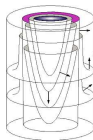


La théorie des feuilletages racontée à mes frangins et frangines !

AZIZ EL KACIMI
Université de Valenciennes

Journée “Exposons-nous” - LAMAV (6 janvier 2011)
École Polytechnique de Tunisie (28 avril 2011)



0. Avant-propos



LE TEMPS EST LE PARAMETRE
FONDAMENTAL DE LA VIE !

- Il s'écoule tranquillement sur son axe !
- Pléthore de grandeurs en dépendent
- Il en modifie la nature et le parcours.
- Il est totalement indépendant de tout.
- Personne ne peut le maîtriser !

Extraits de poèmes de **Alphonse de Lamartine**

Ô temps !

*Ô temps ! suspends ton vol, et vous, heures propices !
Suspendez votre cours :
Laissez-nous savourer les rapides délices
Des plus beaux de nos jours !*

Le lac

*Ainsi, toujours poussés vers de nouveaux rivages,
Dans la nuit éternelle emportés sans retour,
Ne pourrons-nous jamais sur l'océan des âges
Jeter l'ancre un seul jour ?*

GRANDEURS DÉPENDANT DU TEMPS

Soit G une grandeur qui varie dans le temps : à l'instant t , elle prend une certaine valeur $G(t)$. Elle peut être par exemple :

- la population d'un pays (on mesure t en années) ;
- la température d'un corps (on mesure t en minutes) ;
- une population de bactéries (on mesure t en tranches de 20 mn) ;
- un capital déposé en épargne (on mesure t en mois)...

Problème : Déterminer l'expression de $G(t)$ en fonction de t !

Habituellement, on ne connaît que la valeur G_0 de G à un instant t_0 et une relation entre G et sa “variation relativement” à t , c'est-à-dire sa dérivée $\frac{dG}{dt}$ (quand elle existe).

L'expérience nous montre que la variation relative $\frac{dG}{dt}$ de chacune des grandeurs citées est proportionnelle à $G(t)$ i.e. il existe une constante K (liée à la nature de la grandeur et déterminée approximativement) telle que $\frac{dG}{dt}(t) = KG(t)$ ou encore :

$$\frac{dG}{dt}(t) - KG(t) = 0 \quad \text{à tout instant } t.$$

C'est typiquement un exemple d'*équation différentielle* : une relation entre la fonction inconnue (qu'on cherche à déterminer) et sa dérivée (ou certaines de ses dérivées d'ordre supérieur). La solution générale de cette équation est alors : $G(t) = Ce^{Kt}$ où C est une constante. Si on connaît la valeur G_0 de G à l'instant initial $t_0 = 0$, on voit alors que $C = G_0$. Donc la fonction cherchée est donnée par :

$$G(t) = G_0 e^{Kt} \quad \text{à tout instant } t.$$

De façon générale, soient \mathbb{E} l'espace euclidien de dimension n et Ω un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{E}$.

Une *équation différentielle* sur Ω est une relation de la forme $\frac{dx}{dt} = f(t, x)$ où $f : \Omega \rightarrow \mathbb{E}$ est une fonction continue et x un vecteur de \mathbb{E} variant en fonction de t et qu'on cherche à déterminer.

Une *solution* de cette équation est la donnée d'un intervalle ouvert J de \mathbb{R} et d'une fonction dérivable $\varphi : J \rightarrow \mathbb{E}$ telle que, pour tout $t \in J$, on ait $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$.

Le *paramètre* t représente en général le *temps*; cela vient du fait que beaucoup d'équations différentielles proviennent de problèmes de physique, chimie, économie... (on en a donné quelques exemples) dans lesquels la fonction φ décrit les variations d'une certaine grandeur en fonction de t .

Exemples

i) Prenons f constante égale au vecteur $a \in \mathbb{E}$. Alors l'équation différentielle est définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{E}$ et toute fonction affine $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}$ de **direction** a en est une solution. Toutefois, si on impose à φ de prendre une valeur particulière x_0 à l'instant t_0 , la solution devient **unique**.

ii) Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction continue définie par $f(t, x) = 3x^{\frac{2}{3}}$. Alors la fonction identiquement nulle $\varphi = 0$ est solution ; de même, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\varphi_\lambda(t) = (t - \lambda)^3$ est une solution qui s'annule pour $t_0 = \lambda$.

Sur l'exemple ii), on voit que, même si on impose la condition $\varphi(\lambda) = 0$, la solution n'est pas unique : $\varphi = 0$ et φ_λ sont deux solutions s'annulant en λ !

Pour avoir une solution unique, il faut donc imposer $\varphi(t_0) = x_0$ qu'on appelle *condition initiale*, ensuite une autre hypothèse sur la fonction f .

On appelle *problème de Cauchy*, toute équation différentielle ordinaire $x' = f(t, x)$ avec une condition initiale $x(t_0) = x_0$ où $(t_0, x_0) \in \Omega$.

Ceci signifie qu'on impose à la *courbe intégrale* de passer par le point x_0 à l'instant t_0 . La solution (locale) du problème de Cauchy est donnée par le théorème qui suit qu'on peut attribuer au moins à A. Cauchy, S. Kowaleska et E. Picard. Pour tout $(t_0, x_0) \in \Omega$ et tous $\alpha > 0$ et $\eta > 0$, on notera $B = B(x_0, \eta)$ la boule ouverte de centre x_0 et de rayon η et J_α l'intervalle ouvert $]t_0 - \alpha, t_0 + \alpha[$.

Théorème d'existence

Soient $(t_0, x_0) \in \Omega$, $\varepsilon > 0$ et $\eta > 0$ tels que l'adhérence de $\Omega_0 = J_\varepsilon \times B$ soit contenue dans Ω . Supposons $f : \Omega \rightarrow \mathbb{E}$ lipschitzienne sur Ω_0 . Posons :

$$M = \sup_{(t,x) \in \Omega_0} |f(t,x)| \quad \text{et} \quad \alpha = \inf\left(\varepsilon, \frac{\eta}{M}\right).$$

Alors le problème de Cauchy :

$$x' = f(t,x) \quad \text{avec} \quad x(t_0) = x_0$$

admet une **solution** φ sur l'intervalle fermé

$\bar{J}_\alpha = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$; elle est **unique** i.e. toute autre solution définie sur \bar{J}_α est égale à φ .

À quand remonte la découverte des équations différentielles ?

Probablement au moment où on a commencé à se poser des questions sur les liens qui existent entre les valeurs d'une grandeur et la manière dont elle varie en fonction des paramètres qui la déterminent !

Dans son livre *Chapitres supplémentaires de la théorie des équations différentielles ordinaires*, Vladimir Arnold rapporte que I. Newton considère que sa principale découverte tient dans une phrase qu'il a notée sous forme d'anagramme et qui, en langage moderne, dit à peu près ceci :

Il est utile de résoudre les équations différentielles !

Le contenu de cette phrase est évidemment capital ! Mais depuis cet avènement aucun mathématicien n'est arrivé à atteindre ce but : il est bien connu qu'à l'heure actuelle il n'existe aucune méthode générale d'intégration des équations différentielles ! Dans beaucoup de cas on sait le faire avec une méthode particulière, bien propre à la situation, et toutes ces méthodes peuvent différer totalement les unes des autres.

À défaut de cela, certains mathématiciens se sont mis à étudier les propriétés géométriques (ou simplement topologiques) et le comportement asymptotique de leurs variétés intégrales. C'est la naissance de la théorie des *feuilletages* : l'étude qualitative des équations différentielles, initiée par les travaux de [H. Poincaré](#), [I. Bendixon](#) et développée plus tard par [C. Ehresmann](#), [G. Reeb](#), [A. Haefliger](#) et bien d'autres. Depuis lors, le sujet est devenu un large champ d'investigation en mathématiques.

On peut donc dire que

**La théorie des feuilletages est née
de l'incapacité des mathématiciens à
résoudre explicitement
les équations différentielles !**

1. Préliminaires

Définissons d'abord ce qu'est une *variété*. Un objet important en mathématiques est l'espace euclidien \mathbb{R}^d . Le fait qu'il existe dessus un système de coordonnées globales facilite la formulation des problèmes d'analyse. Mais beaucoup d'entre eux sont sous contraintes, par exemple :

Résoudre le problème (P) dans \mathbb{R}^d
 sous la contrainte $x_1^2 + \cdots + x_d^2 = 1$.

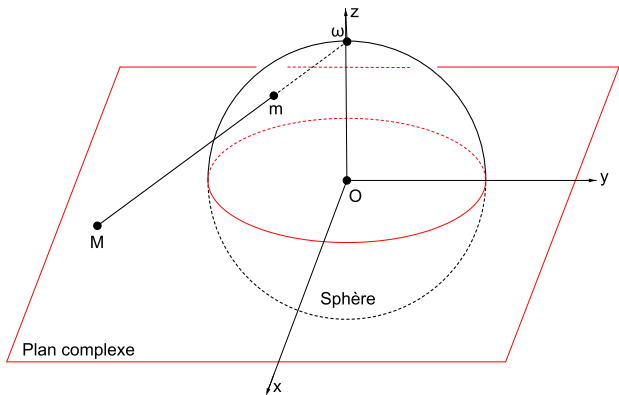
Ce problème se pose en fait sur une partie fermée de \mathbb{R}^d et non sur \mathbb{R}^d tout entier, en l'occurrence la sphère S^{d-1} . Un espace topologique M (avec un minimum de bonnes propriétés) donné localement par des conditions similaires se comporte comme un espace euclidien ; on dira que c'est une *variété topologique* : pour chaque point x de M il existe un voisinage ouvert U de x et un homéomorphisme φ d'un ouvert de \mathbb{R}^n sur U .

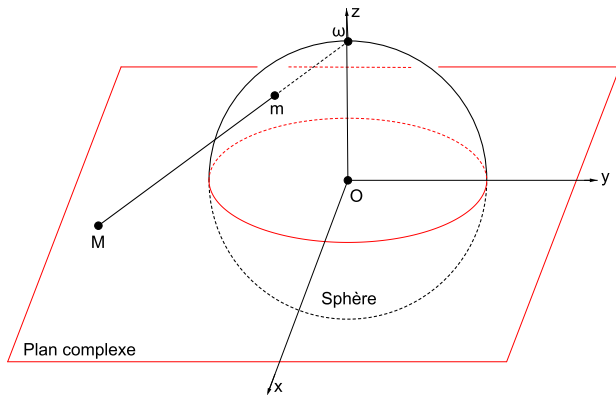
Pour connaître un point x de U , il suffit donc de connaître les coordonnées (x_1, \dots, x_n) dans \mathbb{R}^n de son image réciproque $\varphi^{-1}(x)$. Pour cette raison on dira que U est un *ouvert de coordonnées locales* de M au voisinage de x . La paire (U, φ) est appelée *carte locale* et $(x_1, \dots, x_n) = \varphi^{-1}(x)$ seront les *coordonnées* de x .

Si (U, φ) et (V, ψ) sont deux cartes locales telles que l'intersection $U \cap V$ soit non vide alors un point $x \in U \cap V$ sera repéré par ses coordonnées (x_1, \dots, x_n) dans U et ses coordonnées (x'_1, \dots, x'_n) dans V . On doit avoir la condition :

$$(x'_1, \dots, x'_n) = \psi^{-1} \circ \varphi(x_1, \dots, x_n).$$

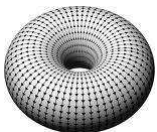
L'application $\psi^{-1} \circ \varphi$ est appelée *changement de coordonnées* de la carte (U, φ) à la carte (V, ψ) . Lorsque tous ces changements de coordonnées sont de classe C^∞ , on dira que M est une *variété différentiable*.





La *projection stéréographique* relative au pôle Nord ω réalise un homéomorphisme analytique entre le plan complexe et l'ouvert $S^2 \setminus \{\omega\}$ de la sphère S^2 .

Surfaces orientables !



Tore non noué

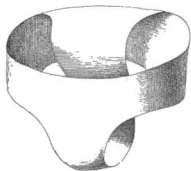


Tore noué



Surface de genre 3

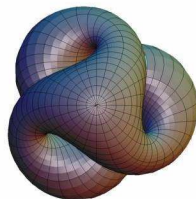
Surfaces non orientables !



Le slip de Möbius
(difficile à porter !)

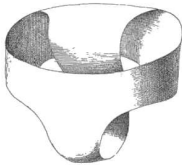


Bouteille de Klein



Surface de Boy
(immersion du plan
projectif réel dans
l'espace euclidien)

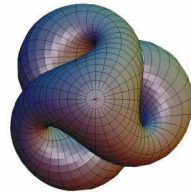
Surfaces non orientables !



Le slip de Möbius
(difficile à porter !)



Bouteille de Klein

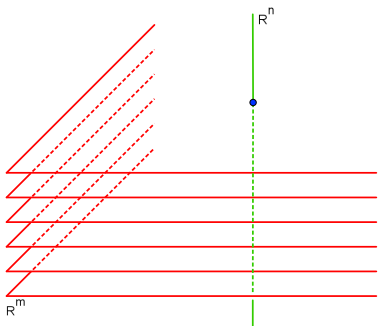


Surface de Boy
(immersion du plan
projectif réel dans
l'espace euclidien)

*Dans l'enfer topologique, la bière est
contenue dans des bouteilles de Klein !*

2. Feuilletages

Un *feuilletage* est une structure géométrique que peut supporter une variété. Pour comprendre ce que c'est, il est plus commode d'en voir d'abord le *modèle local*. Jetons un coup d'œil sur l'espace euclidien $M = \mathbb{R}^{m+n}$ dessiné ci-dessous :



Feuilletage trivial sur \mathbb{R}^{m+n} défini par le système différentiel $dy_1 = \dots = dy_n = 0$

Il peut être vu comme le produit $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$. Sa topologie usuelle est le produit des topologies des deux facteurs ; elle en fait une variété différentiable connexe de dimension $m + n$. Mais on peut aussi l'équiper de la topologie produit de la topologie usuelle sur le premier facteur et la **topologie discrète** sur le second ; il devient alors une variété différentiable de dimension m non connexe, ses composantes connexes étant les sous-espaces horizontaux définis par le système différentiel $dy_1 = \dots = dy_n = 0$ qui peuvent être vus comme des **feuilles**. On voit donc que l'espace M est équipé de deux topologies : la topologie usuelle et la **topologie des feuilles**.

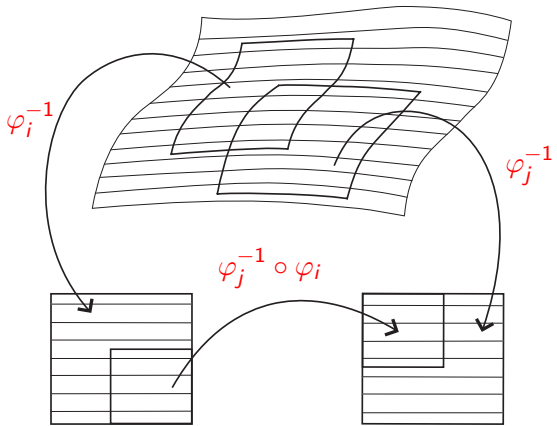
Soit maintenant M une variété (connexe) de dimension $m + n$. Intuitivement on peut définir un **feuilletage** de dimension m (et de codimension n) sur M comme une structure géométrique telle que autour de chaque point on retrouve quelque chose qui ressemble à ce dessin. La première définition est alors la suivante :

Définition

Soit M une variété (connexe) de dimension $m+n$. Un feuilletage \mathcal{F} de codimension n (ou de dimension m) sur M est la donnée d'un recouvrement ouvert $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ et, pour tout i , d'un difféomorphisme $\varphi_i : \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow U_i$ tel que, sur toute intersection non vide $U_i \cap U_j$, le difféomorphisme de changement de coordonnées

$\varphi_j^{-1} \circ \varphi_i : (x, y) \in \varphi_i^{-1}(U_i \cap U_j) \rightarrow (x', y') \in \varphi_j^{-1}(U_i \cap U_j)$ soit de la forme $x' = \varphi_{ij}(x, y)$ et $y' = \gamma_{ij}(y)$.

Dans le changement de coordonnées celles qui sont transverses ne dépendent pas de celles qui sont tangentes ! Cela signifie que la structure feuilletée sur $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ montrée sur le premier dessin est préservée !



La variété est ainsi décomposée en sous-variétés connexes de dimension m ; chacune d'elles est appelée *feuille* du feuilletage \mathcal{F} .

On va donner une seconde définition qui se prête mieux à l'introduction de ce qu'on appelle une *structure transverse*.

Définition

Un *feuilletage* de codimension n sur M est la donnée d'un recouvrement ouvert $(U_i)_{i \in I}$, de submersions $U_i \xrightarrow{f_i} T$ au-dessus d'une variété T de dimension n et pour chaque intersection $U_i \cap U_j$ non vide, d'un difféomorphisme $\gamma_{ij} : f_i(U_i \cap U_j) \subset T \rightarrow f_j(U_i \cap U_j) \subset T$ de telle sorte qu'on ait $f_j(x) = \gamma_{ij} \circ f_i(x)$ pour $x \in U_i \cap U_j$. On dira que le triplet $\{U_i, f_i, T, \gamma_{ij}\}$ est un *cocycle feuilleté* définissant \mathcal{F} .

*D'abord des exemples familiers pour
se mettre en appétit !*



Un bon plat
de spaghettis

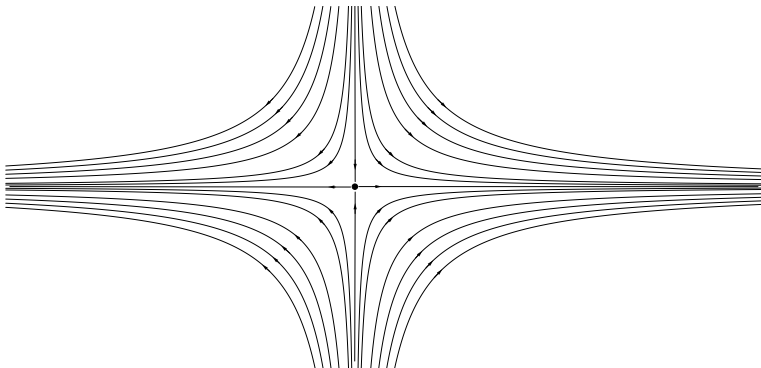


Une pile de crêpes



Une belle laitue !

*Ensuite une équation
différentielle dans le plan !*



**Courbes intégrales de $\frac{dx}{dt} = (x_1, -x_2)$.
Elles définissent un feuilletage sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$**

Déjà tout au début de la théorie des feuilletages, le problème de l'existence d'exemples significatifs s'est réellement posé. Il a fallu s'assurer si elle en avait suffisamment pour qu'elle ne reste pas vide ! D'où l'une des premières questions :

Sous quelles conditions une variété M (connexe pour simplifier) supporte-t-elle un feuilletage ? Y a-t-il des obstructions de nature topologique, géométrique ou autres ?

Nous allons commencer à donner les premiers exemples de feuilletages de dimension **1**. L'obstruction dans ce cas-là va être très simple à décrire. Nous nous contenterons du cas où la variété M est une surface compacte orientable.

3. La dimension 1

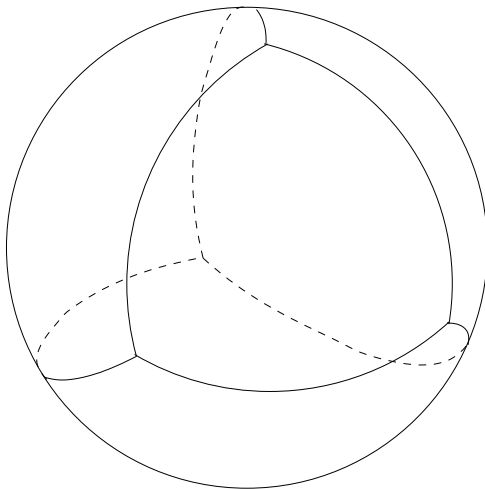
Soit M une surface compacte orientable munie d'une triangulation \mathcal{T} . Soient S , A et F respectivement le nombre de sommets, le nombre d'arêtes et le nombre de faces de \mathcal{T} . Alors l'entier relatif :

$$\chi(M) = S - A + F$$

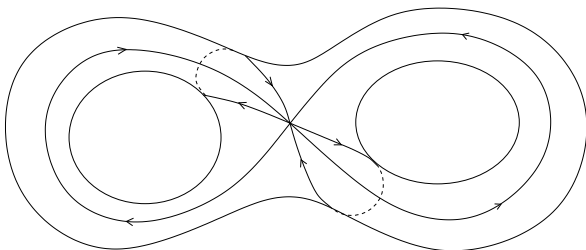
ne dépend pas de \mathcal{T} ; on l'appelle *caractéristique d'Euler-Poincaré* de M .

C'est un *invariant topologique complet* pour les surfaces :

Deux surfaces compactes orientables M et M' sont homéomorphes si, et seulement si, $\chi(M) = \chi(M')$.



$$\chi(S^2) = 4 - 6 + 4 = 2$$



$$\chi(\Sigma_2) = -2.$$

De façon générale une surface Σ_g à g trous a pour caractéristique d'Euler-Poincaré :

$$\chi(\Sigma_g) = 2 - 2g.$$

Théorème de Hopf

Une surface compacte orientable Σ_g (avec $g \geq 0$) admet un champ de vecteurs sans singularité si, et seulement si, $\chi(\Sigma_g) = 0$.

La sphère \mathbb{S}^2 n'en possède pas. Ceci explique par exemple :

- que quand le vent souffle sur toute la surface de la terre, il y a au moins un point en lequel il ne souffle pas : c'est l'*œil du cyclone*!
- qu'on ne peut pas peigner les cheveux d'une tête sans produire une *singularité*!



Théorème

Une surface compacte orientable Σ_g (avec $g \geq 0$) admet un feuilletage \mathcal{F} de dimension 1 si, et seulement si $\chi(M) = 0$.

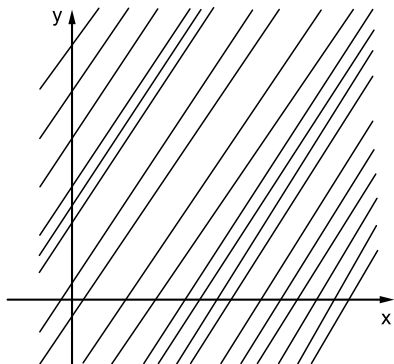
On voit que seul le tore (surface de genre 1) peut être feuilleté par des courbes. Ce n'est le cas ni de la sphère S^2 qui est de genre 0 ni des surfaces de genre $g \geq 2$.

Donnons un exemple sur le tore. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. L'équation différentielle $dy - \alpha dx = 0$ dans le plan admet pour courbes intégrales les droites d'équations $y = \alpha x + c$ où c est une constante réelle. Chaque valeur de c détermine donc une droite affine. Lorsqu'on fait varier c dans tout \mathbb{R} , on obtient une partition du plan \mathbb{R}^2 en droites parallèles de pente α . On obtient ainsi un feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}$.

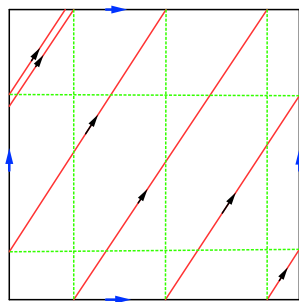
Ce feuilletage est invariant sous l'action du réseau \mathbb{Z}^2 :

$$((m, n), (x, y)) \in \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{R}^2 \longmapsto (x + m, y + n) \in \mathbb{R}^2$$

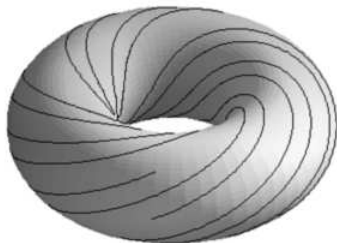
et définit donc un feuilletage \mathcal{F} sur la variété quotient $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ qui n'est rien d'autre que le tore T^2 .



Courbes intégrales de
l'équation différentielle
 $dy - adx=0$



Traces des courbes sur
un domaine fondamental



Si α est un nombre rationnel, les feuilles de \mathcal{F} sont des courbes fermées toutes diffeomorphes au cercle, sinon à la droite réelle et sont toutes denses dans le tore !

Ce feuilletage sert souvent de test : quand quelqu'un annonce un résultat (sur les feuilletsages), on lui demande gentiment d'expliquer d'abord ce que cela donne sur le feuilletage linéaire du tore \mathbb{T}^2 . Il est, en quelque sorte, la tête à claques de la théorie !

Une petite digression

Le champ linéaire tangent au feuilletage sur le tore \mathbb{T}^2 (qu'on vient de voir) définit un opérateur différentiel $D_\alpha = \frac{\partial}{\partial x} + \alpha \frac{\partial}{\partial y}$ sur l'espace $C^\infty(\mathbb{T}^2)$ des fonctions complexes de classe C^∞ . (Un élément de $C^\infty(\mathbb{T}^2)$ est une fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ de classe C^∞ et \mathbb{Z}^2 -périodique.) À toute fonction f on associe sa dérivée $\frac{\partial f}{\partial x} + \alpha \frac{\partial f}{\partial y}$ dans la direction du feuilletage. Cet opérateur n'est pas elliptique mais il peut posséder de bonnes propriétés de régularité. Nous supposons α **irrationnel** et nous considérons le problème :

Étant donnée $g \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$ existe-t-il $f \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$ telle que $\frac{\partial f}{\partial x} + \alpha \frac{\partial f}{\partial y} = g$?

Il est facile de voir qu'une condition nécessaire pour que cette équation admette une solution est :

$$\int_{\mathbb{T}^2} g(x, y) dx dy = 0.$$

Elle n'est pas toujours suffisante. Curieusement, le fait qu'elle le soit ou non dépend de la **nature arithmétique** de α .

• On dira que α est **diophantien** s'il existe des constantes $A > 0$ et $\delta \geq 2$ telles que, pour tout $p \in \mathbb{Z}$ et tout $q \in \mathbb{Z}^*$, on ait :

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{A}{|q|^\delta}.$$

• On dira que α est **de Liouville** s'il existe une constante $A > 0$ telle que, pour tout $s \in \mathbb{N}$, il existe des entiers $p_s \in \mathbb{Z}$ et $q_s \in \mathbb{Z}^*$ vérifiant :

$$\left| \alpha - \frac{p_s}{q_s} \right| \leq \frac{A}{|q_s|^s}.$$

Théorème

- *Supposons α diophantien. Alors l'opérateur D_α est **hypoelleptique** et son image est fermée de codimension 1. Pour toute fonction $g \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$ vérifiant $\int_{\mathbb{T}^2} g(x, y) dx dy = 0$, il existe une fonction $f \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$ telle que $D_\alpha f = g$. Plus : si P est la projection sur le noyau N de D_α (qui est formé par les constantes), il existe un opérateur borné $G : C^\infty(\mathbb{T}^2) \rightarrow C^\infty(\mathbb{T}^2)$ tel que $GD_\alpha = I - P$ (ce qui signifie que D_α est inversible à gauche à un opérateur **compact** près).*
- *Supposons α de Liouville. Alors l'opérateur D_α n'est pas hypoelleptique et son image est non fermée de codimension infinie.*

Soient M une variété compacte (connexe et orientable) supportant un champ sans singularité X . Ce champ définit un opérateur différentiel $f \in C^\infty(M) \mapsto X(f) \in C^\infty(M)$; celui-ci s'étend, par dualité, aux distributions : $T \in \mathcal{D}'(M) \rightarrow X(T) \in \mathcal{D}'(M)$ avec $\langle X(T), f \rangle = -\langle T, X(f) \rangle$. On dira que X est *hypoelliptique* si :

$$X(T) \in C^\infty(M) \implies T \in C^\infty(M).$$

C'est le cas pour le champ linéaire $X = \alpha_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + \alpha_n \frac{\partial}{\partial x_n}$ sur le tore \mathbb{T}^n lorsque le vecteur $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ est *diophantien* i.e. il existe des réels $A > 0$ et $\delta > 2$ tels que :

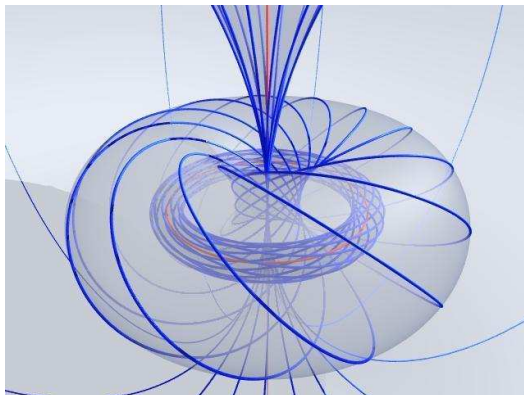
$$|\langle \alpha, \mathbf{m} \rangle| \geq \frac{A}{|\mathbf{m}|^\delta} \quad \forall \mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}.$$

C'est le seul exemple connu ayant cette propriété! Ce qui a amené à la conjecture qui suit (formulée par **S. Greenfield** et **N. Wallach** en 1973) :

Conjecture de Greenfield-Wallach

Soient M une variété compacte orientable de dimension n et X un champ de vecteurs partout non nul préservant un volume C^∞ sur M . On suppose que X est hypoelliptique. Alors M est difféomorphe au tore \mathbb{T}^n et X est conjugué à un champ linéaire diophantien.

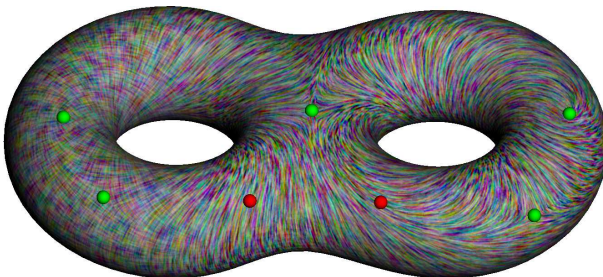
Divers auteurs ont montré qu'elle est vraie pour $n = 2$ et $n = 3$ et pour des champs invariants sur certains espaces homogènes G/Γ . Mais de façon générale elle reste totalement ouverte pour $n \geq 4$.



La fibration de Hopf sur la 3-sphère.
Ses fibres sont des cercles et sa base
est la droite projective complexe.

*“Où la Forme manque l’Idée n’est plus.
Chercher l’un, c’est chercher l’autre.”*

Gustave Flaubert (*Correspondance*)



Courbes intégrales d'un champ
de vecteurs sur une surface de genre 2

4. La codimension 1

Le cas général

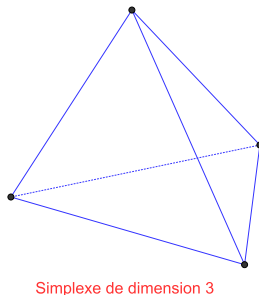
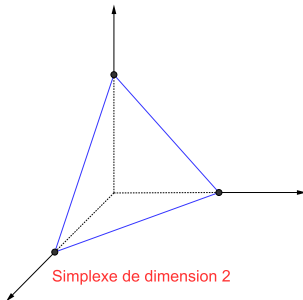
Soit M une variété compacte (connexe orientable) de dimension n .

Sous quelles conditions admet-elle un feuilletage \mathcal{F} de codimension 1 ?

Comme dans le cas des surfaces, l'obstruction sera aussi la caractéristique d'Euler-Poincaré qui se définit comme suit. On considère une *triangulation* \mathcal{T} de M par des simplexes comme ceux dessinés ci-dessous (le *simplexe standard* de dimension k est l'enveloppe convexe dans l'espace euclidien \mathbb{R}^{k+1} des vecteurs e_1, \dots, e_{k+1} de la base canonique). Pour chaque $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, on note m_k le nombre de simplexes de dimension k de cette triangulation \mathcal{T} . Alors l'entier :

$$\chi(M) = \sum_{k=0}^n (-1)^k m_k$$

ne dépend pas de \mathcal{T} . Si M est homéomorphe à M' alors $\chi(M) = \chi(M')$; la caractéristique d'Euler-Poincaré est donc un invariant topologique (mais il n'est pas complet en dimension ≥ 3). Si M est de dimension impaire, $\chi(M) = 0$.



Supposons qu'un tel feuilletage \mathcal{F} existe et qu'il est orientable. Munissons M d'une métrique riemannienne, c'est-à-dire d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_x$ sur chaque espace tangent $T_x M$ de telle sorte que la famille $\langle \cdot, \cdot \rangle_x$ varie différemment en fonction de $x \in M$. Alors il existe sur M un champ de vecteurs ν non singulier et partout orthogonal à \mathcal{F} . Donc la caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi(M)$ est nulle. La condition $\chi(M) = 0$ est nécessaire. *Est-elle suffisante ?* C'était une question difficile qui est restée longtemps ouverte. La réponse finale a été donnée par W. Thurston en 1976.

Théorème

La variété M admet un feuilletage de codimension 1 si, et seulement si, $\chi(M) = 0$.

Le feuilletage de Reeb

C'est une question que H. Hopf a posée en 1935 qui était à l'origine de ce feuilletage :

Existe-t-il sur la sphère \mathbb{S}^3 un champ de vecteurs X partout non nul et orthogonal à son rotationnel $\text{rot}(X)$?

Si un tel champ existe, la 1-forme différentielle ω lui correspondant par l'*isomorphisme musical* (défini par la métrique riemannienne) doit satisfaire la *condition d'intégrabilité* qui suit (et donc définir un feuilletage de dimension 2 sur \mathbb{S}^3) :

$$\omega \wedge d\omega = 0.$$

G. Reeb a écrit au sujet de cette question :

Ce problème a aussitôt retenu l'attention de Ehresmann qui l'a mis "en conserve" dans un magnifique registre-répertoire que mon maître m'avait autorisé à consulter en 1942.

*Il s'est alors mis au travail et a résolu le problème en 1944.
L'acte de naissance de la théorie des feuilletages a alors été signé!*

Mais comment Reeb a-t-il procédé?

1 - D'abord il regarde la sphère \mathbb{S}^3 dans l'espace hermitien \mathbb{C}^2 plutôt que dans \mathbb{R}^4 : $\mathbb{S}^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$. Ensuite il remarque qu'il y a un tore plongé dans \mathbb{S}^3 :

$$\mathbb{T}^2 = \partial M_+ = \partial M_- = \left\{ (z_1, z_2) \in \mathbb{S}^3 : |z_1|^2 = |z_2|^2 = \frac{1}{2} \right\}.$$

2 - Ce tore disconnecte et partage \mathbb{S}^3 en deux fermés :

$$M_+ = \left\{ (z_1, z_2) \in \mathbb{S}^3 : |z_1|^2 \leq \frac{1}{2} \right\}$$

et

$$M_- = \left\{ (z_1, z_2) \in \mathbb{S}^3 : |z_2|^2 \leq \frac{1}{2} \right\}$$

difféomorphes tous deux à $\overline{\mathbb{D}} \times \mathbb{S}^1$ (\mathbb{D} est le disque unité ouvert et $\overline{\mathbb{D}}$ le disque unité fermé).

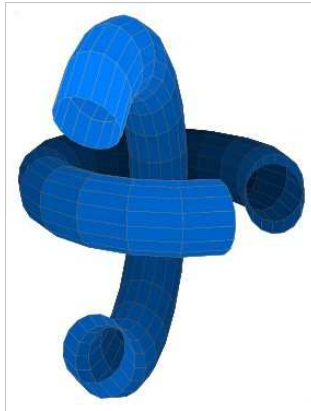
3 - La sphère \mathbb{S}^3 peut être obtenue en recollant M_+ et M_- le long de leur bord commun par le difféomorphisme :

$$(z_1, z_2) \in \partial M_+ \longrightarrow (z_2, z_1) \in \partial M_-$$

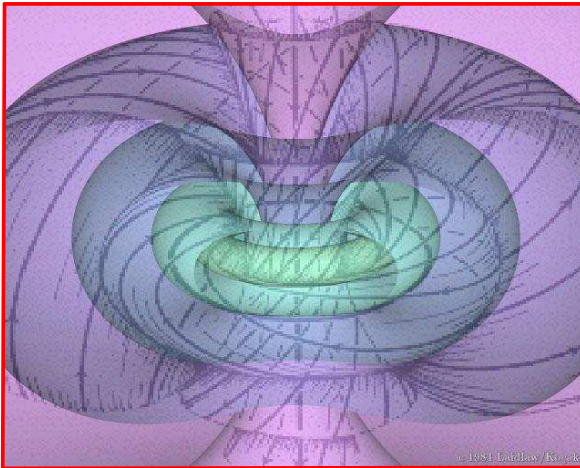
i.e. on identifie (z_1, z_2) à (z_2, z_1) dans la réunion disjointe $M_+ \amalg M_-$:

on recolle deux tores solides en identifiant un méridien du bord du premier à un parallèle du bord du second !

4 - Il suffit donc de construire un feuilletage sur chacun de ces morceaux de telle sorte que le bord soit une feuille pour que tout se recolle globalement.



La 3-sphère = deux tores solides !

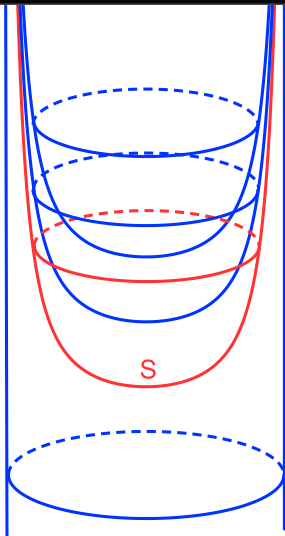


5 - Soit $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f(z) = \exp\left(\frac{1}{1 - |z|^2}\right).$$

Notons t la deuxième coordonnée dans $\mathbb{D} \times \mathbb{R}$. La famille de surfaces $(S_t)_{t \in \mathbb{R}}$ obtenue en traduisant le graphe S de f le long de l'axe des t définit un feuilletage sur $\mathbb{D} \times \mathbb{R}$.

Si on rajoute le cylindre $S^1 \times \mathbb{R}$, où S^1 est vu comme le bord de $\overline{\mathbb{D}}$, on obtient un feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}$ de codimension 1 sur $\overline{\mathbb{D}} \times \mathbb{R}$.



La famille des surfaces S_t .
Feuille du bord = cylindre

6 - Par construction, $\tilde{\mathcal{F}}$ est invariant par les transformations :

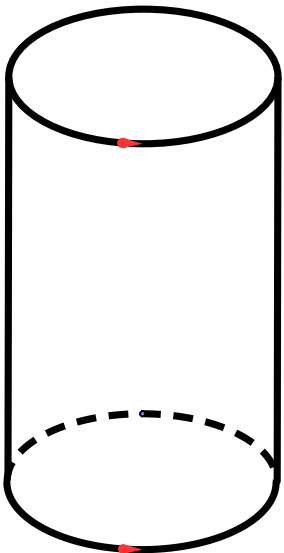
$$(z, t) \in \overline{\mathbb{D}} \times \mathbb{R} \longmapsto (z, t + 1) \in \overline{\mathbb{D}} \times \mathbb{R}.$$

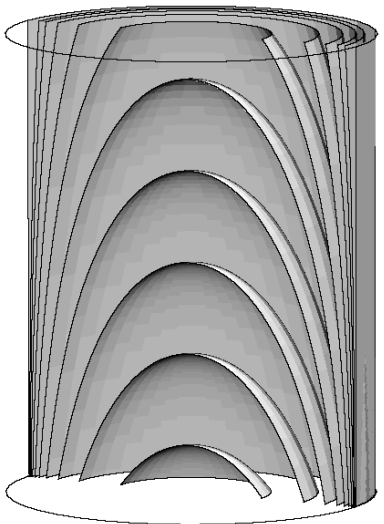
Il induit donc un feuilletage \mathcal{F}_0 sur le quotient :

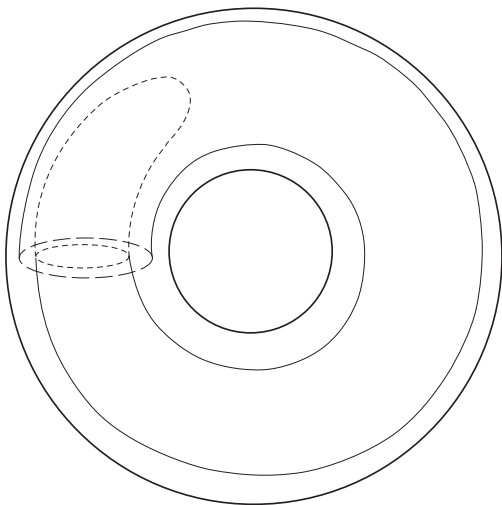
$$\overline{\mathbb{D}} \times \mathbb{R} / (z, t) \sim (z, t + 1) \simeq \overline{\mathbb{D}} \times \mathbb{S}^1.$$

Il a le bord $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ comme feuille compacte. Toutes les autres sont difféomorphes à \mathbb{D} lui-même difféomorphe à \mathbb{R}^2 .

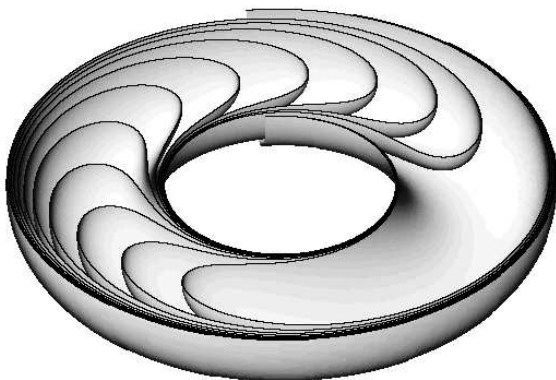
7 - Un domaine fondamental de l'action de \mathbb{Z} sur $\overline{\mathbb{D}} \times \mathbb{R}$ est le cylindre $\overline{\mathbb{D}} \times [0, 1]$ (*cf.* dessin qui suit).







Composante de Reeb = le produit $\mathbb{D}^2 \times S^1$ feuilleté !



Une coupe au sabre de la composante de Reeb !

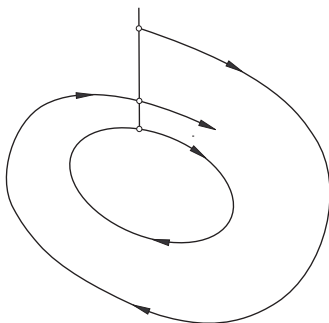
8 - Comme M_+ et M_- sont difféomorphes à $\overline{\mathbb{D}} \times \mathbb{S}^1$, \mathcal{F}_0 définit sur M_+ et M_- respectivement deux feuilletages \mathcal{F}_+ et \mathcal{F}_- ; leur recollement le long de la feuille compacte \mathbb{T}^2 donne un feuilletage \mathcal{F} sur \mathbb{S}^3 appelé *feuilletage de Reeb*. Toutes les feuilles sont difféomorphes au plan \mathbb{R}^2 à l'exception de celle qui provient des bords de M_+ et M_- qui est difféomorphe au tore \mathbb{T}^2 .

Nous avons vu que cet exemple se construit par chirurgie et ne se voit concrètement que sur les deux morceaux qui constituent séparément la sphère \mathbb{S}^3 . Sa découverte par G. Reeb a donné un véritable coup de fouet à la théorie. On pourrait dire qu'il est le premier exemple qui a montré qu'elle est véritablement non vide.

5. Les feuilles compactes

L'existence d'une solution périodique pour une équation différentielle ordinaire signifie que le système dynamique qu'elle décrit admet un *état d'équilibre*.

Pour le feuilletage associé ceci se traduit par l'existence d'une courbe intégrale fermée. Lorsque celle-ci est isolée, on dira que c'est un *cycle limite* (cf. dessin ci-dessous); cette notion a été introduite par H. Poincaré.



Lorsque la variété est compacte et la dimension du feuilletage qu'elle supporte est strictement supérieure à 1, un état d'équilibre est décrit par une feuille compacte. Par exemple, si la dimension est 2, la sphère \mathbb{S}^2 , le tore \mathbb{T}^2 ou une surface Σ_g de genre $g \geq 2$; pour chacune de ces surfaces on peut construire un feuilletage de dimension 2 l'ayant comme feuille compacte. Mais la question reste toutefois de savoir si, lorsqu'on prescrit la codimension et la topologie de la variété ambiante, une feuille compacte existe toujours ! Plus précisément on a la :

Question :

Soit M une variété connexe compacte de dimension $m + n$ munie d'un feuilletage \mathcal{F} de codimension n . Sous quelles conditions \mathcal{F} admet-il une feuille compacte ?

Nous avons vu que le feuilletage de Reeb sur la 3-sphère \mathbb{S}^3 possède une feuille compacte diffeomorphe à un tore \mathbb{T}^2 . Ceci a amené son auteur en 1948 à poser la :

Question :

Un feuilletage de codimension 1 sur \mathbb{S}^3 possède-t-il toujours une feuille compacte ?

S. Novikov a répondu positivement à cette question vers 1965. Plus précisément il a démontré le théorème qui suit :

Théorème

Tout feuilletage \mathcal{F} de codimension 1 sur une variété compacte de dimension 3 ayant un groupe fondamental fini possède une feuille compacte difféomorphe à un tore \mathbb{T}^2 . Plus même : à l'intérieur de cette feuille \mathcal{F} “est un feuilletage de Reeb”.

Ce résultat est un véritable tour de force. Il est considéré comme l'un des plus profonds de la théorie des feuilletages.

Remarque : *Maintenant que la conjecture de Poincaré est démontrée on sait ce qu'est une variété M compacte de dimension 3 à groupe fondamental $\Gamma = \pi_1(M)$ fini : c'est simplement le quotient $M = \mathbb{S}^3/\Gamma$ de la sphère \mathbb{S}^3 par une action libre de Γ .*

On a longtemps pensé que le *Théorème de Novikov* pouvait se généraliser à toute sphère impaire \mathbb{S}^{2p+1} . Mais non ! récemment **Gaël Meigniez** vient de démontrer le résultat qui suit :

Théorème

Toute variété compacte de dimension $n \geq 4$ et de caractéristique d'Euler-Poincaré nulle supporte un feuilletage de codimension 1 dont toutes les feuilles sont denses, et donc n'a pas de feuille compacte.

C'est le cas, par exemple, de toute sphère \mathbb{S}^{2p+1} avec $p \geq 2$, de $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^3$, $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3$ où le problème était aussi posé de façon plus particulière.

QUELQUES RÉFÉRENCES !

BARRE, R. & EL KACIMI, A. *Foliations*. Handbook of Differential Geometry Vol. II, Elsevier(2006), 33-77.

CAMACHO, C. & LINS NETO, A. *Geometric theory of foliations*. Birkhäuser, (1985).

GODBILLON, C. *Feuilletages*. Birkhäuser, (1991).

HAEFLIGER, A. *Naissance des feuilletages*.

<http://foliations.org/surveys/Feuilletages.pdf>

HECTOR, G. & HIRSCH, U. *Introduction to the geometry of foliations*. Parts A and B, Vieweg & Sohn, (1981).

LAWSON, H.B. *Foliations*. Bull. AMS 80, (1974) 369-418.

MEIGNIEZ, G. *Regularization and minimization of codimension one Haefliger structures*. J. Diff. Geom. 107, (2017), 157-202.

MOLINO, P. *Riemannian foliations*. Birkhäuser, (1988).

REEB, G. *Sur certaines propriétés topologiques des variétés feuilletées*. Hermann Paris, (1950).



Henri Poincaré



Georges Reeb