite. Regardons sur le dessin qui suit comment on réalise la somme $x + y$ et la différence $y - x$.



Dans ce dessin, on a opéré en supposant bien sûr $x \geq 0$, $y \geq 0$ et $y \geq x$.
Cela n'a pas d'importance : tous les autres cas s'y ramènent.

Question naturelle : *Comment réaliser physiquement la multiplication xy de deux nombres réels x et y (qu'on peut supposer, sans aucune perte de généralité, strictement positifs) ?*

Bien sûr, il est possible de concevoir un instrument à cet effet basé sur la construction géométrique ci-dessous (une simple application du théorème de Thalès). Toutefois, son utilisation ne sera pas si immédiate que celle qui consiste à mettre bout à bout deux segments sur une même droite pour effectuer une addition.



On peut aussi se ramener à ce qu'on sait faire déjà, c'est-à-dire l'addition. C'est ce qui motive l'introduction de la fonction :

1. Logarithme

Il s'agit d'abord de trouver une bijection φ entre le groupe multiplicatif $\mathbb{R}_+^*$ des réels strictement positifs et le groupe additif $\mathbb{R}$ de tous les réels ; ensuite, on demandera à cette bijection de "transformer la multiplication en l'addition" *i.e.* pour tous $x, y \in \mathbb{R}_+^*$, on a la relation fondamentale :

$$\varphi(xy) = \varphi(x) + \varphi(y). \tag{1}$$

Tant qu'à faire, exigeons un peu plus : φ dérivable et à dérivée continue strictement positive. *Alors peut-on trouver une telle bijection* φ ? Si elle existe, la bijection inverse $\psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ sera dérivable et vérifiera la relation (fondamentale aussi) :

$$\psi(x+y) = \psi(x)\psi(y). \tag{2}$$

On peut remarquer que, par la relation (1) (transformant l'opération de multiplication en celle de l'addition), on a :

$$\varphi(1) = \varphi(1 \times 1) = \varphi(1) + \varphi(1) = 2\varphi(1),$$

ce qui implique $\varphi(1) = 0$. Cette condition supplémentaire nous permettra de fixer avec plus de précision la fonction φ qu'on cherche parmi tous les candidats qui se présenteront.

1.1. La dérivée de φ

On a fait l'hypothèse que φ est dérivable et à dérivée f strictement positive. On a donc une application $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$. Dans la relation (1), on garde x constant et on dérive par rapport à y. On obtient $xf(xy) = f(y)$, pour tous $x, y \in \mathbb{R}_+^*$. En particulier, en prenant $y = 1$, on obtient $xf(x) = f(1)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$. Donc f est nécessairement de la forme :

$$f(x) = \frac{\kappa}{x} \tag{3}$$

où κ (valeur de f au point 1) est une constante réelle strictement positive. Reste donc à déterminer la fonction (ou les fonctions) φ à partir de sa dérivée f.

1.2. Le Logarithme

Nous venons de voir que la fonction qu'on cherche $\varphi : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ avec les propriétés requises a pour dérivée une fonction $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ de la forme $f(x) = \frac{\kappa}{x}$ où κ est une constante strictement positive. Pour retrouver φ, il suffit alors de prendre la primitive de f qui s'annule au point 1 (cette condition doit être satisfaite car prescrite par la relation fondamentale (1) comme on l'a déjà fait remarquer). Ceci nous impose :

$$\varphi_\kappa(x) = \int_1^x \frac{\kappa dt}{t}. \tag{4}$$

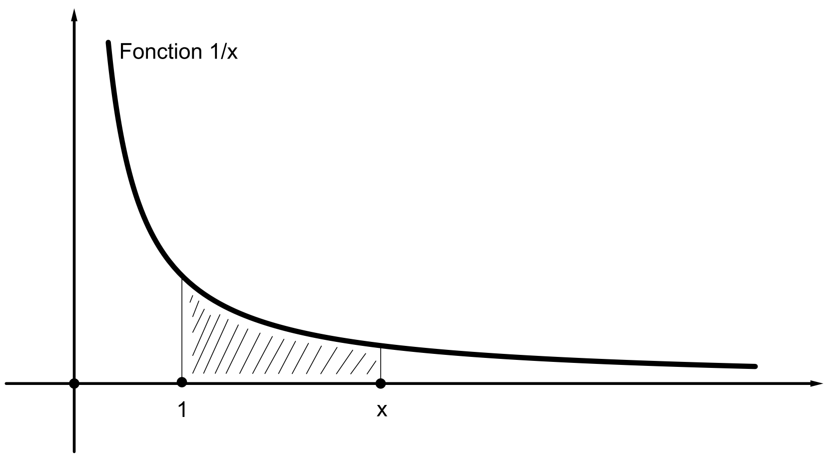
Nous avons donc une famille (paramétrée par la constante $\kappa \in \mathbb{R}_+^*$) de fonctions répondant à la question. Chacune de ces fonctions vérifie la relation fondamentale. En effet, si on dérive la fonction $\varphi_\kappa(xy) - \varphi_\kappa(x) - \varphi_\kappa(y)$ par rapport à x (en gardant y constant), on obtient :

$$y\varphi'_\kappa(xy) - \varphi'_\kappa(x) = y\frac{\kappa}{xy} - \frac{\kappa}{x} = 0.$$

La quantité $\varphi_\kappa(xy) - \varphi_\kappa(x) - \varphi_\kappa(y)$ ne dépend donc pas de x. Comme x et y jouent le même rôle, elle ne dépendra pas non plus de y ; elle est en fait constante ; mais comme elle est nulle pour $x = y = 1$, on a $\varphi_\kappa(xy) = \varphi_\kappa(x) + \varphi_\kappa(y)$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}_+^*$.

On appelle *logarithme népérien*(*), la fonction $\ell n : x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto \ell n(x) \in \mathbb{R}$ donnée par l'intégrale :

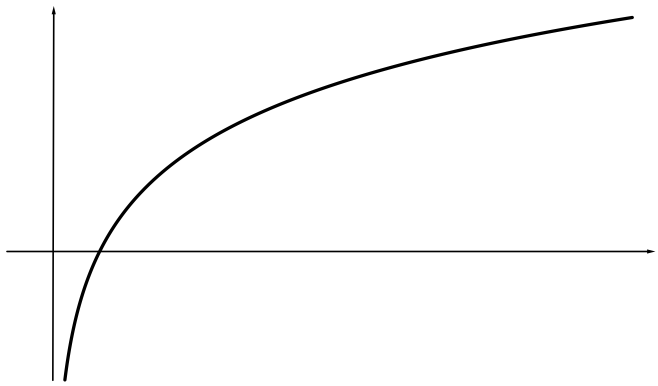
$$\ell n(x) = \varphi_1(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}. \tag{5}$$



(*) Appellation (devenue familière) en hommage au mathématicien écossais John Napier qui, le premier, a conçu les Tables logarithmiques. Pour plus de détails, voir l'article dans Wikipédia.

1.3. Étude de la fonction ℓn

- La fonction ℓn est définie sur $\mathbb{R}_+^*$; elle y est continue, dérivable et a pour dérivée la fonction $f : x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto \frac{1}{x} \in \mathbb{R}_+^*$. Elle est donc indéfiniment dérivable et strictement croissante.
- Comme $\ell n(xy) = \ell n(x) + \ell n(y)$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ et $\ell n(1) = 0$, on a $\ell n\left(\frac{x}{y}\right) = \ell n(x) - \ell n(y)$.
- Soit a un réel tel que $a > 1$; alors $\ell n(a) > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $\ell n(a^n) = n\ell n(a)$. Donc $\ell n(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque $x \to +\infty$ et vers $-\infty$ lorsque $x \to 0^+$.
- Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe donc un nombre $e > 1$ tel que $\ell n(e) = 1$. Ce nombre s'appelle *base* du logarithme népérien.
- Comme la dérivée seconde de ℓn est $-\frac{1}{x^2}$, cette fonction est strictement concave et on a donc $\ell n(x) \leq x - 1$ pour tout $x > 0$. D'où $\ell n(x) = 2\ell n(\sqrt{x}) \leq 2\left(\sqrt{x} - 1\right) \leq 2\sqrt{x}$. Ceci montre que :
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ell n(x)}{x} = 0.$$
La courbe représentative de ℓn possède donc une branche parabolique dans la direction de l'axe des abscisses. La fonction ℓn est à *croissance très lente* : si on escalade sa courbe, il faut parcourir à peu près 22 kilomètres horizontalement pour à peine monter de 10 mètres (verticalement) !



2. Exponentielle

Comme on vient de le voir, la fonction logarithme ℓn réalise un isomorphisme du groupe multiplicatif $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$ sur le groupe additif $(\mathbb{R}, +)$. Son inverse $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ est donc aussi un isomorphisme de groupes. Il transforme l'addition des nombres réels en leur multiplication. Comme nous en avions déjà parlé, pour réaliser la multiplication de deux réels positifs x et x', on prend leurs logarithmes $y = \ell n(x)$ et $y' = \ell n(x')$, on construit la somme $y + y'$ qui n'est rien d'autre que le logarithme du produit xx'. Il faut donc un retour pour retrouver ce produit à partir de $y + y'$.

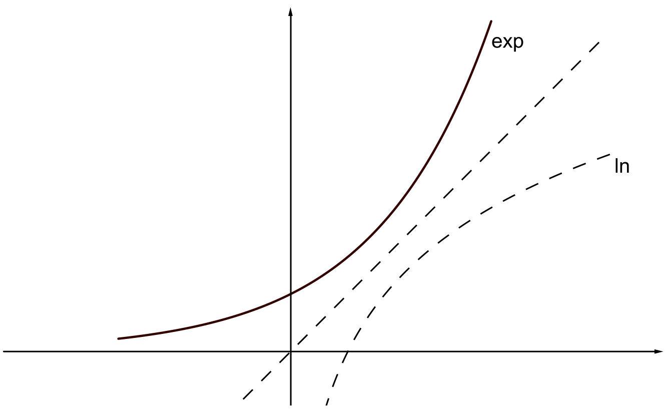
2.1. Définition. *On appelle fonction* **exponentielle** *la fonction* $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ *réciproque de la fonction logarithme. Elle est définie par :*

(6) $$y = \exp(x) \iff x = \ell n(y).$$

Le nombre réel $\exp(x)$ est noté habituellement e^x et se lit “exponentielle de x” ou plus simplement “exponentielle x”.

2.2. Étude de la fonction exp

- Elle est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier. Comme son inverse ℓn est continue et strictement croissante, elle est aussi continue et strictement croissante.
- La fonction ℓn est dérivable, à dérivée partout non nulle ; donc la fonction exp est aussi dérivable.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $(\ell n \circ \exp)(x) = x$. On pose $y = \exp(x)$ et on dérive les deux membres. On trouve $\frac{1}{y} \cdot \exp'(x) = 1$, ce qui donne $\exp'(x) = y = \exp(x)$. La fonction exp est donc dérivable et égale à sa dérivée.
- Comme $\ell n(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque $x \to +\infty$, $\exp(x)$ tend aussi vers $+\infty$ lorsque $x \to +\infty$. De même, comme $\ell n(x)$ tend vers $-\infty$ lorsque $x \to 0^+$, $\exp(x)$ tend vers 0^+ lorsque $x \to -\infty$.
- On peut montrer par un calcul assez simple que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la quantité $x^n e^{-x}$ tend vers 0 quand x tens vers $+\infty$. On dit que “l'exponentielle e^{-x} emporte toute puissance de x.”



On voit que le graphe de e^x tend à être vertical lorsque la variable x prend des valeurs de plus en plus grandes. Dans le langage quotidien, l'expression “*croissance exponentielle*” est devenue assez familière pour décrire l'extrême rapidité avec laquelle certaines quantités deviennent de plus en plus grandes.

2.3. Remarque. On sait (*cf.* page 129) que $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$ Montrons que le nombre $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots$ n'est pas rationnel.

Supposons que $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots$ est un rationnel $\frac{p}{q}$ (avec bien sûr $q \geq 1$). En multipliant $e = \frac{p}{q}$ et la série par $q!$ on obtient :

$$(7) \quad q!e - \left(q! + \frac{q!}{1!} + \frac{q!}{2!} + \cdots + \frac{q!}{(q-1)!} + 1\right) = \frac{1}{(q+1)} + \cdots + \frac{1}{(q+1)\cdots(q+n)} + \cdots$$

Mais comme $(q+1)\cdots(q+n) > 2^n$ pour $n \geq 2$, la somme $\frac{1}{(q+1)} + \cdots + \frac{1}{(q+1)\cdots(q+n)} + \cdots$ est strictement inférieure à $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$. Donc le second membre de l'égalité (7) n'est pas un entier alors que le premier l'est. Par suite e ne peut pas être rationnel. ♢

APPROXIMATION DIOPHANTIENNE

Tout le monde sait que le corps des nombres réels est constitué des rationnels et des irrationnels. Les premiers se comprennent bien car ils se fabriquent, par différents procédés, à partir des nombres entiers dont on sait exactement comment ils ont été introduits. Les seconds sont arrivés pour des besoins divers, géométriques ou autres. Tout irrationnel se laisse approcher, avec n'importe quelle précision, par des rationnels ; ce qui permet de faire pas mal de calculs. Si le développement de toutes les techniques a été spectaculaire, c'est bien entendu grâce à cela. À l'heure actuelle, aucun ordinateur sur terre n'accepte qu'on lui injecte des données irrationnelles ; ceux qui font semblant n'en prennent en réalité que les approches rationnelles pour lesquelles on les a programmés. C'est en ce sens que l'on peut dire que le ***monde est rationnel***.

1. Préliminaires

1.1. Définition. *Un nombre réel θ est dit* **algébrique** *s'il existe un polynôme à coefficients entiers P tel que $P(\theta) = 0$.*

Parmi ces polynômes P, il en existe un, unique, de degré minimal n et dont les coefficients sont premiers entre eux ; on l'appelle *polynôme minimal primitif* de θ (et il est forcément irréductible). L'entier n est appelé *degré* de θ. Un réel non algébrique est dit *transcendant.*

Par exemple, les nombres $\theta_1 = \sqrt{2}$ et $\theta_2 = \sqrt{3+\sqrt{2}}$ sont algébriques puisqu'ils sont racines respectivement des polynômes :

$$P_1(x) = x^2 - 2 \quad \text{et} \quad P_2(x) = x^4 - 6x^2 + 7.$$

C. Hermite a montré en 1873 que e (base du logarithme népérien) est transcendant ; en 1882, F. Lindemann a établi la transcendance de π et a mis ainsi un terme au problème de la *quadrature du cercle.*

Les nombres algébriques sont "peu nombreux" (ils forment un ensemble dénombrable) et se répartissent en les *constructibles géométriquement* (à la règle et au compas) et les autres. (Notons que tout rationnel $r = \frac{p}{q}$, où $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$, est algébrique puisque racine du polynôme $qx - p$.)

On sait, par densité des rationnels dans le corps des réels, qu'il existe une suite de rationnels qui tend vers θ. Et on peut même préciser beaucoup plus dans le théorème qui suit, dû à L. Dirichlet.

1.2. Théorème. *Il existe une infinité de paires d'entiers (p, q) (avec q non nul) premiers entre eux et tels que :*

$$\left|\theta - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}. \tag{1}$$

En 1891, A. Hurwitz a amélioré cette inégalité en $\left|\theta - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}q^2}$ et a montré qu'on ne peut pas faire mieux.

2. Approximation diophantienne

La manière dont un irrationnel θ est approché par des rationnels dépend en partie de sa *nature arithmétique.* Outre le fait que les irrationnels se partagent en les algébriques et les transcendants, ils se distinguent aussi par la manière dont ils sont limites de suites ou de séries de rationnels.

2.1. Définition. *On dira que θ est* **diophantien** *s'il existe des constantes $A > 0$ et $\delta \geq 2$ telles que, pour tout $p \in \mathbb{Z}$ et tout $q \in \mathbb{Z}^*$ on ait $\left|\theta - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{A}{|q|^\delta}$.*

De tels nombres sont "mal approchés" par les rationnels. Si $\delta = 2$, d'après le théorème de Hurwitz, la constante A doit nécessairement satisfaire l'inégalité $A < \frac{1}{\sqrt{5}}$. Les nombres algébriques sont tous diophantiens comme on va le voir dans l'exercice ci-dessous.

2.2. Définition. *On dira que θ est* **de Liouville** *s'il existe une constante $A > 0$ telle que, pour tout $s \in \mathbb{N}$, il existe des entiers $p_s \in \mathbb{Z}$ et $q_s \in \mathbb{Z}^*$ vérifiant $\left|\theta - \frac{p_s}{q_s}\right| \leq \frac{A}{|q_s|^s}$.*

Les nombres de Liouville sont des irrationnels "très bien approchés" par les rationnels et ils sont tous transcendants. On peut en construire en prenant des sommes de séries de nombres rationnels à décroissance très rapide, par exemple $\sum_{s=1}^{\infty} 2^{-s!}$ (dont J. Liouville a démontré la transcendance).

3. Exercice

L'objet est de montrer que tout nombre algébrique (irrationnel) de degré n est diophantien. Plus précisément, il existe une constante $M > 0$ telle que :

$$\left|\theta - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{M}{q^n} \qquad \text{pour tout } p \in \mathbb{Z} \text{ et tout } q \in \mathbb{N}^*. \tag{2}$$

On note P le polynôme minimal primitif, n son degré et J_θ l'intervalle $[\theta - 1, \theta + 1]$. On pose :

$$M' = \sup_{x \in J_\theta} |P'(x)| \qquad \text{et} \qquad M = \inf\left\{1, \frac{1}{M'}\right\}.$$

3.1. Montrer que pour $\frac{p}{q} \notin J_\theta$ l'inégalité (2) est safisfaite.

À chaque fois qu'on sonsidérera le rationnel $\frac{p}{q}$ il sera tel que $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$. Dans toute la suite, on supposera $\frac{p}{q} \in J_\theta$ *i.e.* :

$$\left|\theta - \frac{p}{q}\right| < 1.$$

3.2. En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que :

$$\left|P\left(\frac{p}{q}\right)\right| \leq M' \left|\theta - \frac{p}{q}\right|. \tag{3}$$

3.3. Dire pourquoi on a $P\left(\frac{p}{q}\right) \neq 0$. Montrer qu'en fait $\left|P\left(\frac{p}{q}\right)\right| = \frac{m}{q^n}$ où m est un entier strictement positif. En déduire l'inégalité (2) cherchée.

RÉPONSES

3.1. $\frac{p}{q} \notin J_\theta$ signifie $\left|\theta - \frac{p}{q}\right| \geq 1$. Comme $M = \inf\{1, \frac{1}{M'}\}$, on a $\left|\theta - \frac{p}{q}\right| \geq M$ et donc a fortiori $\left|\theta - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{M}{q^n}$ puisque $q \geq 1$.

3.2. On applique à la fonction polynôme P le théorème des accroissements finis sur l'intervalle $[\theta, \frac{p}{q}]$ (ou $[\frac{p}{q}, \theta]$). Il existe $c \in [\theta, \frac{p}{q}]$ tel que :

$$\left|P(\theta) - P\left(\frac{p}{q}\right)\right| = |P'(c)| \cdot \left|\theta - \frac{p}{q}\right|.$$

Mais comme $P(\theta) = 0$ et que $|P'(c)| \leq M'$, l'égalité donne :

$$\left|P\left(\frac{p}{q}\right)\right| \leq M' \left|\theta - \frac{p}{q}\right|.$$

3.3. Si $P\left(\frac{p}{q}\right)$ était égal à 0, le polynôme P serait réductible sur $\mathbb{Q}$, donc sur $\mathbb{Z}$, ce qui n'est pas le cas. Écrivons :

$$P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} \cdots + a_1 X + a_0$$

avec $a_0, a_1, \cdots, a_n$ des entiers premiers entre eux et $a_n \neq 0$. Alors :

$$P\left(\frac{p}{q}\right) = a_n \left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \cdots + a_1 \left(\frac{p}{q}\right) + a_0.$$

En réduisant au même dénominateur q^n, on obtient :

$$P\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \cdots + p q^{n-1} + a_0 q^n}{q^n}.$$

Comme $P\left(\frac{p}{q}\right) \neq 0$, l'entier $a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \cdots + p q^{n-1} + a_0 q^n$ est non nul ; donc sa valeur absolue m ne l'est pas non plus *i.e.* $m \geq 1$.

L'inégalité qui précède nous donne alors :

$$\left|\theta - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{1}{M'} \cdot \frac{m}{q^n} \geq \frac{M}{q^n}$$

qui est l'inégalité (2) qu'on cherche à établir.

AIRE MAXIMALE À PÉRIMÈTRE PRESCRIT

On se met dans le plan euclidien qu'on munit d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Soient $\mathcal{Q}$ l'ensemble de tous les quadrilatères $q = A_1A_2A_3A_4$ du plan et $\mathcal{Q}_0(L)$ celui des quadrilatères de périmètre égal à $L \geq 0$. On note $\mathcal{A} : \mathcal{Q} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ la fonction qui à q associe son aire $\mathcal{A}(q)$. L'objet de l'exercice est de décrire les quadrilatères $q \in \mathcal{Q}_0(L)$ dont l'aire $\mathcal{A}(q)$ est maximale. Pour les besoins des constructions, un segment de longueur L est donné. Quitte à appliquer une isométrie au quadrilatère $q = A_1A_2A_3A_4$, on peut supposer que $A_1 = O$ et que A_2 est sur l'axe des abscisses.

Partie I

1. Montrer que l'ensemble $\mathcal{Q}_0(L)$ n'est pas vide en donnant des exemples explicites de quadrilatères ayant un périmètre égal à L. Montrer que, pour tout $q \in \mathcal{Q}_0(L)$, il existe $q' \in \mathcal{Q}_0(L)$ convexe tel que $\mathcal{A}(q') \geq \mathcal{A}(q)$.

On peut donc se restreindre à la partie $\mathcal{Q}(L)$ de $\mathcal{Q}_0(L)$ des quadrilatères convexes.

2. Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que l'ensemble $\mathcal{Q}(L)$ puisse être considéré comme une partie fermée de l'espace euclidien $\mathbb{R}^N$.

3. Montrer que l'ensemble $\mathcal{Q}(L)$ est un compact de l'espace euclidien $\mathbb{R}^N$. Montrer que la fonction $\mathcal{A} : \mathcal{Q}(L) \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est continue et en déduire qu'il existe $q_0 \in \mathcal{Q}(L)$ tel que :

$$\sup_{q \in \mathcal{Q}(L)} \mathcal{A}(q) = \mathcal{A}(q_0).$$

Dans l'ensemble $\mathcal{Q}(L)$ des quadrilatères convexes à prérimètre prescrit, il en existe donc au moins un dont l'aire est maximale. Nous allons voir quelle est sa nature.

Soient a et c deux réels strictement positifs tels que $a > c$; on pose $b = \sqrt{a^2 - c^2}$. On note F et F' les deux points du plan de coordonnées respectives $(c, 0)$ et $(-c, 0)$.

On appelle *ellipse* de *foyers* F et F' et de *grand axe* $2a$ l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M qui vérifient la relation :

$$MF + MF' = 2a.$$

Les axes de coordonnés sont des axes de symétrie. La droite (FF') est l'*axe focal* de $\mathcal{E}$. Le point O (origine du repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$) est le centre de symétrie de l'ellipse $\mathcal{E}$.

4. Pour quels points M sur l'ellipse $\mathcal{E}$ l'aire du triangle MFF' est-elle maximale ?

Partie II

5. Soit ABC un triangle dont le périmètre $p > 0$ et la base $BC = \alpha > 0$ sont prescrits. Comment choisir ce triangle de façon à ce que son aire soit maximale ?

6. Soit ABC un triangle dont le périmètre $p > 0$ est prescrit. Comment choisir ce triangle de façon à ce que son aire soit maximale ?

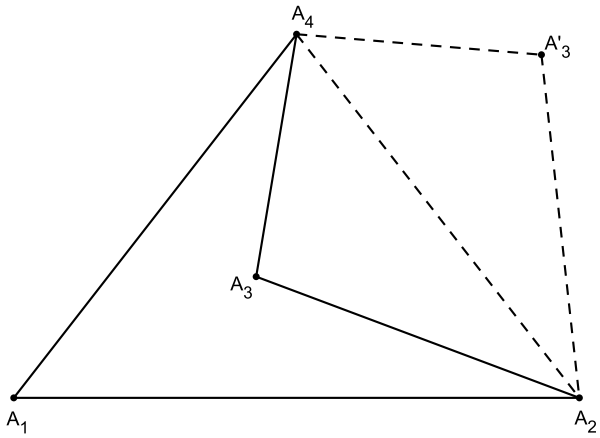
7. Soit $q = A_1A_2A_3A_4$ un quadrilatère dont le périmètre L est prescrit. Comment choisir ce quadrilatère de façon à ce que son aire $\mathcal{A}(q)$ soit maximale ?

RÉPONSES

Partie I

1. Le carré (ou de façon générale un losange) de côté $\frac{L}{4}$ est un quadrilatère de périmètre L. L'ensemble $\mathcal{Q}_0(L)$ n'est donc pas vide.

Soit $A_1A_2A_3A_4 = q \in \mathcal{Q}_0(L)$ non convexe (voir dessin ci-dessous). Supposons que $\widehat{A}_3$ en soit l'angle de mesure strictement supérieure à π. Notons A_3' le symétrique de A_3 par rapport à la droite (A_2A_4) ; alors le quadrilatère $q' = A_1A_2A_3'A_4$ a son périmère égal à L et son aire est strictement supérieure à celle de q.



2. La donnée d'un quadrilatère q dans le plan $\mathbb{R}^2$ est la donnée de quatre points A_1, A_2, A_3 et A_4 et donc de quatre couples de nombres (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) et (x_4, y_4). Psr suite, on peut identifier q au 8-uplet $(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, x_4, y_4) \in \mathbb{R}^8$; inversement tout $(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, x_4, y_4) \in \mathbb{R}^8$ définit un quadrilatère $q = A_1A_2A_3A_4$ dans le plan. Comme on ne s'intéresse qu'à la forme du quadrilatère, on les prendra tous ayant un sommet commun. Plus même, quite à effectuer une translation suivie d'une rotation, on peut toujours supposer $A_1 = (0, 0)$ et $y_2 = 0$. Pour ce qui nous concerne, se donner un quadrilatère, c'est se donner 5 réels x_2, x_3, y_3, x_4, y_4, c'est-à-dire un point de $\mathbb{R}^5$. En fait, l'ensemble de tels quadrilatères s'identifie à l'espace euclidien $\mathbb{R}^5$. Celui des quadrilatères convexes en est une partie $\mathcal{Q}'$ fermée. Par suite $\mathcal{Q}(L)$ peut être considéré comme une partie de l'espace euclidien $\mathbb{R}^5$. Nous allons montrer qu'elle y est fermée.

Soit $A_1A_2A_3A_4 = q \in \mathcal{Q}'$. Alors le périmètre $\mathcal{L}(q)$ de q est donné par :

$$\mathcal{L}(q) = |x_2| + \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + y_3^2} + \sqrt{(x_4 - x_3)^2 + (y_4 - y_3)^2} + \sqrt{x_4^2 + y_4^2}.$$

On voit donc bien que la fonction $\mathcal{L} : \mathcal{Q}' \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est continue. L'ensemble $\mathcal{Q}(L)$ est l'image réciproque par $\mathcal{L}$ du fermé $\{L\}$, donc c'est un fermé de $\mathcal{Q}'$, c'est-à-dire de $\mathbb{R}^5$.

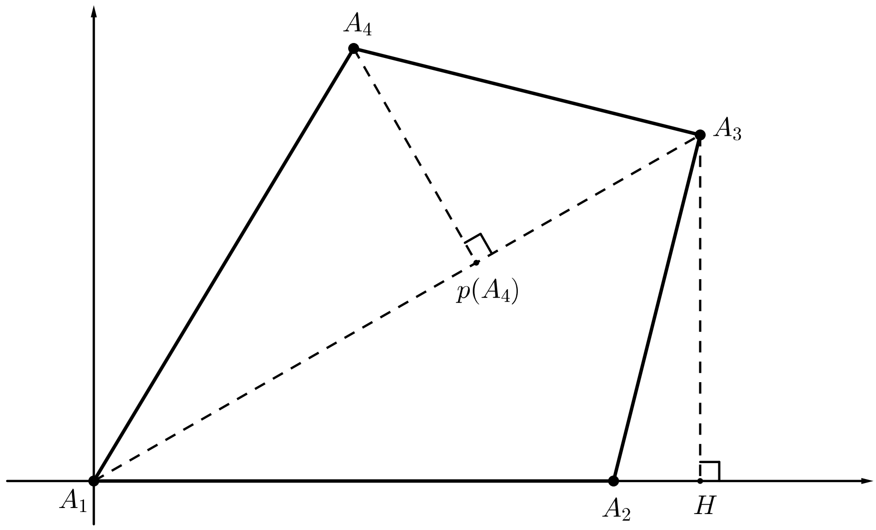
3. Comme $A_1A_2A_3A_4 = q \in \mathcal{Q}(L)$ a pour périmètre L, il est facile de voir que les nombres x_2, x_3, y_3, x_4, y_4 sont tous bornés ; donc $\mathcal{Q}(L)$ est un borné de $\mathbb{R}^5$; comme en plus il est fermé, il y est compact.

Soit $A_1A_2A_3A_4 = q \in \mathcal{Q}'$. Alors l'aire de q est la somme des aires des deux triangles $A_1A_2A_3$ et $A_1A_3A_4$. Notons p la projection orthogonale de $\mathbb{R}^2$ sur la droite (A_1A_3) ; c'est une application affine, donc continue ; par suite, la norme $||\overrightarrow{A_4p(A_4)}||$, qui n'est rien d'autre que la longuer $A_4p(A_4)$, est continue (en tant que fonction de A_4). Par suite, la fonction aire $\mathcal{A} : \mathcal{Q}' \longrightarrow \mathbb{R}_+$ donnée par :

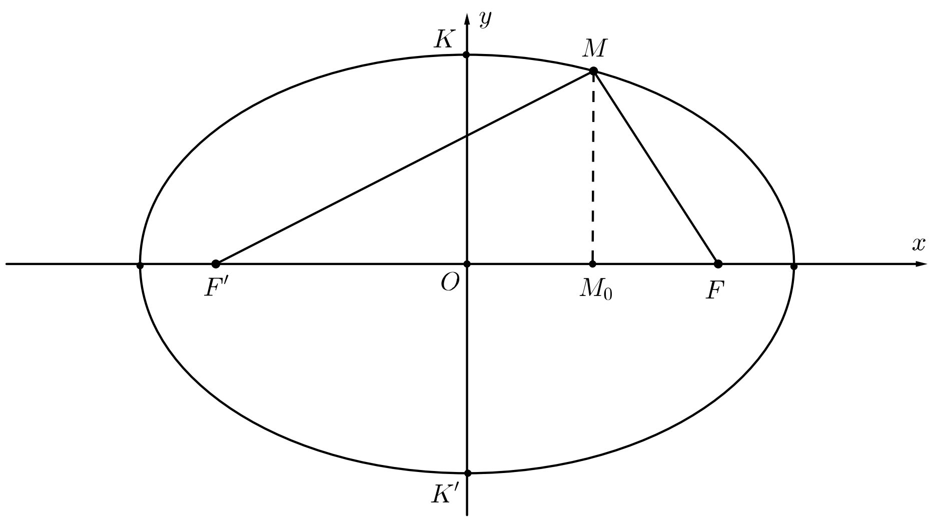
$$\begin{aligned}\mathcal{A}(q) &= \frac{1}{2}\left(A_3H \cdot A_1A_2 + A_4p(A_4) \cdot A_1A_3\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(y_3x_2 + ||\overrightarrow{A_4p(A_4)}||\sqrt{x_3^2 + y_3^2}\right)\end{aligned}$$

est continue, et donc sa restriction à $\mathcal{Q}(L)$ l'est aussi. Par suite il existe $q_0 \in \mathcal{Q}(L)$ tel qu'on ait :

$$\sup_{q \in \mathcal{Q}(L)} \mathcal{A}(q) = \mathcal{A}(q_0).$$



4. L'aire du triangle MFF' est égale à $\frac{1}{2}FF' \cdot MM_0$. Elle est donc maximale lorsque la longueur MM_0 l'est, c'est-à-dire lorsque le point M est en K ou en K' (voir dessin ci-dessus). Cela signifie que le triangle MFF' est isocèle de base FF'.



Partie II

5. Posons $2a = p - \alpha$; comme p et α sont des constantes, $2a$ en est une aussi. Le point A varie mais de façon à ce que $AB + AC = 2a$, donc sur l'ellipse de foyers B et C et de grand axe $2a$. Par la question 4, l'aire du triangle ABC est maximale lorsque celui-ci est isocèle de base BC.

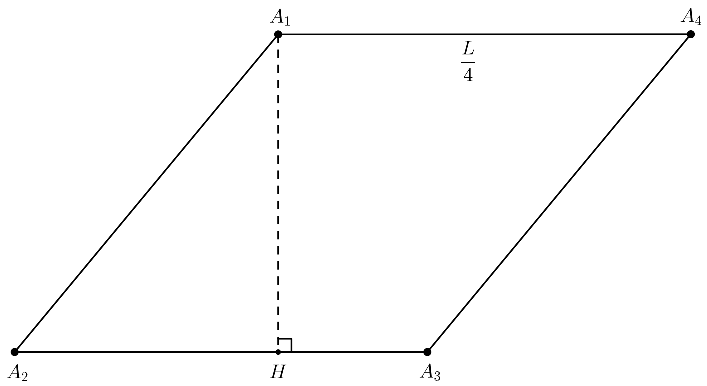
6. Supposons ABC non équilatéral. Alors il a au moins deux côtés non égaux, disons par exemple $AB \neq AC$. D'après ce qui précède, le triangle isocèle $A'BC$ de base BC et de périmètre p (il existe) a une aire strictement supérieure à celle de ABC. Donc, à périmètre prescrit, un triangle non équilatéral ne peut pas maximiser l'aire. Conclusion : à périmètre prescrit, l'aire est maximale lorsque ABC est équilatéral.

7. Soit $A_1A_2A_3A_4 = q \in \mathcal{Q}(L)$. (Le quadrilatère q est convexe de périmètre L.) Supposons que q ne soit pas un losange. Alors deux au moins de ses côtés ne sont pas égaux ; disons $A_2A_1 \neq A_2A_3$ pour fixer les idées.

(i) Soit A_2' le point tel que le triangle $A_2'A_1A_3$ soit isocèle de base A_1A_3 et vérifiant la relation $A_2'A_1 + A_2'A_3 = A_2A_1 + A_2A_3$ (un tel point existe par la question 5). Alors l'aire de $A_2'A_1A_3$ est strictement supérieure à celle de $A_1A_2A_3$; donc l'aire du quadrilatère $A_1A_2'A_3A_4$ (qui a aussi L pour périmètre) est strictement supérieure à celle de $A_1A_2A_3A_4$.

(ii) D'après ce qui précède, un quadrilatère de périmètre L d'aire maximale est forcément un losange ; son côté mesure donc $\frac{L}{4}$. Mais il existe une infinité de tels losanges.

(iii) On peut donc supposer que q est un losange de côté $\frac{L}{4}$. Son aire est $A_1H \cdot \frac{L}{4}$ où H est la projection orthogonale de A_1 sur la droite (A_2A_3). Elle sera donc maximale lorsque la hauteur A_1H se confond avec l'hypothénuse A_1A_2, ce qui est le cas lorsque l'angle $\widehat{A_2A_1A_4}$ est droit. En d'autres termes, lorsque le quadrilatère q est un carré. L'aire maximale est alors $\frac{L^2}{16}$.



DEUX PETITES FRIANDISES

1. Des triangles dorés

À un triangle $\tau = ABC$ non plat sont associés 6 nombres : les mesures x, y et z respectivement des côtés BC, CA et AB et celles α, β et γ respectivement des angles $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$.

Trouver deux triangles τ et τ' non isométriques ayant 5 de ces nombres égaux.

La première chose à voir est que si 5 des 6 nombres sont égaux, c'est que celui qui diffère est forcément un côté (l'assertion "trois côtés égaux" implique l'isométrie entre les deux d'après le premier cas d'égalité des triangles).

Puisque un triangle est caractérisé à isométrie près par ses côtés, on le désignera par un triplet $\tau = \langle x, y, z\rangle$ de nombres réels $x > 0$, $y > 0$ et $z > 0$ tels que :

$$(1) \qquad \begin{cases} x < y + z \\ y < z + x \\ z < x + y. \end{cases}$$

(Les inégalités sont strictes parce que les triangles que nous considérons sont supposés non plats.) La vraie question est donc en fait :

Trouver deux triangles τ et τ' semblables, non isométriques et ayant deux côtés égaux.

Les deux triangles $\tau = \langle x, y, z\rangle$ et $\tau' = \langle x', y', z'\rangle$ étant semblables, il existe un nombre réel $\lambda > 0$ tel que $x' = \lambda x, \quad y' = \lambda y \quad et \quad z' = \lambda z.$

Nous allons en fait répondre à une question un peu plus générale : trouver toutes les paires (τ, τ') de triangles $\tau = \langle x, y, z\rangle$ et $\tau' = \langle x', y', z'\rangle$ tels que :

$$(2) \qquad \begin{cases} x' = y \\ y' = z \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \frac{x'}{x} = \frac{y'}{y} = \frac{z'}{z}.$$

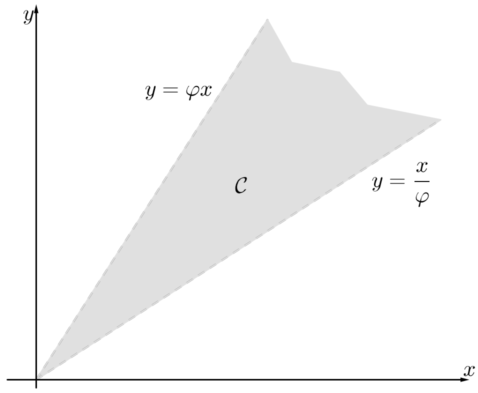
La résolution (assez facile) de ce problème nous amène à choisir librement x et y et prendre nécessairement $z = \frac{y^2}{x}$ et $z' = \frac{y^3}{x^2}$. A priori, les solutions sont de la forme :

$$(3) \qquad \tau = \left(x, y, \frac{y^2}{x}\right) \qquad \text{et} \qquad \tau' = \left(y, \frac{y^2}{x}, \frac{y^3}{x^2}\right) \qquad \text{avec } x \text{ et } y \text{ arbitraires dans } \mathbb{R}_+^*.$$

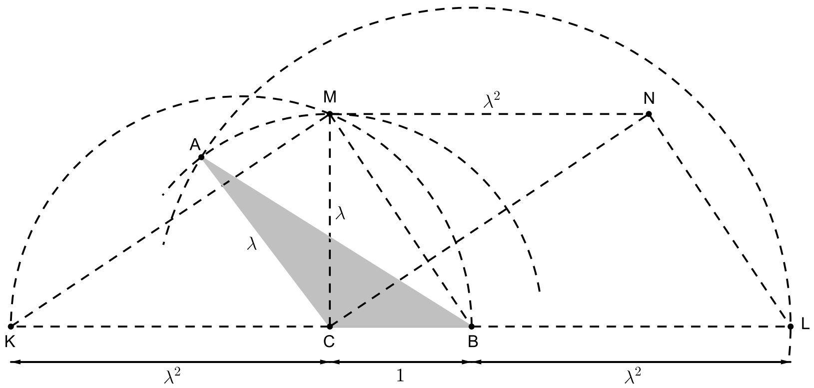
Mais le triplet $\left(x, y, \frac{y^2}{x}\right)$ ne représente un triangle τ que si ses composantes vérifient les inégalités (1). Un calcul simple amène à imposer à x et y la condition $\frac{x}{\varphi} < y < \varphi x$ où $\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ est le *nombre d'or*. Le couple (x, y) ne peut donc être choisi que dans le cône ouvert $\mathcal{C}$ grisé dans le dessin ci-dessous. Et comme x doit être différent de y (les triangles cherchés ne peuvent pas être isocèles), $\mathcal{C}$ est privé de la première bissectrice.

Finalement, les paires de triangles (τ, τ') répondant à la question sont (que nous présentons de façon légèrement differénte) :

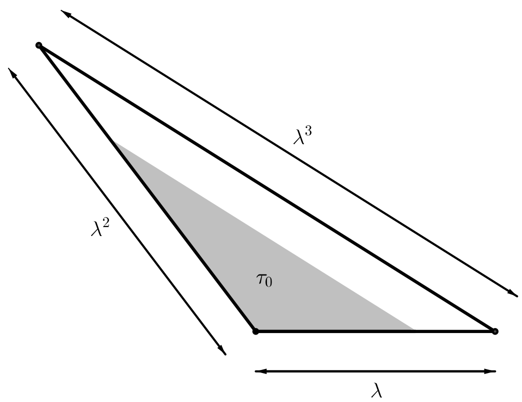
$$(4) \quad \tau = (x, \lambda x, \lambda^2 x) \qquad \text{et} \qquad \tau' = (\lambda x, \lambda^2 x, \lambda^3 x) \qquad x, \lambda \in \mathbb{R}_+^* \text{ avec } \tfrac{1}{\varphi} < \lambda < \varphi \text{ et } \lambda \neq 1.$$



Si on prend par exemple $x = 1$, les triangles $\tau_0 = \langle 1, \lambda, \lambda^2 \rangle$ et $\tau_1 = \langle \lambda, \lambda^2, \lambda^3 \rangle$ répondent à la question mais aussi $\tau_n = \langle \lambda^n, \lambda^{n+1}, \lambda^{n+2} \rangle$ et $\tau_{n+1} = \langle \lambda^{n+1}, \lambda^{n+2}, \lambda^{n+3} \rangle$ avec $n \in \mathbb{Z}$. Le nombre $\lambda \in]\varphi^{-1}, \varphi[\setminus\{1\}$ étant donné, construisons géométriquement par exemple la paire (τ_0, τ_1) en commençant par τ_0.



On trace un segment BC de longueur 1. Sur la perpendiculaire en C à la droite (BC), on repère un point M tel que $CM = \lambda$. La perpendiculaire en M à (BM) coupe la droite (BC) en un point K tel que $CK = \lambda^2$. On construit le parallélogramme $CKMN$ ensuite le parallélogramme $MNLB$; le segment LB mesure donc λ^2. Le point A, troisième sommet du triangle τ_0 (les deux premiers étant B et C) est l'intersection du cercle de centre C et passant par M et le cercle de centre B et passant par L.



Le triangle τ_1 s'obtient en appliquant au triangle τ_0 déjà construit l'homothétie de centre C et de rapport λ.

On peut se poser une question supplémentaire : *parmi ces triangles solutions du problème, y en a-t-il qui sont rectangles* ? Une simple application du théorème de Pythagore montre que de tels triangles sont donnés comme suit :

(5) $\tau = (x, \lambda x, \lambda^2 x)$ et $\tau' = (\lambda x, \lambda^2 x, \lambda^3 x)$ avec $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\lambda = \sqrt{\varphi}$ ou $\lambda = \frac{1}{\sqrt{\varphi}}$.

(On vérifie facilement que les nombres $\sqrt{\varphi}$ et $\frac{1}{\sqrt{\varphi}}$ sont bien dans l'intervalle $]\varphi^{-1}, \varphi[$.) Le rapport des aires de ces deux triangles (du plus grand au plus petit) est donc exactement le nombre d'or φ.

L'intérêt de cet exercice est qu'il est riche par tout ce que fait revisiter sa résolution, notamment :

• Les cas d'égalité et de similitude des triangles. C'est l'occasion de les rappeler. Le moins qu'on puisse dire est que beaucoup d'étudiants de Licence 3 et de Master ne savent plus (ou n'ont peut-être jamais su) ce que c'est.

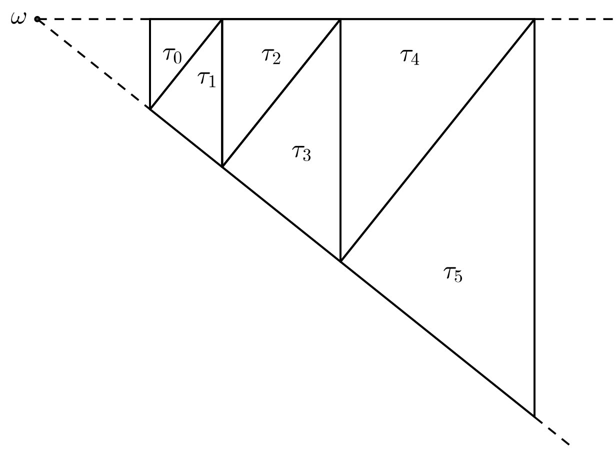
• Un peu d'analyse élémentaire dans la résolution du problème. L'apparition quelque peu mystérieuse du nombre d'or $\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, de son inverse $\frac{1}{\varphi} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ et de sa racine carrée (pour les paires de triangles rectangles) est une agréable surprise.

• Des constructions géométriques à la règle et au compas, notamment pour avoir λ^2 et λ^3 à partir de λ dès qu'on se donne celui-ci.

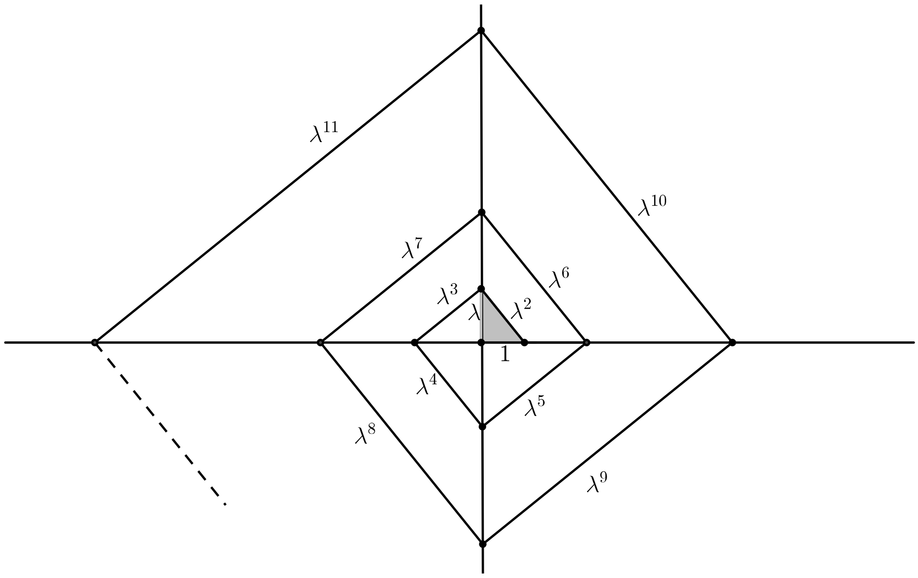
C'est donc un bon exemple à donner dans une leçon de didactique dans les différentes formations des enseignants. C'est aussi un thème de travail qui pourrait être développé en Seconde, Première ou Terminale par exemple. Et au-delà de tout cela, il intéressera sûrement toute personne passionnée par ce genre de mathématiques.

Des triangles rectangles répondant à la question

Le paramètre λ qui suit désigne $\sqrt{\varphi}$.



On part du triangle rectangle $\tau_0 = \langle 1, \lambda, \lambda^2 \rangle$ et on construit $\tau_1 = \langle \lambda, \lambda^2, \lambda^3 \rangle$. Les triangles τ_2 et τ_3 sont les transformés respectifs de τ_0 et τ_1 par l'homothétie de centre ω et de rapport $\lambda^2 = \varphi$. Et ainsi de suite...

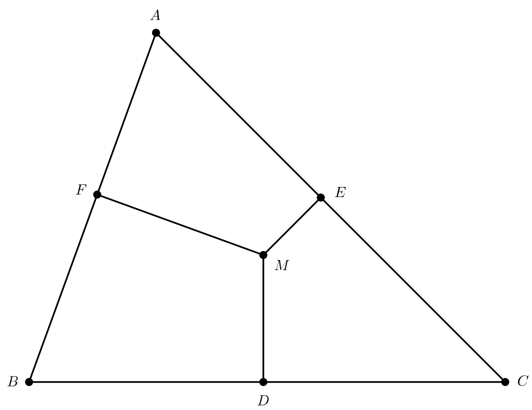


On part du triangle rectangle $\tau_0 = \langle 1, \lambda, \lambda^2 \rangle$ et on construit le triangle $\tau_1 = \langle \lambda, \lambda^2, \lambda^3 \rangle$ en lui appliquant la similitude σ de centre l'origine, de rapport λ et d'angle $\frac{\pi}{2}$. De façon générale, τ_n (avec $n \in \mathbb{Z}$) est obtenu en appliquant à τ_0 la similitude $\sigma_n = \sigma^n$. (Ici, σ_0 est l'identité et $\sigma_n = (\sigma^{-1})^{|n|}$ si $n < 0$.) Pour chaque entier $k \geq 0$, on pourrait placer la suite partielle à quatre termes $(\tau_{4k}, \tau_{4k+1}, \tau_{4k+2}, \tau_{4k+3})$ à une certaine hauteur de telle sorte qu'on verrait l'ensemble comme un immeuble avec une infinité d'étages, le $k^{\text{ème}}$ au niveau λ^{4k} et une infinité de sous-sols, le $\ell^{\text{ème}}$ au niveau $-\lambda^{-4\ell}$.

2. Le problème des trois rivières

On se donne un triangle ABC (non réduit à un point). On pose $a = BC$, $b = CA$ et $c = AB$. Soient M un point à l'intérieur de ABC, D, E et F ses projections orthogonales respectivement sur BC, CA et AB ; $x = MD$, $y = ME$ et $z = MF$ sont donc les distances respectives de M aux côtés $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$. On pose $d = x + y + z$.

Quelle est la position de M pour laquelle d est minimale ?



Solution. C'est un problème de minimisation d'une quantité linéaire dépendant de trois variables soumises à des contraintes qui sont aussi linéaires. Nous allons le résoudre de manière graphique. En fait, nous donnerons de façon précise la variation de la quantité $d = x + y + z$, en particulier là ou elle atteint son minimum et son maximum.

L'aire $\mathcal{A}$ du triangle ABC est la somme des aires des triangles MBC, MCA et MAB, c'est-à-dire :

$$\mathcal{A} = \frac{ax}{2} + \frac{by}{2} + \frac{cz}{2}.$$

Les nombres x, y, z vérifient donc la relation $ax + by + cz = \alpha$ où α est la constante $2\mathcal{A}$.

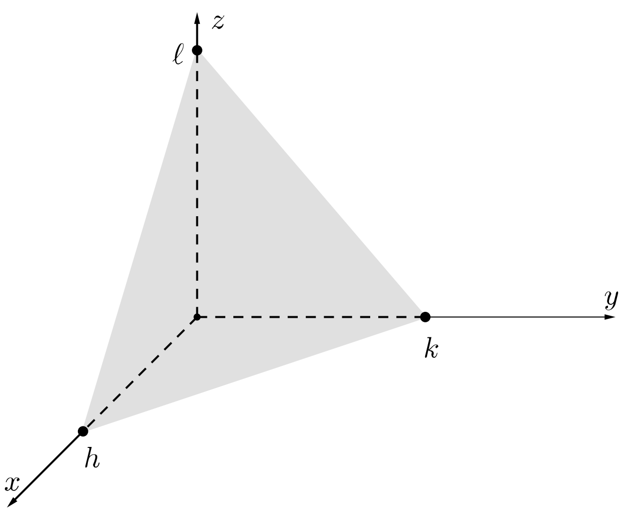
Supposons ABC équilatéral, c'est-à-dire $a = b = c$. Alors la relation $ax + by + cz = \alpha$ devient :

$$x + y + z = \frac{\alpha}{a},$$

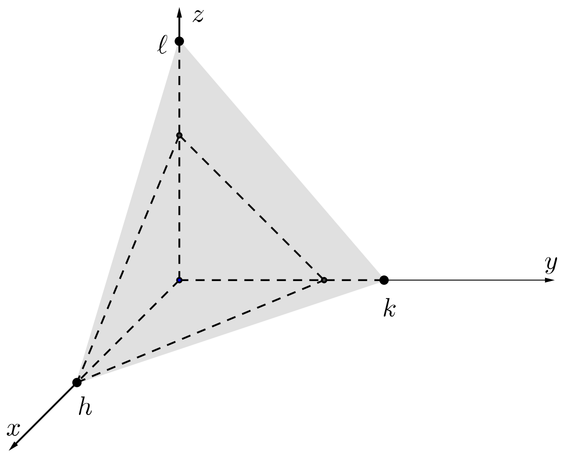
donc la quantité $d = x + y + z$ est constante comme fonction du point M. Désormais, on supposera ABC non équilatéral en prenant $a \geq b > c$; et pour ne pas être dans un cas trivial, c sera strictement positif. Si h, k et ℓ sont les hauteurs issues respectivement de A, B et C, on a $h \leq k < \ell$ (car $h = \frac{\alpha}{a}$, $k = \frac{\alpha}{b}$ et $\ell = \frac{\alpha}{c}$).

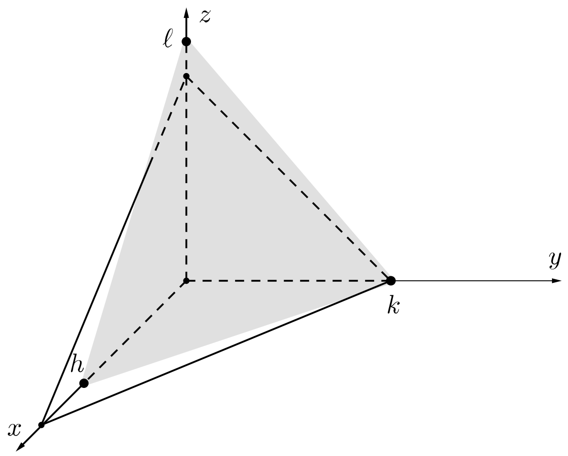
On peut montrer (facile) qu'inversement trois nombres réels positifs x, y, z qui vérifient une telle relation sont les distances respectives d'un point intérieur à ABC aux trois côtés BC, CA et AB. On peut donc représenter l'ensemble de ces points par le triangle Δ dans $\mathbb{R}^3$ dessiné ci-dessous

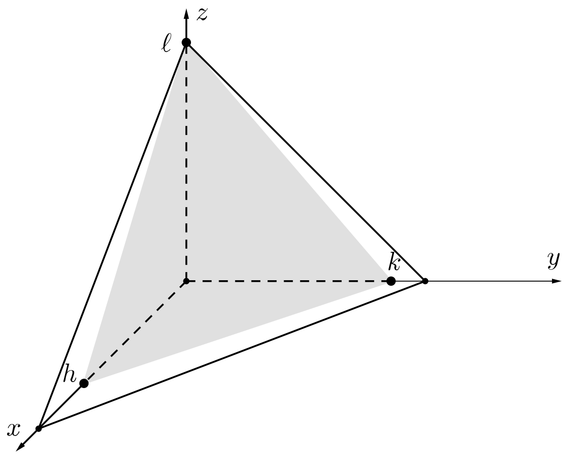
On cherche à minimiser la quantité $d = x + y + z$. On va en fait étudier sa variation (minimum, maximum...). Pour $d \in \mathbb{R}$, la relation $x + y + z = d$ définit un plan affine $\mathcal{H}_d$ dans $\mathbb{R}^3$ de direction le plan vectoriel d'équation $x + y + z = 0$.



Pour $d = 0$, $\mathcal{H}_0$ passe par l'origine et n'intersecte pas le triangle Δ. Lorsque d croit, $\mathcal{H}_d$ se déplace en restant parallèle à $\mathcal{H}_0$; il commence à toucher Δ au point $(h, 0, 0)$ qui donne donc le minimum h de la quantité $d = x + y + z$. Le point M est alors en A. Quand d passe de h à k, M est au point B et finalement d arrive au maximum autorisé ℓ lorsque M est en C. Au-delà ($d > \ell$), le plan $\mathcal{H}_0$ ne touche plus Δ. On peut voir les trois étapes principales sur les dessins qui suivent.



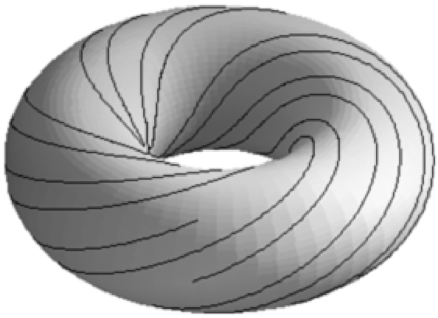




Le lecteur intéressé et passionné par des problèmes du même type en géométrie élémentaire plane, peut consulter l'ouvrage [Ek2].

LE TORE

Présent dans beaucoup de branches des mathématiques : analyse, topologie algébrique, géométrie différentielle et complexe, systèmes dynamiques, théorie des représentations des groupes...
Le meilleur logo pour marquer cet ouvrage.



Le tore, petite roue,
Figure de proue
Et merveille esthétique
Du jardin topologique.
Le souvenir que j'en ai
Est celui du beignet
Que je dégustais avec fréquence
Dans ma tendre enfance.
Mais beaucoup d'années après,
Je découvre de près,
L'héritier chimérique
Du plan numérique,
Et dont la valise,
Cache de l'analyse :
Des séries de Fourier
Dans son immense terrier.
Dans son atmosphère,
Point celle de la sphère,
Des champs tangents
Y demeurent constants.
Une de ses grandes qualités :
Seule surface feuilletée.
Et l'objet abstrait
A meilleur attrait :
Dans toutes ses coutures,
Plate est sa courbure.

Le tore se tord !

Se larguant dans l'espace,
Tel un serpent, il s'enlace.
Ainsi, il peut être noué
Et drôlement floué.
Défiant toute norme,
Il respire et déforme
Sa magnifique carapace
En toute petite tasse.
Mais toujours intact,
C'est son impact.
Tout est bien rangé,
Rien n'est changé :
Sa belle topologie
Sacrant son homologie.
Ses beaux invariants
Le font si brillant.
Son petit genre Un
En fait sacrément quelqu'un.
Il est dans toute chose,
Servant toute cause
De pléthore de mathématiques
Des molles aux dynamiques.
Un beau groupe de Lie,
D'une peau lisse et sans pli,
Et comme courbe elliptique,
Il ne manque jamais de réplique.
C'est la brique qu'on casse
Dans la fabrique des surfaces.

Aziz El Kacimi

BIBLIOGRAPHIE

[Ar] ARNOLD, V. *Équations différentielles ordinaires.* Éditions Mir, Moscou (1974).

[Br] BRONSON, R. *Differential Equations.* Schaum's Outline Series, McGraw-Hill (1993).

[Ca] CARTAN, H. *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes.* Hermann (1985).

[CCM] CHRISTOL, G., COT, A. & MARLE, C.-M. *Topologie.* Collection Mathématiques pour le 2ème cycle, Ellipses (1997).

[CE] COUTY, R. & EZRA, J. *Analyse.* Tomes I et II. Collection U, Armand Colin (1967).

[Ar] DEMAILLY, J.-P. *Analyse numériqe et équations différentielles.* Collection Grenoble Sciences, PUG (1991).

[Di] DIXMIER, J. *Cours de mathématiques du premier cycle.* Première Année, Gauthier-Villars Éditeur (1973).

[Ek1] EL KACIMI ALAOUI, A. *Éléments d'intégration et d'analyse fonctionnelle.* Collection Mathématiques pour le 2ème cycle, Ellipses (1999).

[Ek2] EL KACIMI ALAOUI, A. *Géométrie euclidienne élémentaire.* Collection Références Sciences, Ellipses (2012).

[Ja] JACOB, P. *Cours de probabilités et intégration.* Cours polycopié, Université de Lille I (1984).

[KF] KOLMOGOROV, A. & FOMINE, S. *Éléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle.* Editions MIR (1974).

[KKM] KRASNOV, M., KISSÉLEV, A. & MAKARENKO, G. *Recueil de problèmes sur les équations différentielles ordinaires.* Éditions Mir, Moscou (1981).

[Le] LEHMANN, D. *Initiation à la topologie.* Collection Mathématiques pour le 2ème cycle, Ellipses (2004).

[Li] LIPSCHUTZ, S. *Probabilités (cours et problèmes).* Série Schaum, McGraw-Hill (1983).

[Me] MÉTIVIER, M. *Notions fondamentales de théorie des probabilités.* Dunod Université (1979).

[NS] NUALART, D. & SANZ, M. *Curs de probabilitats.* Collection Estadística y Análisis Datos PPU Barcelona (1990).

[Po] PONTRIAGUINE, L. *Équations différentielles ordinaires.* Éditions Mir, Moscou (1969).

[Qu] QUEFFÉLEC, H. *Topologie. Cours et exercices.* Editions Masson (1998).

[QZ] QUEFFÉLEC, H. & ZUILY, C. *Éléments d'analyse pour l'Agrégation.* Masson (1996).

[Sm] SMIRNOV, V. *Cours de mathématiques supérieures.* Tomes I et II. Éditions Mir, Moscou (1981).

INDEX ALPHABÉTIQUE