

# UNIVERSITÉ DE VALENCIENNES

## Licence de Mathématiques - 3<sup>ème</sup> Année

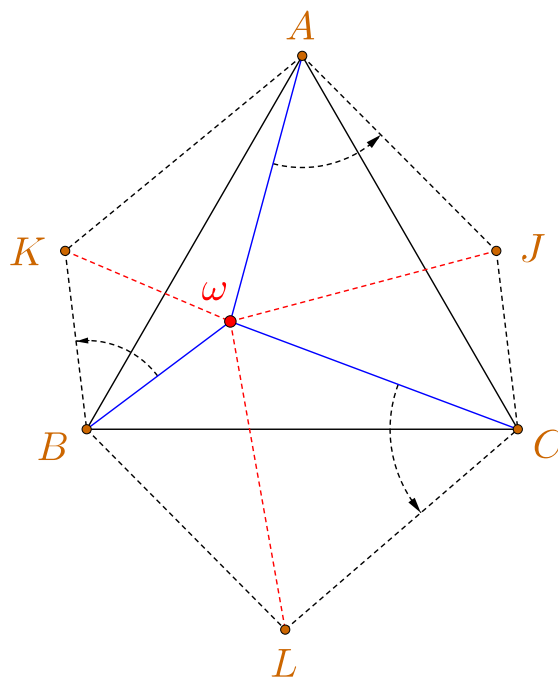
### GÉOMÉTRIE EUCLIDIENNE ÉLÉMENTAIRE

---

#### CORRIGÉS DE DEVOIRS SURVEILLÉS

---

par  
**Aziz EL KACIMI**



Le problème  $(a, b, c)$

JUIN 2017



**Licence 3 - Mathématiques**  
**DS - 15 mars 2016**  
**Géométrie 6**

---

Dans tout ce texte  $\mathcal{P}$  sera un plan affine euclidien (dirigé par un plan vectoriel  $\vec{\mathcal{V}}$ ) muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

**Exercice 1**

On note  $f$  l'application affine de  $\mathcal{P}$  dans lui-même qui à tout point  $M$  de coordonnées  $(x, y)$  associe le point  $M'$  de coordonnées  $(x', y')$  données par :

$$\begin{cases} x' = x - y - 1 \\ y' = x + y + 1. \end{cases}$$

- 1 - Donner la direction  $\vec{f}$  de  $f$  ainsi que la matrice  $A$  de  $\vec{f}$  dans la base  $(\vec{i}, \vec{j})$ .
- 2 - Montrer que  $f$  a un et un seul point fixe ; on le notera  $\omega$ .
- 3 - Montrer que  $f$  est une similitude du plan euclidien  $\mathcal{P}$  dont on précisera le centre (s'il y en a un), le rapport  $k$  et l'angle  $\theta$ .
- 4 - Quelle est l'image  $\Delta'$  par  $f$  de la droite  $\Delta$  d'équation  $2x + y - 1 = 0$  ?
- 5 - Quelle est l'image  $\Gamma'$  par  $f$  du cercle  $\Gamma$  centré à l'origine et de rayon  $\rho = 1$  ?

**Exercice 2**

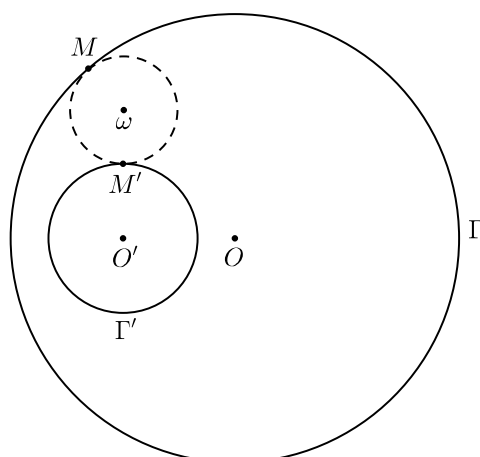
Deux cercles  $\Gamma$  et  $\Gamma'$  se coupent en deux points distincts  $A$  et  $B$ . Une droite passant par  $A$  coupe  $\Gamma$  en  $M$  et  $\Gamma'$  en  $M'$ . Une droite passant par  $B$  coupe  $\Gamma$  en  $N$  et  $\Gamma'$  en  $N'$ .

Montrer que les deux droites  $(MN)$  et  $(M'N')$  sont parallèles.

**Exercice 3**

Soient  $\Gamma$  et  $\Gamma'$  deux cercles de centres respectifs distincts  $O$  et  $O'$  et de rayons respectifs  $\rho > 0$  et  $\rho' > 0$ . On suppose que  $\Gamma$  et  $\Gamma'$  ne se coupent pas et que  $\Gamma'$  est à l'intérieur de  $\Gamma$ . Soit  $\mathcal{C}$  un cercle tangent intérieurement à  $\Gamma$  en  $M$  et extérieurement à  $\Gamma'$  en  $M'$  (voir figure ci-dessous).

Où varie le centre  $\omega$  du cercle  $\mathcal{C}$  lorsque ce dernier varie mais en vérifiant toujours les conditions susmentionnées ?



---

## Corrigé

---

### Exercice 1

1 - Écrivons l'expression de  $f$  sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La direction  $\vec{f}$  de  $f$  est donc l'application  $\vec{f}(x, y) = (x - y, x + y)$  de matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2 - Un point fixe  $\omega$  a ses coordonnées  $(x_0, y_0)$  qui vérifient le système linéaire :

$$\begin{cases} x_0 - y_0 - 1 = x_0 \\ x_0 + y_0 + 1 = y_0. \end{cases}$$

Les solutions sont de façon évidente  $x_0 = -1$  et  $y_0 = -1$ . Donc  $\omega = (-1, -1)$  est un point fixe et il est unique.

3 - Considérons le nouveau repère  $(\omega; \vec{i}, \vec{j})$ . Les coordonnées de  $M = (x, y)$  y deviennent  $X = x + 1$  et  $Y = y + 1$  ; de même celles de son transformé  $M' = (x', y')$  sont  $X' = x' + 1$  et  $Y' = y' + 1$ . Le système :

$$\begin{cases} x' = x - y - 1 \\ y' = x + y + 1. \end{cases}$$

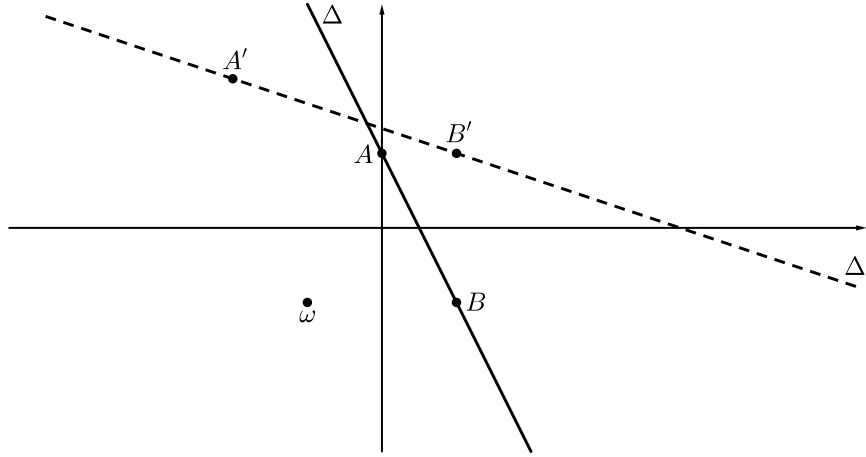
est exactement le même que  $\begin{cases} x' + 1 = (x + 1) - (y + 1) \\ y' + 1 = (x + 1) + (y + 1) \end{cases}$  c'est-à-dire :

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{4} & -\sin \frac{\pi}{4} \\ \sin \frac{\pi}{4} & \cos \frac{\pi}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}.$$

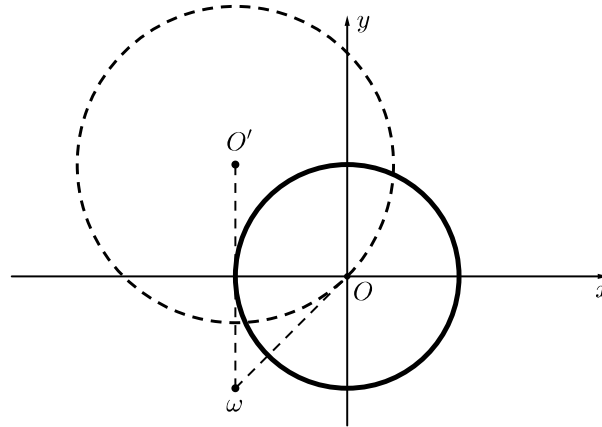
On voit donc qu'on passe de  $M$  à  $M'$  par la rotation de centre  $\omega$  et d'angle  $\theta = \frac{\pi}{4}$  suivie de l'homothétie de centre  $\omega$  et de rapport  $k = \sqrt{2}$ . La transformation  $f$  est donc la similitude de centre  $\omega$ , de rapport  $\sqrt{2}$  et d'angle  $\frac{\pi}{4}$ .

4 - Une similitude transforme une droite en une droite. Pour déterminer  $\Delta'$ , il suffit donc de connaître les transformés respectifs  $A'$  et  $B'$  de deux points  $A$  et  $B$  de  $\Delta$ , par exemple  $A = (0, 1)$  et  $B = (1, -1)$ . Un calcul immédiat donne  $A' = (-2, 2)$  et  $B' = (1, 1)$ . L'équation de  $\Delta'$  est donc :

$$x + 3y - 4 = 0.$$



5 - La similitude  $f$  transforme  $\Gamma$  en le cercle  $\Gamma'$  de centre  $O' = f(O) = (-1, 1)$  et de rayon  $\rho' = \sqrt{2}$ . Il suffit donc de repérer le point  $O'$  pour avoir complètement  $\Gamma$  (voir dessin ci-dessous).



### Exercice 2

Comme le quadrilatère  $ABNM$  est inscrit dans  $\Gamma$ , ses angles opposés sont supplémentaires. En particulier :

$$\widehat{AMN} + \widehat{ABN} = \pi.$$

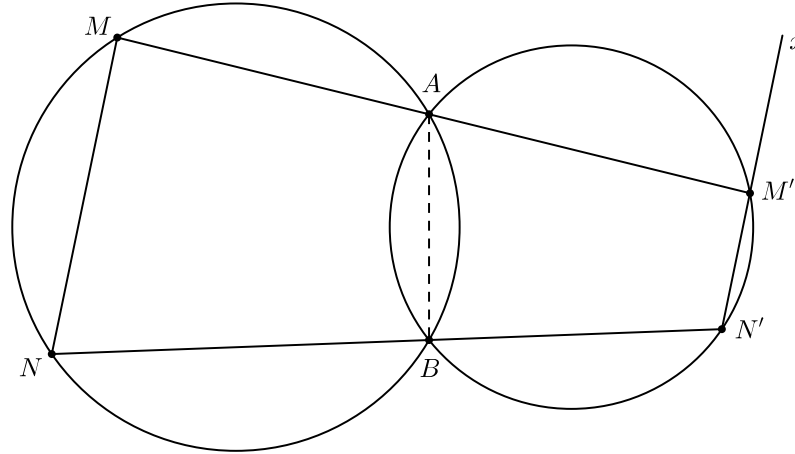
Et comme :

$$\widehat{ABN} + \widehat{ABN'} = \pi,$$

on a :

$$\widehat{AMN} = \widehat{ABN'}.$$

De même, Comme le quadrilatère  $ABN'M'$  est inscrit dans  $\Gamma'$ , on a  $\widehat{ABN'} + \widehat{AM'N'} = \pi$ . On en déduit que  $\widehat{ABN'} = \widehat{AM'x}$  (cf. dessin ci-dessous pour voir ce que représente  $x$ ). Par suite  $\widehat{AMN} = \widehat{AM'x}$ , ce qui implique que les droites  $(MN)$  et  $(M'N')$  sont parallèles.

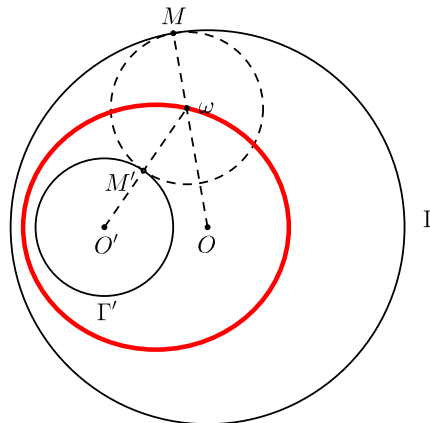


### Exercice 3

On suppose que  $\omega$  varie sur une ellipse. En tenant compte du fait que les trois points  $\omega$ ,  $O$  et  $M$  sont alignés et que  $\omega$ ,  $O'$  et  $M'$  le sont aussi, on a :

$$\begin{aligned}
 \omega O + \omega O' &= (OM - \omega M) + (\omega M' + O'M') \\
 &= (\omega M' - \omega M) + (OM + O'M') \\
 &= OM + O'M' \\
 &= \rho + \rho'.
 \end{aligned}$$

Effectivement,  $\omega$  varie sur l'ellipse de foyers  $O$  et  $O'$  et de grand axe  $2a = \rho + \rho'$  (dessinée en rouge ci-dessous).



**Licence 3 - Mathématiques**  
**DS - 23 mai 2016**  
**Géométrie 6**

Documents non autorisés

---

Dans tout ce texte  $\mathcal{P}$  sera un plan affine euclidien (dirigé par un plan vectoriel  $\vec{\mathcal{V}}$ ) muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ . On convient de noter  $MN$  (ou  $||\overrightarrow{MN}||$ ) la distance entre deux points  $M$  et  $N$  de notre plan affine euclidien  $\mathcal{P}$ .

**Exercice 1**

On note  $f$  l'application affine de  $\mathcal{P}$  dans lui-même qui à tout point  $M$  de coordonnées  $(x, y)$  associe le point  $M'$  de coordonnées  $(x', y')$  avec :

$$(*) \quad \begin{cases} x' = x + \frac{1}{2}y - 1 \\ y' = \frac{1}{2}x + y + 1. \end{cases}$$

1 - Donner la direction  $\vec{f}$  de  $f$  ainsi que la matrice  $A$  de  $\vec{f}$  dans la base  $(\vec{i}, \vec{j})$ . Montrer que  $f$  n'est pas une isométrie du plan euclidien  $\mathcal{P}$ .

2 - Calculer les valeurs propres  $\lambda$  et  $\mu$  ( $\lambda \leq \mu$ ) de  $A$  et montrer qu'il existe une base  $(\vec{u}, \vec{v})$  dans laquelle la matrice de  $\vec{f}$  est diagonale.

3 - Montrer que  $f$  a un et un seul point fixe ; on le notera  $\omega$ .

Dans le nouveau repère  $(\omega, \vec{u}, \vec{v})$ , notons  $(X, Y)$  les coordonnées d'un point  $M$  et  $(X', Y')$  celles de son transformé  $M' = f(M)$ .

4 - Sans utiliser les relations (\*), calculer (en justifiant tout bien entendu)  $(X', Y')$  en fonction de  $(X, Y)$ .

**Exercice 2**

Soient  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  deux droites affines du plan  $\mathcal{P}$ . On appelle *distance* entre  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  le nombre :

$$d(\Delta_1, \Delta_2) = \inf\{M_1M_2 : M_1 \in \Delta_1 \text{ et } M_2 \in \Delta_2\}.$$

1 - Montrer que si  $d(\Delta_1, \Delta_2) > 0$  alors les deux droites  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  sont parallèles.

On se donne un segment  $[AB]$  de longueur 1 et un segment  $[CD]$  de longueur  $k > 0$ . (Ces deux segments nous permettront d'en construire d'autres de longueur 1 ou  $k$ .)

2 - Soit  $\Delta$  une droite. Construire à la règle et au compas une droite  $\Delta'$  telle que  $d(\Delta, \Delta') = k$ . (Détailler et justifier toutes les étapes de la construction.)

Soient  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  deux droites se coupant en un point  $\omega$ . Pour tout  $M \in \mathcal{P}$ , on note  $H_1$  et  $H_2$  ses projections orthogonales respectivement sur  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$ .

3 - Décrire géométriquement l'ensemble  $\Delta = \{M \in \mathcal{P} : MH_1 = kMH_2\}$  et le construire à la règle et au compas.

**Exercice 3**

Soit  $\Gamma$  un demi-cercle de diamètre  $[BC]$ . On trace le triangle équilatéral  $ABC$  situé dans le demi-plan (délimité par la droite  $(BC)$ ) qui ne contient pas  $\Gamma$ . Soient  $M$  un point du segment  $[BC]$  et  $M'$  le point de rencontre de  $\Gamma$  avec la droite  $(AM)$ .

Montrer que  $BM = \frac{1}{3}BC$  si, et seulement si,  $\text{arc}(BM') = \frac{1}{3}\text{arc}(BC)$ .

---

## Corrigé

---

### Exercice 1

1 - La direction  $\vec{f}$  de  $f$  est l'application de  $\vec{V}$  dans lui-même qui au vecteur  $\vec{u}$  de coordonnées  $(x, y)$  dans la base  $(\vec{i}, \vec{j})$  associe le vecteur  $\vec{u}'$  de coordonnées :

$$\begin{cases} x' = x + \frac{1}{2}y \\ y' = \frac{1}{2}x + y. \end{cases}$$

Sa matrice dans la base  $(\vec{i}, \vec{j})$  est  $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$ . L'application affine  $f$  est une isométrie si, et seulement si, sa direction  $\vec{f}$  l'est. Or  $\|\vec{i}\| = 1 \neq \frac{\sqrt{5}}{2} = \|\vec{f}(\vec{i})\|$  qui montre que  $\vec{f}$  n'est pas une isométrie et donc  $f$  ne l'est pas non plus.  $\diamond$

2 - Les valeurs propres de  $A$  (donc de  $\vec{f}$ ) sont les racines du polynôme en  $t$  :

$$\det \begin{pmatrix} (1-t) & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & (1-t) \end{pmatrix} = (1-t)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{3}{2} - t\right) \left(\frac{1}{2} - t\right)$$

c'est-à-dire  $\lambda = \frac{1}{2}$  et  $\mu = \frac{3}{2}$ . Comme les valeurs propres sont distinctes, il existe une base  $(\vec{u}, \vec{v})$  de  $\vec{V}$  dans laquelle la matrice de  $\vec{f}$  est  $D = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ .  $\diamond$

3 - Soient  $(x_0, y_0)$  les coordonnées d'un point fixe de  $f$  (dont on suppose l'existence). Elles doivent satisfaire le système :

$$\begin{cases} x_0 + \frac{1}{2}y_0 - 1 = x_0 \\ \frac{1}{2}x_0 + y_0 + 1 = y_0 \end{cases}$$

dont la résolution immédiate donne l'unique solution  $x_0 = -2$  et  $y_0 = 2$ . Il y a donc un unique point fixe  $\omega$  dont les coordonnées sont  $(-2, 2)$ .  $\diamond$

4 - Comme  $(X, Y)$  et  $(X', Y')$  sont les coordonnées respectivement des points  $M$  et  $M'$  dans le repère  $(\omega; \vec{u}, \vec{v})$ , on a  $\overrightarrow{\omega M} = X\vec{u} + Y\vec{v}$  et  $\overrightarrow{\omega M'} = X'\vec{u} + Y'\vec{v}$ . D'où :

$$\begin{aligned} X'\vec{u} + Y'\vec{v} &= \overrightarrow{\omega M'} \\ &= M' - \omega \\ &= f(M) - f(\omega) \quad (\omega \text{ étant fixé par } f) \\ &= \vec{f}(\overrightarrow{\omega M}) \quad (\vec{f} \text{ étant la direction de } f) \\ &= \vec{f}(X\vec{u} + Y\vec{v}) \\ &= X\vec{f}(\vec{u}) + Y\vec{f}(\vec{v}) \\ &= X\lambda\vec{u} + Y\mu\vec{v} \quad (\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ étant des vecteurs propres de } \vec{f}) \\ &= \frac{1}{2}X\vec{u} + \frac{3}{2}Y\vec{v}. \end{aligned}$$

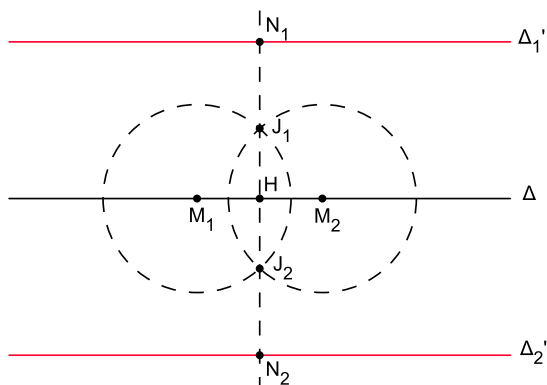


Ce qui donne  $\begin{cases} X' = \frac{1}{2}X \\ Y' = \frac{3}{2}Y. \end{cases}$  ◇

### Exercice 2

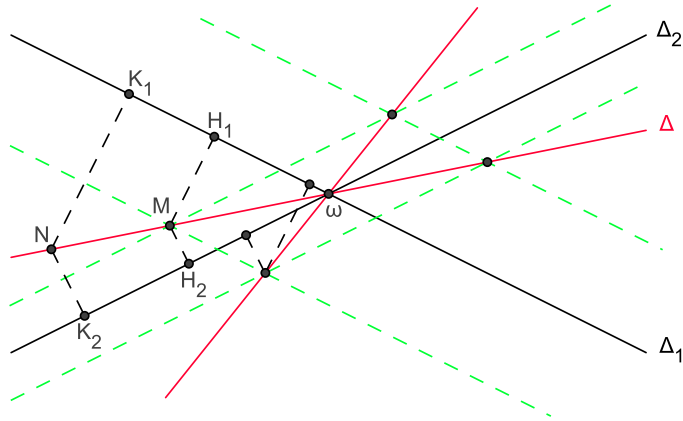
1 - Deux droites dans le plan sont parallèles disjointes, confondues ou sécantes ; ce sont les seules positions relatives possibles et qui s'excluent mutuellement bien entendu. Si  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  n'étaient pas parallèles disjointes elles auraient un point commun  $M$  ; dans ce cas  $d(\Delta_1, \Delta_2) = \inf_{M_1 \in \Delta_1, M_2 \in \Delta_2} d(M_1, M_2) = d(M, M) = 0$ , ce qui contredirait l'hypothèse  $d(\Delta_1, \Delta_2) > 0$ . Les droites  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  sont donc parallèles disjointes. ◇

2 - Par la première question, les droites cherchées seront parallèles à  $\Delta$ . Sur celle-ci on prend deux points distincts  $M_1$  et  $M_2$ . On trace les cercles de même rayon  $\rho > \frac{M_1 M_2}{2}$  et de centres respectifs  $M_1$  et  $M_2$  ; ces deux cercles se coupent en deux points  $J_1$  et  $J_2$  et la droite  $(J_1 J_2)$  coupe perpendiculairement  $\Delta$  en un point  $H$ . Sur  $(J_1 J_2)$  on construit les points  $N_1$  et  $N_2$  tels que  $HN_1 = HN_2 = k$  (on reporte la longueur du segment  $[CD]$  qui est donné). Les droites  $\Delta'_1$  et  $\Delta'_2$  parallèles à  $\Delta$  et passant respectivement par  $N_1$  et  $N_2$  répondent à la question. ◇



3 - On peut d'abord remarquer que le point  $\omega$  appartient à l'ensemble cherché  $\Delta$ . Si  $M$  est un autre point de  $\Delta$  distinct de  $\omega$ , la droite  $(\omega M)$  est contenue dans  $\Delta$ . En effet, soient  $N$  un point de  $(\omega M)$  et  $K_1, K_2$  ses projections orthogonales respectivement sur  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$ . Les triangles  $\omega M H_1$  et  $\omega N K_1$  sont homothétiques (les droites  $(M H_1)$  et  $(N K_1)$  sont parallèles car toutes deux orthogonales à  $\Delta_1$ ) ; leurs côtés homologues sont donc proportionnels et en particulier on a  $\frac{M H_1}{N K_1} = \frac{\omega M}{\omega N}$  ; de même, les triangles  $\omega M H_2$  et  $\omega N K_2$  sont homothétiques, d'où  $\frac{M H_2}{N K_2} = \frac{\omega M}{\omega N}$ . Ces deux égalités nous donnent  $\frac{M H_1}{N K_1} = \frac{M H_2}{N K_2}$  c'est-à-dire  $k = \frac{M H_1}{M H_2} = \frac{N K_1}{N K_2}$ , ce qui montre que  $N K_1 = k N K_2$  et donc  $N \in \Delta$ .

Pour construire l'ensemble  $\Delta$ , il suffit de construire les points  $M$  qui sont à la distance 1 de  $\Delta_2$  et à la distance  $k$  de  $\Delta_1$ . Il y en a quatre a priori : ce sont les intersections des deux droites qui sont à la distance 1 de  $\Delta_2$  et des deux droites qui sont à la distance  $k$  de  $\Delta_1$ . Les diagonales du parallélogramme formé par ces quatre points se coupent au point  $\omega$  ; donc l'ensemble  $\Delta$  qu'on cherche est la réunion des deux droites qui portent ces diagonales. ◇

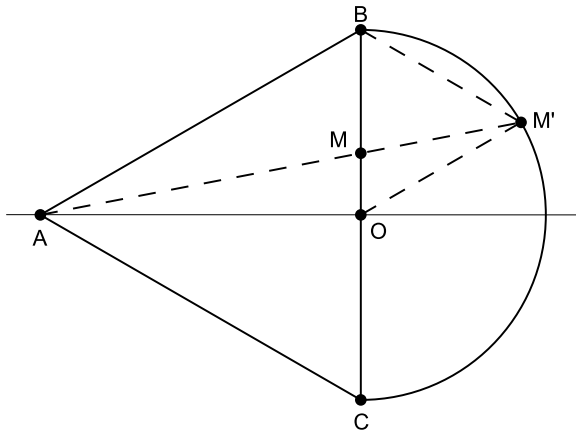


### Exercice 3

Posons  $BO = \ell > 0$  (où  $O$  est le centre du demi-cercle  $\Gamma$ ) et notons  $t$  la longueur du segment  $BM$ . Soit  $\theta : t \in [0, \ell] \mapsto \theta(t) \in [0, \frac{\pi}{2}]$  l'application qui à  $t$  associe la valeur de l'angle  $\widehat{M'OB}$ ;  $\theta$  est clairement une bijection. Donc pour répondre à la question, il suffit de montrer que  $\theta^{-1}(\frac{\pi}{3}) = \frac{2}{3}\ell$  (ce qui est équivalent à  $\theta(\frac{2}{3}\ell) = \frac{\pi}{3}$ ). Pour  $\theta(t) = \widehat{BOM'} = \frac{\pi}{3}$ , la droite  $(OM')$  est parallèle à  $(AB)$ . Les triangles  $ABM$  et  $M'OM$  sont semblables (troisième cas de similitude) ; ce qui donne  $\frac{AB}{OM'} = \frac{MB}{MO} = 2$ . Par suite :

$$t = \theta^{-1}\left(\frac{\pi}{3}\right) = BM = \frac{MB}{BO} = \frac{2}{3}\ell.$$

Le point  $M$  est donc tel que  $BM = \frac{BC}{3}$ . ◇



**Licence 3 - Mathématiques**  
**DS de rattrapage - 27 Juin 2016**  
**Géométrie 6**

Documents non autorisés

Dans tout ce texte  $\mathcal{P}$  sera un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ . On convient de noter  $MN$  la distance entre deux points  $M$  et  $N$ .

**Exercice 1**

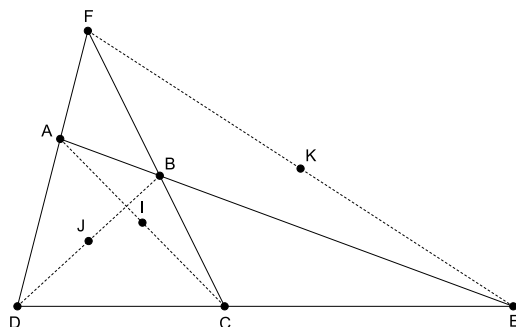
On note  $f$  l'application affine de  $\mathcal{P}$  dans lui-même qui à tout point  $M$  de coordonnées  $(x, y)$  associe le point  $M'$  de coordonnées  $(x', y')$  avec :

$$\begin{cases} x' = x - y - 1 \\ y' = x + y. \end{cases}$$

- 1 - Donner la direction  $\vec{f}$  de  $f$  ainsi que la matrice  $A$  de  $\vec{f}$  dans la base  $(\vec{i}, \vec{j})$ .
- 2 - Montrer que  $f$  a un point fixe  $\omega$  dont on déterminera les coordonnées  $(x_0, y_0)$ .
- 3 - Montrer que  $f$  est une similitude du plan  $\mathcal{P}$  dont on précisera le centre, le rapport  $k$  et l'angle  $\theta$ .
- 4 - Sans faire de calcul et en usant d'un raisonnement purement géométrique, montrer que la matrice  $A$  n'a aucune valeur propre réelle.
- 5 - Déterminer la figure  $\Gamma'$  transformée du cercle  $\Gamma$  de centre l'origine  $O$  et de rayon  $\rho = 1$ .

**Exercice 2**

Soit  $ABCD$  un quadrilatère convexe tel que les droites  $(AB)$  et  $(CD)$  se coupent en  $E$  et  $(AD)$  et  $(BC)$  se coupent en  $F$  (cf. figure). (On dira que  $ABCD$  est un *quadrilatère complet*.) On note  $I, J$  et  $K$  les milieux respectifs des segments  $[AC]$ ,  $[BD]$  et  $[EF]$ . L'objet de l'exercice est de démontrer le Théorème de Newton : *les trois points  $I, J$  et  $K$  sont alignés*.



Soient  $G$  et  $H$  les points du plan tels que les quadrilatères  $FDGB$  et  $FAHC$  soient des parallélogrammes. Soient  $h$  l'homothétie de centre  $E$  qui envoie le point  $D$  sur  $C$ ,  $h'$  l'homothétie de même centre qui envoie  $B$  sur  $A$  et  $\phi = h \circ h'$ .

- 1 - Montrer que  $\phi$  transforme la droite  $(BG)$  en la droite  $(HC)$ .
- 2 - Quelle est l'image de la droite  $(DG)$  par  $\phi$  ? En déduire le point  $\phi(G)$ .
- 3 - Montrer que les points  $E, G$  et  $H$  sont alignés.
- 4 - Soit  $f$  l'homothétie de centre  $F$  et de rapport  $\frac{1}{2}$ . Quelles sont les images des points  $G$  et  $H$  par  $f$  ? En déduire le résultat (*i.e.* la conclusion du théorème de Newton).

---

## Corrigé

---

### Exercice 1

1 - La direction  $\vec{f}$  de  $f$  est l'application de  $\vec{v}$  dans lui-même qui au vecteur  $\vec{u}$  de coordonnées  $(x, y)$  associe le vecteur  $\vec{u}'$  de coordonnées  $\begin{cases} x' = x - y \\ y' = x + y \end{cases}$ . Sa matrice dans la base  $(\vec{i}, \vec{j})$  est  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ .  $\diamond$

2 - Les coordonnées  $(x_0, y_0)$  d'un point fixe doivent vérifier le système linéaire :

$$\begin{cases} x_0 - y_0 - 1 = x_0 \\ x_0 + y_0 = y_0 \end{cases}$$

Celui-ci admet une solution unique  $x_0 = 0$  et  $y_0 = -1$ . L'application  $f$  admet donc un seul point fixe qui est  $\omega = (0, -1)$ .  $\diamond$

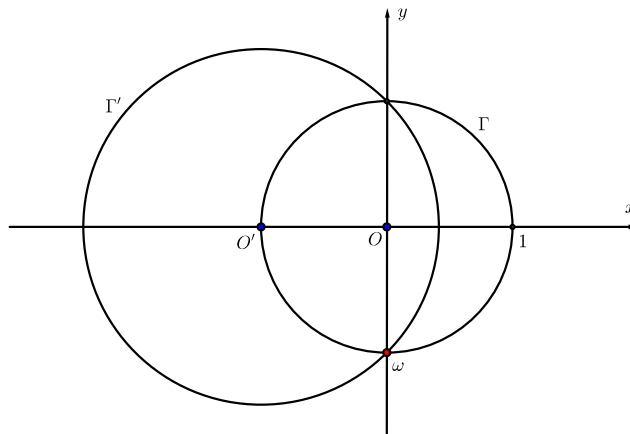
3 - L'application affine  $f$  est une similitude si, et seulement si, sa direction  $\vec{f}$  l'est. Or la matrice de cette dernière s'écrit :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \end{pmatrix}.$$

Donc  $\vec{f}$  est une similitude de centre  $O$ , de rapport  $\sqrt{2}$  et d'angle  $\theta = \frac{\pi}{4}$ . Par suite  $f$  est aussi une similitude de centre son point fixe  $\omega$ , de rapport  $k = \sqrt{2}$  et d'angle  $\frac{\pi}{4}$ .  $\diamond$

4 - Dire que  $A$  a une valeur propre réelle  $\lambda$ , c'est dire qu'il existe un vecteur non nul  $\vec{u}$  tel que  $\vec{f}(\vec{u}) = \lambda\vec{u}$ . Or l'angle  $(\vec{u}, \vec{f}(\vec{u})) = \frac{\pi}{4}$  puisque  $\vec{f}$  est une similitude d'angle  $\frac{\pi}{4}$ . Donc l'égalité  $\vec{f}(\vec{u}) = \lambda\vec{u}$  n'est jamais possible. Par suite la matrice  $A$  n'a aucune valeur propre réelle.  $\diamond$

5 - Une similitude  $f$  de rapport  $k$  transforme un cercle  $\Gamma$  de centre  $\Omega$  et de rayon  $\rho$  en le cercle de centre  $\Omega' = f(\Omega)$  et de rayon  $\rho' = k\rho$ . Donc la figure  $\Gamma'$  est le cercle de centre  $O' = f(O) = (-1, 0)$  et de rayon  $\rho' = \sqrt{2}$ .



◇

## Exercice 2

1 - L'homothétie  $h'$  envoie la droite  $(BG)$  sur une droite qui lui est parallèle et passant par le point  $A = h'(B)$  ; c'est donc la droite  $(AD)$ . Celle-ci se transforme par  $h$  en une droite qui lui est parallèle et qui passe par  $C = h(D)$  ; c'est donc la droite  $(HC)$ . En résumé on a  $\phi((BG)) = (HC)$ . ◇

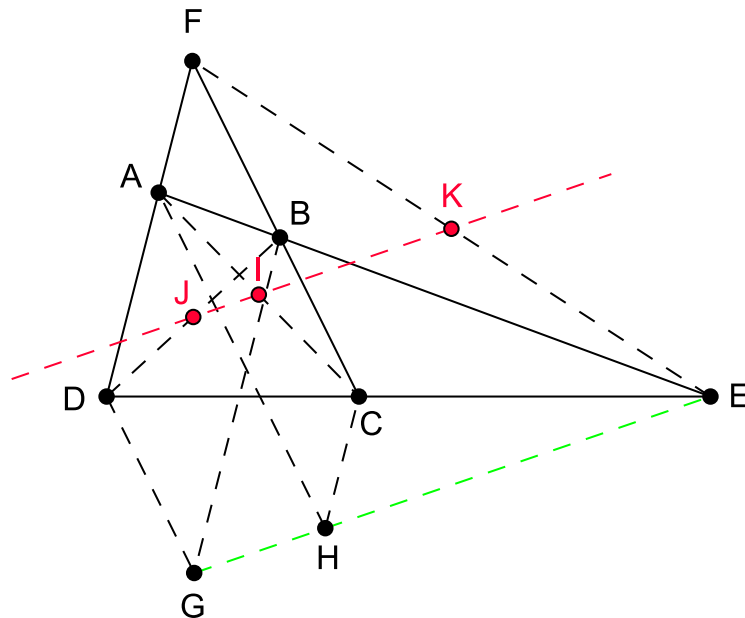
2 - Comme  $h$  et  $h'$  ont même centre (le point  $E$ ), elles commutent ; on a donc aussi  $\phi = h' \circ h$ . L'homothétie  $h$  envoie la droite  $(DG)$  sur une droite qui lui est parallèle et passant par le point  $C = h(D)$  ; c'est donc la droite  $(BC)$ . Celle-ci se transforme par  $h'$  en une droite qui lui est parallèle et qui passe par  $A = h'(B)$  ; c'est donc la droite  $(AH)$ . En résumé on a  $\phi((DG)) = (AH)$ .

Comme on vient de le voir  $\phi((BG)) = (HC)$  et  $\phi((DG)) = (AH)$ . On a donc :

$$\phi(G) = \phi((BG) \cap (DG)) = (HC) \cap (AH) = H.$$

3 - L'homothétie  $\phi$  est centrée en  $E$  et envoie le point  $G$  sur le point  $H$  ; les trois points  $E$ ,  $H$  et  $G$  sont donc alignés. ◇

4 - Le quadrilatère  $FDGB$  est un parallélogramme, donc ses diagonales  $[DB]$  et  $[FG]$  se coupent en un point qui est leur milieu commun et qui n'est rien d'autre que le point  $J$  (milieu de  $[DB]$  par hypothèse). Donc  $f(G) = J$ . De la même manière on montre que  $f(H) = I$ . Comme  $K$  est le milieu de  $[FE]$  on a  $f(E) = K$ . L'homothétie  $f$  transforme donc les trois points alignés  $H$ ,  $G$  et  $E$  respectivement en  $I$ ,  $J$  et  $K$ . Il en résulte que les points  $I$ ,  $J$  et  $K$  sont alignés, ce qui démontre le théorème de Newton. ◇



**Licence 3 - Mathématiques**  
**DS - 13 février 2017**  
**Géométrie 6**

Aucun document n'est autorisé

---

Dans tout ce texte,  $\mathcal{P}$  sera un plan affine euclidien (dirigé par un plan vectoriel  $\vec{\mathcal{V}}$ ) muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

**Exercice 1**

On note  $f$  l'application affine de  $\mathcal{P}$  dans lui-même qui à tout point  $M$  de coordonnées  $(x, y)$  associe le point  $M'$  de coordonnées  $(x', y')$  données par :

$$\begin{cases} x' = \sqrt{3}x - y + 3 - \sqrt{3} \\ y' = x + \sqrt{3}y + 1 - 2\sqrt{3}. \end{cases}$$

- 1 - Montrer que  $f$  a un et un seul point fixe ; on le notera  $\omega$ .
- 2 - Dire pourquoi l'application affine  $f$  n'est pas linéaire.
- 3 - Montrer que  $f$  est une similitude du plan euclidien  $\mathcal{P}$  dont on précisera le centre, le rapport  $k$  et l'angle  $\theta$ .
- 4 - Quel est l'image  $\Delta'$  par  $f$  de la droite  $\Delta$  d'équation  $x + y = 3$  ?
- 5 - Quel est l'image  $\Gamma'$  par  $f$  du cercle  $\Gamma$  centré à l'origine et de rayon  $\rho = 1$  ?

**Exercice 2**

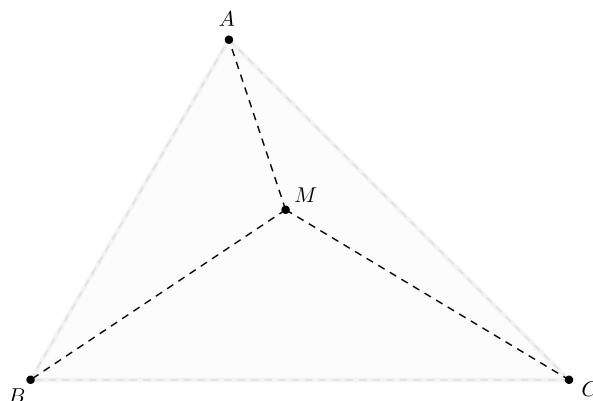
Soit  $ABCD$  un quadrilatère convexe quelconque. La bissectrice de l'angle  $\widehat{BAD}$  coupe celles des angles  $\widehat{ADC}$  et  $\widehat{ABC}$  respectivement en  $M$  et  $N$  et la bissectrice de  $\widehat{BCD}$  coupe celles des angles  $\widehat{ADC}$  et  $\widehat{ABC}$  respectivement en  $Q$  et  $P$ .

Montrer que le quadrilatère  $MNPQ$  est inscritible dans un cercle.

**Exercice 3**

Soit  $M$  un point situé à l'intérieur d'un triangle non dégénéré  $ABC$  et dont on notera  $p$  le périmètre.

Montrer que la somme  $MA + MB + MC$  est comprise entre  $\frac{p}{2}$  et  $p$ .



---

Il sera tenu compte de la rédaction et de la présentation de la copie.

---

## Corrigé

---

### Exercice 1

1 - Un point fixe  $\omega$  a ses coordonnées  $(x_0, y_0)$  qui vérifient le système linéaire :

$$\begin{cases} \sqrt{3}x_0 - y_0 + 3 - \sqrt{3} = x_0 \\ x_0 + \sqrt{3}y_0 + 1 - 2\sqrt{3} = y_0. \end{cases}$$

Les solutions sont de façon évidente  $x_0 = 1$  et  $y_0 = 2$ . Donc  $\omega = (1, 2)$  est un point fixe et il est unique.

2 - Si l'application  $f$  était linéaire, elle fixerait l'origine  $O$ . Or son seul point fixe (question 1) est le point  $\omega = (1, 2)$ . Elle n'est donc pas linéaire.

3 - Considérons le nouveau repère  $(\omega; \vec{i}, \vec{j})$ . Les coordonnées de  $M = (x, y)$  y deviennent  $X = x - 1$  et  $Y = y - 2$  ; de même celles de son transformé  $M' = (x', y')$  y sont  $X' = x' - 1$  et  $Y' = y' - 2$ . Un calcul simple montre que le système :

$$\begin{cases} x' = \sqrt{3}x - y + 3 - \sqrt{3} \\ y' = x + \sqrt{3}y + 1 - 2\sqrt{3} \end{cases}$$

est exactement le même que :

$$\begin{cases} x' - 1 = \sqrt{3}(x - 1) - (y - 2) \\ y' - 2 = (x - 1) + \sqrt{3}(y - 2) \end{cases}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{6} & -\sin \frac{\pi}{6} \\ \sin \frac{\pi}{6} & \cos \frac{\pi}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}.$$

On voit donc qu'on passe de  $M$  à  $M'$  par la rotation de centre  $\omega$  et d'angle  $\theta = \frac{\pi}{6}$  suivie de l'homothétie de centre  $\omega$  et de rapport  $k = 2$ . La transformation  $f$  est donc la similitude de centre  $\omega$ , de rapport 2 et d'angle  $\frac{\pi}{6}$ .

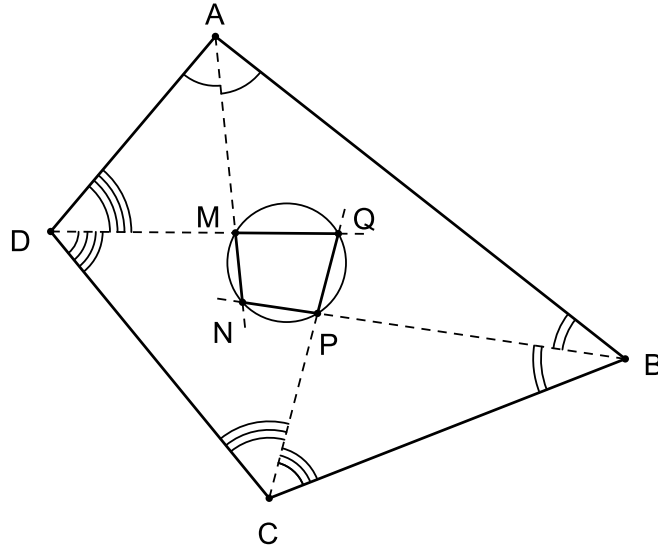
4 - Une similitude transforme une droite en une droite. Pour déterminer  $\Delta'$ , il suffit donc de connaître les transformés respectifs  $A'$  et  $B'$  de deux points  $A$  et  $B$  de  $\Delta$ , par exemple  $A = (0, 3)$  et  $B = (3, 0)$ . Un calcul immédiat donne  $A' = (-\sqrt{3}, 1 + \sqrt{3})$  et  $B' = (3 + 2\sqrt{3}, 4 - 2\sqrt{3})$ . L'équation de  $\Delta'$  est donc :

$$y = (\sqrt{3} - 2)x + 4 - \sqrt{3}.$$

5 - Le transformé par  $f$  du cercle  $\Gamma$  de centre  $O = (0, 0)$  et de rayon  $\rho = 1$  est le cercle  $\Gamma'$  de centre  $O' = f(O)$  et de rayon  $\rho' = k\rho$ , c'est-à-dire  $O' = (3 - \sqrt{3}, 1 - 2\sqrt{3})$  et  $\rho' = 2$ .

## Exercice 2

Faisons d'abord un dessin clair. Il va nous permettre de bien voir comment montrer l'inscriptibilité de notre quadrilatère.



Il suffit de démontrer que deux angles opposés du quadrilatère  $MNPQ$ , par exemple  $\widehat{NMQ}$  et  $\widehat{NPQ}$ , sont supplémentaires. À cet effet on a :

$$\widehat{NMQ} = \widehat{DMA} = \pi - (\widehat{MAD} + \widehat{MDA}) \text{ et } \widehat{NPQ} = \widehat{CPB} = \pi - (\widehat{PCB} + \widehat{PBC}).$$

D'où :

$$\begin{aligned} \widehat{NMQ} + \widehat{NPQ} &= 2\pi - (\widehat{MAD} + \widehat{MDA} + \widehat{PCB} + \widehat{PBC}) \\ &= 2\pi - \frac{\widehat{DAB} + \widehat{ABC} + \widehat{BCD} + \widehat{CDA}}{2} \\ &= 2\pi - \pi \\ &= \pi. \end{aligned}$$

Ce qui termine la démonstration. ◇

## Exercice 3

- Dans les trois triangles  $MAB$ ,  $MBC$  et  $MCA$  on a :

$$\begin{cases} AB \leq MA + MB \\ BC \leq MB + MC \\ CA \leq MC + MA. \end{cases}$$

La somme, membre à membre, de ces trois inégalités donne :

$$p = AB + BC + CA \leq 2(MA + MB + MC),$$

c'est-à-dire :

$$MA + MB + MC \geq \frac{p}{2}.$$



- Notons  $L$  le point d'intersection de la droite  $(BM)$  avec le segment  $AC$ ,  $K$  celui de  $(CM)$  avec  $AB$  et  $N$  celui  $(AM)$  avec  $BC$ .

Nous utiliserons seulement l'inégalité du triangle et l'égalité  $XU + UY = XY$  valable lorsque le point  $U$  est sur le segment  $[XY]$ . Pour suivre le calcul, il est conseillé de regarder en même temps la figure ci-dessous. On a :

$$\begin{aligned}
 AB + AC &= AB + (AL + LC) \\
 &= (AB + AL) + LC \\
 &\geq BL + LC \\
 &= (MB + ML) + LC \\
 &= MB + (ML + LC) \\
 &\geq MB + MC
 \end{aligned}$$

En résumé :

$$AB + AC \geq MB + MC.$$

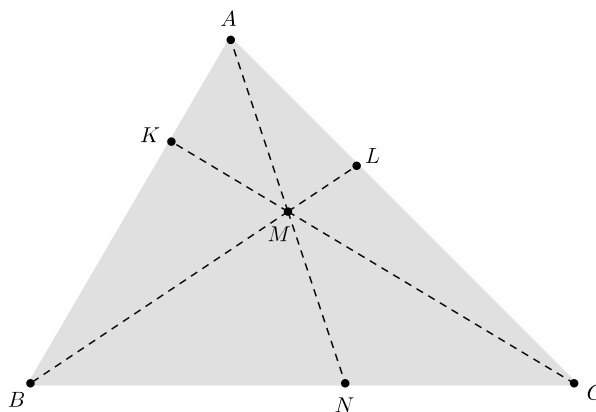
De la même manière, en faisant intervenir les point  $K$  et  $N$ , on établit les inégalités  $CA + CB \geq MA + MB$  et  $BA + BC \geq MA + MC$ . On a donc les trois inégalités :

$$\begin{cases}
 AB + AC \geq MB + MC \\
 BA + BC \geq MA + MC \\
 CA + CB \geq MA + MB.
 \end{cases}$$

En les sommant membre à membre, on obtient  $2(AB + BC + CA) \geq 2(MA + MB + MC)$ , c'est-à-dire :

$$MA + MB + MC \leq p.$$

Ce qui termine la démonstration. ◇



## Licence 3 - Mathématiques

DS - 7 avril 2017

### Géométrie 6

Aucun document n'est autorisé

$\mathcal{P}$  sera l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^2$  muni de son produit scalaire usuel  $\langle (x, y), (x', y') \rangle = xx' + yy'$ , de sa structure affine canonique et du repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  avec  $\vec{i} = (1, 0)$  et  $\vec{j} = (0, 1)$ .

#### Exercice 1

On note  $f$  l'application affine de  $\mathcal{P}$  dans lui-même qui à tout point  $M$  de coordonnées  $(x, y)$  associe le point  $M'$  de coordonnées  $(x', y')$  données par :

$$(*) \quad \begin{cases} x' = x + 2y + 2 \\ y' = 2x + y - 2. \end{cases}$$

1 - Donner la direction  $\vec{f}$  de  $f$  ainsi que la matrice  $A$  de  $\vec{f}$  dans la base  $(\vec{i}, \vec{j})$ .

2 - Calculer les valeurs propres  $\lambda$  et  $\mu$  ( $\lambda \leq \mu$ ) de  $A$  et montrer qu'il existe une base  $(\vec{u}, \vec{v})$  (qu'on déterminera explicitement) dans laquelle la nouvelle matrice  $D$  de  $\vec{f}$  est diagonale.

3 - Montrer que  $f$  n'est pas une isométrie du plan euclidien  $\mathcal{P}$ .

4 - Montrer que  $f$  a un et un seul point fixe ; on le notera  $\omega$ .

Notons  $(X, Y)$  les coordonnées d'un point  $M$  dans le nouveau repère  $(\omega; \vec{u}, \vec{v})$  et  $(X', Y')$  celles de son transformé  $M' = f(M)$ .

5 - Sans utiliser les relations  $(*)$ , calculer (en justifiant bien entendu) les coordonnées  $(X', Y')$  en fonction de  $(X, Y)$ .

#### Exercice 2

Soient  $\Gamma$  un cercle de centre  $O$  et de rayon  $\rho > 0$  et  $S$  un point extérieur à  $\Gamma$ . On note  $A$  et  $B$  les points d'intersection de la droite  $(SO)$  avec le cercle  $\Gamma$ . (On suppose  $SA > SB$  et on pose  $k = \frac{SA}{SB}$ .) Si  $M \in \Gamma$ ,  $M_1$  sera le point de  $\Gamma$  diamétralement opposé à  $M$ . Pour  $M \in \Gamma \setminus \{A, B\}$ , on notera  $M'$  le point d'intersection des droites  $(AM_1)$  et  $(SM)$ .

1 - Quelle est la nature du quadrilatère  $AM_1BM$  ?

2 - Quel est le lieu géométrique  $\Gamma'$  où varie  $M'$  lorsque  $M$  varie sur  $\Gamma \setminus \{A, B\}$  ?

3 - Dessiner (de manière précise et claire)  $\Gamma'$ .

4 - Vers quel point tend  $M'$  lorsque  $M \in \Gamma \setminus \{A, B\}$  tend vers  $A$  ? Même question lorsque  $M$  tend vers  $B$ .

#### Exercice 3

Dans le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  les coordonnées d'un point variable  $M$  seront notées  $(x, y)$ .

1 - Soit  $\mathcal{E}$  l'ensemble des points  $M$  dont les coordonnées  $x$  et  $y$  vérifient l'équation :  $y^2 = \frac{-x^2 + 6x - 5}{4}$ .

Montrer que  $\mathcal{E}$  est une ellipse dont on déterminera le centre  $\omega$ , les paramètres  $2a$  (grand axe),  $2b$  (petit axe) ainsi que les foyers  $F$  et  $F'$ . Dessiner cette ellipse.

2 - Soit  $\mathcal{H}$  l'ensemble des points  $M$  dont les coordonnées  $x$  et  $y$  vérifient l'équation :  $y^2 = 4x^2 - 8x - 12$ .

i) Montrer que  $\mathcal{H}$  est une hyperbole dont on déterminera le centre  $\omega$  et les foyers  $F$  et  $F'$ .

ii) Dessiner l'hyperbole  $\mathcal{H}$  ainsi que ses deux asymptotes.

---

## Corrigé

---

### Exercice 1

1 - La direction  $\vec{f}$  de  $f$  est l'application de  $\vec{V}$  dans lui-même qui au vecteur  $\vec{u}$  de coordonnées  $(x, y)$  dans la base  $(\vec{i}, \vec{j})$  associe le vecteur  $\vec{u}'$  de coordonnées :

$$\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = 2x + y. \end{cases}$$

Sa matrice  $A$  dans la base  $(\vec{i}, \vec{j})$  est  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ .

2 - Les valeurs propres de  $A$  (donc de  $\vec{f}$ ) sont les racines du polynôme en  $t$  :

$$\det \begin{pmatrix} (1-t) & 2 \\ 2 & (1-t) \end{pmatrix} = (1-t)^2 - 4 = (t+1)(t-3).$$

Ce sont donc  $\lambda = -1$  et  $\mu = 3$ . Un calcul immédiat montre que  $\vec{u} = \vec{i} - \vec{j}$  et  $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j}$  sont des vecteurs propres associés respectivement à  $\lambda$  et  $\mu$ . Dans la base  $(\vec{u}, \vec{v})$  l'application linéaire  $\vec{f}$  a pour matrice  $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ .

3 - On a  $\|\vec{f}(\vec{v})\| = \|\vec{3}\vec{v}\| = 3\|\vec{v}\|$ . Donc  $\vec{f}$  n'est pas une isométrie et par suite l'application affine  $f$  ne l'est pas non plus.

4 - Soient  $(x_0, y_0)$  les coordonnées d'un point fixe de  $f$ . Elles vérifient le système :

$$\begin{cases} x_0 + 2y_0 + 2 = x_0 \\ 2x_0 + y_0 - 2 = y_0 \end{cases}$$

dont la résolution immédiate donne l'unique solution  $x_0 = 1$  et  $y_0 = -1$ . Il y a donc un unique point fixe  $\omega$  dont les coordonnées sont  $(1, -1)$ .

5 - Comme  $(X, Y)$  et  $(X', Y')$  sont les coordonnées respectivement des points  $M$  et  $M'$  dans le repère  $(\omega; \vec{u}, \vec{v})$ , on a  $\overrightarrow{\omega M} = X\vec{u} + Y\vec{v}$  et  $\overrightarrow{\omega M'} = X'\vec{u} + Y'\vec{v}$ . D'où :

$$\begin{aligned} X'\vec{u} + Y'\vec{v} &= \overrightarrow{\omega M'} \\ &= M' - \omega \\ &= f(M) - f(\omega) \quad (\omega \text{ étant fixé par } f) \\ &= \vec{f}(\overrightarrow{\omega M}) \quad (\vec{f} \text{ étant la direction de } f) \\ &= \vec{f}(X\vec{u} + Y\vec{v}) \\ &= X\vec{f}(\vec{u}) + Y\vec{f}(\vec{v}) \\ &= -X\vec{u} + 3Y\vec{v} \quad (\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ étant des vecteurs propres de } \vec{f}). \end{aligned}$$

Ce qui donne  $X' = -X$  et  $Y' = 3Y$ .

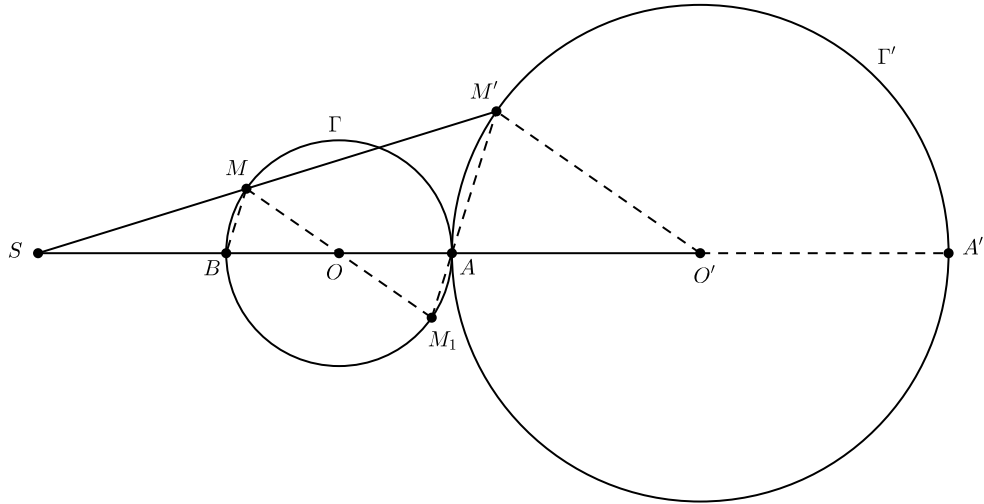
◇

## Exercice 2

1 - Le quadrilatère  $AM_1BM$  a pour diagonales les diamètres  $AB$  et  $MM_1$  du cercle  $\Gamma$ . C'est donc un rectangle.

2 - Comme  $AM_1BM$  est un rectangle, les droites  $(BM)$  et  $(AM_1)$  sont parallèles. Par suite le triangle  $SAM'$  s'obtient à partir du triangle  $SBM$  par l'homothétie  $h$  de centre  $S$  et de rapport  $k = \frac{SA}{SB}$ . D'où  $\overrightarrow{SM'} = k\overrightarrow{SM}$ . Le point  $M'$  varie donc sur le cercle  $\Gamma'$  de centre  $O'$  tel que  $\overrightarrow{SO'} = k\overrightarrow{SO}$  et de rayon  $\rho' = k\rho$ . Plus précisément, lorsque  $M$  décrit l'ensemble  $\Gamma \setminus \{A, B\}$  tout entier,  $M'$  décrit l'ensemble  $\Gamma' \setminus \{A', A\}$  tout entier. (Ici  $A'$  est le point diamétralement opposé à  $A$  dans le cercle  $\Gamma'$ .)

3 - Ci-dessous sont dessinés les objets géométriques qui interviennent dans l'exercice.



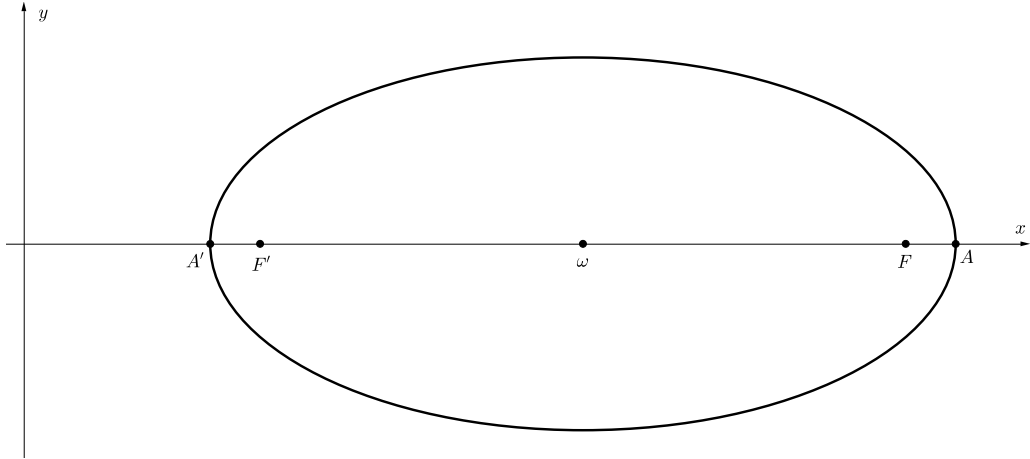
4 - Lorsque  $M$  tend vers  $A$ ,  $M'$  tend vers  $A'$  (cf. dessin ci-dessus) et lorsque  $M$  tend vers  $B$ ,  $M'$  tend vers  $A$ . On peut donc dire, puisque l'homothétie  $h$  est continue, que lorsque  $M$  varie sur  $\Gamma$  tout entier,  $M'$  varie sur  $\Gamma'$  tout entier. Ce dernier n'est rien d'autre que le cercle de rayon  $k\rho$  et tangent extérieurement à  $\Gamma$  au point  $A$ .  $\diamond$

## Exercice 3

1 - Un calcul simple permet de mettre l'expression  $y^2 = \frac{-x^2+6x-5}{4}$  sous la forme plus réduite, et surtout plus reconnaissable :

$$\frac{(x-3)^2}{4} + y^2 = 1.$$

Elle décrit l'ellipse  $\mathcal{E}$  de centre  $\omega = (3, 0)$ , de grand axe  $2a = AA' = 4$ , de petit axe  $2b = 2$  et de foyers  $F = (3 + \sqrt{3}, 0)$  et  $F' = (3 - \sqrt{3}, 0)$ .



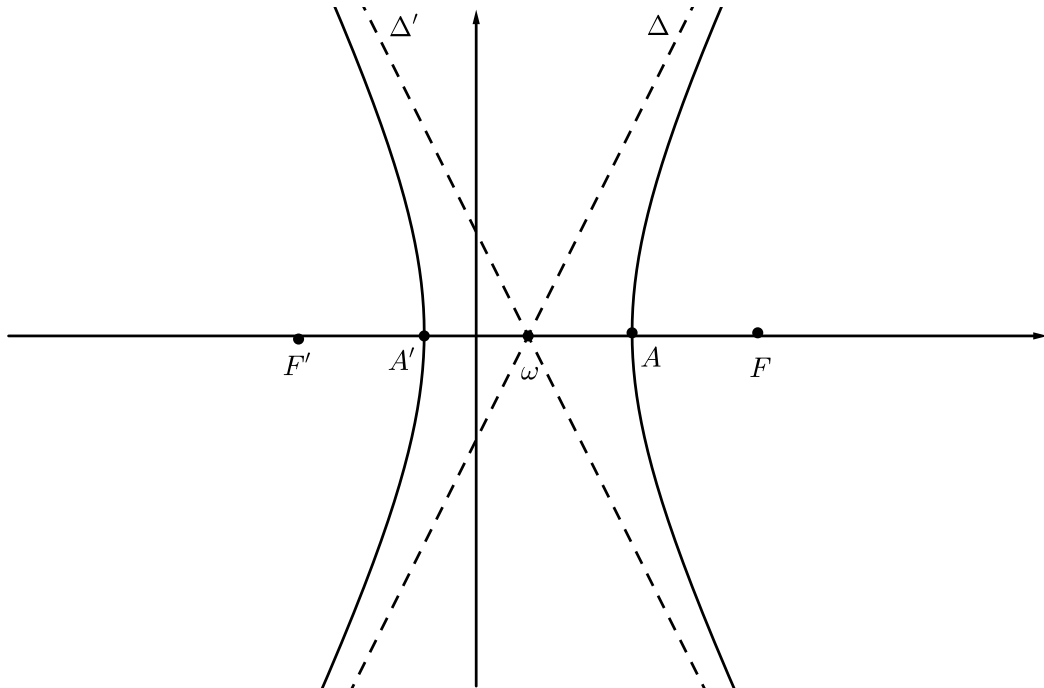
2 - i) De même, un calcul simple permet de mettre l'expression  $y^2 = 4x^2 - 8x - 12$  sous la forme plus simple à interpréter :

$$\frac{(x - 1)^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1.$$

Cette équation décrit l'hyperbole  $\mathcal{H}$  de centre  $\omega = (1, 0)$ , de paramètres  $a = 2$ ,  $b = 4$  et de foyers  $F = (1 + 2\sqrt{5}, 0)$  et  $F' = (1 - 2\sqrt{5}, 0)$ .

2 - ii) Les deux asymptotes  $\Delta$  et  $\Delta'$  ont pour équations respectives :

$$Y = 2(X - 1) \quad \text{et} \quad Y = -2(X - 1).$$



**Licence 3 - Mathématiques**  
**DS - 19 Juin 2017**  
**Géométrie 6**

Aucun document n'est autorisé

---

$\mathcal{P}$  sera  $\mathbb{R}^2$  muni de son produit scalaire usuel  $\langle (x, y), (x', y') \rangle = xx' + yy'$ , de sa structure affine canonique et du repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  avec  $\vec{i} = (1, 0)$  et  $\vec{j} = (0, 1)$ .

**Exercice 1**

On note  $f$  l'application affine de  $\mathcal{P}$  dans lui-même qui à tout point  $M$  de coordonnées  $(x, y)$  associe le point  $M'$  de coordonnées  $(x', y')$  données par :

$$(*) \quad \begin{cases} x' = 2x + y + 2 \\ y' = x + y + 3. \end{cases}$$

1 - Donner la direction  $\vec{f}$  de  $f$  ainsi que la matrice  $A$  de  $\vec{f}$  dans la base  $(\vec{i}, \vec{j})$ .

2 - Montrer que  $A$  a deux valeurs propres distinctes  $\lambda$  et  $\mu$  ( $\lambda > \mu > 0$ ) et en déduire qu'il existe une base  $(\vec{u}, \vec{v})$  dans laquelle la matrice  $D$  de  $\vec{f}$  est diagonale. (Il n'est pas demandé de déterminer explicitement  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ .)

3 - Montrer que la base  $(\vec{u}, \vec{v})$  est orthogonale. (*Remarquer que la matrice  $A$  est symétrique, et donc vérifie  $\langle A(\vec{\xi}), \vec{\zeta} \rangle = \langle \vec{\xi}, A(\vec{\zeta}) \rangle$  pour tous vecteurs  $\vec{\xi}$  et  $\vec{\zeta}$ .)*

4 - Montrer que  $f$  n'est pas une similitude du plan euclidien  $\mathcal{P}$ .

5 - Montrer que  $f$  a un et un seul point fixe ; on le notera  $\omega$ .

6 - Quelle est l'image  $\Gamma'$  par  $f$  du cercle  $\Gamma$  de centre  $\omega$  et de rayon  $\rho = 1$  ?

**Exercice 2**

Soient  $Ax$  et  $Ay$  deux demi-droites telles que l'angle  $(Ax, Ay)$  soit de mesure  $\frac{\pi}{3}$ . Sur  $Ax$  et  $Ay$  on choisit respectivement deux points  $B$  et  $C$  tels  $AB = AC = a$  ( $a$  étant un nombre réel strictement positif).

1 - Si  $M$  est un point intérieur à ce triangle, on note  $d_1$  sa distance au côté  $AB$ ,  $d_2$  celle au côté  $BC$  et  $d_3$  celle au côté  $CA$ .

Montrer que la quantité  $\delta = d_1 + d_2 + d_3$  est une constante indépendante de la position de  $M$  à l'intérieur du triangle  $ABC$ . (*Évaluer de deux manières différentes l'aire du triangle  $ABC$ .*)

2 - Cette fois-ci  $M$  est à l'extérieur de  $ABC$  mais à l'intérieur de l'angle  $(Ax, Ay)$  (il est conseillé de faire un dessin) et  $d_1$ ,  $d_2$  et  $d_3$  sont ses distances respectives aux droites  $(AB)$ ,  $(BC)$  et  $(CA)$ .

Montrer que la quantité  $\delta' = d_1 - d_2 + d_3$  est une constante indépendante de la position de  $M$  comme choisi. (*Utiliser la question 1.*)

**Exercice 3**

Dans le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  les coordonnées d'un point variable  $M$  seront notées  $(x, y)$ .

1 - Soit  $\mathcal{E}$  l'ensemble des points  $M$  défini par l'équation :  $y^2 = -4x^2 + 8x + 2y - 1$ .

Montrer que  $\mathcal{E}$  est une ellipse dont on déterminera le centre  $\omega$ , les paramètres  $2a$  (grand axe),  $2b$  (petit axe) ainsi que les foyers  $F$  et  $F'$ . Dessiner cette ellipse.

2 - Soit  $\mathcal{H}$  l'ensemble des points  $M$  défini par l'équation :  $y^2 = \frac{1}{4}(x^2 + 2x - 8y - 7)$ .

i) Montrer que  $\mathcal{H}$  est une hyperbole dont on déterminera le centre  $\omega$  et les foyers  $F$  et  $F'$ .

ii) Dessiner l'hyperbole  $\mathcal{H}$  ainsi que ses deux asymptotes.

---

## Corrigé

---

### Exercice 1

1 - La direction  $\vec{f}$  de  $f$  est l'application de  $\vec{V}$  dans lui-même qui au vecteur  $\vec{u}$  de coordonnées  $(x, y)$  dans la base  $(\vec{i}, \vec{j})$  associe le vecteur  $\vec{u}'$  de coordonnées :

$$\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = x + y. \end{cases}$$

Sa matrice  $A$  dans la base  $(\vec{i}, \vec{j})$  est  $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

2 - Les valeurs propres de  $A$  (donc de  $\vec{f}$ ) sont les racines du polynôme en  $t$  :

$$\det \begin{pmatrix} (2-t) & 1 \\ 1 & (1-t) \end{pmatrix} = t^2 - 3t + 1.$$

Ce sont donc  $\lambda = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$  et  $\mu = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ . Comme  $\lambda$  et  $\mu$  sont distinctes, il existe deux vecteurs linéairement indépendants  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  tels que  $\vec{f}(\vec{u}) = \lambda\vec{u}$  et  $\vec{f}(\vec{v}) = \mu\vec{v}$ . Dans la base  $(\vec{u}, \vec{v})$  la matrice est  $D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ .

3 - Comme la matrice  $A$  est symétrique, l'application  $\vec{f}$  l'est aussi. On a donc :

$$\lambda \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \lambda \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{f}(\vec{u}), \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{f}(\vec{v}) \rangle = \langle \vec{u}, \mu \vec{v} \rangle = \mu \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle.$$

On en déduit  $(\lambda - \mu) \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$ . Ce qui implique  $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$  puisque  $\lambda \neq \mu$ . La base  $(\vec{u}, \vec{v})$  est donc orthogonale.  $\diamond$

Quitte à remplacer  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  par leurs normalisés respectifs  $\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$  et  $\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$ , on peut en fait supposer qu'ils sont de norme 1. C'est ce qu'on fera dans toute la suite. Ainsi, la base  $(\vec{u}, \vec{v})$  sera orthonormée.

4 - L'application affine  $f$  est une similitude si, et seulement si, sa direction  $\vec{f}$  l'est. Et si  $\vec{f}$  était une similitude, il existerait une constante  $k > 0$  telle que  $\|\vec{f}(\vec{\xi})\| = k\|\vec{\xi}\|$  pour tout vecteur  $\vec{\xi}$ . Or  $\|\vec{f}(\vec{u})\| = \lambda\|\vec{u}\|$  et  $\|\vec{f}(\vec{v})\| = \mu\|\vec{v}\|$  avec  $\lambda \neq \mu$  ; donc  $\vec{f}$  n'est pas une similitude et par suite  $f$  ne l'est pas non plus.  $\diamond$

5 - Le point  $\omega$  est fixé par  $f$  si ses coordonnées  $(x, y)$  vérifient le système :

$$\begin{cases} 2x + y + 2 = x \\ x + y + 3 = y. \end{cases}$$

La résolution donne  $x = -3$  et  $y = 1$ . On a donc un unique point fixe  $\omega = (-3, 1)$ .  $\diamond$

6 - Notons  $(X, Y)$  les coordonnées d'un point  $M$  dans le repère  $(\omega; \vec{u}, \vec{v})$  et  $(X', Y')$  celles de son transformé  $M'$  par  $f$  (toujours dans le même repère). On a :

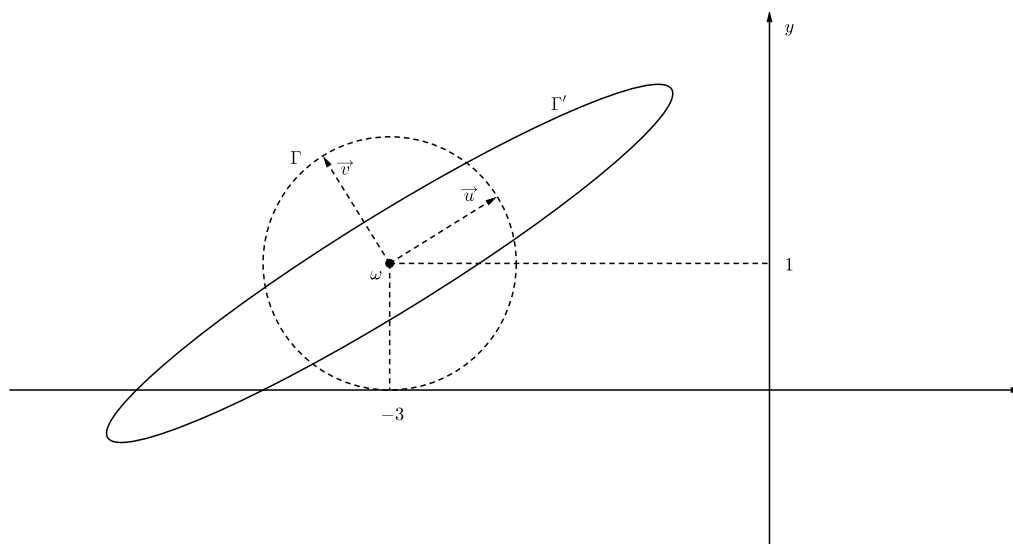
$$\begin{aligned}
 X'\vec{u} + Y'\vec{v} &= \overrightarrow{\omega M'} \\
 &= M' - \omega \\
 &= f(M) - f(\omega) \quad (\omega \text{ étant fixé par } f) \\
 &= \vec{f}(\overrightarrow{\omega M}) \quad (\vec{f} \text{ étant la direction de } f) \\
 &= \vec{f}(X\vec{u} + Y\vec{v}) \\
 &= X\vec{f}(\vec{u}) + Y\vec{f}(\vec{v}) \\
 &= X\lambda\vec{u} + Y\mu\vec{v} \quad (\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ étant des vecteurs propres de } \vec{f}) \\
 &= \frac{3 + \sqrt{5}}{2}X\vec{u} + \frac{3 - \sqrt{5}}{2}Y\vec{v}.
 \end{aligned}$$

Ce qui donne  $X' = \lambda X = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}X$  et  $Y' = \mu Y = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}Y$ . (D'où  $X = \frac{X'}{\lambda}$  et  $Y = \frac{Y'}{\mu}$ ).  $\diamond$

Dans le repère orthonormé  $(\omega; \vec{u}, \vec{v})$  le cercle  $\Gamma$  a pour équation  $X^2 + Y^2 = 1$ . Son transformé  $\Gamma'$  par  $f$  a pour équation  $\left(\frac{X'}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{Y'}{\mu}\right)^2 = 1$ , c'est-à-dire :

$$\frac{X'^2}{\lambda^2} + \frac{Y'^2}{\mu^2} = 1.$$

C'est donc l'ellipse centrée en  $\omega$  de grand axe  $2a = 2\lambda$  et de petit axe  $2b = 2\mu$ .  $\diamond$



## Exercice 2

1 - Comme l'angle  $\widehat{BAC}$  vaut  $\frac{\pi}{3}$  et que  $AB = BC$ , le triangle  $ABC$  est équilatéral. Son aire  $\mathcal{A}(ABC)$  vaut donc  $\frac{h \cdot BC}{2}$  où  $h$  est la hauteur (de  $ABC$ ). Mais elle est aussi égale à la somme des aires des triangles  $MAB$ ,  $MBC$  et  $MCA$  *i.e.* :

$$\mathcal{A}(ABC) = \frac{d_1 \cdot AB}{2} + \frac{d_2 \cdot BC}{2} + \frac{d_3 \cdot CA}{2} = \frac{(d_1 + d_2 + d_3) \cdot BC}{2}.$$

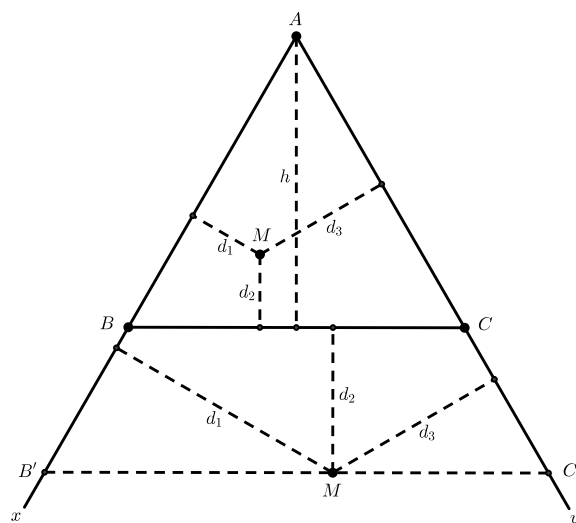


Ce qui donne  $d_1 + d_2 + d_3 = h$ . ◇

2 - Maintenant le point  $M$  est à l'extérieur du triangle  $ABC$  mais à l'intérieur de l'angle  $(Ax, Ay)$ . Par  $M$  menons la parallèle au côté  $BC$  ; elle coupe les droites  $(Ax)$  et  $(Ay)$  respectivement en  $B'$  et  $C'$ . Le triangle  $AB'C'$  est alors équilatéral. D'après la première question on a :

$$\text{dist}(M, (AB')) + \text{dist}(M, (B'C')) + \text{dist}(M, (C'A)) = \text{hauteur de } AB'C'$$

*i.e.*  $\text{dist}(M, (AB')) + 0 + \text{dist}(M, (C'A)) = d_1 + d_3 = h + d_2$ . (Ici  $\text{dist}(M, (B'C')) = 0$  car le point  $M$  est sur le côté  $B'C'$ .) D'où  $d_1 - d_2 + d_3 = h$ . ◇

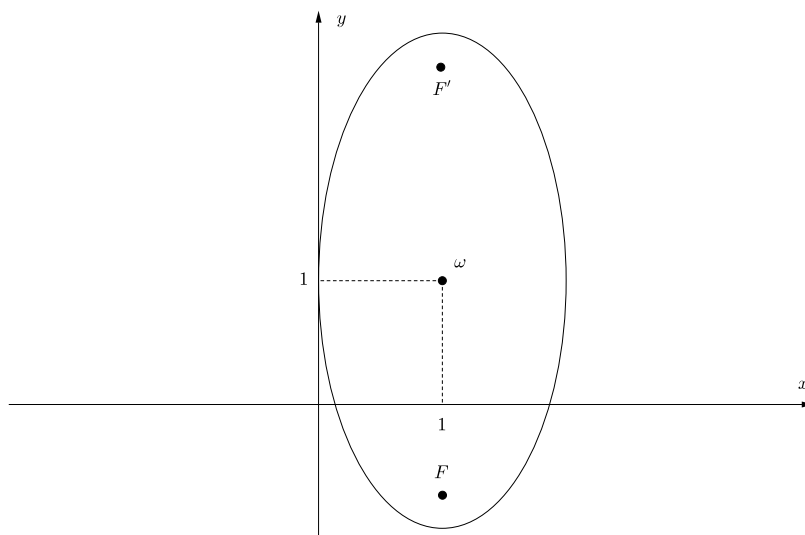


### Exercice 3

1 - Un calcul simple permet de mettre l'expression  $y^2 = -4x^2 + 8x + 2y - 1$  sous la forme plus réduite, et surtout plus reconnaissable :

$$(x - 1)^2 + \frac{(y - 1)^2}{4} = 1.$$

Elle décrit l'ellipse  $\mathcal{E}$  de centre  $\omega = (1, 1)$ , de petit axe  $2a = 2$ , de grand axe  $2b = 4$  et de foyers  $F = (1, 1 - \sqrt{3})$  et  $F' = (1, 1 + \sqrt{3})$ .



2 - i) De même, un calcul simple permet de mettre l'expression :

$$y^2 = \frac{1}{4} (x^2 + 2x - 8y - 7)$$

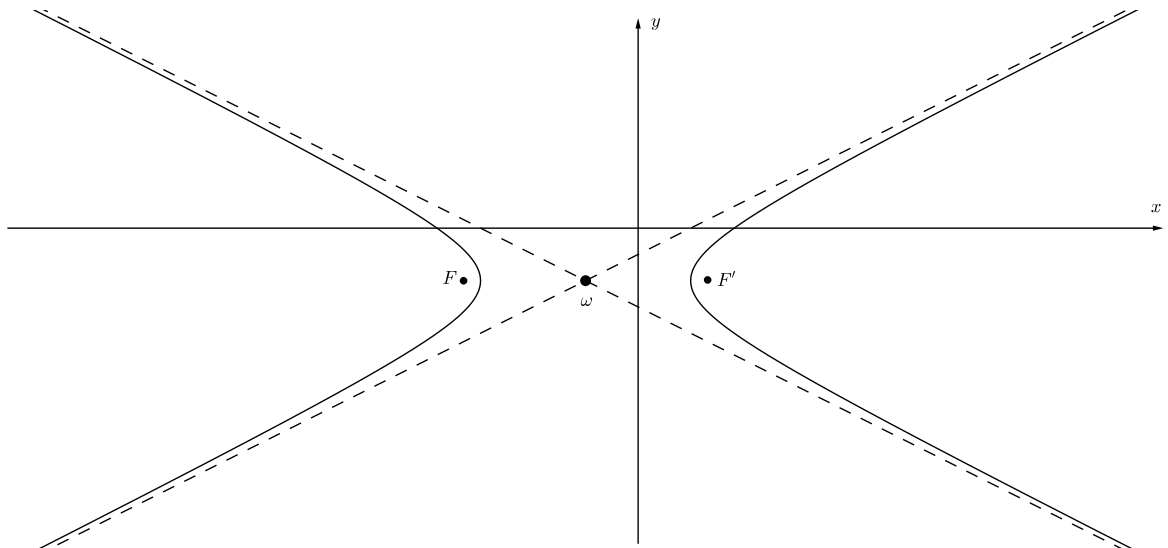
sous la forme plus simple à interpréter :

$$\frac{(x+1)^2}{4} - (y+1)^2 = 1.$$

Cette équation décrit l'hyperbole  $\mathcal{H}$  de centre  $\omega = (-1, -1)$ , de paramètres  $a = 2$ ,  $b = 1$  et de foyers  $F = (-1 - \sqrt{5}, -1)$  et  $F' = (-1 + \sqrt{5}, -1)$ .

2 - ii) Les deux asymptotes  $\Delta$  et  $\Delta'$  ont pour équations respectives :

$$Y = \frac{1}{2}(X - 1) \quad \text{et} \quad Y = -\frac{1}{2}(X + 3).$$



**Licence 3 - Mathématiques**  
**DS - 8 Mars 2018**  
**Géométrie 6**

---

$\mathcal{P}$  sera  $\mathbb{R}^2$  muni de son produit scalaire usuel  $\langle (x, y), (x', y') \rangle = xx' + yy'$ , de sa structure affine canonique et du repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  avec  $\vec{i} = (1, 0)$  et  $\vec{j} = (0, 1)$ .

**Exercice 1**

On note  $f$  l'application affine de  $\mathcal{P}$  dans lui-même qui à tout point  $M$  de coordonnées  $(x, y)$  associe le point  $M'$  de coordonnées  $(x', y')$  données par :

$$(1) \quad \begin{cases} x' = x - y + 1 \\ y' = x + y - 1. \end{cases}$$

1 - Montrer que  $f$  est une bijection du plan  $\mathcal{P}$  en donnant explicitement son application réciproque  $f^{-1}(x', y') = (x, y)$ .

2 - Montrer que  $f$  a un unique point fixe  $\omega$  qu'on déterminera.

3 - Montrer que  $f$  est la composée d'une rotation  $r$  centrée en  $O$  dont précisera l'angle  $\theta$ , d'une homothétie  $h$  centrée aussi en  $O$  dont on précisera le rapport  $k$  et d'une translation  $\tau$  dont on précisera le vecteur  $\vec{u}$ .

4 - On note  $\Delta$  la droite d'équation  $x = 1$ . Quelle est la figure  $\Delta'$  transformée de  $\Delta$  par l'application  $f$  ?

5 - Quelle est la figure  $\Gamma'$  transformée par l'application  $f$  du cercle  $\Gamma$  d'équation  $x^2 + y^2 = 2$  ?

**Exercice 2**

Soit  $ABCD$  un rectangle de longueur  $AB = CD = a$  et de largeur  $BC = DA = b$ . On note  $\sigma$  la réflexion d'axe la droite  $(AC)$  et on pose  $B' = \sigma(B)$  et  $D' = \sigma(D)$ .

1 - Quelle est la nature du quadrilatère  $AD'CB'$  ?

On note  $E$  l'intersection des droites  $(AB')$  et  $(CD)$  et  $F$  celle des droites  $(AB)$  et  $(CD')$ .

2 - Montrer que  $F$  est l'image de  $E$  par la réflexion  $\sigma$ .

3 - Montrer que le quadrilatère  $AECF$  est un losange.

4 - Calculer l'aire du losange  $AECF$  en fonction de  $a$  et  $b$ .

**Exercice 3**

Soient  $k$  un réel strictement positif et  $ABCD$  un quadrilatère convexe inscrit dans un cercle  $\Gamma$  de rayon  $\rho > 0$ . On note  $\mathcal{I}$  l'inversion de pôle  $A$  et de puissance  $k$  et  $B', C'$  et  $D'$  les inverses respectifs des points  $B, C$  et  $D$ .

1 - Montrer que les points  $B', C'$  et  $D'$  sont alignés et que  $C'$  appartient au segment  $[B'D']$ .

On note  $\Delta$  la droite portant les points  $B', C'$  et  $D'$ .

2 - Étudier, en fonction de  $k$  et  $\rho$ , le nombre de points d'intersection de  $\Delta$  avec le cercle  $\Gamma$ .

3 - En remarquant que  $B'D' = B'C' + C'D'$  et en appliquant la propriété étudiée en cours rappelée ci-dessous, établir l'égalité :  $AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD$ . C'est le *Théorème de Ptolémée*. (On fera le dessin sur lequel on raisonnera dans le cas où  $\Delta$  n'intersecte pas  $\Gamma$ .)

**Rappel de cours.** Soit  $\mathcal{I}$  une inversion de pôle  $O$  et de puissance  $k \neq 0$ . Pour tous points  $M$  et  $N$  distincts de  $O$ , d'inverses respectifs  $M'$  et  $N'$ , on a  $M'N' = \frac{|k|}{OM \cdot ON} MN$ .

---

## Corrigé

---

### Exercice 1

1 - Déterminer l'inverse  $f^{-1}$  de  $f$  revient à calculer les coordonnées  $(x, y)$  de  $M$  en fonction des coordonnées  $(x', y')$  de  $M'$ , c'est-à-dire résoudre le système linéaire :

$$\begin{cases} x - y + 1 = x' \\ x + y - 1 = y'. \end{cases}$$

Ce qui donne immédiatement :

$$(2) \quad \begin{cases} x = \frac{1}{2}x' + \frac{1}{2}y' \\ y = -\frac{1}{2}x' + \frac{1}{2}y' + 1. \end{cases}$$

2 - Les coordonnées  $(x_0, y_0)$  d'un point fixe  $\omega$  sont les solutions du système linéaire :

$$\begin{cases} x_0 - y_0 + 1 = x_0 \\ x_0 + y_0 - 1 = y_0 \end{cases}$$

c'est-à-dire (résolution immédiate)  $x_0 = 1$  et  $y_0 = 1$ . Comme elles sont uniques, le point fixe  $\omega = (1, 1)$  est unique.

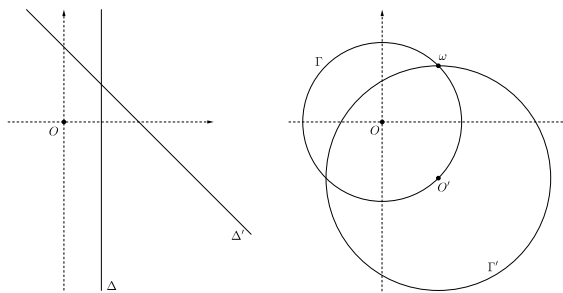
3 - Les relations (1) de l'énoncé peuvent s'écrire comme suit :

$$(3) \quad (x', y') = \sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y, \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y \right) + (1, -1).$$

On voit alors que le point  $M'$  s'obtient en appliquant successivement à  $M$  la rotation de centre  $O$  et d'angle  $\theta = \frac{\pi}{4}$ , l'homothétie de centre  $O$  et de rapport  $k = \sqrt{2}$  et la translation de vecteur  $\vec{u}$  de coordonnées  $(1, -1)$ .

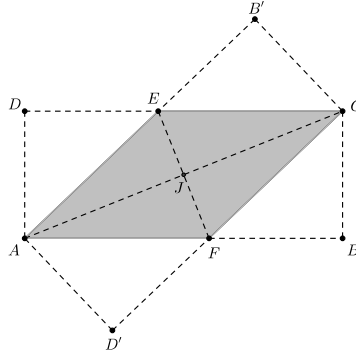
4 - Quand  $M$  décrit la droite  $\Delta$ , le point  $M'$  décrira une droite  $\Delta'$  car  $f$  est affine. Comme  $x = 1$  et que  $x = \frac{1}{2}(x' + y')$  (relations (2)), les coordonnées de  $M'$  vérifient  $\frac{1}{2}(x' + y') = 1$ , c'est-à-dire  $x' + y' = 2$ . C'est l'équation de la droite  $\Delta'$ .

5 - L'application affine  $f$  est une similitude de rapport  $k = \sqrt{2}$  ; elle envoie donc le cercle  $\Gamma$  de centre  $O$  et de rayon  $\rho = \sqrt{2}$  sur le cercle  $\Gamma'$  de centre  $O' = f(O) = (1, -1)$  et de rayon  $\rho' = \sqrt{2}\rho = 2$ .



## Exercice 2

1 - Le quadrilatère  $AD'CB'$  est l'image par la réflexion  $\sigma$  du rectangle  $ADCB$ . Comme  $\sigma$  est une isométrie,  $AD'CB'$  est aussi un rectangle.



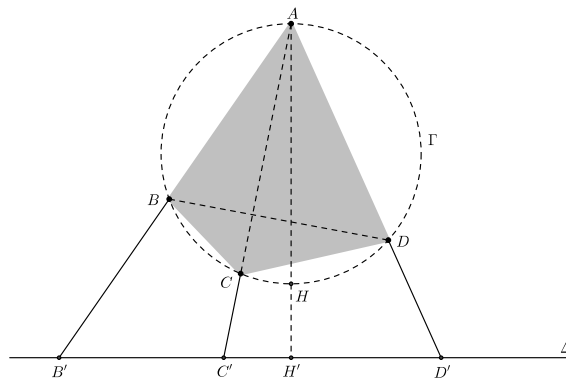
2 - On a  $\sigma(A) = A$ ,  $\sigma(C) = C$ ,  $\sigma(D) = D'$  et  $\sigma(B') = B$ . Donc  $\sigma((CD)) = (CD')$  et  $\sigma((AB')) = (AB)$  ; par suite  $\sigma(E) = \sigma((CD) \cap (AB')) = (CD') \cap (AB) = F$ .

3 - Soit  $J$  le point d'intersection des segments  $[AC]$  et  $[EF]$ . Comme les droites  $(EC)$  et  $(AF)$  sont parallèles et  $J$  milieu de  $[EF]$ , le segment  $[AF]$  est l'image de  $[CE]$  par l'homothétie de centre  $J$  et de rapport  $-1$  ; donc  $CE = AF$ . Le quadrilatère  $AECF$  a ses deux côtés opposés  $CE$  et  $AF$  parallèles et égaux ; c'est donc un parallélogramme ; comme en plus ses diagonales  $AC$  et  $EF$  sont perpendiculaires (car  $F$  est le symétrique de  $E$  par rapport à  $(AC)$ ), c'est en fait un losange.

4 - Notons  $\theta$  l'angle  $\widehat{JAF} = \widehat{BAC}$ . On a  $\frac{AJ}{AF} = \cos \theta = \frac{AB}{AC}$  ; d'où  $AF = \frac{AC}{AB} \cdot AJ = \frac{a^2+b^2}{2a}$ . Donc l'aire du losange  $AECF$  vaut  $AF \cdot AD = \frac{b}{2a}(a^2 + b^2)$ .

## Exercice 3

1 - Le pôle  $A$  de l'inversion  $\mathcal{I}$  est sur le cercle  $\Gamma$  ; donc l'inverse de  $\Gamma$  est une droite  $\Delta$  perpendiculaire au diamètre  $AH$  et passant par le point  $H'$ , inverse de  $H$ . Comme  $B$ ,  $C$  et  $D$  sont sur  $\Gamma$ , leurs inverses  $B'$ ,  $C'$  et  $D'$  sont sur la droite  $\Delta$  et donc alignés. En plus de cela  $C'$  est sur le segment  $[B'D']$  car inverse de  $C$  qui est sur l'arc  $BD$  (celui qui ne contient pas  $A$ ).



2 - C'est la position de  $H'$  sur la droite  $(AH)$  qui nous donnera les points d'intersection de  $\Gamma$  et  $\Delta$ . Comme  $H'$  est l'inverse de  $H$  on a  $AH \cdot AH' = k$  ; d'où  $AH' = \frac{k}{AH} = \frac{k}{2\rho}$ .

- Si  $k < 4\rho^2$ ,  $H'$  est à l'intérieur du segment  $[AH]$  et donc  $\Delta$  intersecte  $\Gamma$  en deux points.
- Si  $k = 4\rho^2$ ,  $H'$  est confondu avec  $H$  et donc  $\Delta$  est tangente à  $\Gamma$  en  $H$ .
- Si  $k > 4\rho^2$ ,  $H'$  est à l'extérieur du segment  $[AH]$  et donc  $\Delta$  n'intersecte pas  $\Gamma$ .

3 - Comme les points  $B'$ ,  $C'$  et  $D'$  sont alignés et  $C'$  entre  $B'$  et  $D'$  on a  $B'C' + C'D' = B'D'$ . D'autre part  $B' = \mathcal{I}(B)$ ,  $C' = \mathcal{I}(C)$  et  $D' = \mathcal{I}(D)$ , donc  $B'C' = \frac{kBC}{AB \cdot AC}$ ,  $C'D' = \frac{kCD}{AC \cdot AD}$  et  $B'D' = \frac{kBD}{AB \cdot AD}$ . En remplaçant ces quantités dans l'égalité  $B'C' + C'D' = B'D'$  on obtient  $k \left( \frac{BC}{AB \cdot AC} + \frac{CD}{AC \cdot AD} \right) = \frac{kBD}{AB \cdot AD}$  ; en simplifiant par  $k$  et en multipliant les deux membres par le produit  $AB \cdot AC \cdot AD$ , on obtient l'égalité cherchée :

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD.$$