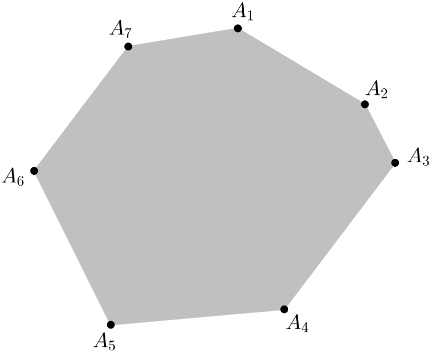
Le géomètre et l'empereur !

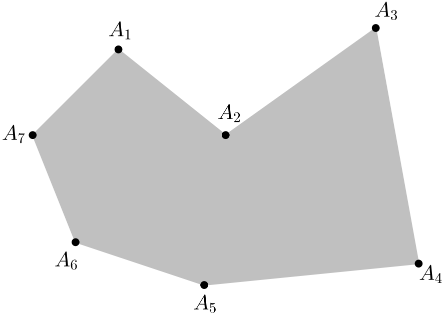
Aziz El Kacimi
CERAMATHS
Université Polytechnique Hauts-de-France

Colloquium Université d'Artois
Mercredi 22 juin 2022
et
Café Mathématique, CERAMATHS UPHF
Jeudi 3 février 2022

0. Polygones du plan



Convexe



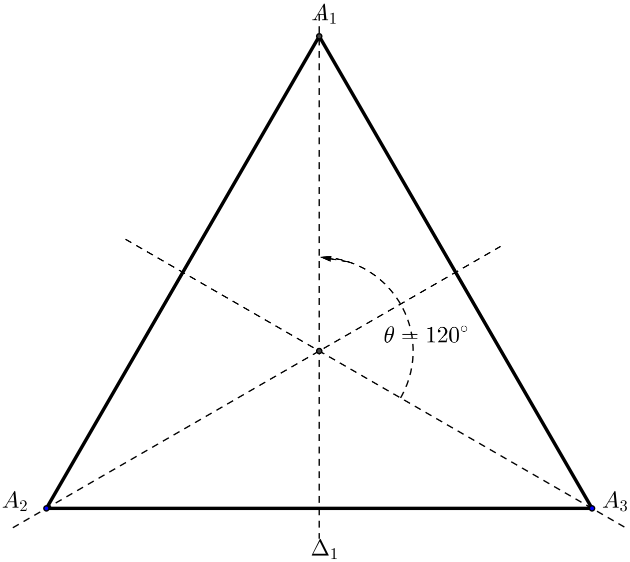
Non convexe

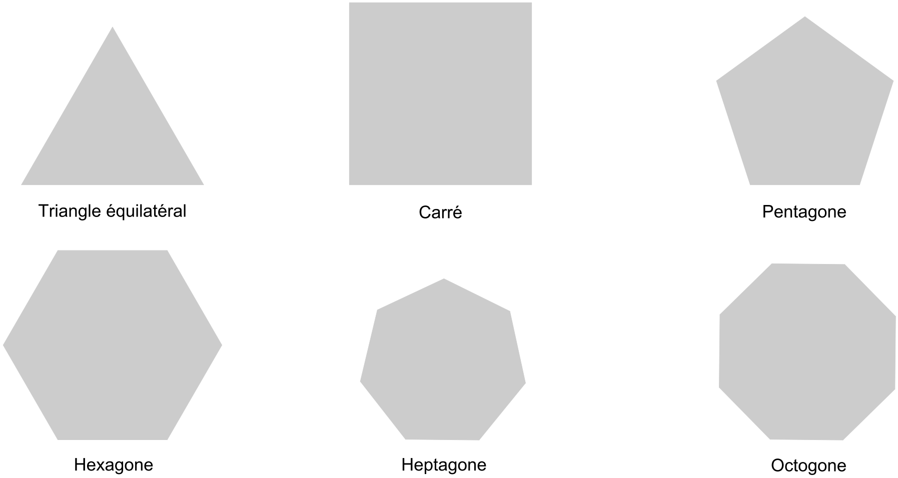
Une symétrie d'un polygone est une isométrie du plan qui le laisse invariant.

L'ensemble de ces symétries (l'identité en fait partie bien sûr) est un groupe G.

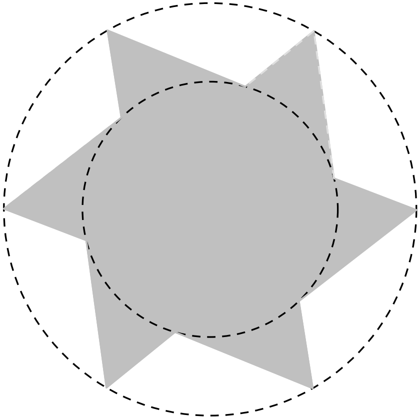
On dira qu'un polygone est symétrique si G n'est pas réduit au groupe trivial et asymétrique sinon.

Théorème. *Soit* $\mathfrak{P} = A_1 \cdots A_n$ *un polygone à* $n \geq 3$ *côtés du plan euclidien. Alors il existe un entier* k *divisant* n *tel que le groupe de symétrie* G *de* $\mathfrak{P}$ *est le groupe cyclique* C_k *engendré par une rotation* r *d'angle* $\theta = \frac{2\pi}{k}$*, ou le groupe diédral* $D_k = C_k \rtimes \mathbb{Z}_2$ *(où* $\mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$*).*

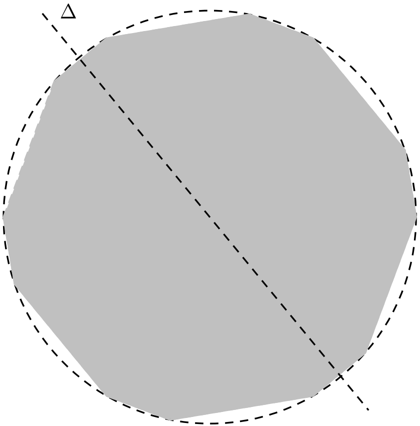

A_1
$\theta = 120^\circ$
A_2
A_3
Δ_1



Polygones réguliers



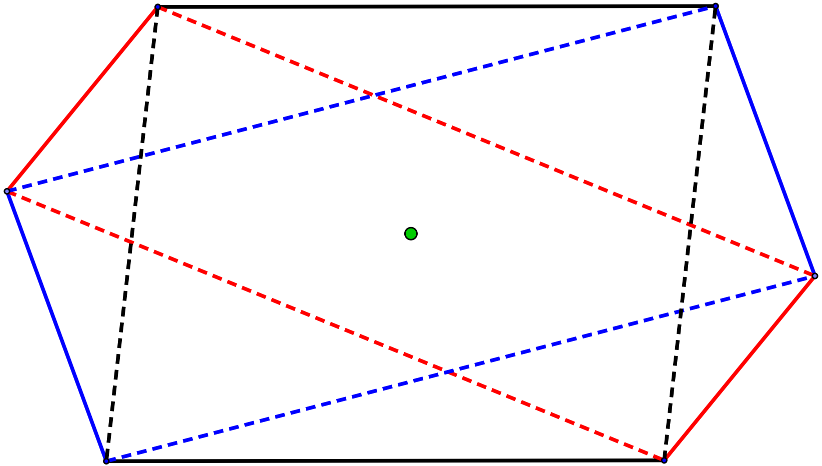
Groupe de symétrie $= C_6$



Groupe de symétrie $= D_6$

Exercice

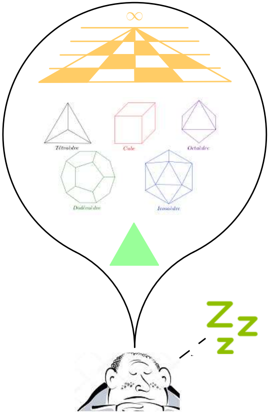
Soit n un entier plus grand ou égal à 3. Construire un n-polygone dont le groupe de symétrie G est trivial.



n pair et une symétrie centrale. C'est un :
multi-parallélogramme

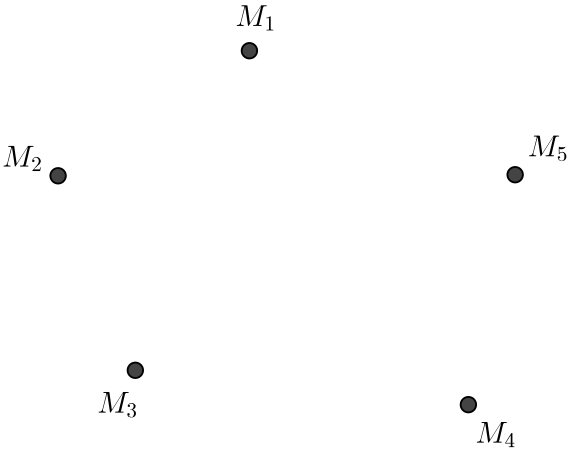
1. Sin Pan

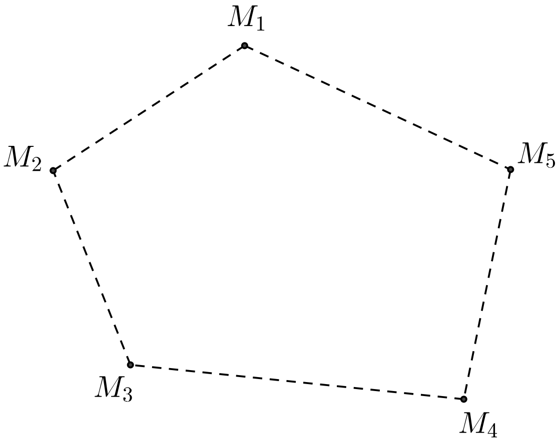
Sin Pan, géomètre chinois d'antan, rêvait de fonder une académie de géométrie.

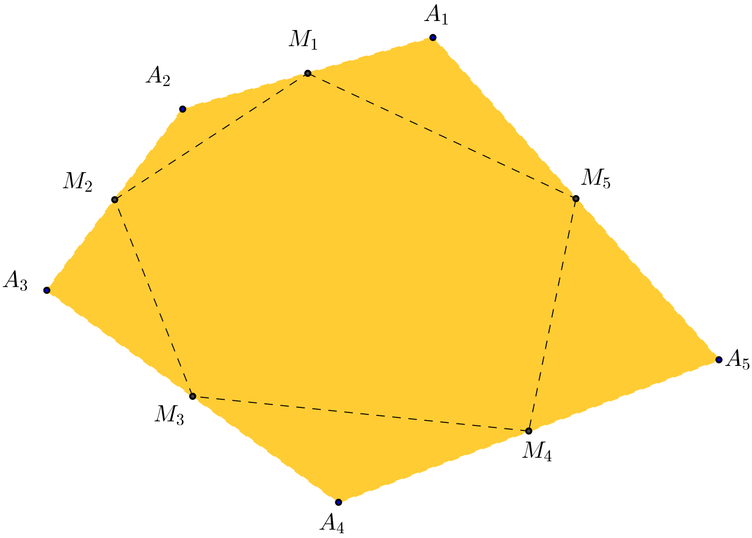


Il a demandé à l'empereur de lui céder un terrain à cet effet. Ce dernier lui répond :

« Je dispose d'un terrain sous forme de pentagone. J'ai fait marquer par cinq bornes les milieux des côtés. Trace les limites de ce pentagone et le terrain est à toi. »


M_1
M_2
M_5
M_3
M_4


M_1
M_2
M_5
M_3
M_4


A_1
M_1
A_2
M_2
M_5
A_3
A_5
M_3
M_4
A_4

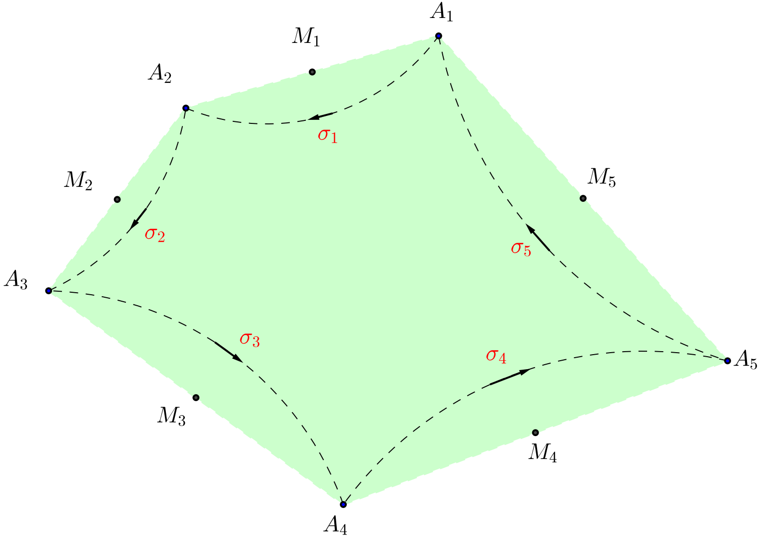
2. Problème général

Soient $M_1, \cdots, M_n$ (avec $n \geq 3$) des points d'un plan euclidien. Construire un polygone $A_1 \cdots A_n$ ayant $M_1, \cdots, M_n$ comme milieux respectifs des côtés $A_1A_2, \cdots, A_nA_1$.

Plus explicitement :

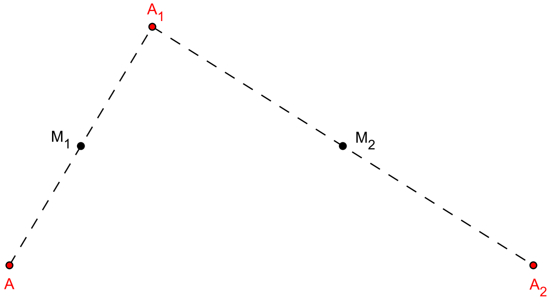
- *Que doit vérifier le polygone $M_1 \cdots M_n$ pour que $A_1 \cdots A_n$ existe ?*
- *Dans le cas où $A_1 \cdots A_n$ existe, comment le construire géométriquement ?*

Les symétries centrales $\sigma_1, \cdots, \sigma_n$ ***qu'on voit sur le dessin ci-dessous donnent la clé pour la résolution du problème.***



Soient M_1 et M_2 deux points du plan euclidien et σ_1 et σ_2 les symétries centrales ayant pour centres respectifs M_1 et M_2.

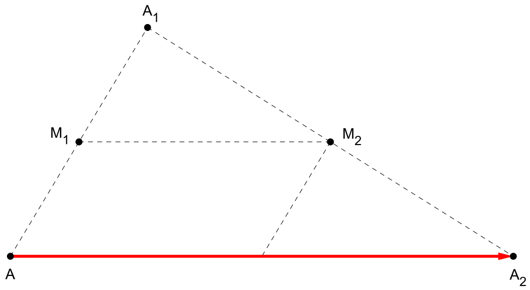
Qu'est-ce que la composée $\sigma_2 \circ \sigma_1$?



Soient M_1 et M_2 deux points du plan euclidien et σ_1 et σ_2 les symétries centrales ayant pour centres respectifs M_1 et M_2.

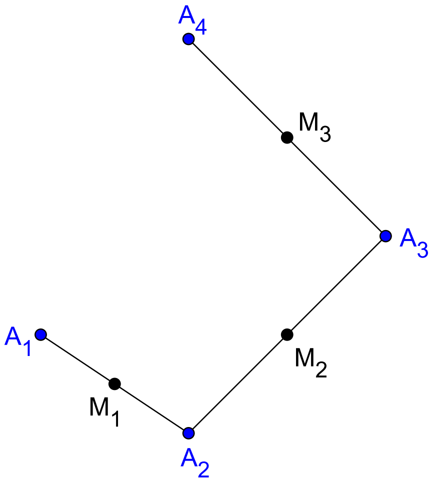
Qu'est-ce que la composée $\sigma_2 \circ \sigma_1$?

Il suffit de bien regarder le dessin ci-dessous pour constater que $\sigma_2 \circ \sigma_1$ n'est rien d'autre que la translation de vecteur $\overrightarrow{u} = 2\overrightarrow{M_1M_2}$.



Question

Donnons-nous maintenant trois points M_1, M_2 et M_3, centres respectifs de trois symétries σ_1, σ_2 et σ_3. Qu'est-ce que $\sigma_3 \circ \sigma_2 \circ \sigma_1$?



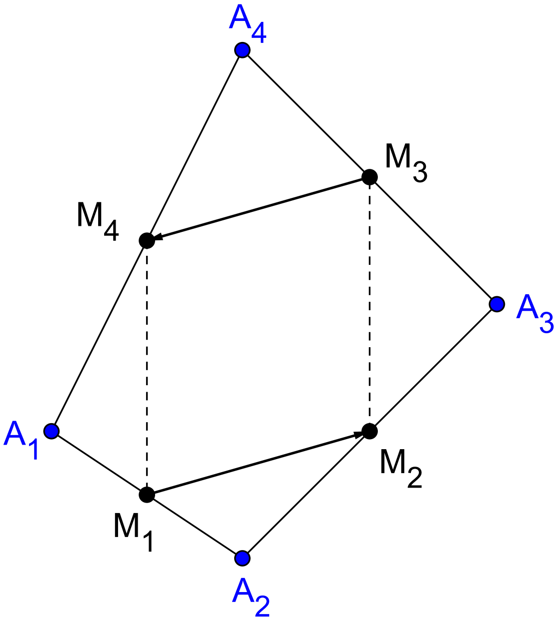
Si M_4 ***désigne le quatrième sommet du parallélogramme*** $M_1M_2M_3M_4$ ***et*** σ_4 ***la symétrie dont il est le centre, alors, en posant*** $\vec{u}_1 = 2\overrightarrow{M_1M_2}$ ***et*** $\vec{u}_2 = 2\overrightarrow{M_3M_4}$***, on a :***

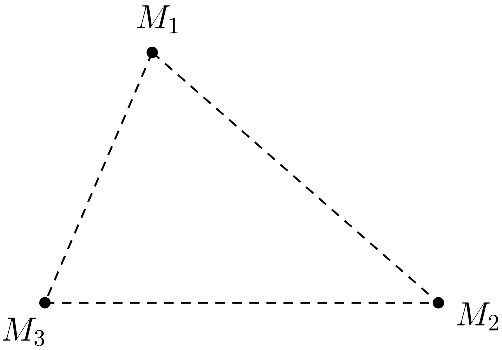
$$\sigma_4 \circ \sigma_3 \circ \sigma_2 \circ \sigma_1 = (\sigma_4 \circ \sigma_3) \circ (\sigma_2 \circ \sigma_1)$$

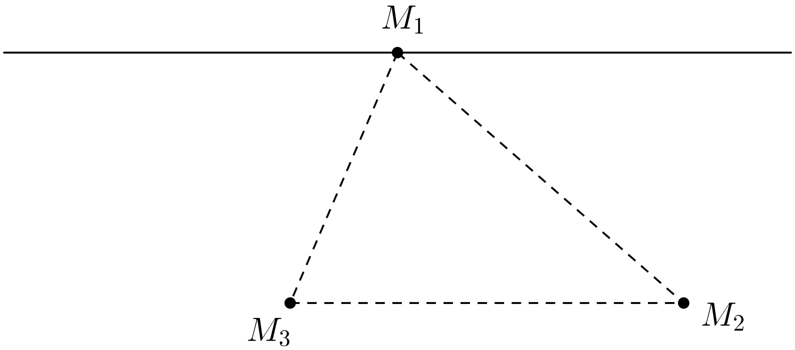
qui n'est rien d'autre que :

$$\tau_{\vec{u}_1} \circ \tau_{\vec{u}_2} = \tau_{\vec{u}_1 + \vec{u}_2} = \tau_{\vec{0}} = \text{identité.}$$

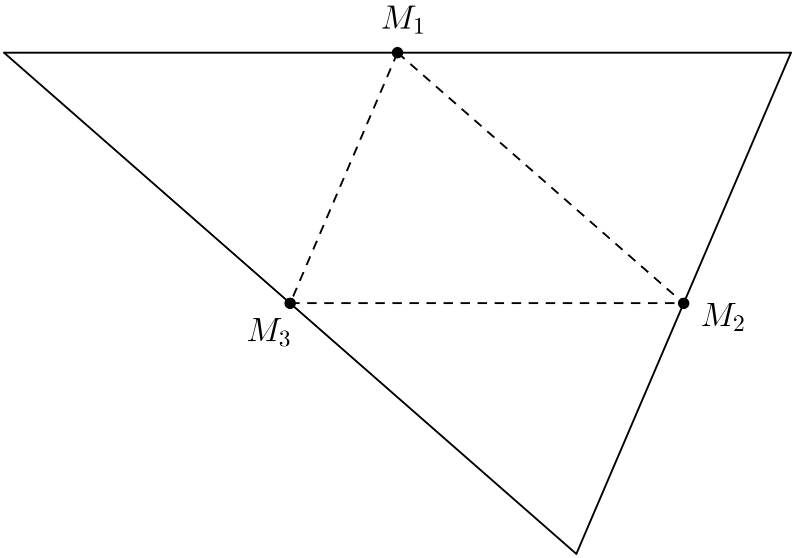
D'où l'on déduit : $\sigma_3 \circ \sigma_2 \circ \sigma_1 = \sigma_4$.

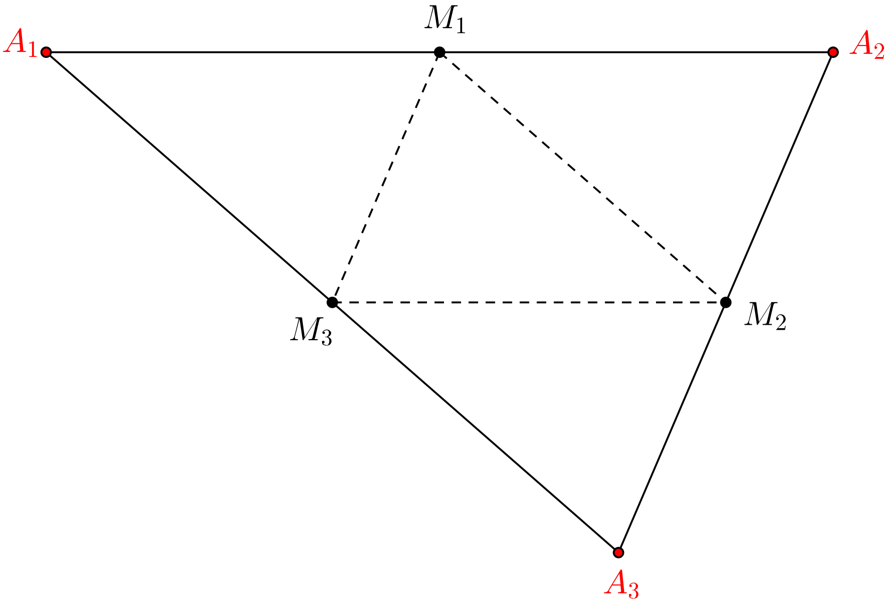

A4
M3
M4
A3
A1
M2
M1
A2

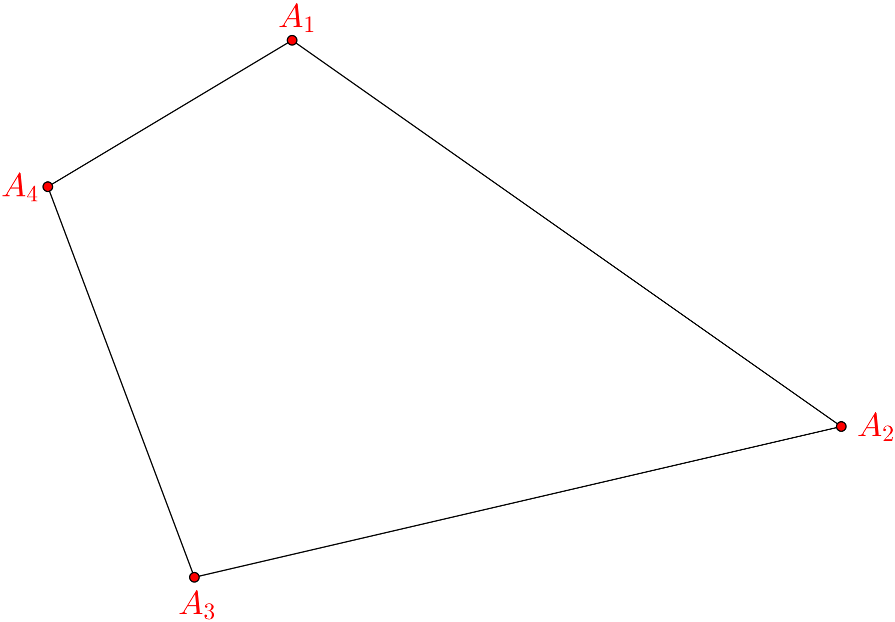

M_1
M_2
M_3

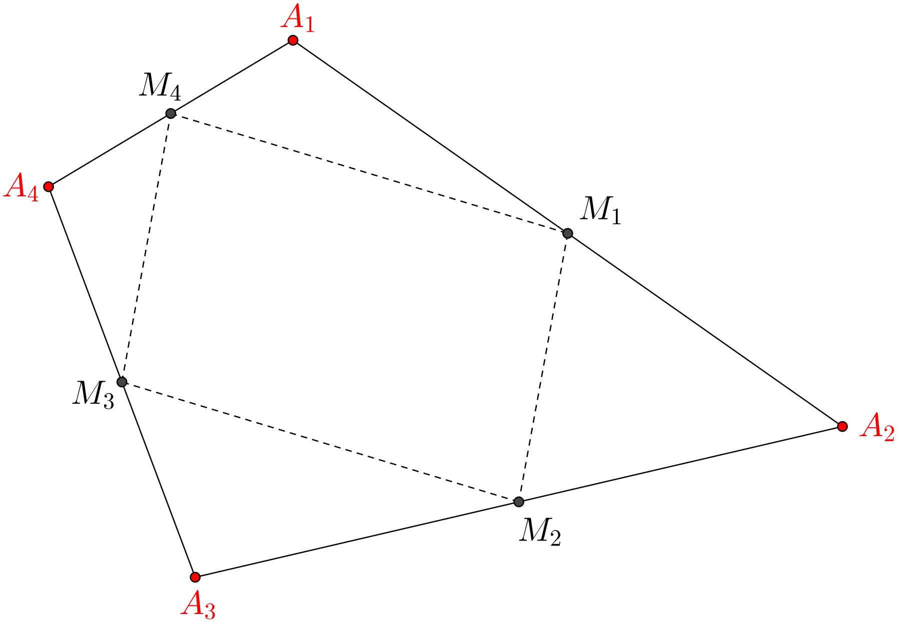


M_1
M_2
M_3


M_1
M_2
M_3

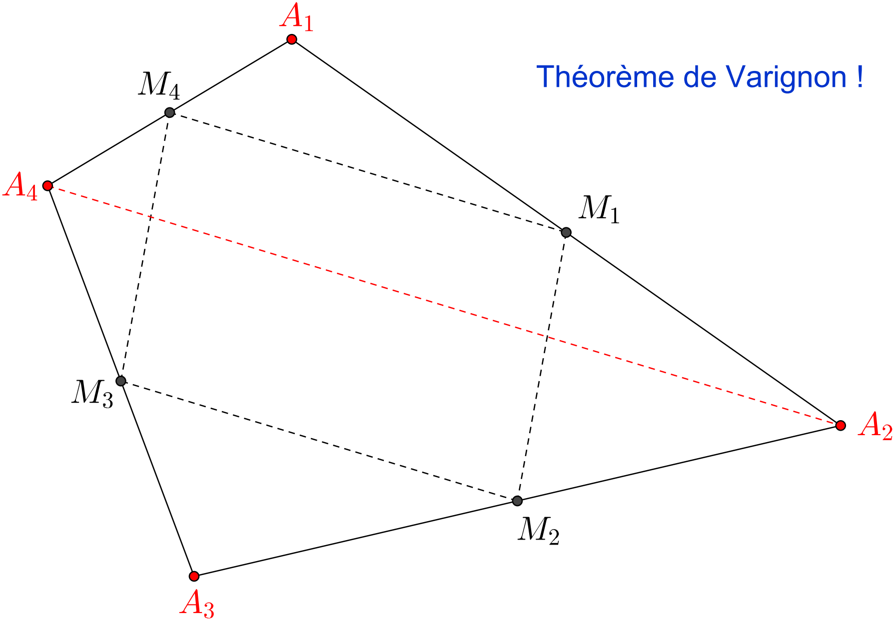

A_1
M_1
A_2
M_3
M_2
A_3


A_1
A_4
A_2
A_3



A_1
M_4
A_4
M_1
M_3
A_2
M_2
A_3

Théorème de Varignon !



2.1. Cas où n est pair

On pose $n = 2r$. *Évidemment* $r \geq 2$, *sans cela le problème est sans intérêt pratique. Pour tout* $i = 1, \cdots, n$, *on désigne par* σ_i *la symétrie de centre* M_i.
On a :

$$f = (\sigma_{2r} \circ \sigma_{2r-1}) \circ \cdots \circ (\sigma_2 \circ \sigma_1) = \tau_r \circ \cdots \circ \tau_1$$

où, pour $i \in \{1, \cdots, r\}$, τ_i *est la translation de vecteur* $\overrightarrow{u}_i = 2\overrightarrow{M_{2i-1}M_{2i}}$.
Par suite, la transformation f *est la translation* τ *de vecteur* $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}_1 + \cdots + \overrightarrow{u}_r$.

Elle n'admet donc de point fixe que si :

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}_1 + \cdots + \overrightarrow{u}_r = 2\left(\overrightarrow{M_1M_2} + \cdots + \overrightarrow{M_{2r-1}M_{2r}}\right) = \overrightarrow{0}.$$

Mais cette condition force f à être l'identité. Tout point A_1 convient et nous permet de construire notre polygone $A_1 \cdots A_n$. Pour $n = 4$, la condition ci-dessus signifie que $M_1M_2M_3M_4$ est un parallélogramme. On retrouve le cas particulier que nous avons déjà examiné.

2.2. Cas où n est impair

On pose $n = 2r + 1$ *où l'entier* r *est tel que* $r \geq 1$. *Dans cette situation, on va prendre la décomposition de* f *en répartissant les symétries* σ_i *autrement. On commence par :*

$$f = (\sigma_{2r+1} \circ \sigma_{2r} \circ \cdots \circ \sigma_4) \circ (\sigma_3 \circ \sigma_2 \circ \sigma_1) = (\sigma_{2r+1} \circ \sigma_{2r} \circ \cdots \circ \sigma_4) \circ \sigma_{\omega_1}$$

où ω_1 *est le quatrième sommet du parallélogramme dont les trois premiers sont* M_1, M_2 *et* M_3. *De la même manière :*

$$f = (\sigma_{2r+1} \circ \sigma_{2r} \circ \cdots \circ \sigma_6) \circ (\sigma_5 \circ \sigma_4 \circ \sigma_{\omega_1}) = (\sigma_{2r+1} \circ \sigma_{2r} \circ \cdots \circ \sigma_6) \circ \sigma_{\omega_2}$$

où ω_2 *est le quatrième sommet du parallélogramme dont les trois premiers sont* ω_1, M_4 *et* M_5.

En continuant ainsi, on construit une suite finie de points $\omega_1, \cdots, \omega_r$ tels que :

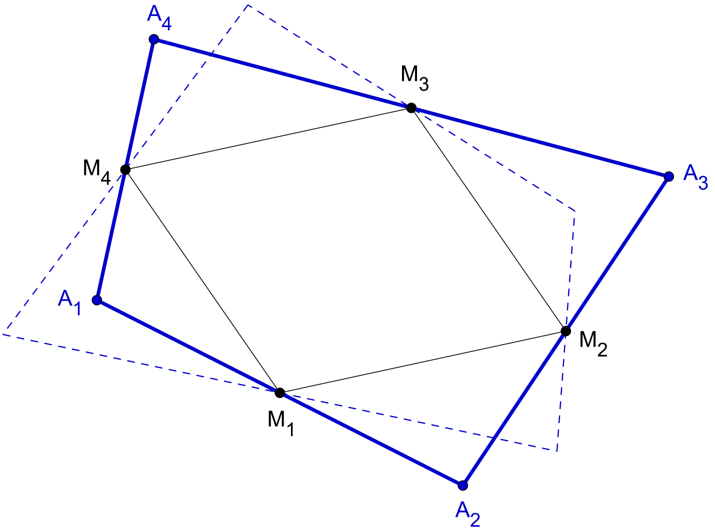
$$\begin{cases} M_1M_2M_3\omega_1 \ \textit{est un parallélogramme} \\ \omega_1M_4M_5\omega_2 \ \textit{est un parallélogramme} \\ \dots \\ \omega_{r-1}M_{2r}M_{2r+1}\omega_r \ \textit{est un parallélogramme.} \end{cases}$$

et f est la symétrie σ_{ω_r}. Son point fixe est son centre ω_r ; ce sera A_1. Notre problème a donc une solution unique $A_1 \cdots A_n$ avec $A_1 = \omega_r$, $A_2 = \sigma_1(A_1)$, $A_3 = \sigma_2(A_2)$... $A_n = \sigma_{n-1}(A_{n-1})$.
En effet, on peut vérifier que quelle que soit la permutaion circulaire qu'on applique à l'ordre de composition de

$$\sigma_{2r+1} \circ \sigma_{2r} \circ \cdots \circ \sigma_5 \circ \sigma_4 \circ \sigma_3 \circ \sigma_2 \circ \sigma_1$$

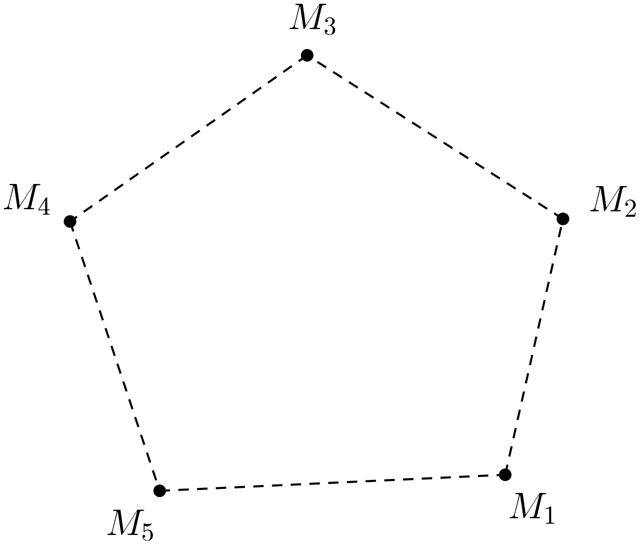
on tombe toujours sur le même polygone.

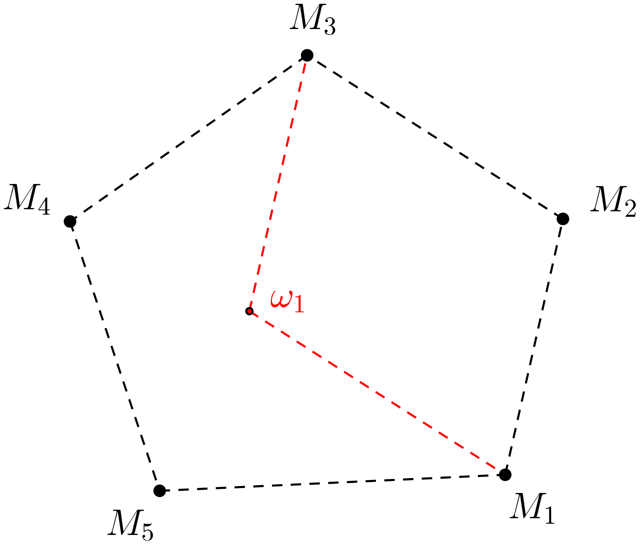
Le dessin ci-dessous illustre le cas $n = 4$ où on voit qu'il y a plusieurs solutions.

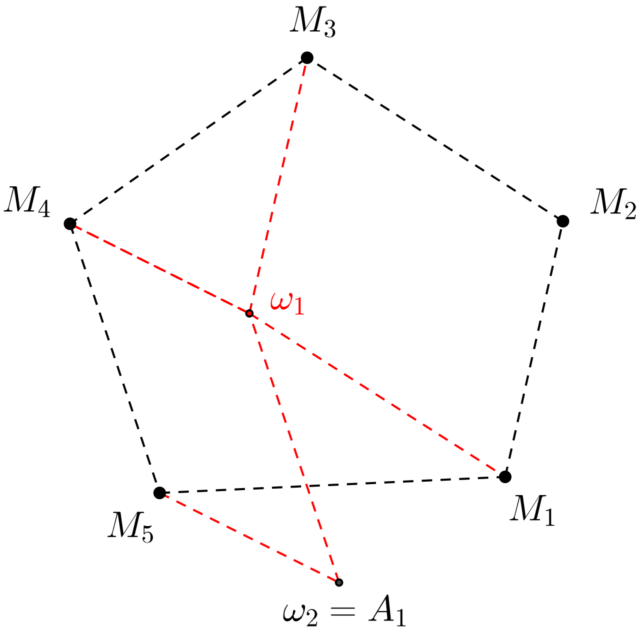


Pour $n = 5$, voici comment aurait pu procéder Sin Pan (il l'a peut-être fait ainsi) :

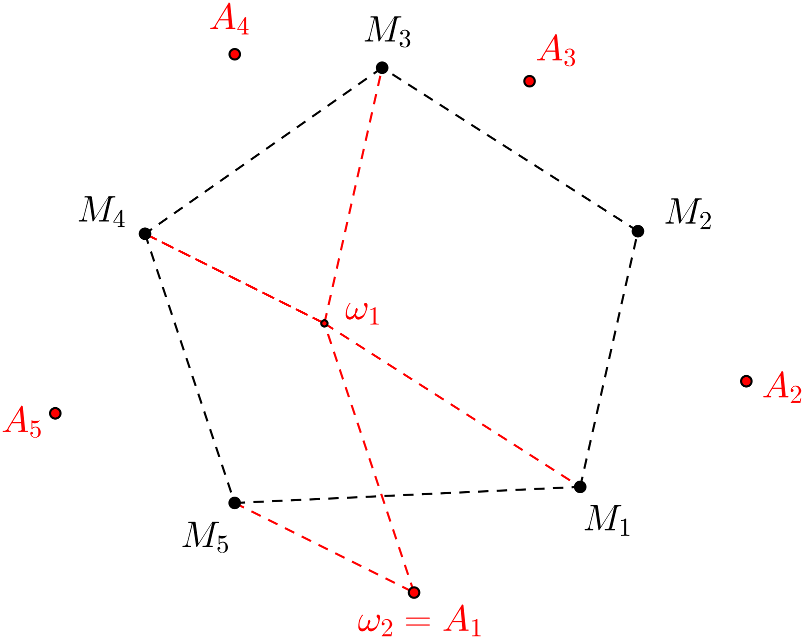
1. *On construit ω_1 de telle sorte que $M_1M_2M_3\omega_1$ soit un parallélogramme.*
2. *Ensuite, on construit ω_2 tel que $\omega_1M_4M_5\omega_2$ soit un parallélogramme.*
3. *On prend $A_1 = \omega_2$ qui permet de construire le polygone cherché.*

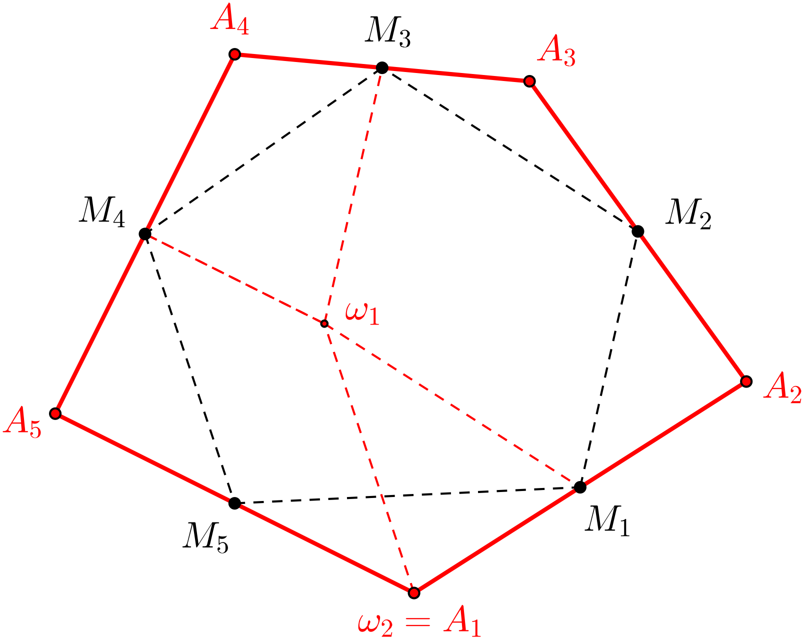

M_3
M_4
M_2
M_5
M_1


M_3
M_4
M_2
ω_1
M_5
M_1



M_3
M_4
M_2
ω_1
M_1
M_5
$\omega_2 = A_1$


A_4
M_3
A_3
M_4
M_2
ω_1
A_2
A_5
M_5
M_1
$\omega_2 = A_1$



A_4
M_3
A_3
M_4
M_2
ω_1
A_2
A_5
M_1
M_5
$\omega_2 = A_1$

4. Polygones dérivés