INTRODUCCIÓN AL ANÁLISIS FUNCIONAL

INTRODUCCIÓN AL ANÁLISIS FUNCIONAL

AZIZ EL KACIMI ALAOUI
Catedrático de Geometría y Topología
URA al CNRS GAT 751, Lille I
LAMATH Universidad de Valenciennes
Valenciennes (Francia)

Edición coordinada por:
EDUARDO GALLEGO GÓMEZ
Profesor Titular de Geometría y Topología
Departamento de Matemáticas
Universidad Autónoma de Barcelona

EDITORIAL REVERTÉ, S.A.
Barcelona-Bogotá-Buenos Aires-Caracas-México

Propiedad de:
EDITORIAL REVERTÉ, S.A.
Loreto, 13-15, Local B
08029 Barcelona

Edición en español

Impreso en España - Printed in Spain

ISBN - 84 - 291 - 5161-3
Depósito Legal: B - 22258 - 1994

Impreso por LIBERGRAF
Constitución 19, interior (Can Batlló)
08014 BARCELONA

A la memoria de mi padre

PRÓLOGO

Los espacios de funciones $E = \mathcal{F}(X, \mathbb{K})$ (donde X es un conjunto y $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) juegan un papel fundamental en Matemáticas. Si el conjunto X es finito, el espacio E es de dimensión finita; por tanto, todas las topologías razonables (separadas y que hacen continuas las operaciones suma y producto por escalares) que podemos definir son iguales y cualquier operador sobre E es continuo. Así, en estos espacios podemos tomarnos la libertad de elegir la topología del modo más simple y manejable. Cuando X es infinito el espacio vectorial E puede ser "muy grande", y la situación se hace más compleja. El estudio de E se limitará, en general, al estudio de algún subespacio vectorial propio; en primer lugar esto es así porque no se necesitan todos los elementos de E y segundo porque no siempre es posible definir topologías útiles en todo E. Esto está íntimamente ligado a la naturaleza de X: en la práctica será un espacio topológico o un espacio de medida y las funciones que se consideren serán como mínimo continuas o medibles. Cuando X es numerable, el espacio E obtenido es el espacio de sucesiones (reales o complejas) y sabemos entonces que, dotado de la topología discreta, toda función (es decir, una sucesión) es continua. Pero incluso en este caso es necesario considerar sucesiones particulares para obtener espacios interesantes (por ejemplo, las sucesiones acotadas, nulas en el infinito , de potencia p sumable, etc.).

Cuando X no es numerable la situación es algo más complicada. En el mismo conjunto X ya necesitamos una estructura topológica suficientemente "buena". Afortunadamente la mayoría de los problemas hacen referencia a funciones (medibles, continuas, diferenciables o analíticas) en un abierto de $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{C}^n$. Esto permite definir toda una gama de espacios funcionales cuyas topologías son compatibles con la estructura vectorial, muchas de las cuales se definen mediante normas o métricas invariantes por traslación.

El estudio de estas cuestiones constituye el objeto del Análisis Funcional, que se ha convertido en un herramienta eficaz e imprescindible en la mayoría de las ramas de la Matemática. El objetivo de este curso es introducir al lector, de un modo bastante elemental, en este tema. Está destinado principalmente a los estudiantes de la Licenciatura de Matemáticas. El lector deseoso de ampliar sus conocimientos en esta área puede consultar la bibliografía que se da al final del texto.

En el capítulo 1 se repasan, en una primera etapa, las nociones elementales de topología (abierto, cerrado, métrica, espacio completo, compacto, etc.) y se abordan tres teoremas importantes: el *teorema del punto fijo* de una aplicación contractiva en un espacio métrico completo, el *teorema de Baire* y el *teorema de Ascoli*. En una segunda etapa se introduce la noción de espacio vectorial topológico poniendo especial énfasis en los ejemplos. Se ha incluido también la demostración del *teorema de Riesz* sobre la equivalencia de la dimensión finita y la compacidad local de un e.v.t. separado. Otra parte de este primer capítulo se consagra a recordar la teoría de la medida y de la integración con el propósito de poder introducir los espacios L^p, tan importantes en Análisis.

En el capítulo 2 se estudian las propiedades de las aplicaciones lineales continuas en espacios normados y se demuestran los teoremas principales: el *teorema de Banach*, el *teorema de Banach-Schauder* y el *teorema del gráfico cerrado*. El *teorema de Hahn-Banach* (de fundamental importancia) se presenta en dos formas: la geométrica y la analítica.

En el capítulo 3 se aborda la dualidad en espacios normados: estudio del dual topológico y sus diferentes topologías (débil, fuerte, etc.), topología debilitada sobre un espacio normado, reflexividad, trasposición, etc. También se da con todo detalle un ejemplo de espacio reflexivo.

El capítulo 4 se dedica a los espacios de Hilbert. Una vez introducidos los ingredientes esenciales, se prueban dos teoremas importantes: *proyección ortogonal* y *caracterización de las bases de Hilbert*.

En el capítulo 5 se estudian los operadores acotados sobre espacios normados, el espectro de un operador y los operadores compactos. También se demuestran algunos teoremas relativos a la naturaleza del espectro de un operador compacto así como a las propiedades de los operadores del tipo $I - T$ con T compacto.

Por último, el capítulo 6 precisa algunas propiedades de los operadores acotados que actúan sobre un espacio de Hilbert. Es remarcable el *teorema de descomposición espectral* de un operador hermítico compacto. Este teorema demuestra hasta qué punto dichos operadores se parecen a sus análogos en dimensión finita.

El texto termina con un apéndice en el que se tratan las soluciones de los diversos ejercicios propuestos en cada capítulo. Las indicaciones se detallan más o menos en función de la naturaleza y dificultad de cada problema.

Agradezco a mis alumnos de las promociones 1991–92 y 1992–93 de la Licenciatura de Matemáticas en la Universidad de Valenciennes por su ayuda en las labores de corrección de errores del texto original.

A. El Kacimi Alaoui

ÍNDICE ANALÍTICO

CAPÍTULO 1

ESPACIOS VECTORIALES TOPOLÓGICOS

1.1 REPASO DE TOPOLOGÍA

El objeto de esta sección es recordar algunas nociones elementales de topología (abierto, entorno, compacto, comparación de topologías, metrizabilidad, etc.). La mayoría de ellas se dan en cursos de Topología General o Análisis, por lo que nos limitaremos a enunciar las definiciones y propiedades principales.

1.1.1 Definición. *Sea X un conjunto no vacío. Una topología sobre X es un subconjunto $\mathcal{T}$ de $\mathcal{P}(X)$ (conjunto de partes de X) tal que*

i) $\emptyset \in \mathcal{T}$ y $X \in \mathcal{T}$,

ii) toda reunión de elementos de $\mathcal{T}$ es un elemento de $\mathcal{T}$,

iii) toda intersección finita de elementos de $\mathcal{T}$ es un elemento de $\mathcal{T}$.

El par $(X, \mathcal{T})$ se denomina *espacio topológico* y lo denotaremos simplemente por X cuando no haya riesgo de confusión.

Los elementos de $\mathcal{T}$ se llaman *abiertos* de X y el complementario (en X) de un abierto se denomina *cerrado.* Veremos más adelante que estas denominaciones están ampliamente justificadas, se harán más palpables en algunas topologías particulares (denominadas *metrizables*).

Definir una topología en X es dar una noción de proximidad y por tanto de entorno: diremos que V es un *entorno* de $x \in X$ si V contiene un abierto que a su vez contiene a x. Evidentemente toda parte de X que contiene un entorno de x es ella misma un entorno de x.

Sean $(X, \mathcal{T})$ e $(Y, \mathcal{S})$ espacios topológicos. Diremos que una aplicación $f : X \longrightarrow Y$ es *continua en el punto* $x \in X$ si para todo entorno V de $y = f(x)$ en Y existe un entorno U de x en X tal que $f(U) \subset V$. Diremos que f es *continua* en X si es continua en todo punto de X. Es sencillo verificar que f es continua si y sólo si la imagen recíproca por f de cualquier abierto de Y respecto a $\mathcal{S}$ es un abierto de X respecto a $\mathcal{T}$. Diremos que la aplicación f es *abierta* cuando la imagen directa de todo abierto de X es un abierto de Y. Si f es biyectiva, continua y abierta diremos que f es un *homeomorfismo* de X en Y.

Sea X un conjunto dotado de dos topologías $\mathcal{T}_1$ y $\mathcal{T}_2$. Diremos que $\mathcal{T}_1$ es *más fina* que $\mathcal{T}_2$ si satisface una de las siguientes condiciones equivalentes

i) $\mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}_1$,

ii) toda parte de X cerrada respecto a $\mathcal{T}_2$ es cerrada respecto a $\mathcal{T}_1$,

iii) la aplicación $id_X : (X, \mathcal{T}_1) \longrightarrow (X, \mathcal{T}_2)$ es continua.

Si $\{\mathcal{T}_i\}_{i\in I}$ es una familia de topologías de X entonces $\bigcap \mathcal{T}_i$ es una topología de X denominada *cota inferior* de la familia $\{\mathcal{T}_i\}_{i\in I}$; es menos fina que cualquier topología $\mathcal{T}_i$. Por otra parte, si $(\mathcal{S}_j)_{j\in J}$ es la familia de todas las topologías más finas que cualquiera de las $\mathcal{T}_i$ entonces la cota inferior de $(\mathcal{S}_j)_{j\in J}$ será por definición la *cota superior* de $(\mathcal{T}_i)_i$; es la menos fina de las topologías en X que son más finas que cualquier $\mathcal{T}_i$.

Sea $\mathcal{B}$ una parte no vacía de $\mathcal{P}(X)$. La cota inferior de todas las topologías sobre X que contengan a $\mathcal{B}$ es la *topología engendrada* por $\mathcal{B}$.

Pongamos $Z = X \times Y$ y $\mathcal{W} = \{U \times V \mid U \in \mathcal{T}, V \in \mathcal{S}\}$. Entonces $\mathcal{W}$ engendra una topología sobre Z denominada *topología producto* de $\mathcal{T}$ y $\mathcal{S}$. La misma construcción se generaliza al producto cartesiano de un número finito de espacios topológicos $(X_i, \mathcal{T}_i)_{1\leq i\leq n}$.

1.1.2 Ejemplos. i) Pongamos $\mathcal{T}_0 = \{\emptyset, X\}$, esta familia de partes de X constituye una topología sobre X. Es la menos fina que se puede definir. Aquí la noción de proximidad no tiene sentido: un punto cualquiera de X tiene un único entorno. Esta topología se denomina *grosera* y raras veces se utiliza.

ii) Si al contrario que en el ejemplo precedente ponemos $\mathcal{T}_1 = \mathcal{P}(X)$ se obtiene la topología más fina sobre X, denominada *topología discreta.* ¡Ésta es demasiado fuerte para resultar útil! Es necesario buscar topologías intermedias.

iii) La *topología usual* (pues es la que se utiliza cuando no se especifica nada más) sobre el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ es la topología engendrada por los intervalos abiertos.

Las topologías más interesantes vienen dadas a través de métricas y prácticamente serán las únicas que nos interesarán.

Sean $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y A una parte de X. Se llama

- *adherencia* de A en X al cerrado más pequeño, denotado por $\overline{A}$, de X que contiene A. Evidentemente A es cerrado si y sólo si $A = \overline{A}$. Si $\overline{A} = X$ diremos que A es *denso* en X.
- *interior* de A al abierto más grande contenido en A.

Diremos que un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ es *separado* si para cualesquiera x e y de X distintos existen entornos U_x de x y U_y de y tales que $U_x \cap U_y = \emptyset$.

Diremos que X es *compacto* si es separado y si de todo recubrimiento abierto $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ (es decir, todo U_i es abierto y $X = \cup U_i$) se puede extraer un número finito de abiertos $(U_i)_{1 \leq i \leq p}$ que recubren aún a X. El espacio X es *localmente compacto* si todo punto $x \in X$ admite un entorno compacto.

Sea $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación continua entre espacios topológicos separados y A una parte de X entonces

– *si A es compacto, $f(A)$ es también compacto en Y.*

– *si f es exhaustiva y A es denso, entonces $f(A)$ es también denso en Y.*

Toda función continua $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ definida en un espacio topológico compacto X es acotada y alcanza sus cotas inferior y superior en puntos de X. Es decir, existen $x_0, x_1 \in X$ tales que

$$f(x_0) = \inf_{x \in X} f(x) \text{ y } f(x_1) = \sup_{x \in X} f(x)$$

1.1.3 Definición. *Se llama métrica o distancia en X a toda aplicación $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ que satisface las propiedades siguientes*

i) $d(x, y) = d(y, x)$ (simetría),

ii) $d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$ (separación),

iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (desigualdad triangular).

El par (X, d) se denomina *espacio métrico.*

1.1.4 Ejemplos.

i) Dados $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots y_n)$ de $\mathbb{R}^n$ consideramos

$$d(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|.$$

Se verifica fácilmente que la aplicación d así definida constituye una distancia en $\mathbb{R}^n$.

ii) Sea X un conjunto, si definimos δ por

$$\delta(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ 1 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

obtenemos una distancia en X, que se denomina *métrica discreta* de X. La topología obtenida es la del ejemplo 1.1.2 ii).

iii) Consideremos el espacio $\mathcal{B}([0,1])$ de las funciones reales y acotadas en el intervalo $[0,1]$ (una función f es *acotada* si existe una constante positiva M tal que para cada $x \in [0,1]$ se cumple $|f(x)| \leq M$). Si $f, g \in \mathcal{B}([0,1])$ ponemos

$$d_\infty(f,g) = \sup_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)|$$

Se define así en el espacio $\mathcal{B}([0,1])$ una distancia denominada de la *convergencia uniforme*. Esta distancia es de gran interés en Análisis. A lo largo del curso tendremos ocasión de tratar otros ejemplos.

Sea (X,d) un espacio métrico. Diremos *bola abierta* (respectivamente *bola cerrada*) de centro $x \in X$ y radio $r \in \mathbb{R}_+$ al conjunto de los $y \in X$ cuya distancia a x es estrictamente inferior (respectivamente inferior o igual) a r. Diremos que U es un *abierto* de X si para todo punto $x \in X$ existe un número real $r > 0$ tal que la bola abierta $B(x,r)$ de centro x y radio r está contenida en U. Se verifica fácilmente que los abiertos de X forman una topología de X: es la topología asociada a la métrica d. En general, una topología sobre un conjunto no viene definida por una métrica, es lo que ocurre en el ejemplo 1.1.2 i).

Obsérvese que un espacio métrico (X,d) es siempre separado. En efecto, si $x, y \in X$ son puntos distintos, su distancia η es estrictamente positiva y las bolas abiertas $B(x, \frac{\eta}{3})$ y $B(y, \frac{\eta}{3})$ son entornos de x e y sin puntos comunes.

Un espacio métrico es *separable* si contiene una parte densa y numerable.

Si dos métricas d_1 y d_2 definen la misma topología en X diremos que son *equivalentes*. En particular esto es así cuando d_1 y d_2 son *cuasi isométricas*, es decir, si existe una constante real $k \geq 1$ tal que

$$\frac{1}{k} d_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq k d_1(x,y) \quad \forall x, y \in X \tag{1.1}$$

Sean (X,d) e (Y,δ) dos espacios métricos y $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación. Diremos que f es

– *uniformemente continua* si

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \eta > 0\ \forall x, x' \in X\ :\ d(x,x') < \eta \Longrightarrow \delta(f(x), f(x')) < \epsilon$$

– *lipschitziana de razón* $k > 0$ si

$$\delta(f(x), f(y)) \leq k d(x,y) \quad \forall x, y \in X \tag{1.2}$$

Cuando $k \in (0,1)$ diremos que f es *contractiva*.

Es evidente que una aplicación lipschitziana es uniformemente continua y que una aplicación uniformemente continua es continua. Los recíprocos son falsos en general, de todos modos si X es compacto entonces toda aplicación continua f es uniformemente continua, pero f uniformemente continua no siempre implica lipschitzianna, sea el espacio X compacto o no (véase el ejercicio 1.D).

Dos métricas d_1 y d_2 en X son *uniformemente equivalentes* si las aplicaciones

$$id_X : (X, d_1) \longrightarrow (X, d_2) \;\text{ e }\; id_X : (X, d_2) \longrightarrow (X, d_1)$$

son uniformemente continuas.

Sea $(x_n)_n$ una sucesión en X. Diremos que $(x_n)_n$ es *convergente* si existe un $x \in X$ tal que

$$(1.3) \qquad \forall \epsilon > 0, \;\; \exists N \in \mathbb{N} \;\; : \;\; n \geq N \Longrightarrow d(x_n, x) < \epsilon$$

Cuando tal punto existe, es único y se dice que es el *límite* de $(x_n)_n$. Dicho de otro modo, cuanto más grande es n más cercano está el elemento x_n de x. Diremos que $(x_n)_n$ es de Cauchy si

$$(1.4) \qquad \forall \epsilon > 0, \;\; \exists N \in \mathbb{N} \;\; : \;\; n, p \geq N \Longrightarrow d(x_n, x_p) < \epsilon$$

Si d_1 y d_2 son dos métricas equivalentes (resp. uniformemente equivalentes) entonces toda sucesión convergente (resp. de Cauchy) para d_1 es convergente (resp. de Cauchy) para d_2 y viceversa.

Es evidente que una sucesión convergente es de Cauchy, pero el recíproco es falso; veamos como prueba el ejemplo siguiente: sea $X = (0, +\infty)$ y $d(x, y) = |x - y|$, la sucesión $x_n = \frac{1}{n}$ es de Cauchy pero no converge en X ya que $0 \notin X$, ¡hubiera sido necesario añadir el 0 al espacio X! Diremos que un espacio métrico (X, d) es *completo* si toda sucesión de Cauchy en X es convergente. Por ejemplo, el conjunto de números reales $\mathbb{R}$ es un espacio métrico completo, ¡ha sido construido para que así sea y todo el Análisis reposa prácticamente en este hecho!

Una parte A de un espacio métrico (X, d) se denomina *completa* si el espacio métrico (A, d) (restringimos la métrica d a la parte A) es completo. Toda parte completa de X es cerrada; sin embargo, una parte cerrada no es siempre completa excepto si el espacio X es completo. Tenemos el importante resultado siguiente:

Sea (X, d) un espacio métrico, entonces existe un espacio métrico completo $(\widehat{X}, \widehat{d})$ y una inyección isométrica (es decir una inyección que conserva las distancias) $j : X \hookrightarrow \widehat{X}$ con imagen densa.

En otras palabras, todo espacio métrico puede considerarse como una parte densa de un espacio métrico completo. Diremos que $(\widehat{X}, \widehat{d})$ es el *completado* de (X, d). Por ejemplo, el cuerpo de los números racionales $\mathbb{Q}$ con la métrica $d(x, y) = |x - y|$ no es completo y su completado se identifica de modo natural con $\mathbb{R}$ dotado de la misma distancia d.

Un espacio métrico compacto es completo, el recíproco es falso. Un ejemplo fundamental de espacio métrico completo es el siguiente: sea K un espacio métrico compacto y denotemos por $E = \mathcal{C}(K, \mathbb{R})$ el espacio de las funciones continuas con la métrica

$$d_\infty(f, g) = \sup_{x \in K} |f(x) - g(x)|,$$

(hemos tratado ya esta distancia en el ejemplo 1.1.4. iii)). Es bien conocido que si f_n es una sucesión de Cauchy en E entonces f_n converge a una función continua f, es decir (E, d) es completo.

Este importante ejemplo nos permite construir de manera fácil el completado $(\widehat{X}, \widehat{d})$ de cualquier espacio métrico (X, d) de *diámetro finito* (se llama *diámetro* de un espacio métrico (X, d) al número finito o infinito $\delta(X) = \sup_{x,y \in X} d(x, y)$): sea $j : X \longrightarrow E$ la aplicación que a todo $a \in X$ asocia la función continua f_a definda por $f_a(x) = d(x, a)$. Es fácil comprobar que j:

– es inyectiva,

– es una isometría (es decir, $d_\infty(f_a, f_b) = d(a, b)$).

El completado de (X, d) se identifica entonces de manera natural con la adherencia $\widehat{X} = \overline{j(X)}$ de la imagen de j que es completa por ser parte cerrada de un espacio completo.

Si el diámetro de E no es finito respecto a d reemplazamos esta métrica por otra uniformemente equivalente, por ejemplo $\inf(1, d)$ o $\frac{d}{1+d}$ (véase el ejercicio 1.B).

Supongamos ahora que A es una parte densa de un espacio métrico (X, d) y $f : A \longrightarrow Y$ una aplicación uniformemente continua definida sobre A con Y completo. *Entonces f se prolonga a una aplicación $\overline{f}$ uniformemente continua de X en Y.*

Terminaremos con dos propiedades remarcables de los espacios métricos completos enunciadas en los teoremas que siguen.

1.1.5 Teorema del punto fijo. *Sean (X, d) un espacio métrico completo y $f : X \longrightarrow X$ una aplicación contractiva (existe $k \in (0,1)$ tal que $d(f(x), f(y)) \leq kd(x,y)$, $\forall x, y \in X$). Entonces f admite un único punto fijo, es decir, existe un único $a \in X$ tal que $f(a) = a$.*

Demostración. Sea $x \in E$ un punto cualquiera. Definimos $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ como sigue

$$x_0 = x \quad \text{y} \quad x_n = f(x_{n-1}) \quad \text{cuando} \quad n \geq 1.$$

Para todo $n \in \mathbb{N}$ tenemos

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, x_n) &\leq kd(x_n, x_{n-1}) \\ &\leq k^2 d(x_{n-1}, x_{n-2}) \\ &\leq \dots \\ &\leq k^n d(x_1, x_0). \end{aligned}$$

Si n y p son enteros tales que $n \geq p \geq 0$ se tiene que

$$\begin{aligned} d(x_n, x_p) &\leq d(x_n, x_{n-1}) + d(x_{n-1}, x_{n-2}) + \dots + d(x_{p+1}, x_p) \\ &\leq \left(k^{n-1} + k^{n-2} + \dots + k^p\right) d(x_1, x_0) \\ &\leq \frac{k^p}{1-k} d(x_1, x_0). \end{aligned}$$

Como $k \in (0,1)$, k^p tiende a 0 cuando p tiende a infinito, por tanto $(x_n)_n$ es una sucesión de Cauchy en E que es completo; entónces converge hacia un punto a. Se tiene

$$a = \lim_{n \to +\infty} x_n = \lim_{n \to +\infty} x_{n+1} = \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = f(\lim_{n \to +\infty} x_n) = f(a),$$

es decir, a es un punto fijo de f. Demostremos que dicho punto es único. Para ello supongamos la existencia de otro punto fijo b diferente de a. Tendremos entonces

$$\begin{aligned} d(a, b) &= d(f(a), f(b)) \\ &\leq kd(a, b). \end{aligned}$$

Como $a \neq b$, $d(a,b) > 0$, de donde $k \geq 1$, lo cual contradice que $k \in (0,1)$. La unicidad de a demuestra también que dicho punto es independiente de la elección del x que ha permitido construirlo. $\square$

1.1.6 Teorema de Baire. *Sea (X,d) un espacio métrico completo. Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ es una sucesión de partes cerradas de X con interior vacío entonces la unión A de las A_n tiene también interior vacío.*

Demostración. Es necesario demostrar que A no contiene bola alguna. Sea $x \in X$ y $B = B_0$ una bola abierta centrada en x. Al ser la parte A_1 de interior vacío, el abierto $B \cap A_1^c$ (donde E^c denota el complementario de E en X) contiene la adherencia de una bola B_1 centrada en un punto x_1 y de radio ≤ 1. Igualmente $B_1 \cap A_2^c$ contiene la adherencia de una bola B_2 centrada en un punto x_2 y de radio $\leq \frac{1}{2}$. De este modo construimos una sucesión de bolas $B_n = B(x_n, r_n)$ con $r_n \leq \frac{1}{2^n}$ tales que para todo $n \geq 1$

$$\overline{B_n} \subset B_{n-1} \cap A_n^c.$$

La sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ de centros de las bolas es una sucesión de Cauchy en X. Por tanto converge en un punto $a \in X$ que pertenece a la intersección de las adherencias de todas las bolas B_n, así pues $a \in \cap_n A_n^c$ y por consiguiente $a \notin \cup_n A_n$. Pero $a \in B$, luego $\cup_n A_n$ no puede contener B. Hemos demostrado que ninguna bola puede estar contenida en A y por tanto que la unión A no tiene interior. $\square$

Sean ahora $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y (E,d) un espacio métrico. Diremos que una familia $\mathcal{F}$ de aplicaciones de X en E es *equicontinua en el punto* $x \in X$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe un entorno U de x en X tal que

$$y \in U \Longrightarrow \sup_{f\in\mathcal{F}} d(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Diremos que $\mathcal{F}$ es *equicontinua* si es equicontinua en todo punto $x \in X$.

Denotemos por $C(X,E)$ el conjunto de las aplicaciones continuas de X en E. Vamos a definir sobre $C(X,E)$ una topología de gran importancia en Análisis. Sea K un compacto de X y U un abierto de E. Ponemos

$$O(K,U) = \{f \in C(X,E) \mid f(K) \subset U\}$$

y denotamos por $\mathcal{K}_0$ el conjunto de los $O(K,U)$ cuando K varía en el conjunto de compactos de X y U en el de abiertos de E. La topología $\mathcal{K}$ engendrada por la familia $\mathcal{K}_0$ se denomina *topología de la convergencia compacta* en $C(X,E)$. Esto significa que una sucesión f_n en $C(X,E)$ converge a $f \in C(X,E)$ según $\mathcal{K}$ si y sólo si para todo compacto K la sucesión obtenida al restringir cada f_n a K converge uniformemente a la restricción de f en ese compacto. Tenemos entonces el importante resultado siguiente que enunciaremos sin demostración (véase Schwartz (1970), por ejemplo).

1.1.7 Teorema de Ascoli. *Sea $\mathcal{F}$ una parte de $C(X, E)$. Para que $\mathcal{F}$ sea relativamente compacta (es decir, su adherencia es compacta) respecto a la topología $\mathcal{K}$ es suficiente que*

i) sea equicontinua,
ii) para todo $x \in X$ el conjunto $\{f(x) \mid f \in \mathcal{F}\}$ sea relativamente compacto en E.

Si X es localmente compacto las dos condiciones anteriores son también necesarias.

1.2 ESPACIOS VECTORIALES TOPOLÓGICOS

En un espacio vectorial a veces es necesaria una noción de proximidad. Para tenerla es necesario definir una topología y en este caso preferiremos aquellas que se comporten bien con la estructura lineal y afín del espacio. De modo más preciso sea E un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ dotado de una topología $\mathcal{T}$ (el cuerpo $\mathbb{K}$ que será siempre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ se considerará con la topología habitual).

1.2.1 Definición. *Diremos que $(E, \mathcal{T})$ es un espacio vectorial topológico (e.v.t., para abreviar) si las aplicaciones naturales*

i) $(x, y) \in E \times E \longrightarrow x + y \in E$
ii) $(\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E \longrightarrow \lambda x \in E$

son continuas (considerando en los conjuntos $E \times E$ y $\mathbb{K} \times E$ las topologías producto respectivas).

De esta definición obtenemos las siguientes consecuencias inmediatas

i) Para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ la aplicación lineal $x \in E \longrightarrow \lambda x \in E$ es continua y por tanto la aplicación $(x, y) \in E \times E \longrightarrow x - y \in E$ es continua.
ii) Si $a \in E$ y U es un abierto de E entonces $a + U$ y λU (con $\lambda \in \mathbb{K}^*$) son abiertos de E.
iii) Si $f : E \longrightarrow F$ es una aplicación lineal de E en un e.v.t. F entonces f es continua en E si y sólo si es continua en el origen.

La propiedad ii) significa en particular que, salvo una traslación adecuada, puede considerarse que los abiertos contienen el origen 0. Esto permite transportar a un entorno de 0 el estudio de muchas propiedades de E. Un entorno U de 0 se llama *equilibrado* si para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ con $|\lambda| \leq 1$ se tiene que $\lambda U \subset U$. *En un e.v.t. todo entorno V de 0 contiene un entorno equilibrado*: en efecto, al ser la aplicación $(\lambda, x) \longrightarrow \lambda x$ continua existe un $\varepsilon > 0$ y un abierto W que contienen 0 tales que para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ con $|\lambda| \leq \varepsilon$

se tenga $\lambda W \subset V$. Entonces el conjunto

$$U = \bigcup_{|\lambda| \leq \varepsilon} \lambda W$$

es un abierto equilibrado contenido en V.

El producto cartesiano de dos e.v.t. con la topología producto es un e.v.t.

Una propiedad importante de los e.v.t. (que nos resulta habitual en los espacios numéricos $\mathbb{K}^n$) dice que dado un entorno U de 0 en E entonces cualquier compacto del espacio E puede recubrirse por una imagen homotética de U. Más concretamente tenemos la siguiente proposición.

1.2.2 Proposición. *Sean E un e.v.t., U un entorno abierto equilibrado (esto no es una restricción) de 0 y C un compacto. Entonces existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $C \subset \lambda U$.*

Demostración. Supongamos que la proposición es falsa. Entonces existe una sucesión de números $(\lambda_n)_n$ con $(|\lambda_n|)_n$ creciente y tendiendo a infinito tal que ningún $\lambda_n U$ contiene C, es decir $C \setminus \lambda_n U$ es no vacío. Por otra parte $C \setminus \lambda_n U$ es compacto, como la sucesión (de compactos) $(C \setminus \lambda_n U)_n$ es decreciente (pues $(\lambda_n U)_n$ es creciente) la intersección

$$\bigcap_n (C \setminus \lambda_n U)$$

es no vacía. Lo cual es un absurdo, pues esta intersección es igual a $C \setminus E$ que es vacía. La proposición queda así demostrada. □

Con ayuda de esta proposición se puede demostrar el famoso teorema de Riesz.

1.2.3 Teorema de Riesz. *Si E es un e.v.t. separado y localmente compacto entonces es de dimensión finita.*

Demostración. Como E es localmente compacto el 0 admite un entorno abierto U equilibrado y *relativamente compacto* (la adherencia $\overline{U}$ es compacta). Consideremos el recubrimiento de la adherencia $\overline{U}$ dado por los abiertos $(U_x)_{x \in U}$ de la forma $x + \frac{1}{2}U$. De este recubrimiento podemos extraer un recubrimiento finito $(U_{x_i})_{1 \leq i \leq k}$ pues $\overline{U}$ es compacto. Los vectores $(x_i)_{1 \leq i \leq k}$ generan un subespacio vectorial F de dimensión finita $\leq k$. Entonces

$- U \subset F + \frac{1}{2}U$ de manera evidente, por otra parte
$- U \subset F + \frac{1}{2}U \subset F + \frac{1}{2}(F + \frac{1}{2}U) = F + \frac{1}{2^2}U$;
repitiendo el proceso obtenemos en general que para todo entero n

$$U \subset F + \frac{1}{2^n}U. \tag{1.5}$$

Probaremos que $E = F$. Sean $x \in U$, V un entorno abierto cualquiera de x y $V_0 = \{z \in E \mid z = y - x \text{ con } y \in V\}$. Como $\overline{U}$ es compacto, por la proposición 1.2.2. existe un entero n tal que $\frac{1}{2^n}\overline{U} \subset V_0$, por consiguiente $x + \frac{1}{2^n}\overline{U} \subset x + V_0$. Por otra parte, según (1.5)

$$F \cap \left(x + \frac{1}{2^n}U\right) \neq \emptyset$$

Por tanto $V \cap F \neq \emptyset$, entonces $x \in \overline{F}$, pero como F es cerrado (por ser de dimensión finita en un e.v.t. separado) $x \in F$ y $U \subset F$, al ser F un subespacio vectorial, para cualquier $\lambda \in \mathbb{K}$ resulta que $\lambda U \subset F$. Por consiguiente

$$E = \bigcup_{\lambda \in \mathbb{K}} \lambda U \subset F.$$

Deducimos entonces que $E = F$ y el teorema queda demostrado. □

Los ejemplos de e.v.t. son muy diversos, nos limitaremos a aquellos cuya topología viene definida por una sucesión de seminormas, por una norma o por un producto escalar. El objetivo de las secciones siguientes es estudiar este tipo de ejemplos. El último, que es bastante particular, tendrá derecho a un capítulo propio que desarrollaremos posteriormente.

1.3 E.V.T. LOCALMENTE CONVEXOS

En lo que sigue, sea E un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

1.3.1 Definición. Llamamos seminorma sobre E a cualquier aplicación p de E con valores en $\mathbb{R}_+$ y tal que

i) $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$, $\forall x \in E$ y $\forall \lambda \in \mathbb{K}$,
ii) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$, $\forall x, y \in E$.

Si además $p(x) = 0$ implica $x = 0$ para cualquier $x \in E$ diremos que p es una norma sobre E.

Sea $x \in E$ y r un número real positivo. El subconjunto

$$B(x,r) = \{y \in E \mid p(x-y) < r\}$$

de E se denomina *p-bola abierta* de centro x y radio r. Se verifica fácilmente que toda p-bola es *convexa* (véase 3.3 para la definición).

Sea $\mathcal{P} = (p_i)_{i \in I}$ una familia de seminormas en E. Supondremos que para toda parte finita $J \subset I$, $\sup_{j \in J} p_j \in \mathcal{P}$ (diremos que $\mathcal{P}$ es *estable por envolvente superior finita*). Este es el caso cuando $\mathcal{P}$ es una sucesión creciente de seminormas sobre E. Sea $\mathcal{T}$ el conjunto de las partes U de E verificando la propiedad

$$(P) \qquad \forall x \in U \ \ \exists i \in I, \ \ \exists r > 0 \ \ : \ \ B_{p_i}(x,r) \subset U$$

1.3.2 Teorema. *$(E, \mathcal{T})$ es un espacio vectorial topológico.*

Demostración. Empecemos demostrando que $\mathcal{T}$ es una topología sobre E. Es inmediato que $\emptyset, E \in \mathcal{T}$ y que toda reunión de elementos de $\mathcal{T}$ es un elemento de $\mathcal{T}$. Sea $(U_k)_{k=1,\dots,n}$ una familia finita de elementos de $\mathcal{T}$, pongamos $U = \cap_k U_k$ y consideremos un punto $x \in U$, entonces para todo $k \in \{1, \dots, n\}$ existe un $i_k \in I$ y un $r_k > 0$ tales que $B_{p_{i_k}}(x, r_k) \subset U$. Pongamos $p = \max_k p_{i_k}$ y $r = \inf_k r_k$, resulta evidente que la p-bola $B_p(x,r)$ está contenida en U. Esto prueba que $U \in \mathcal{T}$ y $\mathcal{T}$ es una topología sobre E.

Queda por demostrar que para esta topología las aplicaciones

$$(x,y) \in E^2 \xrightarrow{s} x + y \in E$$

y

$$(\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E \xrightarrow{m} \lambda x \in E$$

son continuas. Sea U un abierto de E para la topología $\mathcal{T}$, consideremos un elemento $(x,y) \in E^2$ tal que $z = x + y \in U$. Sabemos que existen $i \in I$ y $r > 0$ tales que

$$B_{p_i}(z,r) \subset U.$$

Se verifica fácilmente que $B_{p_i}(x, \frac{r}{3}) \times B_{p_i}(y, \frac{r}{3})$ está contenido en $s^{-1}(U)$. Esto prueba que $s^{-1}(U)$ es un abierto de $E \times E$ (para la topología producto).

Sea ahora $(\lambda, x) \in m^{-1}(U)$ y pongamos $z = \lambda x$. Existen $i \in I$, y $r > 0$ tales que

$$B_{p_i}(x,r) \subset U.$$

Queremos demostrar la existencia de $j \in I$, $\rho > 0$ y $\alpha > 0$ tales que

$$m\left(D(\lambda, \alpha) \times B_{p_j}(x, \rho)\right) \subset U,$$

donde $D(\lambda, \alpha)$ es la bola abierta de $\mathbb{K}$ con radio α y centro λ. Es sencillo comprobar que $j = i$, $\alpha < \dfrac{r}{2p_i(x)}$ y $\rho = \dfrac{r}{2(|\lambda| + \alpha)}$ son los adecuados. $\square$

Un e.v.t. cuya topología venga definida por una familia $\mathcal{P}$ de seminormas estable por envolvente superior finita se denomina *localmente convexo.* Esta denominación viene justificada por el hecho que todo punto admite un entorno convexo para cualquier p-bola abierta centrada en dicho punto con $p \in \mathcal{P}$. Estos espacios se denotarán $(E, \mathcal{P})$. Cuando la familia $\mathcal{P}$ se reduce a una seminorma p diremos que (E, p) es un e.v.t. *seminormado*, desgraciadamente estos espacios no son nunca separados si la seminorma p no es una norma.

Diremos que una familia $\mathcal{P}$ de seminormas sobre E es *separante* si

$$(p(x) = 0 \quad \forall p \in \mathcal{P}) \Longrightarrow x = 0.$$

En este caso el e.v.t. E es separado.

La proposición siguiente es fácil de probar y muestra el interés práctico de las seminormas en un e.v.t. localmente convexo.

1.3.3 Proposición. *Sea E un e.v.t. localmente convexo cuya topología viene definida por una familia separante de seminormas $\mathcal{P} = (p_i)_{i \in I}$ estable por envolvente superior finita. Una sucesión $(x_n)_n$ de E converge hacia 0 si y sólo si para todo $i \in I$, $p_i(x)$ tiende hacia 0.*

En lo que sigue los e.v.t. localmente convexos que consideraremos tendrán la topología definida por una sucesión separante y creciente (por tanto estable por envolvente superior finita) de seminormas.

Sea (E, p_n) uno de estos espacios. Entonces existe en E una distancia d que define su topología. Basta poner

$$d(x, y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \inf(1, p_n(x - y))$$

o bien

$$d(x, y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \frac{p_n(x - y)}{1 + p_n(x - y)}.$$

Estas dos distancias son invariantes por traslación, es decir,

$$\forall x, y, a \in E \quad d(x+a, y+a) = d(x, y).$$

Diremos que E es un *e.v.t. localmente convexo metrizable*. Llamamos *espacio de Fréchet* a todo e.v.t. localmente convexo metrizable completo.

1.3.4 Definición. *Un e.v.t. E se llama espacio normado si su topología está definida por la distancia d asociada a una norma $\| \ \|$, es decir $d(x,y) = \|x-y\|$. Un espacio de Banach es un espacio normado completo.*

Todo espacio de Banach es un espacio de Fréchet. El producto cartesiano de un número finito de espacios de Fréchet (resp. de Banach) dotado de la topología producto es un espacio de Fréchet (resp. de Banach).

Sea E un e.v.t. metrizable (por una métrica d invariante por traslación) que fijaremos para el resto de la sección. Notemos por $\widehat{E}$ su completado como espacio métrico. Entonces si

- E es localmente convexo, $\widehat{E}$ es también localmente convexo y por tanto un espacio de Fréchet,
- E es normado entonces $\widehat{E}$ es también normado luego espacio de Banach.

Si V es un subespacio vectorial de E, entonces V con la topología inducida es un e.v.t. Su adherencia $\overline{V}$ es un subespacio vectorial topológico de E. Si E es de Fréchet entonces todo subespacio vectorial cerrado de E es también de Fréchet.

Si A es una parte de E, la intersección de todos los subespacios vectoriales cerrados que contienen A es un subespacio vectorial cerrado denominado *subespacio vectorial topológico engendrado* por A.

El espacio E/V está dotado de una estructura de espacio vectorial topológico: por definición un abierto de E/V es la imagen directa por la proyección canónica $\pi : E \longrightarrow E/V$ de un abierto de E. Es la topología más fina sobre E/V para la cual la aplicación π es continua.

1.3.5 Proposición. *Supongamos V cerrado. Entonces*

i) el e.v.t. E/V es metrizable,
ii) si E es localmente convexo, E/V es localmente convexo,
iii) si E es normado, E/V es normado,
iv) si E es completo, E/V es completo.

Demostración. i) Sean $X, Y \in E/V$, entonces X e Y son dos clases de equivalencia módulo V en E. Ponemos

$$\overline{d}(X,Y) = \inf_{x \in X, y \in Y} d(x,y) \tag{1.6}$$

que es una distancia en E/V. En efecto, $\overline{d}$ se escribe también

$$\overline{d}(X,Y) = \inf_{v \in V} d(x, y+v),$$

es decir, $\overline{d}(X,Y)$ es la distancia de Y a cualquier punto x de X. Esto permite demostrar de manera casi inmediata que $\overline{d}$ verifica los axiomas de una distancia invariante por traslación. Se verifica fácilmente que $\overline{d}$ define la topología de e.v.t. sobre E/V que acabamos de considerar.

ii) Sea $(p_n)_n$ una sucesión creciente de seminormas que definen la topología de E, entonces

$$\overline{p}_n(X) = \inf_{x \in X} p_n(x) \tag{1.7}$$

es una sucesión creciente de seminormas que definen la topología de E/V.

iii) Sea $\| \ \|$ la norma sobre E. Para definir una norma en E/V basta poner

$$\|X\| = \inf_{x \in X} \|x\|. \tag{1.8}$$

iv) Demostraremos este punto cuando E es normado, el caso métrico no normado se trata de la misma manera. Sea $(X_m)_m$ una sucesión de Cauchy en E/V. Podemos extraer una sucesión $(X_{m_k})_k$ tal que

$$\|X_{m_k} - X_{m_{k+1}}\| < \frac{1}{2^k}.$$

Utilizando la definición de la norma $\| \ \|$ en E/V a partir de la $\| \ \|$ sobre E podemos encontrar en cada X_{m_k} un elemento x_k tal que

$$\|x_k - x_{k+1}\| < \frac{1}{2^k}.$$

Esto prueba que $(x_k)_k$ es una sucesión de Cauchy en E, luego converge hacia un elemento x. Pongamos $X = \pi(x)$. Como $\|X_{m_k} - X\| \leq \|x_k - x\|$ la sucesión X_{n_k} converge hacia X. Por consiguiente $(X_m)_m$ converge hacia X en E/V, es decir, E/V es completo. □

Vamos a recordar ahora algunos aspectos de la teoría de la medida y la integración. Esto nos permitirá diversificar los ejemplos de e.v.t. Los espacios funcionales de la teoría de la medida son de capital importancia en Análisis y aparecen de forma natural en muchos problemas de la Matemática. Para más detalles sobre esta parte se puede consultar Fernandez (1976), Jacob (1984), Kolmogorov (1974) o Métivier (1979).

1.4 NOCIÓN DE MEDIDA

En lo que sigue Ω será un conjunto no vacío. Si A es un subconjunto de Ω, A^c será su complementario.

1.4.1 Definición. *Llamamos álgebra de Boole sobre Ω a toda parte $\mathcal{A}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$ (conjunto de las partes de Ω) tal que*

i) $\Omega \in \mathcal{A}$,
ii) $A \in \mathcal{A} \Longrightarrow A^c \in \mathcal{A}$,
iii) $A \in \mathcal{A}$ *y* $B \in \mathcal{A} \Longrightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$.

Diremos que $\mathcal{A}$ es una tribu si verifica i), ii) y la siguiente condición más fuerte que iii)

iv) si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $\mathcal{A}$, entonces la reunión $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ sigue siendo un elemento de $\mathcal{A}$.

De esta definición resulta que $\emptyset \in \mathcal{A}$ y que si $\mathcal{A}$ es una tribu, entonces la intersección $\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ de toda sucesión A_n de $\mathcal{A}$ sigue estando en $\mathcal{A}$.

El par $(\Omega, \mathcal{A})$ donde $\mathcal{A}$ es una tribu sobre Ω se denomina *espacio medible*. Volveremos a hablar de álgebra de Boole para enunciar el teorema de prolongación de medidas que permitirá construir la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$.

1.4.2 Ejemplos de tribus. i) Es evidente que $\mathcal{P}(\Omega)$ es una tribu sobre Ω, es la más grande (en el sentido de la inclusión) y es demasiado extensa cuando Ω no es ni finito ni numerable. La tribu más pequeña sobre Ω es $\mathcal{A}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ y su interés es casi nulo.

ii) Sea $A \in \mathcal{P}(\Omega)$. Entonces $=\{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$ es una tribu sobre Ω.

iii) Una intersección cualquiera de tribus sobre Ω es también una tribu. Si $\mathcal{C}$ es una parte no vacía de $\mathcal{P}(\Omega)$, entonces la intersección de todas las tribus que contienen $\mathcal{C}$ (hay por lo menos una que es $\mathcal{P}(\Omega)$) se denomina la *tribu engendrada* por $\mathcal{C}$ y será denotada por $\sigma(\mathcal{C})$. En el caso de que Ω sea un espacio topológico y $\mathcal{C}$ el conjunto de sus abiertos, la tribu $\sigma(\mathcal{C})$ se escribirá $\mathcal{B}_\Omega$ y la denominaremos *tribu boreliana* de Ω, también está engendrada por los cerrados de Ω. Por ejemplo, para $\mathbb{R}^n$ se verifica que $\mathcal{B}_\Omega$ está engendrada por una cualquiera de las familias siguientes:

- los productos de intervalos abiertos o cerrados de $\mathbb{R}$,
- las bolas abiertas o cerradas de $\mathbb{R}^n$,
- los productos de intervalos abiertos o cerrados de $\mathbb{R}$ con extremos racionales,
- las bolas abiertas o cerradas de $\mathbb{R}^n$ de radio racional y centradas en puntos racionales.

iv) Una *semiálgebra de Boole* $\mathcal{S}$ sobre Ω es una parte de $\mathcal{P}(\Omega)$ tal que $\emptyset, \Omega \in \mathcal{S}$, es estable por intersección finita y $A \in \mathcal{S}$ implica que A^c es reunión finita de elementos de $\mathcal{S}$ disjuntos dos a dos. Se verifica fácilmente que el álgebra de Boole engendrada por una semiálgebra $\mathcal{S}$ puede obtenerse añadiéndole las uniones finitas de elementos de $\mathcal{S}$ disjuntos dos a dos.

v) Sean $(\Omega_1, \mathcal{A}_1), \ldots, (\Omega_n, \mathcal{A}_n)$ espacios medibles y pongamos Ω igual al producto cartesiano $\Omega_1 \times \ldots \times \Omega_n$. La clase $\mathcal{S}$ de partes de la forma $A_1 \times \ldots \times A_n$ donde $A_1 \in \mathcal{A}_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}_n$ es una semiálgebra de Boole sobre Ω. La tribu $\mathcal{A}$ sobre Ω engendrada por $\mathcal{S}$ se denomina *tribu producto* (o *producto tensorial*) de $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n$. La denotaremos $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \otimes \ldots \otimes \mathcal{A}_n$. Tenemos, por ejemplo, que si los Ω_i son espacios métricos y Ω está dotado de la topología producto entonces $\mathcal{B}_\Omega = \mathcal{B}_{\Omega_1} \otimes \ldots \otimes \mathcal{B}_{\Omega_n}$. En particular $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} = \mathcal{B}_\mathbb{R} \otimes \ldots \otimes \mathcal{B}_\mathbb{R}$ (producto tensorial n veces).

La tribu boreliana $\mathcal{B}_\mathbb{R}$ (y en general de $\mathbb{R}^n$) es tan grande que no resulta evidente encontrar una parte de $\mathbb{R}$ que no pertenezca a $\mathcal{B}_\mathbb{R}$, los métodos conocidos actualmente para obtener un objeto de este tipo (véase el ejercicio 1.G) recurren al *axioma de elección:*

Si $(E_i)_{i \in I}$ es una familia cualquiera de conjuntos no vacíos, podemos elegir un único elemento en cada E_i.

Esto equivale a decir que el producto cartesiano

$$\prod_{i \in I} E_i$$

existe y es no vacío.

Sea ahora $\mathcal{A}$ un álgebra de Boole sobre Ω.

1.4.3 Definición. *Llamamos* medida *sobre* $(\Omega, \mathcal{A})$, *o simplemente sobre* Ω, *a toda aplicación* $\mu : \mathcal{A} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ *no constante con valor* $+\infty$ *y que verifique*

i) $\mu(\emptyset) = 0$,

ii) si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es una sucesión en* $\mathcal{A}$ *tal que la unión de los* A_n *está en* $\mathcal{A}$ *(condición automáticamente satisfecha si* $\mathcal{A}$ *es una tribu) y* $n \neq p \Longrightarrow A_n \cap A_p = \emptyset$ *entonces*

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n). \tag{1.9}$$

La propiedad ii) es la σ*-aditividad de* μ.

Para $A \in \mathcal{A}$, el número $\mu(A)$ se denomina *medida de* A. El triple $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, donde $\mathcal{A}$ es una tribu sobre Ω y μ una medida sobre Ω, se denomina *espacio de medida.*

La suma y el producto de números reales se prolonga a $\overline{\mathbb{R}}_+$ de la manera siguiente: sea $a \in \mathbb{R}_+$, entonces

$$+\infty + (+\infty) = +\infty, \qquad a + (+\infty) = +\infty$$
$$+\infty \times (+\infty) = +\infty \qquad + a \times (+\infty) = +\infty \text{ con } a \neq 0.$$

Por tanto la expresión (1.9) tendrá siempre sentido, sean los $\mu(A_n)$ finitos o no.

Diremos que μ es

i) *finita* si para todo $A \in \mathcal{A}$, $\mu(A) < +\infty$. Como para $A, B \in \mathcal{A}$, $A \subset B$ implica $\mu(A) \leq \mu(B)$ μ es finita si y sólo si $\mu(\Omega) < +\infty$,

ii) σ*-finita* si $\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ con $A_n \in \mathcal{A}$ y $\mu(A_n) < +\infty$.

iii) una *probabilidad* sobre Ω si $\mu(\Omega) = 1$.

1.4.4 Ejemplos. i) Supongamos Ω finito con cardinal n y $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$. Para todo $A \in \mathcal{A}$ denotamos por $|A|$ el cardinal de A y ponemos

$$\mu(A) = \frac{|A|}{n}.$$

Obtenemos así una medida (una probabilidad de hecho) sobre Ω.

ii) Supongamos $\Omega = \mathbb{N}$ y $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ y pongamos para todo $A \subset \mathbb{N}$

$$\mu(A) = \sum_{a \in A} \frac{1}{a^2}.$$

Entonces μ es una medida finita sobre Ω.

iii) Supongamos Ω cualquiera y $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$. Para $A \in \mathcal{A}$ pongamos

$$m(A) = \begin{cases} |A| & \text{si } A \text{ es finito} \\ +\infty & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Es fácil ver que la m así definida es una medida sobre $(\Omega, \mathcal{A})$ llamada *medida de contar*. Es σ-finita si y sólo si Ω es numerable.

La introducción de medidas interesantes en conjuntos no numerables necesita algo más de material teórico, de hecho un teorema, cuya prueba no es en absoluto trivial y del cual nos contentaremos con ver su enunciado.

1.4.5 Teorema de prolongación. *Sea $\mathcal{A}_0$ un álgebra de Boole sobre Ω y $\mathcal{A}$ la tribu engendrada por $\mathcal{A}_0$. Entonces toda medida σ-finita sobre $(\Omega, \mathcal{A}_0)$ se prolonga de manera única en una medida sobre $(\Omega, \mathcal{A})$.*

Con ayuda de este teorema podemos construir uno de los objetos más importantes de las Matemáticas.

1.4.6 Medida de Lebesgue. Pongamos $\Omega = (0, 1]$. Entonces el conjunto de las partes de Ω

$$A = \bigcup_{i=1}^{k} (a_i, b_i] \tag{1.10}$$

con $0 \leq a_1 < b_1 \leq a_2 < b_2 \leq \ldots \leq a_k < b_k \leq 1$ es un álgebra de Boole $\mathcal{A}_0$ sobre Ω que engendra la tribu boreliana $\mathcal{B}_\Omega$. Para un $A \in \mathcal{A}_0$ de la forma (1.10) sea

$$\mu(A) = \sum_{i=1}^{k} (b_i - a_i), \tag{1.11}$$

entonces μ es una medida finita sobre $\mathcal{A}_0$. Por el teorema de prolongación, se extiende de manera única a una medida λ_0 sobre $\mathcal{B}_\Omega$.

Para todo $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ y todo $n \in \mathbb{Z}$ sea $A_n = A \cap (n, n+1]$. Si $a \in \mathbb{R}$, $a + A$ denotará el conjunto $\{a + x \ : \ x \in A\}$. Ponemos

$$\lambda(A) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \lambda_0(-n + A_n) \tag{1.12}$$

obteniendo así una medida λ sobre $\mathbb{R}$ σ-finita denominada *medida de Lebesgue.*

Sean $(\Omega, \mathcal{A})$ y $(E, \mathcal{B})$ dos espacios medibles y $f : \Omega \longrightarrow E$ una aplicación. Diremos que f es *medible* si para todo $B \in \mathcal{B}$, $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$. Evidentemente, si $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ toda aplicación de Ω en E es medible.

Si Ω y E son espacios topológicos y $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ las tribus borelianas respectivas, entonces toda aplicación continua $f : \Omega \longrightarrow E$ es medible.

Cuando hablemos de aplicación (o de función) medible de Ω en $\mathbb{R}$ supondremos siempre que $\mathbb{R}$ está dotado de la tribu boreliana canónica $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

Diremos que $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ es una *función escalonada* si existe una partición de Ω en conjuntos $A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{A}$ y números reales $a_1, \ldots, a_k$ tales que $f = \sum_{i=1}^{k} a_i \mathbf{1}_{A_i}$ donde para cualquier $A \subset \Omega$, $\mathbf{1}_A$ es la *función indicatriz* de A, es decir,

$$\mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

El lector observará fácilmente que la partición $A_1, \ldots, A_k$ no es única. Toda función escalonada es claramente medible. Al conjunto de funciones escalonadas lo denotaremos por $\mathcal{E}$.

En lo que sigue los límites y cotas superiores e inferiores de funciones que se consideran serán siempre en sentido simple, es decir, tomados punto a punto.

Para toda función $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ pondremos

$$f^+ = \sup(f, 0) \quad \text{y} \quad f^- = \sup(-f, 0).$$

Es sencillo comprobar que $f = f^+ - f^-$ y $|f| = f^+ + f^-$.

Vamos a dar, sin demostración, una serie de propiedades de las funciones reales medibles sobre Ω.

i) El conjunto $\mathcal{M}$ de funciones reales medibles sobre Ω con las operaciones suma y multiplicación forma un álgebra unitaria.

ii) Si $f, g \in \mathcal{M}$ entonces $\sup(f, g)$, $\inf(f, g)$, f^+, f^- y $|f|$ son de $\mathcal{M}$.
iii) Sea $(f_n)_n$ una sucesión de $\mathcal{M}$, entonces $\sup(f_n)$, $\inf(f_n)$, $\limsup(f_n)$ y $\liminf(f_n)$ son de $\mathcal{M}$ (cuando existen).
iv) Todo límite simple de funciones medibles es medible.
v) Toda $f \in \mathcal{M}$ positiva es límite simple de una sucesión creciente de funciones escalonadas positivas.
vi) Toda función medible es límite de una sucesión de funciones escalonadas.

1.5 LA INTEGRAL

Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida. Consideremos

$$\mathcal{M}_+ = \{f \in \mathcal{M} \, : \, f \geq 0\} \quad \text{y} \quad \mathcal{E}_+ = \{f \in \mathcal{E} \, : \, f \geq 0\}.$$

1.5.1 Integral de una función medible positiva. Sea $f \in \mathcal{E}_+$ con expresión $f = \sum_{i=1}^{k} a_i \mathbf{1}_{A_i}$, $a_i \in \mathbb{R}_+$. El número finito o igual a $+\infty$

$$\int_\Omega f d\mu = \sum_{i=1}^{k} a_i \mu(A_i)$$

no depende de la partición elegida para definir f y se llama *integral* de la función escalonada f respecto a (o para) la medida μ.

La aplicación $f \in \mathcal{E}_+ \longrightarrow \int_\Omega f d\mu \in \overline{\mathbb{R}}_+$ verifica las propiedades siguientes

$$f \leq g \Longrightarrow \int_\Omega f d\mu \leq \int_\Omega g d\mu$$

$$f_n \uparrow f \Longrightarrow \int_\Omega f_n d\mu \uparrow \int_\Omega f d\mu.$$

Sean $f \in \mathcal{M}_+$ y f_n una sucesión en $\mathcal{E}_+$ que tiende de forma creciente a f. Entonces el número finito o infinito

$$\int_\Omega f d\mu = \lim_{n \to +\infty} \int_\Omega f_n d\mu$$

no depende de la sucesión f_n. Se denominará *integral* de f respecto a μ.

1.5.2 Definición. *Sea $f \in \mathcal{M}$. Diremos que f es integrable (sobre Ω para la medida μ) o μ-integrable si $\int_\Omega f^+ d\mu < +\infty$ y $\int_\Omega f^- d\mu < +\infty$, el número real*

$$\int_\Omega f d\mu = \int_\Omega f^+ d\mu - \int_\Omega f^- d\mu$$

se denomina integral de f respecto a μ.

El conjunto $\mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$ de funciones μ-integrables sobre Ω es un espacio vectorial y la aplicación $f \in \mathcal{M} \longrightarrow \int_\Omega f d\mu \in \mathbb{R}$ es lineal y verifica la propiedad

$$f \leq g \Longrightarrow \int_\Omega f d\mu \leq \int_\Omega g d\mu$$

y la propiedad de Beppo Levi

$$f_n \uparrow f \Longrightarrow \int_\Omega f_n d\mu \uparrow \int_\Omega f d\mu.$$

Es también cierto que f *es integrable si y sólo si* $|f|$ *es integrable.*

Si $A \in \mathcal{A}$ diremos que $f \in \mathcal{M}$ es *μ-integrable sobre* A si $f \cdot \mathbf{1}_A$ es μ-integrable, en este caso la integral de f sobre A será por definición

$$\int_A f d\mu = \int_\Omega f \cdot \mathbf{1}_A d\mu.$$

Si $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$ entonces para todo $A \in \mathcal{A}$, f es integrable sobre A.

Diremos que $A \subset \Omega$ es de *medida nula* para μ si $A \in \mathcal{A}$ y $\mu(A) = 0$. Diremos que A es *negligible* si está contenido en un conjunto de medida nula. Decimos que una propiedad sobre Ω se verifica *para casi todo punto* respecto a la medida μ (en forma abreviada μ-cpt) si el conjunto de elementos de Ω que no la verifican es de medida nula. Por ejemplo, diremos que

i) $f, g \in \mathcal{M}$ son *iguales* μ-cpt si

$$\mu(\{x \in \Omega \ : \ f(x) \neq g(x)\}) = 0.$$

ii) La sucesión f_n de $\mathcal{M}$ *tiende* μ-cpt hacia $f \in \mathcal{M}$ si

$$\mu(\{x \in \Omega \ : \ f_n(x) \text{ no tiende a } f(x)\}) = 0.$$

Para acabar esta sección vamos a enunciar dos teoremas importantes en teoría de la integración.

Sean $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$, ..., $(\Omega_n, \mathcal{A}_n, \mu_n)$ espacios de medida. La familia $\mathcal{S}$ de partes de $\Omega = \Omega_1 \times \ldots \times \Omega_n$ de la forma $A_1 \times \ldots \times A_n$ con $A_i \in \mathcal{A}_i$ es una semiálgebra de Boole. Entonces, poniendo

$$\mu_0(A_1 \times \ldots \times A_n) = \mu_1(A_1) \times \ldots \times \mu_n(A_n)$$

podemos definir una medida sobre el álgebra de Boole $\mathcal{A}_0$ engendrada por $\mathcal{S}$ que se prolonga de manera única en una medida sobre $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \otimes \ldots \otimes A_n$. La denotaremos $\mu_1 \otimes \ldots \otimes \mu_n$ y se denomina *producto tensorial* de las medidas μ_1, ..., μ_n.

En adelante supondremos, para simplificar, que $n = 2$ (lo cual no supone restricción alguna).

1.5.3 Teorema de Fubini. *Sea $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función integrable respecto a $\mu_1 \otimes \mu_2$. Entonces la aplicación $F_1 : x_1 \in \Omega_1 \longrightarrow \int_{\Omega_2} f(x_1, x_2) d\mu_2$ está definida μ_1-cpt y es μ_1-integrable, análogamente la aplicación $F_2 : x_2 \in \Omega_2 \longrightarrow \int_{\Omega_1} f(x_1, x_2) d\mu_1$ está definida μ_2-cpt y es μ_2-integrable. Tenemos además que*

$$\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f(x_1, x_2) d\mu_1 \otimes \mu_2 = \int_{\Omega_1} F_1(x_1) d\mu_1 = \int_{\Omega_2} F_2(x_2) d\mu_2.$$

Este teorema dice lo siguiente: para calcular la integral de una función (integrable) sobre un producto $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2, \mu_1 \otimes \mu_2)$ se puede empezar integrando respecto a una de las variables y después integrar el resultado respecto a la segunda.

El segundo teorema, debido a Lebesgue y conocido con el nombre de *teorema de la convergencia dominada*, es un resultado clave del Análisis.

1.5.4 Teorema de Lebesgue. *Sea f_n una sucesión de funciones reales integrables sobre $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ tal que*

i) f_n converge μ-cpt hacia f,

ii) existe una función h integrable en Ω tal que

$$|f_n| \leq h \ \mu\text{-cpt para todo } n.$$

Entonces f es integrable y

$$\int_\Omega f_n d\mu \longrightarrow \int_\Omega f d\mu.$$

Los espacios $L^p(\Omega, \mu)$ (con $p \in [1, +\infty)$) de las clases (módulo igualdad casi en todo punto) de funciones medibles de potencia p-ésima integrable que han motivado las secciones 1.4 y 1.5 serán estudiados a través de los ejercicios propuestos al final de capítulo (vease, por ejemplo, el ejercicio 1.E).

1.6 ALGUNOS EJEMPLOS CONCRETOS DE E.V.T.

1.6.1 Los espacios de Banach. i) Todo espacio E de dimension finita n es isomorfo (mediante la elección de una base) a $\mathbb{K}^n$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$). Sobre dicho espacio podemos definir varias normas, todas ellas equivalentes, que lo convierten en espacio de Banach, demos por ejemplo dos:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\|x\|_\infty = \sup_{i=1,\dots,n} |x_i|.$$

Sobre un espacio E de dimensión finita existe una única estructura de e.v.t. separado: la definida por una de las posibles normas posibles en E.

Este hecho es importante y su demostración no es inmediata.

ii) Sea (X, d) un espacio métrico compacto, entonces el conjunto $E = C(X, \mathbb{R})$ de las funciones reales continuas dotado de la norma

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$$

es un espacio de Banach.

iii) Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida, entonces, para todo $p \geq 1$ el espacio $L^p(\Omega, \mathbb{R})$ de clases (módulo la igualdad μ-cpt) de funciones con potencia p-ésima integrable normado por

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f(\omega)|^p d\mu(\omega) \right)^{\frac{1}{p}}$$

es un espacio de Banach (para las demostraciones véase el ejercicio 1.E).

Si $\Omega = \mathbb{N}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ y $\mu = m$ (la *medida de conteo* en $\mathbb{N}$, es decir, $m(A) =$ cardinal de A si A es finito y $+\infty$ en caso contrario) entonces $L^p(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ es el espacio de Banach, denotado habitualmente por l^p, de las sucesiones reales de potencia p-ésima sumable.

1.6.2 Los espacios de Fréchet. Constituyen un herramienta importante en Análisis y Geometría. Daremos uno de los ejemplos más importantes.

Para todo $n \in \mathbb{N}$ denotamos por $C^n(\mathbb{R})$ al espacio de funciones reales de clase C^n sobre $\mathbb{R}$ (es decir, las funciones $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que para todo $r \in \{0, 1, \dots, n\}$ la derivada $f^{(r)}$ de orden r de f es continua). Sea K_m una sucesión de compactos cuya unión recubre $\mathbb{R}$ y tal que K_m esté contenido en el interior de K_{m+1} (diremos que K_m es una *sucesión exhaustiva* de compactos de $\mathbb{R}$). Para $f \in C^n(\mathbb{R})$ ponemos

$$p_m(f) = \sum_{r=0}^{n} \sup_{x \in K_m} |f^{(r)}(x)|.$$

Entonces $(p_m)_m$ es una sucesión separante y creciente de seminormas en $C^n(\mathbb{R})$ que lo convierte en espacio de Fréchet.

Demostración. Que $(p_m)_m$ es una sucesión de seminormas crecientes es evidente. Si $p_m(f) = 0$ para todo $m \in \mathbb{N}$ entonces la restricción de f a cualquier compacto K_m es nula, luego f es nula sobre su reunión que es $\mathbb{R}$. Por consiguiente f es idénticamente nula y por tanto la sucesión $(p_m)_m$ es separante. Esta sucesión de seminormas define una topología sobre $C^n(\mathbb{R})$. Se verifica fácilmente que esta topología es independiente de la sucesión exhaustiva de compactos elegida para definirla: en efecto si K'_l es otra sucesión exhaustiva de compactos de $\mathbb{R}$, entonces para todo $m \in \mathbb{N}$ existe un $l \in \mathbb{N}$ tal que K_m está contenido en el interior de K'_l, si denotamos por (p'_l) la sucesión de seminormas asociada a la sucesión K'_l tedremos que

$$p_m(f) \leq p'_l(f)$$

para cualquier función de $C^n(\mathbb{R})$. Por tanto, toda p_m-bola abierta está contenida en una p'_l-bola abierta . Del mismo modo se prueba que toda p'_l-bola abierta está contenida en una p_m-bola abierta. Dicho de otro modo, la topología definida por la sucesión $(p_m)_m$ es la misma que la definida por la sucesión $(p'_l)_l$.

Falta demostrar que $C^n(\mathbb{R})$ es completo. Para hacerlo podemos elegir cualquier sucesión exhaustiva de compactos K_m. Sea f_s una sucesión de Cauchy, para todo $r \in \{0, \dots, n\}$ y todo compacto K_m la sucesión $g_s^r = f_s^{(r)}|_K$ es de Cauchy en la norma de la convergencia uniforme de funciones continuas sobre K_m; por tanto converge hacia una función continua en K_m.

Como ello es cierto para cualquier m, la sucesión $f_s^{(r)}$ converge hacia una función g^r continua en $\mathbb{R}$.

Supondremos $r \in \{0, \dots, n-1\}$ y $x_0 \in \mathbb{R}$. En un entorno de x_0 tenemos que

$$f_s^{(r)}(x) - f_s^{(r)}(x_0) = \int_{x_0}^{x} f_s^{(r+1)}(t)dt.$$

Por paso al límite respecto a s obtenemos

$$g^r(x) - g^r(x_0) = \int_{x_0}^{x} g^{r+1}(t)dt.$$

Derivando g^r constatamos que $g^{r+1} = (g^r)'$, tomando $r = 0$ e iterando el proceso obtenemos $(g^0)^{(r)} = g^r$. Esto prueba que la sucesión f_s converge en $C^n(\mathbb{R})$ hacia la función $f = g^0$. Es decir, $C^n(\mathbb{R})$ es completo, luego es de Fréchet. □

Para todo $n \in \mathbb{N}$ tenemos que $C^{n+1}(\mathbb{R}) \subset C^n(\mathbb{R})$ y por tanto una sucesión de inclusiones continuas

$$\cdots \hookrightarrow C^{n+1}(\mathbb{R}) \hookrightarrow C^n(\mathbb{R}) \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow C^1(\mathbb{R}) \hookrightarrow C^0(\mathbb{R})$$

La intersección de todos los espacios $C^n(\mathbb{R})$ obtenidos al variar n en $\mathbb{N}$ no es otra cosa que el espacio $C^\infty(\mathbb{R})$ de las funciones de clase C^∞ sobre $\mathbb{R}$. La topología menos fina haciendo continuas todas las inyecciones naturales

$$C^\infty(\mathbb{R}) \hookrightarrow C^n(\mathbb{R})$$

se denomina *topología* C^∞. Una sucesión f_s converge a una función f de clase C^∞ en esta topología si y sólo si para cualquier compacto K de $\mathbb{R}$ y todo $r \in \mathbb{N}$ la restricción de $f_s^{(r)}$ a K converge uniformemente (sobre K) hacia la restricción de $f^{(r)}$ en K. Esta topología puede definirse mediante una sucesión creciente de seminormas

$$p_m(f) = \sum_{r=0}^{m} \sup_{x \in K_m} |f^{(r)}(x)|.$$

De manera análoga podemos definir el espacio de Fréchet de las funciones C^∞ en un abierto U de $\mathbb{R}^n$ con $n \geq 2$.

1.7 EJERCICIOS

1.A Consideramos en el plano $\mathcal{P}$ una referencia ortonormal de origen O. Para dos puntos $M(x_1, x_2)$ y $N(y_1, y_2)$ cualesquiera de $\mathcal{P}$ ponemos:

$$d(M, N) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$
$$d'(M, N) = \begin{cases} d(M, O) + d(N, O) & \text{si } M \neq N \\ 0 \quad \text{si } M = N \end{cases}$$

i) Demostrar que d y d' son distancias en $\mathcal{P}$.

ii) Demostrar que el espacio métrico $(\mathcal{P}, d')$ es completo.

iii) Demostrar que la sucesión $M_k = (1, \frac{1}{k})$ es convergente respecto a d y que no lo es respecto a d'. ¿Qué se puede concluir de este hecho?

1.B Sea (X, d) un espacio métrico. Para $x, y \in X$ consideramos

$$d_1(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$
$$d_2(x, y) = \inf(1, d(x, y))$$

Probar que d_1 y d_2 son distancias uniformemente equivalentes a la distancia d.

1.C Sea $(X_n, d_n)_{n \geq 1}$ una familia numerable de espacios métricos. Supongamos que para todo n el diámetro de X_n es menor o igual que 1. En $X = \prod_n X_n$ se considera la topología $\mathcal{T}$ engendrada por aquellas partes de la forma

$$\prod_{i \in I} A_i \times \prod_{j \notin I} X_j$$

donde I es una parte finita de $\mathbb{N}^*$ y A_i un abierto de X_i.

i) Demostrar que para esta topología las proyecciones $\pi_n : X \longrightarrow X_n$ son continuas y abiertas.

ii) Demostrar que $\mathcal{T}$ es la topología menos fina sobre X haciendo continuas las aplicaciones π_n.

Definimos una distancia en X poniendo para cada $x = (x_n)_n$ y $y = (y_n)_n$

$$d(x, y) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{2^n} d_n(x_n, y_n)$$

iii) Demostrar que toda bola abierta $B(x, \varepsilon)$ en X contiene una parte de la forma

$$\prod_{i=1}^{N} B(x_i, \eta) \times \prod_{j \geq N+1} X_j,$$

donde $x_i = \pi_i(x)$ y $B(x_i, \eta)$ es la bola de X_i con centro x_i y radio η menor que ε.

iv) Deducir que la topología asociada a la métrica d coincide con $\mathcal{T}$.

v) Demostrar que para que una aplicación f de un espacio métrico (Y, δ) en X sea continua es necesario y suficiente que para todo n, la aplicación $\pi_n \circ f : Y \longrightarrow X_n$ sea continua.

vi) Demostrar que si para todo n el espacio X_n es completo también lo es el espacio X

La topología en X asociada a la métrica d se denomina *topología producto* de las topologías sobre X_n definidas por las métricas d_n.

1.D Sea $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x^{\frac{1}{n}}$ con n entero mayor o igual que 2. Demostrar que f es uniformemente continua pero no lipschitziana.

1.E Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y denotemos por L^p (con $p \geq 1$) el espacio vectorial (el hecho que $f, g \in L^p \implies f + g \in L^p$ implicará la desigualdad de Minkowski que se pide en la cuestión (iii)) de clases de funciones reales medibles de potencia p-ésima μ-integrable sobre Ω. Para $f \in L^p$ ponemos

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Sea $q \geq 1$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ y a y b dos números reales positivos.

i) Establecer la desigualdad

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

ii) Deducir para $f \in L^p$ y $g \in L^q$ que $fg \in L^1$ y que se cumple la desigualdad (de Hölder)

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

iii) Aplicar este resultado para demostrar la desigualdad de Minkowski

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

iv) Deducir que $\| \quad \|_p$ es una norma en L^p.
Sea f_n una sucesión de Cauchy en L^p.

v) Demostrar que podemos extraer de f_n una subsucesión f_{n_k} tal que

$$\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p \leq \frac{1}{2^k}$$

Para todo $k \in \mathbb{N}^*$ ponemos

$$h_k = |f_{n_1}| + \sum_{j=1}^{k} |f_{n_{j+1}} - f_{n_j}|$$

y para todo $\omega \in \Omega$, $h(\omega) = \lim_{k \to +\infty} h_k(\omega)$ (límite que es finito o infinito).

vi) Demostrar que $\|h_k\|_p \to \|h\|_p$ y que $h_k \in L^p$. Deducir que $h \in L^p$ y por tanto que h es finita casi en todo punto.

vii) Demostrar que la sucesión $(f_{n_k})_k$ converge absolutamente cpt a una función medible f. *Indicación: nótese que la serie cuyos términos son*

$$u_1 = f_{n_1} \;\; y \;\; u_k = f_{n_k} - f_{n_{k-1}} \;\; cuando \;\; k \geq 2$$

tiene por suma parcial $S_k = f_{n_k}$ y recuérdese que es absolutamente convergente (el límite es precisamente h).

viii) Demostrar que f_{n_k} converge hacia f en L^p. *Indicación: aplicar el teorema de la convergencia dominada a la sucesión de funciones $g_k = |f_{n_k} - f|^p$.*

1.F En $\mathbb{C}$ consideramos la sucesión exhaustiva de compactos $K_n = D(0, n)$, donde $D(0, n)$ es el disco cerrado de radio $n \in \mathbb{N}^*$. Para toda función holomorfa f en $\mathbb{C}$ ponemos

$$p_n(f) = \sup_{z \in K_n} |f(z)|.$$

Demostrar que el espacio vectorial $\mathcal{H}$ de funciones holomorfas en $\mathbb{C}$ con esta sucesión de normas es un espacio de Fréchet.

1.G Considérese el espacio de medida $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \lambda)$, donde $\mathcal{B}$ es la tribu boreliana de $\mathbb{R}$ y λ la medida de Lebesgue. Recordemos que esta medida es invariante por traslación, es decir, si $A \in \mathcal{B}$ y $r \in \mathbb{R}$ entonces $\lambda(r + A) = \lambda(A)$. Denotaremos por L^1 el espacio de clases de funciones λ-integrables y admitiremos que el conjunto $\mathcal{K}(\mathbb{R})$ de funciones reales continuas sobre $\mathbb{R}$ que son nulas fuera de un compacto es denso (para la norma $\| \ \|_1$) en L^1. Sea $A \in \mathcal{B}$ tal que $0 < \lambda(A) < +\infty$ y pongamos $E = \{x - y \ / \ x, y \in A\}$.

i) Demostrar que para todo $t \in \mathbb{R}$ la función $x \longrightarrow \gamma(x,t) = \mathbf{1}_A(x + t)\mathbf{1}_A(x)$ es integrable en $\mathbb{R}$.

Pongamos $h(t) = \int_{\mathbb{R}} \gamma(x,t) d\lambda(x)$. Sea $\varepsilon > 0$, entonces sabemos que existe $\varphi_\varepsilon \in \mathcal{K}(\mathbb{R})$ (que podemos suponer $0 \leq \varphi_\varepsilon \leq 1$) tal que $\|\mathbf{1}_A - \varphi_\varepsilon\|_1 < \varepsilon$.

ii) Demostrar que la función $h_\varepsilon(t) = \int_{\mathbb{R}} \varphi_\varepsilon(x + t)\mathbf{1}_A(x) d\lambda(x)$ es continua (*Indicación: considerar el teorema de la convergencia dominada.*)

iii) Demostrar que $\sup_{t \in \mathbb{R}} |h(t) - h_\varepsilon(t)| < \varepsilon$ y deducir que h_ε tiende uniformemente a h cuando $\varepsilon \to 0$ y por tanto que h es continua.

iv) Calcular $h(0)$ y ver que existe un $\delta > 0$ tal que para todo $t \in \mathbb{R}$ con $|t| < \delta$ se tiene $h(t) > 0$.

v) Demostrar que para cualquier t con $-\delta < t < +\delta$ existe un $x_t \in \mathbb{R}$ tal que $x_t \in A$ y $x_t + t \in A$.

vi) Deducir que E es un entorno de 0.

Si $\lambda(A) = +\infty$ podemos encontrar siempre un entero relativo n tal que $A_n = A \cap [n, n + 1)$ verifica $0 < \lambda(A_n) < +\infty$. Según vi) el conjunto $E_n = \{x - y \ : \ x, y \in A_n\}$ es un entorno de 0, entonces E es también un entorno de 0 ya que $E_n \subset E$.

En $\mathbb{R}$ definimos la relación de equivalencia siguiente: x e y son equivalentes si y sólo si $x - y$ es racional. En cada clase de equivalencia elegimos un elemento (es posible gracias al axioma de elección) y denotamos por B al conjunto de esos elementos.

vii) Demostrar que $F = B \setminus B = \{x - y \ : \ x, y \in B\}$ no contiene ningún racional no nulo. Deducir que F no puede ser un entorno de 0.

viii) Demostrar que la familia $\{r + B\}_{r \in \mathbb{Q}}$ forma una partición de $\mathbb{R}$.

Vamos a demostrar que B no es medible (es decir, que no está en $\mathcal{B}$). Supongamos que lo sea

ix) Demostrar que existe un $r \in \mathbb{Q}$ tal que $\lambda(r + B) > 0$. Concluir que que $\lambda(B) > 0$ (utilizar la invariancia de λ por traslación).

x) Deducir entonces, a partir de las cuestiones precedentes, que F es un entorno de 0. Llegamos así a una contradicción con vii), luego B no puede ser medible.

CAPÍTULO 2

APLICACIONES LINEALES CONTINUAS

Todos los espacios vectoriales topológicos considerados en este capítulo serán normados. Por simplicidad, y salvo algunas excepciones, preferimos limitarnos a esta categoría; sin embargo, la mayoría de resultados son todavía ciertos en un marco más general.

2.1 GENERALIDADES

Sean $(E, || \ \ ||_E)$ y $(F, || \ \ ||_F)$ dos espacios normados.

2.1.1 Proposición. *Una aplicación lineal $u : E \longrightarrow F$ es continua si y sólo si existe $\alpha > 0$ tal que*

$$||u(x)||_F \leq \alpha ||x||_E. \tag{2.1}$$

Cuando (E, p_n) y (F, q_m) son dos e.v.t. localmente convexos y p_n y q_m sucesiones crecientes de seminormas sobre E y F, respectivamente, el enunciado general sería:

Una aplicación lineal $u : E \longrightarrow F$ es continua si y sólo si para todo $m \in \mathbb{N}$ existen $n \in \mathbb{N}$ y $\alpha > 0$ (que dependen en general de m) tales que

$$q_m(u(x)) \leq \alpha p_n(x) \qquad \forall x \in E. \tag{2.2}$$

Demostración. Supongamos u continua, esto equivale a que u sea continua en el origen es decir si $x \to 0$ en E, $u(x) \to 0$ en F. Entonces, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\eta > 0$ tal que

$$||x||_E \leq \eta \Longrightarrow ||u(x)||_F \leq \varepsilon.$$

Sea $x \in E$ no nulo (cuando $x = 0$ la desigualdad que pretendemos demostrar es evidente), entonces

$$\left|\left| u\left(\eta \frac{x}{||x||_E}\right) \right|\right|_F \leq \varepsilon,$$

es decir, $||u(x)||_F \leq \frac{\varepsilon}{\eta}||x||_E$. Entonces bastará tomar $\alpha = \frac{\varepsilon}{\eta}$.

Es evidente que la condición (2.1) es suficiente para que u sea continua. □

De la proposición 2.1.1 se deduce que hay equivalencia entre continuidad en 0, continuidad uniforme y condición de Lipschitz.

Como E es separado el núcleo Ker $(u) = \{x \in E | u(x) = 0\}$ de una aplicación lineal continua $u : E \longrightarrow F$ es un subespacio vectorial topológico cerrado de E.

El conjunto $L_c(E, F)$ de aplicaciones lineales continuas de E en F es un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$. Como toda aplicación lineal es acotada en la bola unidad (cerrada) de E, *en $L_c(E, F)$ puede considerarse la norma (verifíquese):*

$$(2.3) \qquad |||u||| = \sup_{||x||_E \leq 1} ||u(x)||_F$$

o lo que es lo mismo

$$(2.3') \qquad |||u||| = \sup_{x \neq 0} \frac{||u(x)||_F}{||x||_E}.$$

Sean $(E_1, ||\ \ ||_1), \ldots, (E_n, ||\ \ ||_n)$ y $(F, ||\ \ ||_F)$ espacios normados. Dotamos el producto cartesiano $E_1 \times \ldots \times E_n$ de una de las normas

$$||\ \ || = \sum_{i=1}^{n} ||\ \ ||_i \quad \text{o} \quad ||\ \ || = \sup_i \{||\ \ ||_i\}.$$

2.1.2 Proposición. *Una aplicación n-lineal*

$$\Phi : E_1 \times \ldots \times E_n \longrightarrow F$$

es continua si y sólo si existe un $\alpha > 0$ tal que para todo $(x_1, \ldots, x_n) \in E_1 \times \ldots \times E_n$

$$||\Phi(x_1, \ldots, x_n)||_F \leq \alpha ||x_1||_1 \ldots ||x_n||_n.$$

Demostración. Es similar a la de la proposición 2.1.1. □

Si $\Phi : E_1 \times \ldots \times E_n \longrightarrow F$ es continua entonces para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$ y $x_1 \in E_1, \ldots, x_{i-1} \in E_{i-1}, x_{i+1} \in E_{i+1}, \ldots x_n \in E_n$ fijados, la aplicación parcial $\Phi_i : E_i \longrightarrow F$ definida por

$$\Phi_i(x_i) = \Phi(x_1, \ldots, x_n)$$

es continua. El recíproco es cierto si uno de los E_i es de Banach (véase el ejercicio 2.C).

Tal como se hizo en $L_c(E, F)$ definimos una norma en el espacio vectorial $L_c(E_1, \ldots, E_n; F)$ de las aplicaciones n-lineales de $E_1 \times \ldots \times E_n$ en F poniendo

$$(2.4) \qquad |||\Phi||| = \sup_{||x_1||_1 \leq 1, \ldots, ||x_n||_n \leq 1} ||\Phi(x_1, \ldots, x_n)||_F$$

o bien

$$(2.4') \qquad |||\Phi||| = \sup_{x_1 \neq 0, \ldots, x_n \neq 0} \frac{||\Phi(x_1, \ldots, x_n)||_F}{||x_1||_1 \ldots ||x_n||_n}.$$

Dicha norma es el número más pequeño $\alpha > 0$ que verifica la desigualdad

$$||\Phi(x_1, \ldots, x_n)||_F \leq \alpha ||x_1||_1 \ldots ||x_n||_n.$$

Si $u : E \longrightarrow F$ y $v : F \longrightarrow G$ son aplicaciones lineales continuas entre espacios normados se da la importante desigualdad:

$$(2.5) \qquad |||v \circ u||| \leq |||u|||.|||v|||$$

Por otra parte tenemos el resultado siguiente. Su demostración no es difícil de ver.

2.1.3 Teorema. *Si el espacio normado F es completo, $L_c(E_1, \ldots, E_n; F)$ es un espacio de Banach.*

Una aplicación n-lineal con $n \geq 2$ y no idénticamente nula no puede ser uniformemente continua. Verifíquese, por ejemplo, con $E_1 = E_2 = F = \mathbb{R}$ y $\Phi(x_1, x_2) = x_1 x_2$.

Sean ahora $V_1, \ldots, V_n$ subespacios densos de $E_1, \ldots, E_n$, respectivamente, y $\Phi : V_1 \times \ldots \times V_n \longrightarrow F$ una aplicación n-lineal continua.

2.1.4 Teorema. *Si F es completo la aplicación Φ se prolonga de manera única en una aplicación n-lineal continua $\overline{\Phi} : E_1 \times \ldots \times E_n \longrightarrow F$ tal que $|||\overline{\Phi}||| = |||\Phi|||$.*

Demostración. Veremos el caso $n = 1$, para $n \geq 2$ basta razonar sobre cada una de las aplicaciones parciales Φ_i. Sea u una aplicación continua de un subespacio denso V de E a valores en F. Sea $x \in E$, entonces existe una sucesión $(x_k)_k$ de elementos de V tal que $x = \lim x_k$, es pues una sucesión de Cauchy. Como u es uniformemente continua, $u(x_n)$ es una sucesión de Cauchy en F que es completo, luego converge hacia un elemento $\overline{u}(x)$ de F, si $(x'_k)_k$ es otra sucesión de V que converge hacia x entonces la sucesión $u(x_1), u(x'_1), u(x_2), u(x'_2), \ldots, u(x_k), u(x'_k), \ldots$ es de Cauchy en F, por tanto convergente. Por consiguiente, $\lim u(x_k) = \lim u(x'_k)$ y el vector $\overline{u}(x)$ no depende de la elección de la sucesión x_k. Esto define $\overline{u}$ sobre E. La linealidad de $\overline{u}$ se deduce de la continuidad de las operaciones "suma" y "multiplicación por un escalar".

Por otra parte, como u es continua existe un $\alpha > 0$ tal que

$$||u(x)||_F \leq \alpha ||x||_V$$

para todo $x \in V$, por la densidad de V en E tenemos que

$$||\overline{u}(x)||_F \leq \alpha ||x||_E$$

para todo $x \in E$. Esto demuestra la igualdad $|||\overline{u}||| = |||u|||$ y acaba la demostración. □

Una aplicación lineal biyectiva u de un e.v.t. E en un e.v.t. F que sea continua y abierta (es decir, u^{-1} es continua) se denomina *isomorfismo topológico* de E en F, si además E y F son normados y u es una *isometría* (esto es, que $\forall x \in E : ||u(x)||_F = ||x||_E$) diremos que u es un *isomorfismo de espacios normados.*

En adelante no pondremos subíndice para especificar el espacio sobre el cual está definida una norma excepto cuando haya algún riesgo de confusión.

Sea V un subespacio cerrado del espacio normado E. Entonces consideraremos que el espacio cociente E/V está dotado de la norma (véase la proposición 1.3.5.)

$$||X|| = \inf_{x \in X} ||x||.$$

Para dicha norma se demuestra fácilmente la proposición siguiente.

2.1.5 Proposición. *i) La proyección canónica $\pi : E \longrightarrow E/V$ es continua y tiene por norma $|||\pi||| = 1$,*

ii) la imagen por π de la bola unidad B_E de E es la bola unidad $B_{E/V}$ de E/V.

Por otra parte tenemos la siguiente proposición.

2.1.6 Proposición. *Sea $u : E \longrightarrow F$ una aplicación lineal continua nula en V. Entonces existe una única aplicación lineal continua*

$$v : E/V \longrightarrow F$$

tal que $u = v \circ \pi$ y $|||v||| = |||u|||$.

Demostración. Sean $X \in E/V$ y $x, x' \in X$, entonces $x - x' = f \in V$. Luego $0 = u(f) = u(x - x') = u(x) - u(x')$. Si ponemos $v(X) = u(x)$ con x un representante cualquiera de la clase X módulo V definimos v como aquella aplicación lineal que verifica $u = v \circ \pi$. Por (2.5) tenemos que $|||u||| \leq |||v|||$ (pues $|||\pi||| = 1$). Por otra parte, como para todo punto $X \in B_{E/V}$ existe $x \in B_E$ tal que $X = \pi(x)$ tenemos que $|||v||| \leq |||u|||$. Es decir, $|||u||| = |||v|||$ y esto prueba la proposición. □

2.2 ALGUNOS TEOREMAS IMPORTANTES

Todos los espacios considerados en esta sección serán normados.

2.2.1 Teorema de Banach-Schauder. *Sean E y F dos espacios de Banach y $u : E \longrightarrow F$ una aplicación lineal continua. Para que u sea abierta es necesario y suficiente que sea exhaustiva.*

Demostración. Si u es abierta, la imagen de la bola unidad B de E contiene una bola $\eta B'$ (con $\eta > 0$) siendo B' la bola unidad de F. Luego, si $y \in F \backslash \{0\}$ es arbitrario $\frac{\eta}{2||y||} y \in \eta B'$, entonces existe un $x \in E$ tal que $y = u(x)$, es decir, u es exhaustiva.

Supongamos u exhaustiva, bastará probar que $u(B)$ contiene una bola abierta de F centrada en 0. Tenemos

$$F = \bigcup_{n \geq 1} \overline{u(nB)} = \bigcup_{n \geq 1} n\overline{u(B)}$$

(se deduce de la exhaustividad de u). Si todos los $n\overline{u(B)}$ tuvieran interior vacío, por el teorema de Baire, F sería de interior vacío, lo cual es absurdo. Por consiguiente uno de estos conjuntos (de hecho todos, pues son homotéticos) es de interior no vacío, en particular $\overline{u(B)}$. Como $\overline{u(B)}$ es simétrico respecto al origen, el interior $\text{int}(\overline{u(B)})$ contiene el 0. En efecto, existen $y_0 \in \text{int}(\overline{u(B)})$ y $\varepsilon > 0$ tales que la bola abierta $B(y_0, \varepsilon)$ de centro y_0 y radio ε está contenida en $\text{int}(\overline{u(B)})$, entonces es claro que la imagen de dicha bola por la aplicación $y \longrightarrow \frac{1}{2}(y - y_0)$ es una bola abierta de radio $\frac{\varepsilon}{2}$ centrada en el origen y contenida en $\text{int}(\overline{u(B)})$, entonces 0 es un punto interior de $\overline{u(B)}$. Por tanto hay un $\rho > 0$ tal que $\rho B' \subset \overline{u(B)}$.

Sea $y \in F$ tal que $||y|| < \frac{\rho}{2}$ y definamos una sucesión (x_n) con $x_0 = 0$ y tal que para todo $n \geq 1$

$$||x_{n+1} - x_n|| < \frac{1}{2^{n+1}} \quad \text{y} \quad ||y - u(x_n)|| < \frac{\rho}{2^{n+2}}.$$

Veamos que dicha sucesión existe, si la suponemos construida hasta el n-ésimo término entonces

$$y - u(x_n) \in \overline{u\left(\frac{1}{2^{n+1}}B\right)};$$

por tanto podemos encontrar un $z_n \in \frac{1}{2^{n+1}}B$ que verifica

$$||y - u(x_n) - u(z_n)|| < \frac{\rho}{2^{n+1}},$$

el elemento $x_{n+1} = x_n + z_n$ es entonces el $(n+1)$-ésimo término de la sucesión. La sucesión x_n es de Cauchy, consecuentemente converge hacia un punto $x \in E$ que verifica $y = u(x)$ y

$$||x|| \leq \sum_{n=1}^{\infty} ||x_n - x_{n-1}|| < 1$$

luego $x \in B$, por consiguiente $y \in u(B)$ y $\frac{\rho}{2}B' \subset u(B)$ puesto que y es cualquier elemento que verifica $||y|| < \frac{\rho}{2}$. Esto prueba que u es abierta. □

Algunas las aplicaciones importantes de este teorema se dan en los siguientes corolarios.

2.2.2 Corolario. *Sea u una aplicación lineal continua y biyectiva entre dos espacios de Banach E y F. Entonces u es un isomorfismo topológico.*

Denotemos por $\mathcal{G}$ la gráfica de u, esto es, la parte de $E \times F$ (E y F son espacios de Banach) cuyos elementos (x, y) verifican $y = u(x)$. $\mathcal{G}$ es un subespacio normado del espacio de Banach $E \times F$.

2.2.3 Corolario (Teorema de la gráfica cerrada). *La aplicación u es continua si y sólo si $\mathcal{G}$ es cerrada.*

Demostración. Supongamos u continua. Entonces $\mathcal{G}$ es cerrada por ser núcleo de la aplicación lineal continua $(x, y) \in E \times F \longrightarrow y - u(x) \in F$. Recíprocamente, si $\mathcal{G}$ es cerrada en $E \times F$ entonces es de Banach. Denotemos por $p : E \times F \longrightarrow E$ la restricción a $\mathcal{G}$ de la primera proyección, entonces p es continua, biyectiva y admite $x \in E \longrightarrow (x, u(x))$ por aplicación inversa que será continua gracias al teorema 2.2.1, por consiguiente u es continua. ❐

Para seguir con el estudio de las propiedades de las aplicaciones lineales entre dos espacios normados E y F necesitamos introducir topologías en el espacio vectorial $L_c(E, F)$ diferentes de la *topología fuerte* definida por la norma

$$|||u||| = \sup_{||x|| \leq 1} ||u(x)||$$

Sea Φ una familia filtrante de partes de E, es decir, una familia $\Phi \subset \mathcal{P}(E)$ tal que para $A, B \in \Phi$ existe $C \in \Phi$ que contiene $A \cup B$. Llamamos Φ-*topología* sobre $L_c(E, F)$ y la denotamos por $\mathcal{T}_\Phi$ a la topología de la convergencia uniforme sobre las partes de E que pertenecen a la familia Φ. Es decir, una sucesión u_n en $L_c(E, F)$ converge hacia 0 respecto a $\mathcal{T}_\Phi$ si para todo elemento $A \in \Phi$ la restricción de u_n en A converge uniformemente hacia 0. Para esta topología cada elemento $u \in L_c(E, F)$ admite como base de entornos las partes de la forma

$$V(u, A, \varepsilon) = \left\{ v \in L_c(E, F) \,\middle|\, \sup_{x \in A} ||u(x) - v(x)|| < \varepsilon \right\},$$

donde $A \in \Phi$ y $\varepsilon > 0$.

Nos interesarán principalmente tres familias: i) $\Phi = \mathcal{B} = \{$partes acotadas de $E\}$ y $\mathcal{T}_\Phi$ no es más que la topología de la convergencia uniforme sobre conjuntos acotados, es decir, la *topología de la norma*. La denotaremos $\mathcal{T}_\mathcal{B}$.

ii) $\Phi = \mathcal{C} = \{$partes compactas de $E\}$. Es la *topología de la convergencia compacta* y la denotaremos $\mathcal{T}_\mathcal{C}$.

iii) $\Phi = \mathcal{F} = \{$partes finitas de $E\}$ da la *topología de la convergencia simple* o *topología débil* que denotaremos $\mathcal{T}_\mathcal{F}$.

Cada una de estas tres topologías define sobre $L_c(E, F)$ una estructura de e.v.t.

Como $\mathcal{F} \subset \mathcal{C} \subset \mathcal{B}$, tenemos las siguientes implicaciones evidentes entre los diferentes tipos de convergencia

$$\text{Convergencia respecto a } \mathcal{T}_{\mathcal{B}} \Longrightarrow \text{Convergencia respecto a } \mathcal{T}_{\mathcal{C}}$$

$$\text{Convergencia respecto a } \mathcal{T}_{\mathcal{C}} \Longrightarrow \text{Convergencia respecto a } \mathcal{T}_{\mathcal{F}}.$$

Las implicaciones recíprocas en general no son ciertas.

Podemos ver que *toda parte $\mathcal{U}$ acotada en el espacio normado $L_c(E,F)$ es equicontinua.* Cuando E es un espacio de Banach el resultado sigue siendo válido (véase el ejercicio 2.A) si $\mathcal{U}$ verifica la siguiente condición más débil

$$\forall x \in E \quad \sup_{u \in \mathcal{U}} \|u(x)\| < +\infty.$$

Diremos entonces que $\mathcal{U}$ es *simplemente acotada.*

2.2.4 Teorema de Banach-Steinhaus. *Sean E un espacio de Banach, F un espacio normado y u_n una sucesión en $L_c(E,F)$ que converge hacia u en la topología $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$. Entonces $u \in L_c(E,F)$ y u_n converge hacia u en la topología $\mathcal{T}_{\mathcal{C}}$.*

Demostración. La sucesión u_n converge simplemente hacia u, es decir, para todo $x \in E$ la sucesión $u_n(x)$ converge hacia $u(x)$ en F; es por tanto simplemente acotada. Por el ejercicio 2.B la familia $\mathcal{U} = (u_n)_n$ es equicontinua, de donde $u \in L_c(E,F)$. Como $\overline{\mathcal{U}} = \{u_n | n \in \mathbb{N}\} \cup \{u\}$ es la adherencia de $\mathcal{U}$ en la topología $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$ es equicontinua y por consiguiente, las restricciones de $\mathcal{T}_{\mathcal{C}}$ y $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$ a $\overline{\mathcal{U}}$ coinciden (véase el ejercicio 2.A), es decir, u_n converge hacia u uniformemente sobre todo compacto de E. □

Más adelante veremos muchos ejemplos de aplicaciones lineales continuas, sobretodo en los capítulos 5 y 6. Las aplicaciones lineales $E \longrightarrow F$ que nos interesarán de momento serán las *formas lineales*, es decir, cuando F es el cuerpo base $\mathbb{K}$ (que es un espacio vectorial de dimensión 1 sobre sí mismo).

2.3 EL TEOREMA DE HAHN-BANACH

¡Este es un teorema de gran interés en Análisis funcional! Admite dos formas, la primera, denominada *geométrica*, permite separar estrictamente un conjunto convexo cerrado de un conjunto compacto cerrado mediante un hiperplano cerrado. La segunda forma, denominada *analítica*, asegura la prolongación conservando la norma de una forma lineal continua dada en un subespacio vectorial. Antes de enunciar y demostrar este teorema en sus diversas formas haremos un repaso sobre convexidad y sobre la caracterización de una forma lineal continua con la ayuda de su núcleo.

2.3.1 Proposición. *Sean f una forma lineal no nula sobre un espacio normado E y H su núcleo. Entonces f es continua si y sólo si H es cerrado.*

Demostración. Supongamos f continua, entonces H es cerrado por ser imagen recíproca de $\{0\}$ que es un conjunto cerrado de $\mathbb{K}$. Recíprocamente, si H es cerrado el espacio cociente E/H es normado. Como f es no nula existe por lo menos un vector x_0 tal que $f(x_0) = 1$, entonces todo $x \in E$ es equivalente (módulo H) a $f(x)x_0$ puesto que $f(x - f(x)x_0) = f(x) - f(x)f(x_0) = 0$. Denotemos por $\pi : E \longrightarrow E/H$ la proyección canónica, entonces

$$\begin{aligned} ||\pi(f(x)x_0)|| &= ||\pi(x)|| \\ &\leq ||x||. \end{aligned}$$

Como $x_0 \notin H$ esta desigualdad implica

$$|f(x)| \leq \frac{||x||}{||\pi(x_0)||},$$

por consiguiente f es continua. □

2.3.2 Convexidad en un espacio vectorial. Sea E un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Diremos que una parte A de E es *convexa* si $\forall x, x' \in A$ y $\forall t \in [0,1]$ el vector $(1-t)x + tx'$ pertenece a A. Equivalentemente A es convexo si para todo $n \in \mathbb{N}$ todo $(x_1, \ldots, x_n) \in A^n$ y todo $(t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}_+^n$ tal que $\sum_{i=1}^n t_i = 1$ el vector

$$\sum_{i=1}^n t_i x_i$$

está en A. Veamos a continuación algunos ejemplos que son partes convexas de E

- un subespacio afín,
- una bola en un espacio normado,
- el semiespacio $\{x \in E | f(x) \geq \alpha\}$ donde f es una forma lineal continua cuando E es un e.v.t. real y $\alpha \in \mathbb{R}$,
- un cono $C = \bigcup_{\alpha > 0} \alpha A$ con base una bola $A \subset E$.

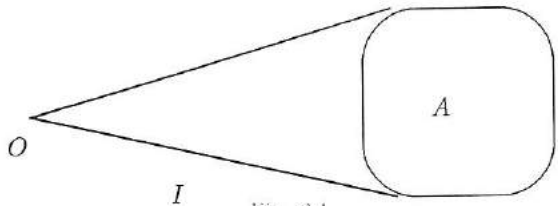

Fig. 2.1

Se comprueba fácilmente que

– si A es convexo y $u : E \longrightarrow F$ es una aplicación afín entonces $f(A)$ es convexo de F, análogamente si B es un convexo de F, $u^{-1}(B)$ es un convexo de E,
– toda intersección de convexos es convexo,
– toda suma de partes convexas de E es un convexo de E.

Sea A una parte de E, entonces la intersección de todas las partes convexas de E que contienen A es un convexo denominado *envolvente convexa de A* y se denota habitualmente por $\widehat{A}$, es también (en el sentido de la inclusión) el convexo más pequeño que contiene a A. Se verifica fácilmente que

$$\widehat{A} = \left\{ \sum_{i=1}^{n} t_i x_i \;\middle|\; t_i \in \mathbb{R}_+ \ , \sum_{i=1}^{n} t_i = 1, \ \ x_i \in A, \quad n \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

En un e.v.t. E habitualmente denominamos *envolvente convexa* de A al convexo cerrado más pequeño que contiene a A. La adherencia y el interior de una parte convexa son conjuntos convexos.

Un hiperplano H (subespacio vectorial de codimensión 1) de un espacio vectorial real E puede considerarse siempre como el núcleo de la forma lineal $\pi : E \longrightarrow E/H = \mathbb{K}$. Sea f una forma afín en E y pongamos

$$E_+(f) = \{x \in E : \ f(x) > 0\} \ \text{ y } \ E_-(f) = \{x \in E : \ f(x) < 0\},$$
$$\overline{E}_+(f) = \{x \in E : \ f(x) \geq 0\} \ \text{ y } \ \overline{E}_-(f) = \{x \in E : \ f(x) \leq 0\}.$$

Diremos que $H = \{f = 0\}$ *separa* (resp. *separa estrictamente*) dos partes A y B si $A \subset \overline{E}_-(f)$ y $B \subset \overline{E}_+(f)$ (resp. $A \subset E_-(f)$ y $B \subset E_+(f)$).

Las demostraciones de los teoremas que vamos a enunciar son también válidas en los e.v.t. localmente convexos separados pero nos limitaremos, para simplificar la exposición, a los espacios normados. En toda la sección E será un espacio normado.

2.3.3 Forma geométrica del THB. *Sean U una parte abierta convexa de E y V un subespacio afín de E tal que $U \cap V = \emptyset$. Entonces existe un hiperplano afín H cerrado tal que $V \subset H$ y $U \cap H = \emptyset$.*

Demostración. Mediante una traslación podemos suponer que V es un subespacio vectorial. Distinguiremos dos casos: E real y E complejo.

1^er^ caso: E real.

Denotemos por $\mathcal{V}$ el conjunto de los subespacios vectoriales de E que contienen a V y cuya intersección con U es vacía. Este conjunto está ordenado por la inclusión.

i) Si $\mathcal{V}_0$ es una parte totalmente ordenada de $\mathcal{V}$ entonces $\bigcup V_0$, donde V_0 recorre $\mathcal{V}_0$, es un subespacio vectorial de E que contiene a V y sin intersección con U, por tanto es un elemento de $\mathcal{V}$, luego $\mathcal{V}$ es *inductivo* y por el lema de Zorn admite un elemento maximal M. El subespacio M es necesariamente cerrado, en efecto como U es abierto y verifica $U \cap M = \emptyset$ la adherencia $\overline{M}$ de M corta a U, esto contradice la maximalidad si M no fuera cerrado.

ii) El espacio cociente E/M es normado, sea $\pi : E \longrightarrow E/M$ la proyección canónica y C el cono abierto de base $\pi(U)$ en E/M. Como M es un subespacio vectorial disjunto con U, $0 \notin C$.

iii) El espacio E/M es de dimensión 1. En caso contrario la parte $(E/M) \setminus \{0\}$ sería conexa, y, como es diferente de C, la frontera $\mathrm{Fr}(C)$ de C (la adherencia de C menos su interior) contendría un punto X. Este punto X no puede pertenecer a $-C = \{-Z | Z \in C\}$; en efecto, si $-C$ contuviera X, sería un entorno de X por ser abierto y por consiguiente existiría un $\varepsilon > 0$ tal que la bola $B(X, \varepsilon) \subset -C$. Por otra parte, como X es adherente a C, esta bola contendría un punto Y de C, por tanto $Y \in C$ e $Y \in -C$, es decir, Y y $-Y$ están en C, como C es convexo (es un cono cuya base es una parte convexa), $0 \in C$, y como se ha demostrado en ii) esto no puede ocurrir. Sea V_X el subespacio vectorial engendrado por X, está contenido estrictamente en E/M y no interseca al cono C, por tanto $H = \pi^{-1}(V_X)$ contiene estrictamente a M y no interseca el abierto U. Esto contradice de nuevo la maximalidad de M.

iv) De lo anterior resulta que el espacio cociente E/M es normado de dimensión 1 y tal que C no contiene su origen, es decir, H es un hiperplano cerrado disjunto con U.

2º caso: E complejo.

El espacio E es en particular un espacio vectorial real. Por el caso anterior existe un hiperplano real cerrado H_0 del espacio real E que no interseca

U. Como V es un subespacio vectorial complejo de E es estable por el automorfismo $x \in E \longrightarrow ix \in E$, es decir, $V = iV$. Por consiguiente $H = H_0 \cap iH_0$ es un subespacio vectorial complejo cerrado de codimensión compleja 1 (por tanto codimensión real 2) que contiene a V y que no interseca U. Con esto acabamos la demostración de la versión geométrica del teorema de Hahn-Banach. $\square$

Otra versión de la separación de conjuntos convexos viene dada por el siguiente teorema.

2.3.4 Teorema. *Supongamos E real. Sean C y K dos partes convexas disjuntas de E tales que C es cerrada y K compacta. Entonces C y K están estrictamente separadas por un hiperplano afín cerrado H.*

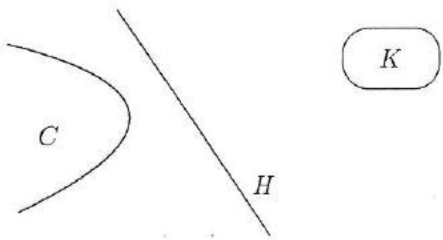

Fig. 2.2

Demostración. La distancia

$$\delta = \inf_{c \in C, k \in K} ||c - k||$$

entre los dos cerrados disjuntos C y K es estrictamente positiva. Sea $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon < \delta$, entonces el conjunto $U = C \setminus K + B(0, \varepsilon)$ es igual a

$$\bigcup_{c \in C, k \in K} \{c - k + B(0, \varepsilon)\}.$$

Es por tanto un conjunto convexo abierto de E (convexo por ser suma de convexos y abierto por ser reunión de abiertos). No contiene el origen ya que para $c \in C$, $k \in K$ y $b \in B(0, \varepsilon)$

$$\begin{aligned} ||c - k + b|| &\geq \big| ||c - k|| - ||b|| \big| \\ &\geq |\delta - \varepsilon| > 0 \end{aligned}$$

Por el teorema 2.3.3 existe un hiperplano vectorial H, núcleo de una forma lineal continua f que no interseca U ($\{0\}$ juega el papel de subespacio V). Supongamos que $f_{|U} > 0$, es decir, para $c \in C$, $k \in K$ y $b \in B(0, \varepsilon)$ se tiene que $f(c) - f(k) + f(b) > 0$ o $f(k) - f(b) < f(c)$. Al ser esta desigualdad cierta cuando c, k y b varían de forma independiente tendremos

$$\sup_{k \in K} f(k) + \sup_{||b|| \leq \varepsilon} f(b) \leq \inf_{c \in C} f(c). \tag{2.6}$$

Pero $\sup_{||b|| \leq \varepsilon} f(b) = \varepsilon ||f||$ (pues f es una forma lineal continua sobre E). El número $\sup_{k \in K} f(k)$ está bien definido ya que f es continua y K es compacto, la desigualdad (2.6) implica que $\inf_{c \in C} f(c)$ está bien definido. Tendremos que

$$\inf_{c \in C} f(c) - \sup_{k \in K} f(k) \geq \varepsilon ||f||. \tag{2.6'}$$

Deducimos que existe un número real α tal que

$$K \subset \{x \in E \ : f(x) < \alpha\} \quad \text{y} \quad C \subset \{x \in E \ : f(x) > \alpha\}$$

esto es, K y C están estrictamente separados por el hiperplano real afín cerrado de ecuación $f(x) = \alpha$. □

De este teorema resulta el siguiente corolario

2.3.5 Corolario. *Toda parte convexa cerrada C de E es la intersección de los semiespacios cerrados que la contienen.*

Demostración. Sea a un punto de E fuera de C. Aplicamos el teorema 2.3.4 al cerrado convexo C y al compacto convexo $\{a\}$ y existe una forma afín continua f_a tal que

$$C \subset \overline{E}_+(f_a) \quad \text{y} \ \{a\} \subset \overline{E}_-(f_a).$$

Entonces es evidente que el conjunto

$$\bigcap_{a \in E \setminus C} \overline{E}_+(f_a)$$

es cerrado e igual a C. □

2.3.6 Forma analítica del THB. *Sean V un subespacio normado de E no reducido a $\{0\}$ y f una forma lineal continua no nula sobre V. Entonces existe una forma lineal continua $\widetilde{f}$ en E tal que*

i) $\widetilde{f}_{|V} = f$,

ii) $|||\widetilde{f}||| = |||f|||$.

Demostración. Podemos suponer que V es cerrado, en caso contrario prolongamos a la adherencia $\overline{V}$ utilizando el teorema 2.1.4. La demostración volverá a distinguir el caso real del caso complejo. Supondremos que $V \neq E$.

<u>1^{er} caso: E real</u>.

i) Sea $x_0 \in E - V$ y pongamos $M_1 = V \oplus \mathbb{R}x_0$. Sea f_1 la forma lineal sobre M_0 definida por

$$f_1(x + \lambda x_0) = f(x) + \lambda\alpha$$

donde α es un número real imagen de x_0 por f_1 que elegiremos de modo que la norma de f_1 sea igual a la de f. Entonces es necesario y suficiente tener

$$|f_1(x + \lambda x_0)| \leq |||f|||.||x + \lambda x_0||$$

para todo $x \in V$ y todo real λ, lo cual es equivalente a

$$|f(x) - \alpha| \leq |||f|||.||x - x_0|| \tag{2.7}$$

para todo $x \in V$, es decir,

$$f(x) - |||f|||.||x - x_0|| \leq \alpha \leq f(x) + |||f|||.||x - x_0|| \tag{2.7'}$$

para todo $x \in M$. Pongamos

$$A_x = f(x) - |||f|||.||x - x_0|| \quad \text{y} \quad B_x = f(x) + |||f|||.||x - x_0||.$$

Entonces α que verifique (2.7') existe si y sólo si para todo $x \in V$ los intervalos $[A_x, B_y]$ tienen un punto en común para cualesquiera $x, y \in V$. Pero

$$\begin{aligned} f(x) - f(y) &= f(x - y) \\ &\leq |||f|||.||x - y|| \\ &\leq |||f|||.\left(||x - x_0|| + ||y - x_0||\right). \end{aligned}$$

Lo que nos da la desigualdad $A_x \leq B_y$ para todo $x, y \in V$. El número α puede por tanto elegirse de modo que f_1 sea continua y de norma igual a la de f.

ii) Sea ahora $\mathcal{V}'$ el conjunto de todos los pares (V', f') donde V' es un subespacio vectorial de E que contiene a V y f' es una extensión continua de f a V' que satisface $|||f'||| = |||f|||$. Consideramos en $\mathcal{V}'$ el orden parcial siguiente :

$$(V', f') \leq (V'', f'')$$

si y sólo si $V' \subset V''$ y f'' es una prolongación continua de f'. Si $\mathcal{V}$ es una parte totalmente ordenada de $\mathcal{V}'$ ponemos

$$V_\infty = \bigcup_{V' \in \mathcal{V}} V'.$$

Entonces V_∞ es un subespacio de E que contiene a V. Si $x \in V_\infty$ existe $V' \in \mathcal{V}$ tal que $x_0 \in V'$, ponemos entonces $f_\infty(x) = f'(x)$ (donde f' es la prolongación de f a V'). El elemento (V_∞, f_∞) está en $\mathcal{V}$, dicho de otro modo, el conjunto ordenado $\mathcal{V}$ es inductivo. Por el lema de Zorn admite un elemento maximal (V_M, f_M).

iii) Tenemos que V_M es cerrado (si no prolongamos a la adherencia $\overline{V_M}$), de hecho $E = V_M$, si no fuera así por i) existiría un subespacio que contiene estrictamente a V_M y sobre el cual f_M se prolonga en una forma lineal continua conservando su norma, lo cual contradice la maximalidad de (V_M, f_M). La prolongación buscada se obtiene por tanto poniendo $\widetilde{f} = f_M$.

<u>2º caso: E complejo.</u>

Consideramos E y V como espacios vectoriales reales y denotamos por u la parte real de f que es continua y tiene la misma norma que f (véase el ejercicio 2.D). Por el caso anterior, u se prolonga en una forma lineal continua real $\widetilde{u}$ sobre el espacio vectorial real E y con la misma norma que u. La aplicación $\widetilde{f} : E \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$\widetilde{f}(x) = \widetilde{u}(x) - i\widetilde{u}(ix)$$

es una forma $\mathbb{C}$-lineal continua que prolonga f y con igual norma que f. $\square$

El corolario siguiente proporciona una consecuencia interesante de la forma analítica del teorema de Hahn-Banach.

2.3.7 Corolario. *Sea x_0 un vector no nulo de E. Entonces en E existe una forma lineal continua f tal que $f(x_0) = ||x_0||$ y $|||f||| = 1$.*

Demostración. Denotemos por V el subespacio vectorial de E engendrado por x_0, es decir, el conjunto de elementos λx_0 donde $\lambda \in \mathbb{K}$. Pongamos $f_0(\lambda x_0) = \lambda ||x_0||$, entonces f_0 es una forma lineal continua sobre V de norma $|||f_0||| = 1$, por el teorema 2.3.6. se prolonga en una forma lineal continua f sobre E de norma 1. □

Esto nos dice en particular que si el espacio E no se reduce a $\{0\}$ su *dual topológico* E' no se reduce $\{0\}$.

2.4 EJEMPLOS

Vamos a dar ejemplos precisos de formas lineales continuas sobre algunos espacios de funciones.

2.4.1 Formas lineales positivas. Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida. Recordemos que una parte E de Ω se denomina *negligible* si existe un $A \in \mathcal{A}$ que contiene a E tal que $\mu(A) = 0$. Diremos que la medida μ es completa si todo $E \subset \Omega$ que verifica $A \subset E \subset B$ con $A, B \in \mathcal{A}$ y $\mu(A - B) = 0$ pertenece a $\mathcal{A}$; en particular, si E es de medida nula, entonces $E \in \mathcal{A}$. *Para toda medida μ sobre $(\Omega, \mathcal{A})$ existe una tribu $\mathcal{A}^*$ que contiene a $\mathcal{A}$ y una medida completa μ^* sobre $\mathcal{A}^*$ que prolonga μ.*

Para todo espacio de medida $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ y todo $p \geq 1$ denotamos como siempre $L^p(\Omega, \mu)$ al espacio de clases (módulo la igualdad fuera de los conjuntos de medida nula) de funciones complejas medibles de potencia p-ésima integrable con la norma

$$||g||_p = \left(\int_\Omega |g|^p d\mu(\omega) \right)^{\frac{1}{p}} .$$

Para $p = \infty$ denotaremos por $L^\infty(\Omega, \mu)$ el espacio de las clases de funciones *μ-esencialmente acotadas* sobre Ω, es decir,

$$L^\infty(\Omega, \mu) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C} \text{ medible y acotada } \mu\text{-cpt}\}$$

con la norma:

$$||f||_\infty = \inf \{\alpha \in \mathbb{R}_+ \ : \ |f| \leq \alpha \ \mu\text{-cpt}\} .$$

El lector podrá comprobar que $|| \ ||_\infty$ es efectivamente una norma sobre $L^\infty(\Omega, \mu)$ y que de hecho es un espacio de Banach.

La aplicación $I : L^1(\Omega, \mu) \longrightarrow \mathbb{C}$ que a cada g asocia

$$I(g) = \int_\Omega g(\omega) d\mu(\omega)$$

es una forma lineal continua de norma 1 sobre $L^1(\Omega, \mu)$. Verifica además la siguiente propiedad: si g es real y positiva entonces $I(g)$ es un número real positivo. Diremos que I es una *forma lineal positiva.* Vamos a ver que para algunos espacios normados todas las formas lineales positivas vienen dadas por una integral asociada a cierta medida.

Sean X un espacio topológico separado localmente compacto y $\mathcal{B}$ su tribu boreliana (la engendrada por los abiertos). Una medida μ sobre $\mathcal{B}$ se denomina *regular* si para todo $E \in \mathcal{B}$ verifica

$$\mu(E) = \inf\{\mu(U) : \ \ E \subset U, \ \ U \text{ abierto}\}$$

y para todo $E \in \mathcal{B}$ de medida finita

$$\mu(E) = \sup\{\mu(K) : \ \ K \subset E, \ \ K \text{ compacto}\}.$$

Denotemos por $\mathcal{K}(X)$ el espacio de funciones continuas con soporte (la adherencia del conjunto de puntos donde la función no se anula) compacto con la norma

$$||g||_\infty = \sup_{x \in X} |g(x)|.$$

Una forma lineal continua positiva sobre $\mathcal{K}(X)$ se denomina *medida de Radon* de X. Toda medida μ sobre $\mathcal{B}$ da a través de la integral una forma lineal continua positiva sobre $\mathcal{K}(X) \subset L^1(X, \mu)$. El recíproco se concoce con el nombre de *Teorema de representación de Riesz.* Su demostración no es nada trivial y nos contentaremos con su enunciado.

2.4.2 Teorema de representación de Riesz. *Sea F una forma lineal continua positiva sobre $\mathcal{K}(X)$. Entonces existe una tribu completa $\mathcal{B}^*$ que contiene a $\mathcal{B}$ y una medida regular μ, finita sobre compactos y completa tal que*

$$F(g) = \int_X g d\mu, \qquad \forall g \in \mathcal{K}(X).$$

El lector que desee conocer la demostración de este famoso teorema puede consultar Rudin (1985).

2.4.3 Distribuciones sobre $\mathbb{R}$. Para todo $n \in \mathbb{N}$ consideremos el espacio vectorial $\mathcal{D}^n(\mathbb{R})$ de las funciones de clase C^n con soporte compacto en $\mathbb{R}$ dotada de la siguiente pseudotopología (denominada *pseudotopología C^n*): una sucesión φ_n converge a 0 si existe un compacto K tal que

i) $\mathrm{sop}(\varphi_n) \subset K$,

ii) para todo $r \in \{0, \dots n\}$ la derivada r-ésima de φ_n converge uniformemente hacia 0 en K.

La pseudotopología C^{n+1} sobre $\mathcal{D}^{n+1}(\mathbb{R})$ es estrictamente más fina que la inducida por el espacio $\mathcal{D}^n(\mathbb{R})$, es decir, la pseudotopología C^n.

Una forma lineal T sobre $\mathcal{D}^n(\mathbb{R})$ continua (es decir, si $\varphi_j \to 0$ entonces $T(\varphi_j) \to 0$) para esta pseudotopología se llama *distribución de orden n* sobre $\mathbb{R}$. El valor de T sobre una función $\varphi \in \mathcal{D}^n(\mathbb{R})$ se escribirá $\langle T, \varphi\rangle$. El conjunto de distribuciones de orden n es el dual topológico de $\mathcal{D}^n(\mathbb{R})$ que denotamos $\mathcal{D}^n(\mathbb{R})'$. Por ejemplo, si ponemos para todo $n \in \mathbb{N}$ y toda $\varphi \in \mathcal{D}^n(\mathbb{R})$

$$\delta^{(n)}(\varphi) = \varphi(a)$$

se obtiene una forma lineal sobre $\mathcal{D}^n(\mathbb{R})$ denominada *distribución de Dirac de orden n* en el punto a sobre $\mathbb{R}$.

Para $n = \infty$ el espacio $\mathcal{D}^n(\mathbb{R})$ se escribirá $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ y una distribución de orden $n = \infty$ se dirá simplemente *distribución*. Dado que

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}) \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow \mathcal{D}^{n+1}(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathcal{D}^n(\mathbb{R}) \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow \mathcal{D}^0(\mathbb{R}) = \mathcal{K}(\mathbb{R})$$

vemos que toda distribución de orden n es una distribución, toda distribución de orden n es una distribución de orden $n+1$ y toda medida de Radon es una distribución de orden n para todo n. Tenemos por tanto una sucesión de inclusiones

$$\mathcal{K}(\mathbb{R})' \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow \mathcal{D}^n(\mathbb{R})' \hookrightarrow \mathcal{D}^{n+1}(\mathbb{R})' \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R})'.$$

Estas inclusiones son estrictas (véase el ejercicio 2.E).

Diremos que una distribución T (o distribución de orden n) es *positiva* si para toda $\varphi \in \mathcal{D}^n(\mathbb{R})$ real positiva $\langle T, \varphi\rangle$ es un número real positivo. Tenemos el importante resultado siguiente del cual podemos encontrar una demostración en Schwartz (1966):

Toda distribución positiva es una medida de Radon.

2.5 EJERCICIOS

2.A Sean E y F dos espacios normados, $L_c(E,F)$ el espacio vectorial de las aplicaciones lineales continuas de E en F y $\mathcal{U}$ una parte equicontinua de $L_c(E,F)$.

Demostrar que las restricciones de las topologías $\mathcal{T}_{\mathcal{C}}$ y $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$ en $\mathcal{U}$ coinciden.

2.B Sea $\mathcal{U}$ una parte simplemente acotada de $L_c(E,F)$ donde E es un espacio de Banach y F un espacio normado cualquiera. Para todo entero $n \geq 1$ ponemos

$$A_n = \left\{ x \in E \,\middle|\, \sup_{u \in \mathcal{U}} ||u(x)|| \leq n \right\}.$$

i) Demostrar que $E = \bigcup_n A_n$ y deducir que $int(A_1)$ no es vacío. (*Aplicar el teorema de Baire a la sucesión A_n en el espacio métrico completo E.*)

ii) Demostrar que el origen es punto interior de A_1. Deducir que existe $r > 0$ tal que la bola $B(0,r) \subset A_1$ y que $\mathcal{U}$ es acotado en el espacio normado $L_c(E,F)$.

2.C Sean E un espacio de Banach, F y G dos espacios normados y $\phi : E \times F \longrightarrow G$ una aplicación bilineal tal que las aplicaciones parciales

$$\phi(.,y) : x \in E \longrightarrow \phi(x,y) \in G$$

$$\phi(x,.) : y \in F \longrightarrow \phi(x,y) \in G$$

son continuas. Sean x_n e y_n dos sucesiones que tienden a 0 en E y F, respectivamente.

i) Demostrar que la sucesión $(\phi(.,y_n))_n$ converge uniformemente en el conjunto $\{x_n | n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ y deducir que ϕ es continua. (*Aplicar el teorema de Banach-Steinhaus.)*

Denotamos por $\mathcal{K}(\mathbb{R})$ el conjunto de las funciones reales continuas con soporte compacto en $\mathbb{R}$ y por L^p (con $p \geq 1$) el espacio de las clases (en el sentido de la igualdad casi por todas partes para la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$) de funciones reales medibles de potencia p-ésima integrable y L^∞ el espacio de Banach de las funciones μ-esencialmente acotadas. Sean f y g dos funciones medibles, ponemos

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)d\lambda(y).$$

La función $f * g$ (cuando está definida) se denomina el *producto de convolución* de f por g.

ii) Sea $f \in L^p$. Demostrar que para todo $a \in \mathbb{R}$ la función $\tau_a(f)$ definida por $\tau_a(f)(y) = f(a-y)$ está en L^p y la aplicación τ de $\mathbb{R}$ en L^p que a a asocia $\tau_a(f)$ es continua.

iii) Demostrar que si $f \in L^p$ y $g \in L^q$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ entonces $f * g$ está definida en todas partes, es acotada, es uniformemente continua y que

$$||f * g||_\infty \leq ||f||_p \cdot ||g||_q,$$

es decir que $(f,g) \in L^p \times L^q \longrightarrow f * g \in L^\infty$ es una aplicación bilineal continua.

iv) Demostrar que

$$\text{sop}(f * g) \subset \text{sop}(f) + \text{sop}(g)$$

y por tanto el producto de convolución está bien definido en $\mathcal{K}(\mathbb{R})$ es decir, si f y g tienen soporte compacto entonces $f * g$ es también a soporte compacto.

2.D Sean E un espacio normado complejo y f una forma $\mathbb{C}$-lineal continua sobre E. Denotamos por u la parte real de f (que es una forma $\mathbb{R}$-lineal continua sobre E) y por J el automorfismo complejo de E que a cada x asocia ix

Demostrar que $f = u - J \circ u \circ J$ y que $|||f||| = |||u|||$. (*Utilizar que para todo número complejo z existe un $\theta \in \mathbb{R}$ tal que $|z| = e^{i\theta} z$.*)

2.E Recordemos que una distribución de orden $n \in \mathbb{N}$ en $\mathbb{R}$ es una forma lineal continua sobre el espacio $\mathcal{D}^n(\mathbb{R})$ (véase 2.4.3.)

i) Demostrar que para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo $a \in \mathbb{R}$ la distribución $\delta_a^{(n+1)}$ no puede ser de orden n.

ii) Sea $(a_n)_n$ una sucesión de números reales tendiendo a infinito. Demostrar que

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \delta_{a_n}^{(n)}$$

es una distribución que no se prolonga a ningún espacio $\mathcal{D}^n(\mathbb{R})$ con $n \in \mathbb{N}$.

2.F Sean E un espacio normado y V_1 y V_2 dos subespacios de E. Diremos que V_2 es un *suplementario topológico* de V_1 (o que V_1 es un suplementario topológico de V_2) si la aplicación

$$(x_1, x_2) \in V_1 \times V_2 \longrightarrow x_1 + x_2 \in E$$

es un isomorfismo topológico.

i) Demostrar que si V_2 es un suplementario topológico de V_1 entonces V_1 y V_2 son cerrados.

Supongamos que V_1 es un subespacio vectorial de dimensión finita de E.

ii) Demostrar que la aplicación identidad $id : V_1 \longrightarrow V_1$ se prolonga a una aplicación continua $f : E \longrightarrow V_1$.

iii) Deducir que V_1 admite un suplementario topológico V_2.

CAPÍTULO 3

DUALIDAD EN ESPACIOS NORMADOS

El objetivo de este capítulo es estudiar algunas relaciones entre un espacio normado E, su dual topológico E' y su bidual E'' por medio de dos topologías (la primera denominada *débil* sobre E' y la segunda denominada *debilitada o débil-$\star$* sobre E). Veremos en particular que incluso en dimensión infinita los conjuntos acotados de E' gozan de muy buenas propiedades en la topología débil.

3.1 NOTACIÓN Y DEFINICIONES

Para dos espacios normados E y F reales o complejos denotaremos siempre por $L_c(E, F)$ al conjunto de las aplicaciones lineales continuas de E en F con la norma

$$|||u||| = \sup_{||x||\leq 1} ||u(x)||.$$

Para $F = \mathbb{K}$, $L_c(E, \mathbb{K})$ no es más que el dual topológico de E que denotamos simplemente por E', es un subespacio vectorial del dual algebraico E^* (el conjunto de todas las formas lineales, continuas o no).

El valor de una forma lineal continua x' en el punto $x \in E$ se escribirá $\langle x, x'\rangle$. Obtenemos por tanto una forma bilineal

$$(x, x') \in E \times E' \longrightarrow \langle x, x'\rangle \in \mathbb{K}$$

continua de norma 1 puesto que $|\langle x, x'\rangle| \leq |||x'|||.||x||$. Por el teorema de Hahn-Banach tenemos que

$$\langle x, x'\rangle = 0, \quad \forall x' \in E' \implies x = 0. \tag{3.1}$$

Diremos entonces que E y E' están en *dualidad separante*.
Recordemos que en $E' = L_c(E, \mathbb{K})$ hay diferentes topologías (véase 2.2):

– la topología de la norma o topología fuerte $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$,

– la topología débil $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$, que en adelante denotaremos $\sigma(E', E)$, es la topología menos fina sobre E' que hace continuas todas las formas lineales

$$x' \in E' \xrightarrow{\varphi_x} \langle x, x'\rangle \in \mathbb{K}$$

donde x varía en E.

Recordemos que un entorno de $0 \in E'$ para esta topología contiene una intersección finita de partes de la forma

$$V(0, x, \varepsilon) = \{x' \in E' \; : \; |\langle x, x' \rangle| < \varepsilon\}$$

con x variando en E y ε variando en $\mathbb{R}_+^*$ (véase 2.2).

La proposición siguiente es inmediata.

3.1.1 Proposición. *El dual topológico E' de E se identifica canónicamente al dual topológico $\widehat{E}'$ de su completado $\widehat{E}$.*

Aunque $\widehat{E}' = E'$ la topología $\sigma(\widehat{E}', \widehat{E})$ en $\widehat{E}'$ puede ser estrictamente más fina que la topología $\sigma(E', E)$ sobre E'. Esto se deduce de la proposición siguiente que da una caracterización de las formas lineales continuas sobre E' cuando lo dotamos de la topología $\sigma(E', E)$.

3.1.2 Proposición. *Sea f una forma lineal sobre E' continua en la topología $\sigma(E', E)$. Entonces existe un $x \in E$ tal que*

$$f(x') = \langle x, x' \rangle \quad \forall x' \in E'.$$

Demostración. Como f es continua en E' respecto a la topología $\sigma(E', E)$ el conjunto $\{x' \in E' \; : \; |f(x')| \leq 1\}$ contiene un entorno de 0. Por tanto existe un conjunto finito $\{x_1, \ldots, x_k\} \subset E$ y una constante real $C > 0$ tales que

$$(3.2) \qquad |f(x')| \leq C \sup_{i=1,\ldots,k} |\langle x_i, x' \rangle|.$$

Por consiguiente, si tenemos

$$\langle x_i, x' \rangle = 0 \quad \text{para todo} \quad i = 1, \ldots, k$$

entonces $f(x') = 0$.

Luego $f = 0$ sobre la intersección de los núcleos de las formas lineales $x' \longrightarrow \langle x_i, x' \rangle$, por consiguiente f es una combinación lineal finita con coeficientes λ_i de las formas lineales $x' \longrightarrow \langle x_i, x' \rangle$ (véase el ejercicio 3.A). Por tanto podemos tomar $x = \sum_i \lambda_i x_i$. $\square$

Así pues vemos que las únicas formas lineales en E' continuas para $\sigma(E', E)$ son de la forma $x' \longrightarrow \langle x, x' \rangle$ para un cierto $x \in E$. Por consiguiente si E no es completo existe $\widehat{x} \in \widehat{E} - E$ tal que la forma lineal $x' \in E' = \widehat{E}' \longrightarrow \langle \widehat{x}, x' \rangle \in \mathbb{K}$ no es continua para $\sigma(E', \widehat{E})$.

Los espacios E y E' juegan "papeles casi simétricos", por tanto es posible definir en E topologías similares a las definidas en E'. La topología asociada a E como espacio normado se denominará *topología inicial*. Ahora podemos considerar la topología menos fina en E que hace continuas todas las formas lineales sobre E que eran continuas con la topología inicial, esta topología se denominará *topología débil-$\star$ (débil estrella)* y será denotada $\sigma(E, E')$ (los papeles de E y E' se han invertido).

De la propia definición de $\sigma(E, E')$ resulta que

- *las formas lineales continuas sobre E para la topología inicial son las mismas que las formas lineales sobre E continuas para la topología débil-$\star$,*
- *los cerrados convexos para la topología inicial y la topología débil-$\star$ son los mismos.*

Esto se deduce de lo que precede y del hecho que todo convexo cerrado es intersección de los semiespacios cerrados que lo contienen.

Recordemos que una parte $A \subset E$ (resp. una parte $A' \subset E'$) se dice *acotada* si existe $\rho > 0$ (resp. $\rho' > 0$) tal que $A \subset B(0, \rho)$ (resp. $A' \subset B'(0, \rho')$).

Podemos dar la noción de conjunto acotado para las topologías $\sigma(E, E')$ y $\sigma(E', E)$.

- Diremos que una parte A de E es *acotada respecto a $\sigma(E, E')$* si para todo $x' \in E'$
$$\sup_{x \in A} |\langle x, x' \rangle| < +\infty$$
- De la misma manera diremos que una parte A' de E' es *débilmente acotada* si para todo $x \in E$
$$\sup_{x' \in A'} |\langle x, x' \rangle| < +\infty.$$

3.1.3 Proposición. *Sea A' una parte de E'. Entonces*

i) A' es acotada si y sólo si A' es equicontinua,
ii) si A' es equicontinua entonces es relativamente compacta respecto a la topología débil.

Demostración. i) A' acotada significa que

$$\sup_{x' \in A'} |||x'||| \leq C$$

donde C es una constante real y positiva. Esto implica de manera inmediata la equicontinuidad de A'. El recíproco es evidente.

ii) Por el apartado i) A' es acotada y por tanto débilmente acotada, es decir, para todo $x \in E$ el conjunto de escalares $\{\langle x, x' \rangle \ : \ x' \in A'\}$ es acotado y por tanto relativamente compacto. Por el teorema de Ascoli (véase 1.1.7) A' es relativamente compacta en la topología de la convergencia compacta sobre E' que es más fina que la topología débil, por tanto A' es relativamente compacta para la topología $\sigma(E', E)$. □

Esto nos permite demostrar el siguiente teorema.

3.1.4 Teorema. *La bola unidad cerrada B' de E' es débilmente compacta (es decir, es compacta para la topología débil).*

Demostración. Para todo $x \in E$ denotamos por $\varphi_x : E' \longrightarrow \mathbb{R}$ a la función definida por $\varphi_x(x') = |\langle x, x' \rangle|$. Entonces φ_x es una función semicontinua inferiormente en E' respecto a la topología débil. En efecto, por la definición de $\sigma(E', E)$ para todo $\varepsilon > 0$ el conjunto

$$V(0, x, \varepsilon) = \{x' \in E' \ : \ |\langle x, x' \rangle| \leq \varepsilon\}$$

es cerrado en E' (véase 2.2). Luego la envolvente superior de la familia $(\varphi_x)_{||x|| \leq 1}$ que no es más que la aplicación $x' \longrightarrow |||x'|||$ es también semicontinua inferiormente (véase el ejercicio 3.B). La bola unidad cerrada B' es por tanto débilmente cerrada y como es acotada es débilmente compacta. □

El ejercicio 3.C prueba que en el dual E' de un espacio normado E pueden existir conjuntos débilmente acotados pero no acotados. Esto no se daría si el espacio E fuera de Banach.

3.1.5 Proposición. *Sean E un espacio de Banach y A' una parte de E'. Entonces las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

i) A' es acotada,

ii) A' es débilmente acotada,

iii) A' es equicontinua.

Demostración. Las afirmaciones i) y iii) son equivalentes sea E de Banach o no, es la proposición 3.1.3. Por otra parte es evidente que i) implica ii). La implicación ii)$\Longrightarrow$ i) se deduce del ejercicio 2.B. □

3.2 REFLEXIVIDAD

El hecho de que el dual E' de un espacio normado sea un espacio de Banach nos permitirá dar algunas propiedades del dual E'' de E' que llamamos *bidual* de E. Sea $x \in E$ y consideremos la *aplicación de evaluación* en x

$$\Phi_x : E' \longrightarrow \mathbb{K}$$

definida por $\Phi_x(x') = \langle x, x' \rangle$.

3.2.1 Proposición. *Para todo $x \in E$ la aplicación Φ_x es una forma lineal continua de norma $||x||$ sobre el espacio E' y por tanto un elemento del bidual E'' de E. Además, la aplicación $x \longrightarrow \Phi_x$ es una inyección isométrica de E en E''.*

Demostración. Que Φ_x es una forma lineal continua de norma $||x||$ sobre E' es evidente. Esto prueba también que la aplicación Φ es una inyección isométrica del espacio normado E en el espacio normado E''. Dicho de de otro modo E es un subespacio normado de E''. □

Podemos hacer notar que la topología débil $\sigma(E'', E')$ sobre E'' induce la topología débil-$\star$ en E.

3.2.2 Definición. *Diremos que un espacio normado E es reflexivo si la aplicación $\Phi : E \longrightarrow E''$ es un isomorfismo topológico.*

Como el dual de un espacio normado es siempre de Banach, E'' es de Banach, por tanto una condición necesaria (y en general no suficiente) para que E sea reflexivo es que sea completo.

3.2.3 Ejemplo de espacio reflexivo. Para todo real $p > 1$ denotamos por $E_p = l^p$ al espacio de las sucesiones reales de potencia p-ésima sumable con la norma

$$||x||_p = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} .$$

Sean $p > 1$ y $q > 1$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ y $\Phi : E_q \longrightarrow E'_p$ la aplicación definida por

$$\Phi_x(y) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n y_n.$$

Por la desigualdad de Hölder esta suma está bien definida y

$$|\Phi_x(y)| \leq ||x||_q ||y||_p.$$

Esto prueba que Φ_x es una forma lineal continua en E_p de norma

$$|||\Phi_x||| \leq ||x||_q. \tag{3.3}$$

Por otra parte está claro que $\Phi_{x_1+x_2} = \Phi_{x_1} + \Phi_{x_2}$ y $\Phi_{\lambda x} = \lambda\Phi_x$ y por tanto Φ es lineal.

i) Demostremos que Φ es una isometría de E_q en E'_p. Sean $x = (x_n)$ una sucesión de números reales, $n \in \mathbb{N}$ y $Y_n = (y_{nk})_{k\in\mathbb{N}}$ el elemento de E_p definido como sigue

$$y_{nk} = \begin{cases} 0 & \text{si } k > n \text{ o } 0 \leq k \leq n \text{ y } x_k = 0 \\ x_k|x_k|^{q-2} & \text{si } 0 \leq k \leq n \text{ y } x_k \neq 0. \end{cases} \tag{3.4}$$

Supongamos que $x \in E_q$. Entonces tenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} |x_k|^q &= |\Phi_x(Y_n)| \\ &\leq |||\Phi_x||| \left(\sum_{k=0}^{n} |x_k|^{(q-1)p}\right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Como $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ entonces $q = (q-1)p$ y

$$\sum_{k=0}^{n} |x_k|^q \leq |||\Phi_x||| \left(\sum_{k=0}^{n} |x_k|^q\right)^{\frac{1}{p}},$$

es decir,

$$\left(\sum_{k=0}^{n} |x_k|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq |||\Phi_x|||. \tag{3.5}$$

Como el segundo miembro de (3.5) no depende de n deducimos la desigualdad

$$||x||_q \leq |||\Phi_x|||. \tag{3.6}$$

Las desigualdades (3.3) y (3.6) prueban que Φ es una isometría y es por tanto inyectiva.

ii) Demostremos que Φ es exhaustiva. Sean $f \in E'_p$ y $(e_n)_n$ la sucesión de elementos de E_p tales que $e_n = (\delta_n^k)_k$ donde δ_n^k es el símbolo de Kronecker. Pongamos $x_n = f(e_n)$ y denotemos por Y_n el elemento de E_p definido mediante (3.4). Claramente tenemos que

$$Y_n = \sum_{k=0}^{n} y_{nk} e_k,$$

de donde

$$\begin{aligned} f(Y_n) &= \sum_{k=0}^{n} y_{nk} f(e_k) \\ &= \sum_{k=0}^{n} y_{nk} x_k \\ &= \sum_{k=0}^{n} |x_k|^q. \end{aligned}$$

Con lo cual

$$\left| \sum_{k=0}^{n} |x_k|^q \right| \leq |||f|||.||Y_n||_p.$$

Un razonamiento análogo al utilizado en i) prueba que

$$||x||_q \leq |||f|||.$$

Es decir $x \in E_q$. Por construcción de x tenemos que $\Phi_x(e_n) = f(e_n)$. Las formas lineales continuas Φ_x y f coinciden sobre todos los e_n y por tanto en el subespacio V engendrado algebraicamente por los e_n (es decir, las combinaciones lineales finitas de los e_n) y por consiguiente sobre la adherencia de V que no es más que E_p.

iii) Acabamos de probar que para $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ el dual de l^p es isométrico a l^q, por tanto el bidual de l^p (que es el dual de l^q) es isométrico a l^p. Entonces el espacio de Banach l^p es reflexivo si $p \in (1, +\infty)$.

3.2.4 Proposición. *Sea A una parte de E. Entonces A es acotada si y sólo si es acotada para la topología débil-$\star$.*

Demostración. Si A es acotada es obvio que es acotada para la topología débil-$\star$ ya que para todo $x' \in E'$

$$\sup_{x \in A} |\langle x, x' \rangle| \leq \left(\sup_{x \in A} ||x|| \right) |||x'||| < +\infty.$$

Supongamos ahora A acotada para la topología débil-$\star$, entonces es acotada respecto a la topología débil de E'' (puesto que A puede ser considerada como parte de E'' en virtud de la observación que sigue a la proposición 2.1). Dado que E' es un espacio de Banach A es acotada (por la proposición 3.1.5.) en E'', por tanto acotada en E puesto que E se inyecta isométricamente en E''. $\square$

3.3 TRASPOSICIÓN

Sean E y F dos espacios normados y $u : E \longrightarrow F$ una aplicación lineal continua.

3.3.1 Definición. *Llamamos aplicación traspuesta de u a la aplicación $u' : F' \longrightarrow E'$ definida por*

$$u'(y')(x) = y'(u(x)) \qquad \forall x \in E,$$

o bien: para todo $x \in E$ y todo $y' \in F'$

$$\langle u(x), y' \rangle = \langle x, u'(y') \rangle.$$

Se verifica fácilmente que u' *es una aplicación lineal, es continua y su norma es igual a la de u* (véase el ejercicio 3.D).

3.3.2 Proposición. *Sea $u : E \longrightarrow F$ una aplicación lineal entre dos espacios normados E y F. Entonces u es continua si y sólo si es continua para las topologías débil-$\star$ respectivas de E y F.*

Demostración. Supongamos u continua, entonces para todo $y' \in F'$ la forma lineal $y' \circ u$ es continua en E y por tanto continua para la topología débil-$\star$ (puesto que las formas lineales continuas sobre E son las mismas que las formas lineales continuas para la topología débil-$\star$). Como $\sigma(F, F')$ es la menos fina de las topologías sobre F que hacen continuas las formas lineales $y' \in F$, u es continua como aplicación de E en F (véase el ejercicio 3.E).

Recíprocamente, supongamos que u es continua respecto a las topologías débil-$\star$ de E y F y sea B la bola unidad de E, entonces para todo $y' \in F'$:

$$\sup_{||x|| \leq 1} |\langle u(x), y' \rangle| = \sup_{||x|| \leq 1} |\langle x, u'(y') \rangle| = |||u'(y')||| < +\infty.$$

Por consiguiente $u(B)$ es acotada para la topología débil-$\star$ por la proposición 3.2.4, luego u es continua ya que es acotada sobre la bola unidad de E. $\square$

3.3.3 Un ejemplo de aplicación traspuesta. Denotemos por $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ el espacio de funciones reales continuas con soporte compacto en $\mathbb{R}^n$ dotado de la norma de la convergencia uniforme

$$||\varphi||_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |\varphi(x)|.$$

Entonces una forma lineal continua sobre $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ se llama *medida* sobre $\mathbb{R}^n$. Sea f un homeomorfismo de $\mathbb{R}^n$, es decir que f es una aplicación biyectiva continua con inversa f^{-1} continua. Entonces f induce una aplicación $u : \mathcal{K}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ definida por

$$u(\varphi) = \varphi \circ f.$$

Es fácil ver que u es continua (de hecho una isometría). En efecto,

$$||\varphi \circ f||_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |\varphi(f(x))| = \sup_{f^{-1}(x)\in\mathbb{R}^n} |\varphi(x)| = ||\varphi||_\infty$$

dado que f es una biyección de $\mathbb{R}^n$.

La traspuesta u' de u se define como sigue: si $\mu \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)'$ es una medida sobre $\mathbb{R}^n$ entonces $u'(\mu)$ es la medida

$$u'(\mu)(\varphi) = \langle \mu, \varphi \circ u\rangle.$$

La imagen de la medida de Dirac δ_a en un punto a de $\mathbb{R}^n$ es la medida de Dirac $\delta_{f(a)}$ en el punto $f(a)$.

Diremos que una medida μ sobre $\mathbb{R}^n$ es *f-invariante* si $u'(\mu) = \mu$. Por ejemplo, si x_0 es un punto fijo de f (es decir, $f(x_0) = x_0$) entonces δ_{x_0} es f-invariante.

La medida de Lebesgue de $\mathbb{R}^n$ es invariante por traslaciones.

3.4 EJERCICIOS

3.A Sean E un espacio vectorial y $f_1, \ldots, f_k$, k formas lineales de E.

Demostrar que si f es una forma lineal sobre E tal que

$$\bigcap_{i=1}^{k} \mathrm{Ker} f_i \subset \mathrm{Ker} f$$

entonces existen números $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ tales que

$$f = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f_i.$$

Indicación: empezar con el caso $k = 1$ y razonar por inducción.

3.B Sea X un espacio topológico. Diremos que una función $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es

- *semicontinua superiormente* si para todo $\eta \in \mathbb{R}$ el conjunto $\{x \in X : f(x) < \eta\}$ es abierto.
- *semicontinua inferiormente* si para todo $\eta \in \mathbb{R}$ el conjunto $\{x \in X : f(x) > \eta\}$ es abierto.

i) Demostrar que f es semicontinua superiormente (resp. inferiormente) si y sólo si para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, $f^{-1}([\alpha, +\infty))$ (resp. $f^{-1}((-\infty, \alpha]))$ es cerrado en X.

ii) Demostrar que f es continua si y sólo si es semicontinua a la vez superior e inferiormente.

iii) Sea $(f_i)_{i \in I}$ una familia de funciones reales sobre X tales que para todo $x \in X$ el conjunto $(f_i(x))_{i \in I}$ es acotado. Ponemos

$$\underline{f} = \inf_{i \in I} f_i \quad \text{y} \quad \overline{f} = \sup_{i \in I} f_i$$

Demostrar que si para todo $i \in I$, f_i es semicontinua superiormente (resp. semicontinua inferiormente) entonces ocurre lo mismo con $\underline{f}$ (resp. $\overline{f}$).

3.C Sean H un espacio de Banach de dimensión infinita y $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una familia numerable de vectores de norma 1 linealmente independientes, E el subespacio engendrado por (e_n), es decir, el conjunto de las combinaciones lineales finitas de e_n y $\overline{E}$ la adherencia de E en H. Entonces $E \neq \overline{E}$. Sea ${e'}_n$ la familia de formas lineales de E definidas por

$${e'}_n(e_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = n \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

i) Calcular la norma de $n{e'}_n$.

ii) Demostrar que la sucesión $n{e'}_n$ es débilmente acotada pero no acotada.

iii) ¿Qué podemos concluir?

3.D Sean $u : E \longrightarrow F$ una aplicación lineal continua entre dos espacios normados E y F y $u' : F' \longrightarrow E'$ su traspuesta.

Demostrar que u' es continua y tiene igual norma que u.

3.E Sea $(X_i, \mathcal{T}_i)_{i \in I}$ una familia de espacios topológicos y para cada $i \in I$, $u_i : X \longrightarrow X_i$ una aplicación de un conjunto X en X_i. Llamamos *topología asociada* a las u_i a la topología $\mathcal{T}$ menos fina en X que hace continuas las aplicaciones u_i.

i) Demostrar que $\mathcal{T}$ es la topología engendrada por las $u_i^{-1}(\mathcal{T}_i)$.

ii) Sea $f : E \longrightarrow X$ una aplicación de un espacio topológico E en X. Demostrar que f es continua si y sólo si para cada $i \in I$ la aplicación $u_i \circ f : E \longrightarrow X_i$ es continua (X dotado de la topología asociada con las u_i).

3.F Sean E un espacio normado y A una parte de E. Llamamos *ortogonal* de A al conjunto $A^\perp$ de las formas lineales $x' \in E'$ tales que $\langle a, x' \rangle = 0$ para cualquier $a \in A$.

i) Demostrar que $A^\perp$ es un subespacio vectorial cerrado de E'.

Sea V un subespacio vectorial cerrado de E. Designamos por $j : V \hookrightarrow E$ la inclusión de V en E, por $\pi : E \longrightarrow E/V$ la proyección canónica y por $j' : E' \longrightarrow V'$ y $\pi' : (E/V)' \longrightarrow E'$ sus respectivas traspuestas.

ii) Demostrar que la sucesión

$$0 \longrightarrow (E/V)' \xrightarrow{\pi'} E' \xrightarrow{j'} V' \longrightarrow 0$$

(donde la primera y la última flecha son las aplicaciones nulas) es exacta. *Indicación: utilizar el teorema de Hahn-Banach.*

iii) Demostrar que el dual topológico $(E/V)'$ de E/V es isométrico a $V^\perp$ y que el dual topológico V' de V es isométrico al espacio cociente $E'/V^\perp$.

iv) Demostrar que si E es reflexivo, V y E/V son reflexivos.

3.G Sea $\mathcal{K}(\mathbb{R})$ el espacio de funciones complejas continuas con soporte compacto en $\mathbb{R}$ dotado de la norma

$$||f||_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|.$$

Ponemos

$$T = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_n$$

con $\delta_n(f) = f(n)$ para cualquier función $f \in \mathcal{K}(\mathbb{R})$ y $n \in \mathbb{Z}$.

Demostrar que T es una forma lineal sobre $\mathcal{K}(\mathbb{R})$. ¿Es continua? (Justificar la respuesta.)

CAPÍTULO 4

ESPACIOS DE HILBERT

Los espacios de Hilbert son espacios de Banach en los cuales podemos definir no sólo una "norma completa" sino también una noción de ángulo y por tanto de ortogonalidad. Son los espacios que más se parecen a los espacios euclídeos de dimensión finita, es por esto que son tan importantes en Análisis. Este capítulo tiene por objetivo definirlos y dar los ejemplos y propiedades más relevantes. En primer lugar haremos un repaso de Algebra lineal (independientemente de la dimensión).

4.1 FORMAS BILINEALES

Sea E un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. A veces hablaremos de espacio real incluso cuando $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, esto significa que consideramos implícitamente la estructura subyacente de espacio vectorial real.

4.1.1 Producto escalar. Una *forma bilineal* en E es una aplicación $g : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que para todos $x, y \in E$ las aplicaciones parciales $g(.,y) : x \in E \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g(x,.) : y \in E \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$g(.,y)(x) = g(x,y) \quad \text{y} \quad g(x,.)(y) = g(x,y)$$

son $\mathbb{R}$-lineales. Diremos que g es *simétrica* si verifica que

$$g(x,y) = g(y,x) \qquad \forall x, y \in E.$$

A toda forma bilineal g_0 sobre E podemos asociar una forma bilineal simétrica poniendo

$$g(x,y) = \frac{g_0(x,y) + g_0(y,x)}{2}.$$

Diremos que una forma bilineal a sobre E es *alternada* si verifica

$$a(x,y) = -a(y,x) \qquad \forall x, y \in E.$$

De manera análoga, al caso simétrico a toda forma bilineal a_0 podemos asociar una forma bilineal alternada poniendo

$$a(x,y) = \frac{a_0(x,y) - a_0(y,x)}{2}.$$

Llamamos *núcleo* de una forma bilineal simétrica g en E al conjunto

$$\{x \in E \ : \ g(x,y) = 0 \ \ \forall y \in E\} = \{y \in E \ : \ g(x,y) = 0 \ \ \forall x \in E\}.$$

Sea g una forma bilineal simétrica de E. La aplicación

$$Q : x \in E \longrightarrow Q(x) = g(x,x) \in \mathbb{K}$$

se denomina *forma cuadrática* asociada a g. Diremos que g (o Q) es *no degenerada* si

$$\Big(g(x,y) = 0 \ \ \forall y \in E\Big) \Longrightarrow x = 0.$$

Esto equivale a decir que el núcleo de g se reduce a $\{0\}$.

Diremos que g (o Q) es *definida positiva* si $Q(x) > 0$ para todo vector no nulo x de E. Evidentemente, si g es definida positiva, es no degenerada.

Una forma bilineal g simétrica definida positiva sobre E se denomina *producto escalar* sobre E. Un espacio vectorial real E dotado de un producto escalar g es denomina *espacio euclídeo.*

4.1.2 Producto hermítico. Supongamos que E es complejo. Una forma *sesquilineal* h en E es una aplicación $h : E \times E \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que la primera aplicación parcial $h(.,z')$ es $\mathbb{C}$-lineal y la segunda aplicación parcial $h(z,.)$ es antilineal, esto es que verifica

i) $h(z, z'_1 + z'_2) = h(z, z'_1) + h(z, z'_2)$,

ii) $h(z, \lambda z') = \overline{\lambda} h(z, z')$.

Diremos que una forma sesquilineal h sobre E es *hermítica* si

$$h(z,z') = \overline{h(z',z)},$$

para cualesquiera $z, z' \in E$, o sea si la forma cuadrática asociada $Q(z) = h(z,z)$ es real.

Sea h una forma hermítica sobre E, entonces h puede escribirse

$$h(z,z') = g(z,z') + ia(z,z'),$$

donde g y a son formas $\mathbb{R}$-bilineales. No es difícil ver que g es simétrico, que a es alternada, que

$$g(z,z') = a(iz,z') = -a(z,iz')$$

$$a(z, z') = -g(iz, z') = g(z, iz')$$

y que g y a son invariantes respecto al automorfismo complejo J de E que a cada z asocia $J(z) = iz$; dicho de otro modo, para todo $z \in E$ tenemos que

$$g(iz, iz') = g(z, z') \quad \text{y} \quad a(iz, iz') = a(z, z').$$

Diremos que h es *definida positiva* (*resp. positiva*) si $h(z, z) > 0$ (resp. $h(z, z) \geq 0$) para todo z no nulo. En este caso la forma bilineal real simétrica g es definida positiva (resp. positiva). Diremos entonces que (E, h) es un *espacio hermítico.*

4.1.3 Proposición. *Sea h una forma hermítica positiva en E. Entonces para todo $z \in E$ y todo $z' \in E$*

$$(4.1) \qquad |h(z, z')|^2 \leq Q(z)Q(z') \quad \text{(desigualdad de Schwarz)}$$

$$(4.2) \qquad \sqrt{Q(z + z')} \leq \sqrt{Q(z)} + \sqrt{Q(z')} \quad \text{(desigualdad de Minkowski)}$$

Demostración. Sean $z, z' \in E$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

i) Tenemos que

$$0 \leq Q(\lambda z + \mu z', \lambda z + \mu z') = |\lambda|^2 Q(z) + |\mu|^2 Q(z') + \lambda\overline{\mu} h(z, z') + \overline{\lambda}\mu\overline{h(z, z')}.$$

Supongamos λ real y tomemos $\mu = h(z, z')$, entonces la desigualdad precedente se convierte en

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \lambda^2 Q(z) + 2\lambda|h(z, z')|^2 + |h(z, z')|^2 Q(z') \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Como esta desigualdad tiene lugar para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ el discriminante del polinomio de segundo grado en λ, $P(\lambda)$, es negativo o nulo. Así obtenemos la desigualdad buscada

$$(4.3) \qquad |h(z, z')|^2 \leq Q(z)Q(z').$$

ii) Denotemos por g la parte real de h que es una forma bilineal real positiva. Tenemos que

$$Q(z + z') = Q(z) + Q(z') + 2g(z, z').$$

Utilizando la desigualdad de Schwarz se obtiene

$$Q(z + z') \leq Q(z) + Q(z') + 2\sqrt{Q(z)Q(z')},$$

es decir,

$$(4.4.) \qquad \sqrt{Q(z + z')} \leq \sqrt{Q(z)} + \sqrt{Q(z')}$$

$\square$

4.2 GENERALIDADES SOBRE ESPACIOS DE HILBERT

Sea E un espacio vectorial dotado de una forma bilineal simétrica g o de una forma hermítica h tal que la forma cuadrática Q asociada (a g o a h) sea definida positiva. Entonces podemos considerar en E una norma $\|\ \ \|$ al poner

$$||x|| = \sqrt{Q(x)}. \tag{4.5}$$

En adelante la forma bilineal g (o la forma hermítica h) se escribirá $\langle\ ,\ \rangle$. El espacio E con la norma asociada a $\langle\ ,\ \rangle$ se denominará *espacio prehilbertiano.*

4.2.1 Definición. *Un espacio de Hilbert es un espacio prehilbertiano completo.*

Sean $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espacio prehilbertiano y x e y dos vectores de E. Diremos que x e y son *ortogonales* si $\langle x, y\rangle = 0$.

Sea A una parte de E, llamamos *ortogonal* de A al conjunto

$$A^{\perp} = \left\{x \in E \ \mid \ \langle x, y\rangle = 0 \ \ \forall y \in A\right\}.$$

$A^{\perp}$ es un subespacio vectorial cerrado de E.

4.2.2 Proposición. *En un espacio prehilbertiano E tenemos la siguiente identidad (denominada del paralelogramo)*

$$\forall x, y \in E \quad ||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2). \tag{4.6}$$

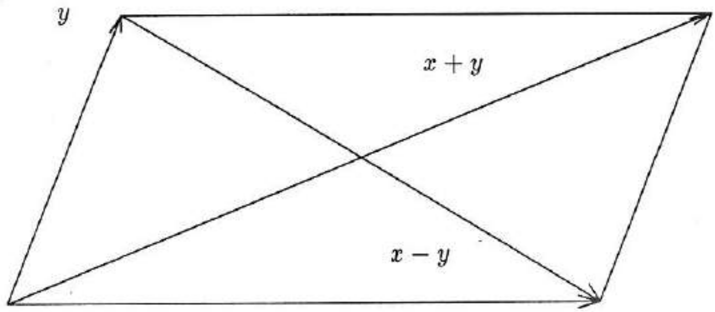

Fig. 4.1

Demostración. Calculemos

$$\begin{aligned}||x+y||^2 &= \langle x+y, x+y\rangle \\ &= ||x||^2 + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + ||y||^2.\end{aligned}$$

Análogamente

$$\begin{aligned}||x-y||^2 &= \langle x-y, x-y\rangle \\ &= ||x||^2 - \langle x,y\rangle - \langle y,x\rangle + ||y||^2.\end{aligned}$$

Sumando miembro a miembro se obtiene la igualdad buscada. □

Si x e y son ortogonales tenemos la igualdad conocida como *teorema de Pitágoras*:

(4.6') $$||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2.$$

Demos algunos ejemplos de espacios prehilbertianos y hilbertianos.

4.2.3 Ejemplos. i) El espacio $\mathbb{R}^n$ dotado del producto escalar

$$\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

es un espacio de Hilbert real.

ii) El espacio $\mathbb{C}^n$ dotado de producto hermítico

$$\langle z, z'\rangle = \sum_{k=1}^{n} z_k \overline{z'_k}$$

es un espacio de Hilbert complejo.

iii) Sea X un espacio métrico compacto dotado de una medida de probabilidad μ sobre los abiertos y denotemos por $C^0(X,\mathbb{C})$ al espacio de las funciones complejas continuas en X. Sean $f, g \in C^0(X,\mathbb{C})$, si

$$\langle f, g\rangle = \int_X f(x)\overline{g(x)}d\mu(x).$$

entonces $C^0(X,\mathbb{C})$ con este producto hermítico es un espacio prehilbertiano complejo.

iv) Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida. Entonces el espacio $L^2(\Omega, \mu)$ de las clases (módulo igualdad casi por todas partes) de funciones reales de cuadrado integrable con el producto escalar

$$\langle f, g \rangle = \int_\Omega f(\omega) g(\omega) d\mu(\omega)$$

es un espacio de Hilbert real.

Si $\Omega = \mathbb{N}$ y μ es la medida de contar entonces $L^2(\Omega, \mu)$ no es más que el espacio l^2 de las sucesiones reales de cuadrado sumable que, dotado del producto escalar

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} x_k y_k,$$

es un espacio de Hilbert. Es el espacio de Hilbert de dimensión infinita que generaliza de manera inmediata el ejemplo i).

Sean E un espacio prehilbertiano, A una parte de E y x un vector de E. La distancia de x a A es por definición $\inf ||x - y||$ cuando y varía en A. En general no hay razón para que exista un elemento de A que realice dicha distancia, pero si A es convexo y completo podemos siempre encontrar dicho elemento. De manera más precisa tenemos

4.2.4 Teorema. *Sean A una parte convexa completa de E y $x \in E$. Existe un vector $x_0 \in A$ tal que*

i) $d(x, A) = \inf_{y \in A} ||x - y|| = ||x - x_0||$.

ii) $\forall z \in A$ *tenemos que*

$$\mathcal{R}\langle x - x_0, x_0 - z \rangle \geq 0, \tag{4.7}$$

donde para todo número complejo ω, $\mathcal{R}\omega$ denota su parte real.

iii) El vector x_0 es único.

Demostración. i) Pongamos $\delta = d(x, A)$, entonces existe una sucesión (y_n) de puntos en A tal que $||x - y_n||^2$ converge a δ^2, es decir que para todo $\varepsilon > 0$ tenemos

$$||x - y_n||^2 \leq \delta^2 + \varepsilon^2.$$

para n suficientemente grande.

Apliquemos la identidad del paralelogramo a los vectores $x - y_n$ y $x - y_p$. Tenemos

$$||(x-y_n)-(x-y_p)||^2+||(x-y_n)+(x-y_p)||^2 = 2(||x-y_n||^2+||x-y_p||^2).$$

Como A es convexo $\frac{y_n+y_p}{2} \in A$, por consiguiente

$$\left|\left|x - \frac{y_n+y_p}{2}\right|\right|^2 \geq \delta^2.$$

Deducimos que para n y p suficientemente grandes

$$\begin{aligned} ||y_n - y_p||^2 &= 2\left(||x-y_n||^2 + ||x-y_p||^2 - 2\left|\left|x - \frac{y_n+y_p}{2}\right|\right|^2\right) \\ &\leq 4\varepsilon^2. \end{aligned}$$

La sucesión (y_n) es por tanto de Cauchy en la parte A que es completa. Entonces converge hacia un elemento x_0 que verifica necesariamente

$$||x_0 - x|| = \delta.$$

ii) Sean $z \in A$ y $\lambda \in [0,1]$. Entonces al ser A convexo resulta que el vector $(1-\lambda)x_0 + \lambda z$ está en A, y puesto que x_0 realiza la distancia mínima entre x y A tenemos que

$$||x - [(1-\lambda)x_0 + \lambda z]||^2 \geq ||x - x_0||^2.$$

Escribiendo $x - [(1-\lambda)x_0 + \lambda z]$ como $(x - x_0) + \lambda(x_0 - z)$ y calculando el cuadrado de su norma se obtiene

$$||x-x_0||^2 + 2\lambda\mathcal{R}\langle x-x_0, x_0-z\rangle + \lambda^2||x-x_0||^2 \geq ||x-x_0||^2.$$

Es decir,

$$\lambda(2\mathcal{R}\langle x-x_0, x_0-z\rangle + \lambda||x_0-z||^2) \geq 0.$$

Esta desigualdad se verifica para todo $z \in A$ y todo $\lambda \in [0,1]$ si y sólo si

$$\mathcal{R}\langle x-x_0, x_0-z\rangle \geq 0.$$

Esto prueba el punto ii).

iii) Sea $z \in A$ diferente de x_0. Entonces

$$||x - z||^2 = ||x - x_0||^2 + ||x_0 - z||^2 + 2\mathcal{R}\langle x - x_0, x_0 - z\rangle.$$

Como $\mathcal{R}\langle x - x_0, x_0 - z\rangle \geq 0$ se obtiene

$$||x - z||^2 \geq ||x - x_0||^2 + ||x_0 - z||^2 > ||x - x_0||^2$$

y esto demuestra la unicidad de x_0. □

Supongamos ahora que A es un subespacio vectorial V completo de E. Aplicando la desigualdad (4.7) a $z = 0$ y $z = 2x_0$ obtenemos que

$$\mathcal{R}\langle x - x_0, x_0\rangle = 0.$$

Y si $(x_0 - z) \in V$ y $(x_0 + z) \in V$,

$$\forall z \in V \quad \mathcal{R}\langle x - x_0, z\rangle = 0.$$

Tenemos por tanto el teorema siguiente.

4.2.5 Teorema. *Sea V un subespacio vectorial completo de un espacio prehilbertiano $(E, \langle\ ,\ \rangle)$. Entonces existe una aplicación $p_V : E \longrightarrow V$ que asocia a todo punto $x \in E$ un punto $x_0 = p_V(x)$ realizando la distancia mínima de x a V y caracterizada por*

$$\forall z \in V \quad \mathcal{R}\langle x - x_0, z\rangle = 0.$$

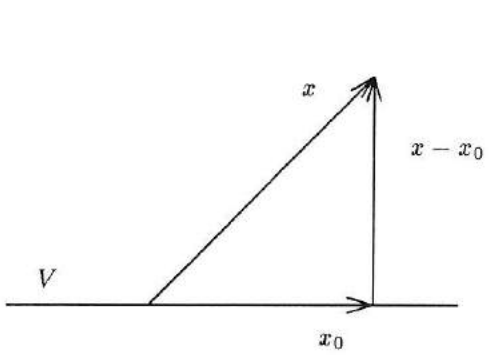

Fig. 4.2

La aplicación p_V se denomina *proyección ortogonal* de E en V. Es continua y de norma $|||p_V||| = 1$, en efecto para todo $x \in E$ tenemos que

$$||x||^2 = ||x - x_0||^2 + ||x_0||^2.$$

Luego $||p_V(x)|| \leq ||x||$ y como p_V es la identidad en V resulta que $|||p_V||| = 1$.

Es inmediato comprobar que el núcleo de la proyección p_V es el ortogonal $V^\perp$ de V. Se tiene entonces que

$$E = V \oplus V^\perp$$

ya que para todo $x \in E, x = x_0 + x - x_0$.

Dado que E es de Hilbert la condición de completitud de V equivale a que V sea cerrado, por tanto basta suponer que V es cerrado.

4.3 DUALIDAD EN ESPACIOS DE HILBERT

En un espacio prehilbertiano E el producto escalar (o hermítico) permite definir una clase particular de formas lineales continuas, las dadas por

$$\varphi_y : x \in E \longrightarrow \langle x, y \rangle \in \mathbb{K},$$

donde $y \in E$. La forma φ_y es lineal y por la desigualdad de Cauchy-Schwarz tenemos que

$$|\langle x, y \rangle| \leq ||x||.||y||.$$

Por tanto φ_y es continua y de norma menor o igual que $||y||$, si tomamos $x = \frac{y}{||y||}$ se obtiene que $|\langle x, y \rangle| = ||y||$. Luego φ_y tiene la misma norma que y. Como $\langle x, y \rangle = 0$ para todo $x \in E$ resulta que $y = 0$ y φ es inyectiva, por consiguiente $\varphi : y \in E \longrightarrow \varphi_y \in E'$ es una aplicación antilineal isométrica inyectiva (antilineal ya que $\varphi_{\lambda y} = \overline{\lambda}\varphi_y$).

Dado que E es de Hilbert no hay otras formas lineales continuas sobre E que las φ_y con $y \in E$. Esto lo probaremos en el siguiente teorema.

4.3.1 Teorema. *Sea E un espacio de Hilbert. Entonces $\varphi : E \longrightarrow E'$ es una biyección antilineal isométrica.*

Demostración. Bastará demostrar la exhaustividad pues el resto ya se ha hecho. Sea u una forma lineal continua sobre E. Si $u = 0$ es evidente que $u = \varphi_0$. Supongamos u no nula y sea H su núcleo que es un hiperplano cerrado (por tanto completo) de E, si a es un elemento no nulo ortogonal a H tenemos que

$$x \in H \Longleftrightarrow x \in \operatorname{Ker}(\varphi_a),$$

es decir, u y φ_a tienen el mismo núcleo, como $\operatorname{codim} H = 1$ existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tal que $u = \alpha\varphi_a$, es decir, $u = \varphi_{\overline{\alpha}a}$ y u es la imagen de $y = \overline{\alpha}a$ por la aplicación $\varphi : E \longrightarrow E'$. □

4.3.2 Proposición. *Sea E un espacio de Hilbert (real o complejo). Entonces el dual topológico E' de E admite una estructura canónica de espacio de Hilbert.*

Demostración. Sean $x', y' \in E'$, por el teorema 4.3.1 existen dos vectores $x, y \in E$ tales que $x' = \varphi_x$ y $y' = \varphi_y$. Ponemos

$$\langle x', y' \rangle = \langle y, x \rangle.$$

Definimos así en E' un producto escalar (si E es real) o un producto hermítico (si E es complejo), en efecto

$$\langle \lambda x', y' \rangle = \langle (\overline{\lambda} x)', y' \rangle = \langle y, \overline{\lambda} x \rangle = \lambda \langle y, x \rangle = \lambda \langle x', y' \rangle.$$

La aditividad es evidente. Por otra parte tenemos que

$$\langle x', x' \rangle = \langle x, x \rangle,$$

lo cual prueba que la forma $(x', y') \longrightarrow \langle x', y' \rangle$ así definida es a la vez hermítica y definida positiva. El espacio E' dotado del producto hermítico que acabamos de definir es antiisomorfo a E. □

4.3.3 Proposición. *Todo espacio de Hilbert E es reflexivo.*

Demostración. Sea $\varphi : E \longrightarrow E'$ (resp. $\varphi' : E' \longrightarrow E''$) la aplicación que a cada x asocia la forma lineal continua φ_x (resp. a x' asocia $\varphi_{x'}$) que acabamos de definir y $\Phi : E \longrightarrow E''$ la aplicación evaluación definida por $\Phi_x(y') = y'(x)$. Sea $x \in E$ cualquiera, entonces para todo $y' \in E'$ tenemos $\Phi_x(y') = y'(x) = \langle x, y \rangle$ donde y es tal que $\varphi_y = y'$ (véase el teorema 4.3.1). Por otra parte ${\varphi'}_{\varphi_x}(y') = \langle y', \varphi_x \rangle$ que es por definición igual (ver demostración de la proposición 4.3.2) a $\langle x, y \rangle$. Luego para todo $x \in E$ tenemos que $\Phi_x = \varphi' \circ \varphi(x)$, así pues la aplicación canónica $\Phi : E \longrightarrow E''$ es un isomorfismo (es composición de dos antiisomorfismos). Por consiguiente E es reflexivo. □

4.4 SUMAS DE HILBERT Y BASES DE HILBERT

En lo que sigue $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ será un espacio de Hilbert y $(V_i)_{i\in I}$ una familia de subespacios cerrados ortogonales dos a dos. Denotamos por V_0 el subespacio engendrado algebraicamente por todos los V_i. La adherencia V de V_0 se denomina *suma de Hilbert* de los subespacios V_i.

4.4.1 Teorema. *El subespacio V está formado por los vectores de E $\sum_{i\in I} x_i$ donde $(x_i)_{i\in I}$ es una familia sumable con $x_i \in V_i$ para cada $i \in I$. Por otra parte tenemos que*

$$\Big|\Big|\sum_{i\in I} x_i\Big|\Big|^2 = \sum_{i\in I} ||x_i||^2.$$

Demostración. Denotemos por $\mathcal{F}$ el conjunto de las partes finitas de I. Sea $x \in E$ tal que $x = \sum_{i\in I} x_i$ con $x_i \in V_i$. Puesto que por definición $x = \lim_{J\in\mathcal{F}}(\sum_{i\in J} x_i)$ vemos que $x \in V$.

Sea $x \in V$ y denotemos $x_i = p_i(x)$ la proyección ortogonal de x sobre V_i. Se verifica fácilmente que si $J \in \mathcal{F}$ la proyección ortogonal de x en $V_J = \oplus_{i\in J} V_i$ es igual a $x_J = \sum_{i\in J} x_i$ y que

$$||x||^2 = ||x_J||^2 + ||x - x_J||^2.$$

Entonces $x = \lim_{J\in\mathcal{F}} x_J$ no es más que $\sum_{i\in I} x_i$ y esto prueba que $(x_i)_i$ es una familia sumable que define x. $\square$

Sea $\mathcal{E} = (e_i)_{i\in I}$ un sistema de vectores en E. Diremos que $\mathcal{E}$ es *ortogonal* si $\langle e_i, e_j\rangle = 0$ para $i \neq j$, *ortonormal* (u *ortonormado*) si para todo i y todo j de I se tiene que $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_i^j$. Un sistema ortonormal es siempre libre. En efecto, sea $\{e_1, \dots, e_n\}$ una parte finita de $\mathcal{E}$ y $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ escalares tales que $\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n = 0$. Sea $k \in \{1, \dots, n\}$ entonces $0 = \langle e_k, \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n\rangle = \lambda_k$. Lo cual prueba que toda parte finita de $\mathcal{E}$ es libre y por tanto el sistema $\mathcal{E}$ es libre.

En adelante $\mathcal{E} = (e_i)_{i\in I}$ será un sistema ortonormal de E. El próximo objetivo es ver en qué condiciones este sistema basta –en un sentido que precisaremos– para generar todo el espacio.

Diremos que $\mathcal{E}$ es *maximal* o *total* o que $\mathcal{E}$ es una *base de Hilbert* de E si la suma de Hilbert de todos los subespacios cerrados ortogonales dos a dos $V_i = \mathbb{K}e_i$ con $i \in I$ es igual a E.

Sea $(e_1, \dots, e_n)$ una parte ortonormal de E y denotemos por M el subespacio (necesariamente cerrado) de E engendrado por los vectores $e_1, \dots, e_n$.

4.4.2 Proposición. *La proyección ortogonal x_0 de un vector x de E en el subespacio M viene dada por*

$$x_0 = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k.$$

Demostración. Como $x_0 \in M$ podemos escribir

$$x_0 = \sum_{k=1}^{n} a_k e_k.$$

Por otra parte, para todo $k = 1, \dots, n$ se ha de cumplir que $\langle x - x_0, e_k \rangle = 0$, es decir,

$$\langle x - \sum_{k=1}^{n} a_k e_k, e_k \rangle = 0.$$

De donde $a_k = \langle x, e_k \rangle$ para todo $k = 1, \dots, n$. La proposición queda entonces demostrada. □

De esta proposición deducimos que para toda parte finita J de I

$$\sum_{i \in J} |\langle x, e_i \rangle|^2 = ||x||^2 - d(x, M)^2,$$

donde $d(x, M)$ denota la distancia de x a M. Esto nos da la siguiente desigualdad (denominada *desigualdad de Bessel*).

$$\sum_{i \in I} |\langle x, e_i \rangle|^2 \leq ||x||^2. \tag{4.7}$$

El número de términos no nulos en la suma $\sum_{i \in I} |\langle x, e_i \rangle|^2$ es como mucho numerable. En efecto, para todo $n \in \mathbb{N}^*$ el conjunto

$$I_n = \left\{ i \in I \;\; : \;\; |\langle x, e_i \rangle| > \frac{1}{n} \right\} \tag{4.8}$$

es finito. Como

$$I_+ = \{ i \in I \;\; : \;\; |\langle x, e_i \rangle| \neq 0 \} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} I_n,$$

I_+ es como mucho numerable.

La desigualdad de Bessel nos permite definir una aplicación lineal continua de norma menor o igual que 1 de E en el espacio $l^2(I)$ (de las funciones de cuadrado integrable sobre el espacio medible $(I, \mathcal{P}(I))$ dotado de la medida de contar m): a cada x asociamos un $\widehat{x} \in l^2(I)$ dado por $\widehat{x}(i) = \langle x, e_i \rangle$.

4.4.3 Teorema. *La aplicación $x \in E \longrightarrow \widehat{x} \in l^2(I)$ es exhaustiva.*

Demostración. Sea $u \in l^2(I)$. Para todo $n \in \mathbb{N}^*$ denotemos por $\mathbf{1}_{I_n}$ la función indicatriz de la parte finita I_n de I (definida anteriormente) y pongamos

$$x_n = \sum_{i \in I_n} u(i) e_i.$$

Entonces $\widehat{x}_n = u \cdot \mathbf{1}_{I_n}$. Para $i \in I$ fijado la sucesión de escalares $\widehat{x}_n(i)$ converge hacia $u(i)$, es decir, $\widehat{x}_n$ converge simplemente hacia u. Por otra parte es evidente que para todo $n \in \mathbb{N}^*$ y para todo $i \in I$ se cumple

$$|u(i) - \widehat{x}_n(i)|^2 \leq |u(i)|^2.$$

Vemos por tanto que la sucesión de funciones $|u - \widehat{x}_n|^2$, definidas sobre el espacio de medida $(I, \mathcal{P}(I), m)$, converge simplemente a la función nula y está dominada por la función integrable $|u|^2$. Por el teorema de Lebesgue la sucesión de integrales

$$\int_I |u(i) - \widehat{x}_n(i)|^2 dm(i)$$

tiende a 0, es decir, $||u - \widehat{x}_n||_2 \to 0$ (donde $||\ \ ||_2$ denota la norma en $l^2(I)$), la sucesión $(\widehat{x}_n)$ es por tanto de Cauchy en $l^2(I)$. Como para todo n el término x_n es una combinación lineal finita de los e_i (que forman un sistema ortonormal), el cuadrado de la norma de x_n es igual a $\sum_{i \in I_n} |u(i)|^2$, así pues

$$||x_n - x_p|| = ||\widehat{x}_n - \widehat{x}_p||_2.$$

Esto prueba que la sucesión x_n es de Cauchy en E y por tanto converge a un elemento $x \in E$. Por construcción, x verifica que

$$\widehat{x}(i) = \langle x, e_i \rangle = \lim_{n \to +\infty} \langle x_n, e_i \rangle = \lim_{n \to +\infty} \widehat{x}_n(i) = u(i)$$

y entonces $\widehat{x} = u$. □

Ahora vamos a dar algunos criterios para decidir la maximalidad del sistema ortonormal $\mathcal{E} = (e_i)_{i \in I}$.

4.4.4 Teorema. *Las afirmaciones siguientes son equivalentes*

i) $\mathcal{E}$ *es maximal (o* $\mathcal{E}$ *es una base de Hilbert de* E*),*

ii) el subespacio vectorial V_0 *engendrado algebraicamente por los* e_i *es denso en* E*,*

iii) para todo $x \in E$

$$||x||^2 = \sum_{i \in I} |\widehat{x}(i)|^2 \quad \textit{(igualdad de Parseval)},$$

iv) para todo $x \in E$ *y todo* $y \in E$

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i \in I} \widehat{x}(i)\overline{\widehat{y}(i)}.$$

Demostración. Seguiremos el esquema siguiente

$$i) \Longrightarrow ii) \Longrightarrow iii) \Longrightarrow iv) \Longrightarrow i).$$

$i) \Longrightarrow ii)$

Supongamos que V_0 no es denso y denotemos por V su adherencia que está contenida estrictamente en E. Entonces existe un vector e no nulo (de norma 1) de E que es ortogonal a todos los e_i, el sistema $\mathcal{E}' = \mathcal{E} \cup \{e\}$ es ortonormal y contiene estrictamente a $\mathcal{E}$, esto contradice la maximalidad de $\mathcal{E}$, por tanto $V = E$, es decir, V_0 es denso en E.

$ii) \Longrightarrow iii)$

Sea $x \in E$, entonces para todo $\varepsilon > 0$ existen un número finito de vectores $e_{i_1}, \dots e_{i_n}$ y de escalares $\lambda_{i_1}, \dots \lambda_{i_n}$ tales que

$$||x - z|| < \varepsilon$$

con $z = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{i_k} e_{i_k}$. Sea x_0 la proyección ortogonal de x en el subespacio M de dimensión finita (por tanto cerrado en E) engendrado por los vectores $e_{i_1}, \dots, e_{i_n}$, entonces x_0 viene dado por

$$x_0 = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_{i_k}\rangle e_{i_k} = \sum_{k=1}^{n} \widehat{x}(i_k) e_{i_k}$$

y además

$$||x_0||^2 = \sum_{k=1}^{n} |\widehat{x}(i_k)|^2.$$

Así tenemos que

$$||x - x_0|| \leq ||x - z|| < \varepsilon.$$

Esto implica que $(||x|| - \varepsilon)^2 < ||x_0||^2 = \sum_{k=1}^{n} |\widehat{x}(i_k)|^2$ pero $\sum_{k=1}^{n} |\widehat{x}(i_k)|^2 \leq \sum_{i\in I} |\widehat{x}(i)|^2$. De donde finalmente

$$(||x|| - \varepsilon)^2 < \sum_{i\in I} |\widehat{x}(i)|^2.$$

Como la desigualdad es cierta para todo $\varepsilon > 0$ resulta que

$$||x||^2 \leq \sum_{i\in I} |\widehat{x}(i)|^2.$$

De esta desigualdad y la de Bessel deducimos que

$$||x||^2 = \sum_{i\in I} |\widehat{x}(i)|^2.$$

Esto prueba la implicación $ii) \Longrightarrow iii)$.
$iii) \Longrightarrow iv)$
Denotemos por $\langle\ ,\ \rangle_2$ el producto escalar o hermítico en $l^2(I)$. Entonces la afirmación iii) significa que para todo $x \in E$ $\langle x, x\rangle = \langle \widehat{x}, \widehat{x}\rangle_2$. Sean $x, y \in E$ y $\lambda \in \mathbb{K}$. La condición iii) nos da

$$\langle x + \lambda y, x + \lambda y\rangle = \langle \widehat{x} + \lambda\widehat{y}, \widehat{x} + \lambda\widehat{y}\rangle_2.$$

Es decir,

$$\overline{\lambda}\langle x, y\rangle + \lambda\langle y, x\rangle = \overline{\lambda}\langle \widehat{x}, \widehat{y}\rangle_2 + \lambda\langle \widehat{y}, \widehat{x}\rangle_2.$$

Tomemos $\lambda = 1$, entonces la igualdad se transforma en

$$\mathcal{R}\langle x, y\rangle = \mathcal{R}\langle \widehat{x}, \widehat{y}\rangle_2.$$

Si tomamos esta vez $\lambda = i$ la desigualdad se transforma en

$$\mathcal{I}\langle x, y\rangle = \mathcal{I}\langle \widehat{x}, \widehat{y}\rangle_2,$$

donde para todo complejo ω, $\mathcal{I}\omega$ denota su parte imaginaria. Los dos escalares $\langle x, y\rangle$ y $\langle \widehat{x}, \widehat{y}\rangle_2$ tienen por tanto la misma parte real y la misma parte imaginaria y por tanto son iguales.

$iv) \Longrightarrow i)$
Supongamos que la afirmación i) es falsa es decir, que $\mathcal{E}$ no es maximal. Entonces existe un vector $e \in E$ de norma 1 ortogonal a todos los vectores del sistema $\mathcal{E}$. Si ponemos $x = y = e$ la afirmación iv) nos dice que $\langle x, y \rangle = 0$ entonces $\langle x, y \rangle = ||e||^2 = 1$. Esto es una contradicción y por tanto $\mathcal{E}$ es maximal. □

Hagamos algunos comentarios. Sean E y F dos espacios de Hilbert, una aplicación lineal $u : E \longrightarrow F$ se denomina *unitaria* si $\forall x, y \in E$

$$\langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle,$$

esto es, u preserva el producto escalar de vectores. Dicha aplicación es una isometría pues $||u(x)||^2 = \langle u(x), u(x) \rangle = \langle x, x \rangle = ||x||^2$, es entonces una aplicación continua. Dado que u es biyectiva diremos que u es un *isomorfismo de espacios de Hilbert.* Cuando $E = F$ diremos que u es un *automorfismo* del espacio de Hilbert E.

La afirmación iv) significa que la aplicación $x \in E \longrightarrow \widehat{x} \in l^2(I)$ es un isomorfismo de espacios de Hilbert.

Dado que $I = \mathbb{N}$ el espacio de Hilbert E es isomorfo al espacio l^2 de las sucesiones de cuadrado sumable dotado del producto hermítico habitual

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n \overline{y}_n.$$

En este caso diremos que E es *separable.*

En un espacio de Hilbert no reducido a $\{0\}$ siempre existen sistemas ortonormados. Basta tomar un vector y darle una norma o bien aplicar el método de ortonormalización de Schmidt a cualquier familia numerable libre. El teorema siguiente afirma la existencia de bases de Hilbert sobre cualquier espacio de Hilbert.

4.4.5 Teorema. *Sea $\mathcal{E}_0$ un sistema ortonormal de E. Entonces existe una base de Hilbert $\mathcal{E}$ que contiene a $\mathcal{E}_0$.*

Demostración. Sea $\mathcal{S}$ el conjunto (no vacío) de todos los sistemas ortonormados de E que contienen a $\mathcal{E}_0$ ordenado por la inclusión. Entonces $\mathcal{S}$ contiene una parte maximal totalmente ordenada $\mathcal{S}_0$. Sea

$$\mathcal{E} = \bigcup_{S \in \mathcal{S}_0} S.$$

Entonces $\mathcal{E}$ es un sistema ortonormal maximal que contiene a $\mathcal{E}_0$. En efecto, sean $x, y \in \mathcal{E}$, entonces existen $S_1, S_2 \in \mathcal{S}_0$ tales que $x \in S_1$ y $y \in S_2$. Pero como $\mathcal{S}_0$ es totalmente ordenado tenemos que $S_1 \subset S_2$ o $S_2 \subset S_1$. Supongamos para fijar las ideas que $S_1 \subset S_2$. Entonces $x, y \in S_2$, por tanto $\langle x, y\rangle = 0$ si $x \neq y$ y $\langle x, y\rangle = 1$ si $x = y$ ya que S_2 es ortonormal. Luego $\mathcal{E}$ es ortonormal. La maximalidad de $\mathcal{E}$ se demuestra de la manera habitual vista ya otras veces a lo largo de este curso. $\square$

Acabaremos el capítulo con un ejemplo importante de base de Hilbert en el espacio de Hilbert de las funciones medibles de cuadrado integrable sobre la circunferencia unidad de $\mathbb{R}^2$.

4.5 UN EJEMPLO DE BASE DE HILBERT

La circunferencia, que denotaremos $\mathbb{S}^1$, puede verse como el subgrupo multiplicativo de los números complejos de módulo 1. Un elemento $z \in \mathbb{S}^1$ puede parametrizarse por su ángulo θ (que varía en $\mathbb{R}$) con el eje real. La aplicación

$$p : \theta \in \mathbb{R} \longrightarrow e^{i\theta}$$

es un homomorfismo exhaustivo del grupo aditivo $\mathbb{R}$ en $\mathbb{S}^1$. Una función f sobre $\mathbb{S}^1$ es por tanto una función $\widetilde{f}$ sobre $\mathbb{R}$ que verifica

$$\widetilde{f}(\theta + 2\pi) = \widetilde{f}(\theta),$$

es decir, $\widetilde{f}$ es una función periódica en $\mathbb{R}$ de periodo 2π. En lo que sigue no distinguiremos f en $\mathbb{S}^1$ de la función periódica $\widetilde{f}$ en $\mathbb{R}$ que define y que es necesariamente de la forma $\widetilde{f} = f \circ p$. En el espacio $L^2(\mathbb{S}^1)$ de las funciones complejas de cuadrado integrable sobre $\mathbb{S}^1$ (que será por definición el espacio de las funciones periódicas de periodo 2π sobre $\mathbb{R}$ cuya restricción al intervalo $[0, 2\pi]$ es de cuadrado integrable respecto la medida de Lebesgue) tenemos el producto hermítico

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\overline{g(\theta)}d\lambda(\theta)$$

que lo convierte en espacio de Hilbert. Para todo $n \in \mathbb{Z}$ la función $e^{in\theta}$ está en $L^2(\mathbb{S}^1)$ y es fácil ver que el sistema

$$\mathcal{E} = (e^{in\theta})_{n\in\mathbb{Z}}$$

es ortonormal. Indiquemos cómo demostrar que $\mathcal{E}$ es de hecho una base de Hilbert de $L^2(\mathbb{S}^1)$. Para ello necesitaremos recordar el teorema de Stone-Weierstrass; su resultado tiene una gran importancia pues nos da las condiciones que permiten aproximar uniformemente funciones continuas de un espacio métrico compacto mediante elementos particulares. Enunciaremos el teorema (quien desee una demostración puede consultar Rudin (1985)).

Sea X un espacio métrico compacto con por lo menos dos elementos y $C^0(X,\mathbb{C})$ el espacio de Banach de las funciones complejas continuas sobre X con la norma

$$||f||_\infty = \sup_{x\in X} |f(x)|.$$

En $C^0(X,\mathbb{C})$ podemos introducir una estructura multiplicativa poniendo para cada $f,g \in C^0(X,\mathbb{C})$ el producto $(f.g)(x) = f(x)g(x)$. Se verifica fácilmente que $||f\cdot g||_\infty \leq ||f||_\infty.||g||_\infty$. Diremos que $C^0(X,\mathbb{C})$ es un *álgebra de Banach*. Una subálgebra de $C^0(X,\mathbb{C})$ es un subespacio vectorial A estable por multiplicación, es decir, si $f,g \in A$ entonces $f\cdot g \in A$. Diremos que A *separa puntos* de X si para cualesquiera $x,y \in X$ distintos existe una función $f \in A$ tal que $f(x) \neq f(y)$.

4.5.1 Teorema de Stone-Weierstrass. *Sea A una subálgebra del espacio $C^0(X,\mathbb{C})$ que separa puntos y tal que para todo $x \in X$ existe una $f \in A$ tal que $f(x) \neq 0$. Entonces A es densa en $C^0(X,\mathbb{C})$.*

Este teorema nos dice por ejemplo que el conjunto de las funciones polinómicas en el intervalo $[0,1]$ es denso en $C^0([0,1],\mathbb{C})$.

4.5.2 Algunas observaciones. i) La circunferencia $\mathbb{S}^1$ es un espacio métrico compacto (la distancia entre dos puntos es igual a la longitud del arco más pequeño los une). Por tanto podemos aplicar a una subálgebra A de $C^0(\mathbb{S}^1,\mathbb{C})$ (verificando las condiciones necesarias) el teorema de Stone-Weierstrass.

ii) $C^0(\mathbb{S}^1,\mathbb{C})$ es un subespacio vectorial (no cerrado) de $L^2(\mathbb{S}^1)$ respecto a la norma L^2, $||\ ||$. Por otra parte tenemos que $||f|| \leq ||f||_\infty$ para toda función $f \in C^0(\mathbb{S}^1,\mathbb{C})$. Luego, si una parte de $C^0(\mathbb{S}^1,\mathbb{C})$ es densa para la norma de la convergencia uniforme será densa para la norma $||\ ||$.

iii) Sea A el subespacio vectorial engendrado algebraicamente por los vectores $e^{in\theta}$, $n \in \mathbb{Z}$. Los elementos de A son los *polinomios trigonométricos*

$$\sum_{k=n_0}^{n_1} a_k e^{ik\theta} \quad \text{con} \quad n_0, n_1 \in \mathbb{Z}.$$

Es fácil ver que el producto de dos polinomios trigonométricos es un polinomio trigonométrico, A es por tanto una subálgebra de $C^0(\mathbb{S}^1, \mathbb{C})$ (compruébese). Se verifica fácilmente también que los elementos de A separan puntos de $\mathbb{S}^1$ entonces, aplicando el teorema de Stone-Weierstrass:

La subálgebra A es densa en $C^0(\mathbb{S}^1, \mathbb{C})$ respecto a la norma $\| \ \|_\infty$ y por tanto densa para la norma $\| \ \|$ inducida por $L^2(\mathbb{S}^1)$.

La completitud del sistema $\mathcal{E} = (e^{in\theta})_{n\in\mathbb{Z}}$ se deduce del siguiente teorema del cual podemos encontrar una demostración en Rudin (1985).

4.5.3 Teorema. *El espacio $C^0(\mathbb{S}^1, \mathbb{C})$ es denso en $L^2(\mathbb{S}^1)$ respecto a la norma $\| \ \|$.*

Por lo tanto toda función $f \in L^2(\mathbb{S}^1)$ se desarrolla en forma de serie de Fourier

$$f(\theta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{in\theta} \tag{4.9}$$

donde los números c_n, llamados *coeficientes de Fourier* de f, están dados por

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) e^{-in\theta} d\theta. \tag{4.10}$$

Los coeficientes c_n no cambian si modificamos la función f en un conjunto de medida nula. Esto explica el hecho que en general la suma de la serie de Fourier de una función $f \in L^2(\mathbb{S}^1)$ no converge simplemente hacia f. No obstante, si f satisface la condición que llamamos *condición de Dini* que afirma la existencia de un $\delta > 0$ tal que la integral

$$\int_{-\delta}^{\delta} \left| \frac{f(\theta + t) - f(\theta)}{t} \right| dt$$

está definida; entonces la serie de Fourier de f converge hacia f en el punto θ (véase Kolmogorov (1974)). Por ejemplo, si f es continua y tiene derivada por la derecha y por la izquierda en todo punto, entonces la serie de Fourier de f converge hacia f en todas partes.

4.6 EJERCICIOS

4.A Sea $(E, || \ ||)$ un espacio normado real tal que para todo $x \in E$ y todo $y \in E$

$$||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2),$$

es decir, x e y verifican la identidad del paralelogramo.

Demostrar que la norma $|| \ ||$ puede asociarse a un producto escalar $\langle \ , \ \rangle$.

4.B Dar una demostración fácil de la forma analítica del teorema de Hahn-Banach en un espacio de Hilbert.

4.C Sean (E, d) un espacio métrico y M una parte de E. Diremos que $A \subset E$ es una ε-red (con $\varepsilon > 0$) de M si para todo $m \in M$ existe un $a \in A$ tal que $d(a, m) \leq \varepsilon$. Si $\varepsilon' \geq \varepsilon$ entonces toda ε-red es una ε'-red. Diremos que M es *totalmente acotada* si para todo $\varepsilon > 0$ existe una ε-red finita en M.

i) Demostrar que en E toda parte totalmente acotada es acotada en el sentido habitual.

ii) Demostrar que toda parte acotada del espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ es totalmente acotada.

Supongamos que E es el espacio de Hilbert habitual l^2 de las sucesiones reales de cuadrado sumable.

iii) Demostrar que la esfera unidad de l^2 no es totalmente acotada aunque sea acotada.

Admitiremos que en un espacio métrico completo toda parte cerrada totalmente acotada es compacta.

En l^2 denotamos por Π el *paralelepípedo de Hilbert*, es decir, el conjunto de las sucesiones

$$(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$$

tales que

$$|x_1| \leq 1, \ \ |x_2| \leq \frac{1}{2} \ \ \dots \ \ |x_n| \leq \frac{1}{2^{n-1}} \ \ \dots$$

iv) Demostrar que Π es compacto. (*Para todo* $\varepsilon > 0$, *considerar un* n *tal que* $\frac{1}{2^{n-1}} < \frac{\varepsilon}{2}$, *proyectar* $x = (x_1, x_2, \dots,)$ *sobre el subespacio* E_n *(de dimensión finita) engendrado por los* n *primeros vectores de la base ortonormal canónica y evaluar la distancia de* x *a su proyección.*)

4.D Sea $\rho : [-1, +1] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ una función medible, acotada y estrictamente positiva fuera de un conjunto de medida nula. Denotamos por E_ρ el espacio de las clases de funciones complejas medibles de cuadrado integrable sobre $[-1, +1]$ con la medida $\mu = \rho\lambda$, donde λ es la medida de Lebesgue de $[-1, +1]$.

i) Demostrar que si $\rho' \leq \rho$ entonces $E_\rho \subset E_{\rho'}$. Dar un ejemplo donde esta inclusión sea estricta.

Supongamos $\rho = 1$ idénticamente.

ii) Demostrar que el subespacio $C^0([-1, +1], \mathbb{C})$ de las funciones continuas sobre $[-1, +1]$ no es cerrado en E_1.

4.E Sea E un espacio de Hilbert.

i) Demostrar que si M es un subespacio cerrado entonces $(M^\perp)^\perp = M$.

ii) ¿Es cierto si M no es cerrado?

4.F Denotamos por E el espacio de las sucesiones reales $(x_k)_{k\geq 1}$ tales que $\sum_k x_k^2 < +\infty$ y $(\lambda_k)_{k\geq 1}$ una sucesión en $(0, 1]$. Definimos un producto escalar en E poniendo

$$\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k x_k y_k.$$

i) Demostrar que en general E con este producto escalar no es espacio de Hilbert (es decir, no es completo).

ii) Supongamos $\lambda_k = 1$ para todo k. Fijamos n y ponemos

$$M = \Big\{x \in E \Big| \sum_{k=1}^{n} x_k = 0\Big\}.$$

Encontrar un subespacio N de E tal que $E = M \oplus N$.

4.G En el espacio $L^2((-1, +1))$ consideramos el triángulo Δ cuyos vértices son las funciones $f(x) = 0$, $g(x) = 1$ y $h(x) = x$.

Calcular los ángulos de Δ.

4.H Sean $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espacio de Hilbert, V un subespacio de dimensión 1 y $V^\perp$ su ortogonal. Sea $a \in V$ no nulo. Demostrar que la distancia $d(x, V^\perp)$ de todo $x \in E$ a $V^\perp$ viene dada por

$$d(x, V^\perp) = \frac{|\langle x, a\rangle|}{||a||}.$$

4.I Denotamos por $E = L^2([0,1])$ el espacio de Hilbert de las clases de funciones reales de cuadrado integrable.

i) Demostrar que

$$V = \left\{ f \in E \;\middle|\; \int_0^1 f(x)dx = 0 \right\}$$

es un hiperplano cerrado de E. ¿Cual es su ortogonal?

ii) Calcular la distancia de la función $f(x) = x^2$ al subespacio V.

4.J ¿Cuál es en l^2 la distancia $d_n = d(x, V_n)$ de $x = (1, 0, \ldots, 0, \ldots)$ al subespacio vectorial

$$V_n = \left\{ y \in l^2 \;\middle|\; \sum_{k=1}^{n} x_k = 0 \right\}?$$

Calcular $\lim_{n\to+\infty} d_n$.

CAPÍTULO 5

OPERADORES ACOTADOS

Muchas cuestiones en ciencias exactas y aplicadas dan lugar a problemas que requieren la resolución de ecuaciones diferenciales o integrales. Resolver estas ecuaciones consiste, la mayoría de las veces, en "invertir" aplicaciones definidas en un espacio funcional adecuado. Dado que estas ecuaciones son lineales las aplicaciones asociadas son también lineales. Se les denomina *operadores*. El objetivo de este capítulo es estudiar los *operadores acotados*, es decir, aquellos que son continuos para la topología del espacio normado en el cual actúan. Haremos este estudio en espacios normados cualesquiera. Algunos teoremas únicamente serán ciertos en espacios de Banach, cosa que precisaremos en su momento.

5.1 DEFINICIONES Y PRIMERAS PROPIEDADES

Sea $(E, ||\ \ ||)$ un espacio normado sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ (que será siempre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$).

5.1.1 Definición. *Llamamos operador acotado o simplemente operador sobre E a toda aplicación lineal continua $T : E \longrightarrow E$.*

Es claro que el conjunto $L(E)$ de los operadores sobre E es un espacio vectorial normado respecto a $\mathbb{K}$, la norma viene definida por

$$|||T||| = \sup_{||x|| \leq 1} ||T(x)||.$$

Además, la composición natural entre aplicaciones lo convierte en un álgebra que verifica

$$|||ST||| \leq |||S|||.|||T|||.$$

Este álgebra tiene como unidad el operador identidad I de E en E.

Un elemento $T \in L(E)$ se dice *invertible por la izquierda* si existe un elemento $S \in L(E)$ tal que $ST = I$, *invertible por la derecha* si existe $S \in L(E)$ tal que $TS = I$ e *invertible* si es invertible por la izquierda y por la derecha y los dos inversos coinciden. En este último caso el inverso de T se escribirá T^{-1}. Denotamos $GL(E)$ al conjunto de los elementos invertibles de E; es un grupo respecto a la multiplicación de operadores.

5.1.2 Teorema. *Si E es completo, el grupo $GL(E)$ es abierto en $L(E)$.*

Demostración. Se trata de probar que para todo $T \in GL(E)$ existe un $\varepsilon > 0$ tal que la bola $B(T, \varepsilon)$ de $L(E)$ esté contenida en $GL(E)$.

i) Demostremos que todo operador S suficientemente cercano a I es invertible. Si $|||T||| < 1$ tenemos que para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple $|||T^n||| \leq |||T|||^n < 1$. Como E es completo, $L(E)$ también lo es. La serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} T^n = I + T + T^2 + \dots$$

converge por tanto en $L(E)$ y tiene por límite el inverso del operador $S = I - T$.

ii) Sean $T \in GL(E)$ y $X \in L(E)$ tales que $|||X - T||| < \frac{1}{|||T^{-1}|||}$. Entonces

$$\begin{aligned} |||T^{-1}X - I||| &= |||T^{-1}(X - T)||| \\ &\leq |||T^{-1}|||.|||X - T||| \\ &< |||T^{-1}||| \frac{1}{|||T^{-1}|||}. \\ &< 1 \end{aligned}$$

Por i) el operador $T^{-1}X = I - (I - T^{-1}X)$ es invertible, por consiguiente X es invertible. El conjunto $GL(E)$ es por tanto abierto. □

Vemos que la completitud del espacio E es esencial. Lo será también para establecer otras propiedades, como ejemplo tenemos el siguiente resultado.

5.1.3 Teorema. *Supongamos E completo y sea T un operador acotado en E. Entonces*

i) T invertible por la izquierda implica

ii) existe una constante real $m > 0$ tal que para todo $x \in E$

$$||Tx|| \geq m||x|| \tag{5.1}$$

que a su vez implica

iii) T inyectivo.

Si además tenemos que

(H) $\mathrm{Im}(T)$ *admite un suplementario topológico V*

entonces las tres afirmaciones son equivalentes.

Demostración. Seguiremos el esquema siguiente

$$\text{i)} \Longrightarrow \text{ii)} \Longrightarrow \text{iii)}$$

para el caso general. Bajo la hipótesis (H) veremos iii)$\Longrightarrow$i).

i)$\Longrightarrow$ii)
Sea S el inverso por la izquierda de T. Entonces $ST = I$ esto es, para todo $x \in E$ se tiene que $x = (ST)x$. Como S es acotado

$$||x|| = ||(ST)x|| \leq |||S|||.||Tx||.$$

Basta tomar entonces $m = \frac{1}{|||S|||}$.

ii)$\Longrightarrow$iii)
Si T verifica $||Tx|| \geq m||x||$ para $m > 0$ entonces $Tx = 0$ implica que $x = 0$ es decir, T es inyectivo.

Supongamos ahora la hipótesis (H) satisfecha y demostremos la implicación iii)$\Longrightarrow$i).

Si T es inyectivo T es un isomorfismo (algebraico) continuo de E en $\mathrm{Im}(T)$. Como $\mathrm{Im}(T)$ admite un suplementario topológico es cerrado en E, es pues un espacio de Banach. Resulta que

$$T : E \longrightarrow \mathrm{Im}(T)$$

es un isomorfismo topológico. La restricción T_0 de T a $\mathrm{Im}(T)$ admite por tanto un inverso T_0^{-1}. Sea P la primera proyección que es continua

$$E = \mathrm{Im}(T) \oplus V \longrightarrow \mathrm{Im}(T).$$

Es fácil ver entonces que $S = T_0^{-1}P$ verifica $ST = I$. $\square$

5.1.4 Ejemplos. Empezaremos por los más simples que son los operadores en espacios de dimensión finita.

i) Toda aplicación lineal $T : E = \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n$ es un operador acotado. Un tal operador queda determinado completamente por su matriz $A = (a_{ij})$ relativa a una base fijada $(e_1, \ldots, e_n)$ (por ejemplo, la base canónica). Para todo vector

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

tenemos que

$$Tx = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n \end{pmatrix}.$$

ii) Sean E un espacio prehilbertiano y V un subespacio completo. Entonces la proyección ortogonal $P : E \longrightarrow V$ define un operador sobre E de norma igual a 1.

iii) Sea $E = C^0([a,b], \mathbb{C})$ el espacio de las funciones complejas continuas en el intervalo $[a,b]$ dotado de la norma de la convergencia uniforme

$$||f||_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|.$$

Para toda función $f \in E$ ponemos

$$T_\varphi(f)(x) = \varphi(x)f(x),$$

donde $\varphi \in E$ es una función fijada. Entonces la aplicación T_φ así definida es un operador sobre E. En efecto, la linealidad es inmediata y por otra parte tenemos que

$$||T_\varphi(f)||_\infty = ||\varphi f||_\infty \leq ||\varphi||_\infty . ||f||_\infty$$

Esto prueba que T_φ es un operador acotado en E.

Pongamos ahora

$$T(f)(x) = \int_a^b K(x,y)f(y)dy,$$

donde $K : [a,b] \times [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ es una función continua. Entonces T es lineal y verifica

$$\begin{aligned} ||T(f)||_\infty &= \sup_{x\in[a,b]} \left| \int_a^b K(x,y)f(y)dy \right| \\ &\leq \int_a^b \sup_{x,y\in[a,b]} |K(x,y)| \sup_{y\in[a,b]} |f(y)|dy \\ &\leq (b-a)||K||_\infty ||f||_\infty \end{aligned}$$

Luego T es un operador sobre E.

Sea g un homeomorfismo de $[a,b]$ y pongamos

$$T_g(f) = f \circ g.$$

Entonces $T_g : E \longrightarrow E$ es una aplicación lineal que verifica

$$||T_g(f)||_\infty = ||f||_\infty,$$

es decir, T_g es un operador sobre E.

iv) En el espacio l^2 de las sucesiones reales de cuadrado sumable consideramos la aplicación

$$T(x) = (x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \dots, \frac{x_n}{n}, \dots).$$

Es claro que T es un operador sobre l^2 con norma 1.

Sea ahora T un operador en un espacio normado E. Entonces la aplicación lineal continua $T : E \longrightarrow E$ admite una traspuesta $T' : E' \longrightarrow E'$ que, recordemos, viene definida por

$$T'(y')(x) = y'(Tx).$$

La aplicación T' se escribirá T^* y será denominada *operador adjunto* de T. Es un operador sobre E' con igual norma que T.

5.2 ESPECTRO DE UN OPERADOR

Sea $T : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n$ una aplicación lineal. Si fijamos una base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de $E = \mathbb{K}^n$ entonces el conocimiento de T se reduce al de su matriz A respecto $\mathcal{B}$. Es sabido que si cambiamos de base, la matriz A cambia (aunque la aplicación T es todavía la misma), es por tanto natural preguntarse si existe una base de E en la cual la matriz se escriba del modo más simple posible, por ejemplo diagonal (¡no se puede pedir más!). En cada uno de los vectores de esta base, T actúa como una homotecia de razón $\lambda \in \mathbb{K}$. El número λ se denomina *valor propio* de T. Esto nos lleva de manera natural a plantear el mismo problema para un operador en un espacio normado de dimensión infinita, pero en esta situación la noción de "valor propio" no es suficiente y, en general, difiere totalmente del caso de dimensión finita. Este es el caso que trataremos de un modo general en este apartado. La teoría espectral (es decir, el estudio del espectro de un operador) es suficientemente rica para una clase de operadores que estudiaremos en el apartado 3 y de manera aún más precisa en los espacios de Hilbert del capítulo 6.

E será un espacio normado sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ y T un operador sobre E.

5.2.1 Definición. *Llamamos valor espectral de T a todo número complejo λ tal que el operador $T - \lambda I$ no sea invertible en $L(E)$. Diremos que λ es valor propio de T si $T - \lambda I$ no es inyectivo.*

Evidentemente todo valor propio es valor espectral. El conjunto de los valores espectrales de T se denomina *espectro* de T y se escribirá $\sigma(T)$. Los valores propios constituyen una parte denominada *espectro puntual* de T, el complementario en $\sigma(T)$ del espectro puntual se denomina *espectro continuo*. Todo número en $\mathbb{C} - \sigma(T)$ se denomina *valor regular* de T. Es evidente que λ es valor regular de T si y sólo si el operador

$$R_\lambda = (T - \lambda I)^{-1}, \tag{5.2}$$

denominado *resolvente* de T, existe y es acotado. La inclusión del espectro puntual en $\sigma(T)$ es en general estricta.

5.2.2 Teorema. *Sea T un operador sobre E que supondremos completo. Entonces el espectro $\sigma(T)$ de T es un conjunto cerrado de $\mathbb{C}$ contenido en el disco cerrado $D(0, |||T|||)$.*

Demostración. i) Demostremos que el conjunto $\mathbb{C} - \sigma(T)$ de valores regulares de T es abierto. Sea $\lambda \in \mathbb{C} - \sigma(T)$, entonces el operador $T - \lambda I$ es invertible en $L(E)$, o en otros términos $T - \lambda I \in GL(E)$. Pero $GL(E)$ es abierto, existe por tanto un $\varepsilon > 0$ tal que para todo $\mu \in D(0, \varepsilon)$ el operador $T - (\lambda + \mu)I \in GL(E)$. El conjunto $\sigma(T)$ es por tanto cerrado.

ii) Demostremos que todo valor fuera del disco $D(0, |||T|||)$ es regular lo cual probará que $\sigma(T) \subset D(0, |||T|||)$. Sea $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $|\lambda| > |||T|||$, tenemos que

$$T - \lambda I = -\lambda \left(I - \frac{1}{\lambda} T \right)$$

Como $\frac{|||T|||}{|\lambda|} < 1$ y E es completo, la serie

$$-\frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{\lambda^n} \tag{5.3}$$

converge en $L(E)$ y tiene por límite el operador $(T - \lambda I)^{-1}$. □

De hecho podemos presentar el resultado de la manera alternativa siguiente: sea T un operador sobre E, llamamos *radio espectral* de T al número real positivo

$$\rho(T) = \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|. \tag{5.4}$$

Es claro después del teorema que $\rho(T) \leq |||T|||$ y la desigualdad puede ser estricta, como veremos en un ejemplo posterior. El teorema siguiente, del cual se da una demostración en Rudin (1985) [en el marco de las álgebras de Banach que generalizan $L(E)$], da una fórmula para el cálculo del radio espectral.

5.2.3 Teorema (fórmula del radio espectral). *Sea T un operador completo sobre E, entonces la sucesión $|||T^n|||^{\frac{1}{n}}$ converge y*

$$\rho(T) = \lim_{n \to +\infty} |||T^n|||^{\frac{1}{n}}. \tag{5.5}$$

Vamos a ver un teorema importante sobre el espectro y la resolvente, como función de los valores regulares, de un operador acotado en un espacio de Banach.

5.2.4 Teorema. *Sean E un espacio de Banach complejo no reducido a $\{0\}$ y $T \in L(E)$.*

i) Para todo $x \in E$ y toda forma lineal continua x' en E la función $\varphi : \mathbb{C} - \sigma(T) \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por $\varphi(\lambda) = \langle R_\lambda(x), x' \rangle$ (donde R_λ es la resolvente de T) es holomorfa y tiende a 0 cuando $|\lambda|$ tiende a infinito.

ii) El espectro $\sigma(T)$ de T es no vacío.

Demostración. i) Vamos primeramente a demostrar que la aplicación

$$\lambda \in \mathbb{C} - \sigma(T) \longrightarrow R_\lambda \in L(E)$$

es continua. Sean $\lambda \in \mathbb{C} - \sigma(T)$ y $h \in \mathbb{C}$. Tenemos que

$$\begin{aligned} T - (\lambda + h)I &= ((T - \lambda I) - hI) \\ &= (T - \lambda I)\left(I - h(T - \lambda I)^{-1}\right). \end{aligned}$$

Para h suficientemente pequeño el operador $T - (\lambda + h)I$ es invertible con inverso

$$R_{\lambda+h} = \left((T - \lambda I)(I - h(T - \lambda I)^{-1}\right)^{-1} = (I - hR_\lambda)^{-1} \cdot R_\lambda.$$

Vemos por tanto que

$$\lim_{h \to 0} R_{\lambda+h} = \lim_{h \to 0} (I - hR_\lambda)^{-1} \cdot R_\lambda = R_\lambda.$$

Sean λ y μ dos valores distintos en $\mathbb{C} - \sigma(T)$ con μ suficientemente cercano a λ. Entonces un cálculo simple prueba que

$$R_\lambda - R_\mu = (\mu - \lambda) R_\lambda \cdot R_\mu.$$

De donde

$$\frac{dR_\lambda}{d\lambda} = \lim_{\mu \to \lambda} \frac{R_\lambda - R_\mu}{\lambda - \mu} = -R_\lambda^2.$$

Sean ahora $x \in E$ y $x' \in E'$. Tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{d\lambda} &= \lim_{\mu \to \lambda} \frac{\varphi(\mu) - \varphi(\lambda)}{\mu - \lambda} \\ &= \lim_{\mu \to \lambda} \langle \frac{R_\mu - R_\lambda}{\mu - \lambda}, x' \rangle \\ &= -\langle R_\lambda^2, x' \rangle \end{aligned}$$

y por tanto φ es holomorfa en $\mathbb{C} - \sigma(T)$. De (5.3) deducimos que R_λ tiende a 0 cuando $|\lambda|$ tiende a infinito y por consiguiente $\varphi(\lambda)$ tiende a 0 cuando $|\lambda|$ tiende a infinito.

ii) Supongamos que el espectro es vacío. Entonces la función φ es holomorfa en todo $\mathbb{C}$. Como tiende a 0 cuando $|\lambda|$ se acerca al infinito, es idénticamente 0 gracias al teorema de Liouville. Esto implica que

$$\langle R_\lambda(x), x' \rangle = 0$$

para toda forma lineal $x' \in E'$, por tanto $R_\lambda(x) = 0$ por el teorema de Hahn-Banach lo cual es imposible. $\square$

Veamos un ejemplo de cómo utilizar la fórmula de radio espectral, ésta nos permitirá conocer, en algunas situaciones particulares, el espectro del operador.

5.2.5 Ejemplo. Sea $E = C^0([0,1])$ el espacio de Banach de las funciones complejas continuas sobre el intervalo $[0,1]$ con la norma $\| \ \|_\infty$ de la convergencia uniforme y $T \in L(E)$ definido por

$$T(f)(x) = \int_0^x K(x,y) f(y) dy,$$

siendo K una función continua sobre el triángulo Δ de $\mathbb{R}^2$ de vértices $(0,0)$, $(1,0)$ y $(1,1)$. Denotaremos por M el valor máximo de la función $|K|$ en Δ. Sea $f \in E$, entonces

$$T(f)(x) = \int_0^x K(x,y)f(y)dy,$$

de donde

$$\begin{aligned} |T(f)(x)| &= \left| \int_0^x K(x,y)f(y)dy \right| \\ &\leq \int_0^x \sup_{x,y\in[0,1]} |K(x,y)| \sup_{y\in[0,1]} |f(y)|dy \\ &\leq Mx||f||_\infty. \end{aligned}$$

Veamos ahora que ocurre con $T^2(f)$. Tenemos

$$\begin{aligned} |T^2(f)(x)| &= \Big| \int_0^x K(x,y)T(f)(y)dy \Big| \\ &\leq \int_0^x \sup_{x,y\in[0,1]} |K(x,y)| \sup_{y\in[0,1]} |T(f)(y)|dy \\ &\leq \int_0^x M^2 y||f||_\infty dy \\ &\leq M^2 \frac{x^2}{2} ||f||_\infty. \end{aligned}$$

Repitiendo la operación se demuestra que para todo $n \geq 0$

$$|T^n(f)(x)| \leq M^n \frac{x^n}{n!} ||f||_\infty$$

por tanto

$$||T^n(f)|| \leq \frac{M^n}{n!} ||f||_\infty.$$

Tomando el supremo para $||f||_\infty \leq 1$ obtenemos

$$|||T^n||| \leq \frac{M^n}{n!},$$

luego

$$|||T^n|||^{\frac{1}{n}} \leq \frac{M}{(n!)^{\frac{1}{n}}}.$$

Por la fórmula de Stirling que da una estimación de $n!$ para valores grandes de n

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \left\{1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right\},$$

donde e es la base del logaritmo neperiano y $O\left(\frac{1}{n}\right)$ una cantidad que tiende a 0 cuando $n \to +\infty$, $(n!)^{\frac{1}{n}}$ tiende a $+\infty$. Entonces

$$\rho(T) = \lim_{n\to+\infty} |||T^n|||^{\frac{1}{n}} = 0.$$

Deducimos que no hay ningún valor espectral no nulo. Como el espectro no puede ser vacío queda reducido a $\{0\}$. Podemos llegar a la misma conclusión por otro camino: toda función $h \in E$ en la imagen de T debe verificar $h(0) = 0$, entonces T no puede ser exhaustivo y por tanto no es invertible, podemos ver también que es inyectivo, por consiguiente 0 es valor espectral. Así pues $\sigma(T) = \{0\}$.

5.3 OPERADORES COMPACTOS

En todo este apartado $(E, \|\ \|)$ será un espacio normado sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ (que como siempre es $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$).

5.3.1 Definición. *Diremos que un operador T sobre E es compacto si la imagen $T(B)$ de la bola unidad B de E es relativamente compacta.*

Esto implica de hecho que la imagen por T de toda parte acotada de E es relativamente compacta.

Por el teorema de Riesz el operador identidad I sólo es compacto si el espacio E es de dimensión finita.

Es claro que si $T \in L(E)$ es compacto entonces λT es compacto para todo $\lambda \in \mathbb{K}$. Por otra parte si T y S son compactos, $T+S$ es compacto. En efecto, sean B la bola unidad (cerrada) de E y $z_n = T(x_n) + S(x_n)$ una sucesión en $T(B) + S(B)$, de $T(x_n)$ podemos seleccionar una sucesión convergente $T(x'_n)$ y de (x'_n) una $(x_{n_k})_k$ tal que $(S(x_{n_k}))_k$ converja. Entonces es evidente que $T(x_{n_k}) + S(x_{n_k})$ es una subsucesión convergente de z_n. Por tanto el operador $T + S$ es compacto.

Sea $T \in L(E)$ compacto y C y D operadores acotados en E, es inmediato que CTD es un operador compacto en E.

Podemos resumir lo anterior en la proposición siguiente.

5.3.2 Proposición. *El conjunto $\mathcal{K}(E)$ de operadores compactos sobre E es un ideal bilátero del álgebra $L(E)$ de operadores acotados sobre E.*

De la proposición deducimos en particular que si $\dim E = +\infty$ y $T \in GL(E)$ entonces T^{-1} no puede ser compacto, si lo fuera I sería compacto lo cual sólo es cierto si $\dim E < +\infty$.

Podemos hacer notar que si $T \in \mathcal{K}(E)$ y V es un subespacio cerrado de E estable por T, entonces la restricción de T a V es un operador compacto. En efecto, la bola unidad de V es la traza sobre V de la bola unidad B de E, por tanto $T(V \bigcap B)$ está contenido en V y es relativamente compacto en V.

5.3.3 Proposición. *Sean $T \in \mathcal{K}(E)$ y $\widehat{T}$ la prolongación canónica de T al completado $\widehat{E}$ de E. Entonces $\widehat{T} \in \mathcal{K}(\widehat{E})$ y $\widehat{T}(\widehat{E}) \subset E$.*

Demostración. Sean B la bola unidad cerrada de E y $\widehat{B}$ la de $\widehat{E}$. Entonces $\widehat{B}$ es la adherencia de B en $\widehat{E}$. Por tanto $\overline{\widehat{T}(\widehat{B})} = \overline{T(B)}$, como $\overline{T(B)}$ es un compacto de E, es cerrado en E; por consiguiente $\overline{\widehat{T}(\widehat{B})} \subset E$ y con mayor razón $\widehat{T}(\widehat{B}) \subset E$. Dado que $\widehat{T}(\widehat{B})$ engendra $\widehat{T}(\widehat{E})$ tenemos que $\widehat{T}(\widehat{E}) \subset E$. Esto prueba la proposición. □

5.3.4 Proposición. *Si $T \in L(E)$ es compacto entonces su adjunto T^* es un operador compacto de E'.*

Demostración. Sean B y B' las bolas unidad cerradas de E y E', respectivamente. Sabemos que B' es un conjunto equicontinuo de $E' = L(E, \mathbb{K})$, por tanto una sucesión y'_n en B' converge uniformemente hacia $y' \in B'$ sobre todo compacto de E si y sólo si y'_n converge débilmente (es decir, simplemente) hacia y'. Sea y'_n una sucesión en B', entonces como B' es débilmente compacta podemos extraer de y'_n una subsucesión y'_{n_k} que converge simplemente hacia un elemento $y' \in B'$ por tanto y'_{n_k} converge uniformemente hacia y' en todo compacto de E, en particular la sucesión y'_{n_k} converge uniformemente a y' sobre el compacto $\overline{T(B)}$. Esto significa que $\langle Tx, y'_{n_k}\rangle$ converge uniformemente respecto $x \in B$. Pero como

$$\langle Tx, y'_{n_k}\rangle = \langle x, T^* y'_{n_k}\rangle,$$

la sucesión $T^* y'_{n_k}$ converge uniformemente en B hacia $T^* y'$ por tanto $T^* y'_{n_k}$ converge en norma hacia $T^* y'$ ya que en un espacio normado la convergencia en norma es exactamente la convergencia uniforme sobre la bola unidad. □

5.3.5 Teorema. *Supongamos E completo. Entonces el ideal $\mathcal{K}(E)$ es cerrado en $L(E)$ respecto la topología de la norma.*

Demostración. Sea T_n una sucesión en $\mathcal{K}(E)$ que converge (en norma) hacia $T \in L(E)$ y x_n una sucesión de la bola unidad de E. Como T_1 es compacto, de la sucesión $T_1 x_n$ podemos extraer una subsucesión convergente

$$T_1(x_1^1), T_1(x_2^1), \ldots, T_1(x_n^1), \ldots$$

Como T_2 es compacto, de la sucesión $T_2(x_n^1)$ podemos extraer una subsucesión convergente

$$T_2(x_1^2), T_2(x_2^2), \ldots, T_2(x_n^2), \ldots$$

Iterando este proceso construimos para todo $p \in \mathbb{N}^*$ una sucesión

$$x_1^p, x_2^p, \ldots, x_n^p, \ldots$$

extraída de la sucesión

$$x_1^{p-1}, x_2^{p-1}, \ldots, x_n^{p-1}, \ldots$$

tal que la sucesión

$$T_p(x_1^p), T_p(x_2^p), \ldots, T_p(x_n^p), \ldots$$

es convergente. Sea ahora

$$x_1^1, x_2^2, \ldots, x_n^n, \ldots$$

la sucesión diagonal. Entonces para todo $k \in \mathbb{N}^*$ la sucesión

$$T_k(x_1^1), T_k(x_2^2), \ldots, T_k(x_n^n), \ldots$$

es convergente. Para probar que T es compacto basta ver que la sucesión $T(x_n^n)$ es convergente y como E es completo bastará probar que es de Cauchy. Sea $\varepsilon > 0$, entonces (utilizando que T_k converge hacia T y que para todo $k \in \mathbb{N}^*$ la sucesión $T_k(x_n^n)$ converge) existe un $N \in \mathbb{N}^*$ tal que si $m, n, k \geq N$

$$||T(x_n^n) - T_k(x_n^n)|| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$
$$||T_k(x_n^n) - T_k(x_m^m)|| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$
$$||T_k(x_m^m) - T(x_m^m)|| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Como

$$
\begin{aligned}
||T(x_n^n) - T(x_m^m)|| \leq\ & ||T(x_n^n) - T_k(x_n^n)|| \\
&+ ||T_k(x_n^n) - T_k(x_m^m)|| \\
&+ ||T_k(x_m^m) - T(x_m^m)||
\end{aligned}
$$

deducimos que para $m, n \geq N$

$$||T(x_n^n) - T(x_m^m)|| \leq \varepsilon.$$

Esto prueba que la sucesión $T(x_n^n)$ es de Cauchy. □

5.3.6 Ejemplos de operadores compactos. i) Todo operador en un espacio normado de dimensión finita es compacto. En general si E es un espacio normado y T un operador sobre E cuya imagen es de dimensión finita entonces T es compacto. Un operador como T se denomina de *rango finito*. El conjunto $\mathcal{RF}(E)$ de operadores de rango finito sobre E es un subespacio vectorial de $\mathcal{K}(E)$, veremos en el capítulo siguiente que si E es de Hilbert entonces $\mathcal{RF}(E)$ es denso en $\mathcal{K}(E)$.

ii) Sean E el espacio de las funciones complejas continuas sobre $[0, 1]$ dotado de la norma $||\ \ ||_\infty$ y $K : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{C}$ una función continua. Para toda función f en E ponemos

$$T(f)(x) = \int_0^1 K(x, y) f(y) dy. \tag{5.6}$$

Diremos que T es un *operador integral de núcleo* K. La función K juega el papel de una matriz cuyos índices x e y varían en $[0, 1]$. Demostremos que T es compacto. Sea B la bola unidad cerrada de E, el conjunto $T(B)$ es equicontinuo. En efecto, sea $\varepsilon > 0$, como K es continua sobre un conjunto compacto es uniformemente continua; existe por tanto un $\eta > 0$ tal que para cualesquiera $x, x', y \in [0, 1]$

$$|x - x'| \leq \eta \Longrightarrow |K(x, y) - K(x', y)| \leq \varepsilon$$

y por consiguiente para toda función f

$$|T(f)(x) - T(f)(x')| = \left| \int_0^1 \Big(K(x, y) - K(x', y) \Big) f(y) dy \right| \leq \varepsilon ||f||_\infty. \tag{5.7}$$

El conjunto $T(B)$ es pues equicontinuo ya que η no depende de $f \in B$, como es acotado ya que el operador T es acotado, aplicando el teorema de Ascoli tenemos que es relativamente compacto. Luego T es compacto.

iii) Sea E el espacio de las funciones continuas en el intervalo $[0, a]$ (con $a > 0$) dotado de la norma

$$||f||_p = \left(\int_0^a |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Para $p = \infty$ encontramos de nuevo el espacio del ejemplo ii). Para distinguir los diferentes espacios normados $(E, || \ ||_p)$ escribiremos E_p (es el espacio E dotado de la norma $|| \ ||_p$). Sea $f \in E$, la desigualdad de Hölder aplicada a las funciones f y 1 da para $p \in [1, +\infty)$

$$(5.8) \qquad ||f||_1 \leq a^{1-\frac{1}{p}} ||f||_p.$$

Por otra parte, un cálculo inmediato da

$$(5.9) \qquad ||f||_p \leq a^{\frac{1}{p}} ||f||_\infty.$$

Resulta de (5.8) y (5.9) que para todo $p \geq 1$ la topología de E_p es más fina que la de E_1 y menos fina que la de E_∞.

Consideremos el operador T sobre E definido mediante la relación (5.6). Sea M el máximo de la función K, entonces se verifica fácilmente que

$$||T(f)||_\infty \leq M||f||_1$$

para toda función $f \in E$. Por tanto el operador $T : E_1 \longrightarrow E_\infty$ es acotado y por consiguiente, para todo $p \in [1, +\infty]$, T es un operador acotado sobre E_p. Se demuestra también una desigualdad análoga a la dada en (5.7) para la norma $|| \ ||_1$, es decir, para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\eta > 0$ tal que para $x, x', y \in [0, 1]$ y cualquier función $f \in E$

$$(5.10) \quad |T(f)(x) - T(f)(x')| = \left| \int_0^1 \Big(K(x,y) - K(x',y) \Big) f(y) dy \right| \leq \varepsilon ||f||_1.$$

Esto prueba que la imagen por T de la bola unidad B_1 de E_1 es equicontinua, por otra parte como $T : E_1 \longrightarrow E_\infty$ es continuo, $T(B_1)$ es acotado en E_∞. Por el teorema de Ascoli, $T(B_1)$ es relativamente compacto en E_∞ y por tanto en todo E_p.

En conclusión, T operando sobre cada uno de los espacios normados E_p es compacto. $\square$

5.4 ESPECTRO DE UN OPERADOR COMPACTO

Sea $(E, || \ ||)$ un espacio normado. Empezaremos estableciendo algunos resultados preliminares que nos permitirán en primer lugar dar un teorema de descomposición para operadores de tipo "$I -$ compacto" y luego determinar la estructura del espectro de un operador compacto. Fijemos un número δ en el intervalo $(0, 1)$. En adelante B denotará la bola unidad cerrada de E.

5.4.1 Lema. *Sean V y W dos subespacios cerrados de E tales que V esté estrictamente contenido en W y $T \in L(E)$ un operador que verifica $T(W) \subset V$. Pongamos $S = I - T$. Entonces existe un $x \in W \cap B$ tal que $d(Sx, S(V)) \geq \delta$.*

Demostración. i) Por ser V y W cerrados, V es un subespacio cerrado de W. El espacio cociente W/V es por tanto normado. Sea X un vector de W/V tal que $\delta \leq ||X|| < 1$. Como

$$||X|| = \inf_{x \in X} ||x||$$

en la clase X podemos encontrar un vector $x \in W \cap B$ tal que $d(x, V) \geq \delta$.

ii) Por hipótesis tenemos que $T(W) \subset V$, por tanto para todo $y \in V$ el vector $y + Tx - Ty$ está en V (siendo x el vector dado en i)). Luego

$$||Sx - Sy|| = ||x - (y + Tx - Ty)|| \geq \delta$$

para todo $y \in V$. Por consiguiente $d(Sx, S(V)) \geq \delta$. □

Supongamos ahora que T es un operador compacto sobre E y pongamos $S = I - T$.

5.4.2 Proposición. *Toda sucesión creciente (resp. decreciente) V_n de subespacios vectoriales cerrados de E tales que $S(V_n) \subset V_{n-1}$ (resp. $S(V_n) \subset V_{n+1}$) es estacionaria.*

Demostración. Supongamos la sucesión V_n no estacionaria, extrayendo una subsucesión, si fuera necesario, podemos suponerla estrictamente creciente. Por el lema 5.4.1 aplicado al operador $T = I - S$, en cada subespacio V_n podemos encontrar un vector x_n tal que $||x_n|| \leq 1$ y $d(T(x_n), T(V_{n-1})) \geq \delta$. Tenemos por tanto una sucesión x_n en B que verifica $d(T(x_n), T(x_{n-1})) \geq \delta$. La sucesión $T(x_n)$ no podría ser entonces relativamente compacta. Esto contradice la compacidad del operador T. La demostración para V_n decreciente es prácticamente idéntica. □

Esta proposición nos permitirá demostrar el importante teorema siguiente. Recordemos que se denomina *coker* de una aplicación lineal $S : E \longrightarrow F$ al espacio vectorial cociente $F/\operatorname{Im} S$. La dimensión de este espacio es por definición la *codimensión* de $\operatorname{Im} S$.

5.4.3 Teorema. *Sean $T \in \mathcal{K}(E)$ y $S = I - T$. Entonces*

i) $\operatorname{Ker} S$ *es de dimensión finita,*

ii) la aplicación $E/\operatorname{Ker} S \longrightarrow \operatorname{Im} S$ *inducida por S es un isomorfismo topológico,*

iii) el subespacio $\operatorname{Im} S$ *es cerrado de codimensión finita.*

Demostración. i) Si $x \in \operatorname{Ker} S$ tenemos que $Tx = x$, por tanto la restricción de T a $\operatorname{Ker} S$ es igual a la identidad que y será por tanto un operador compacto en $\operatorname{Ker} S$. Por consiguiente $\operatorname{Ker} S$ es de dimensión finita.

ii) Al ser $\operatorname{Ker} S$ de dimensión finita admite un suplementario topológico (cerrado) V (véase el ejercicio 2.F). La restricción de S a V es un isomorfismo (algebraico) continuo de V sobre $\operatorname{Im} S$. Demostremos que $S^{-1} : \operatorname{Im} S \longrightarrow V$ es continuo. Supongamos lo contrario, entonces existirá una sucesión x_n de vectores todos no nulos en V tal que $||S(x_n)|| \leq 1$ y $\lim ||x_n|| = +\infty$. Pongamos para todo n

$$z_n = \frac{x_n}{||x_n||}.$$

Entonces z_n verifica que

$$||z_n|| = 1 \quad \text{y} \quad S(z_n) \to 0.$$

Puesto que el operador T es compacto podemos extraer de z_n una subsucesión z_{n_k} tal que la sucesión $T(z_{n_k})$ converge a un vector z. Además como $S = I - T$ tenemos que $z_{n_k} = T(z_{n_k}) + S(z_{n_k})$ y z_{n_k} converge también a z (pues $S(z_{n_k}) \to 0$). Esto prueba que $z = Tz$ y por consiguiente $Sz = 0$, es decir, $z \in \operatorname{Ker} S$. Pero dado que $z_{n_k} \in V$ y V es cerrado, $z \in V$. Luego z pertenece a $\operatorname{Ker} S \cap V$ que es igual a $\{0\}$ ya que $\operatorname{Ker} S$ y V son suplementarios uno del otro, el vector z es por tanto nulo, lo cual contradice el hecho de que su norma $||z||$ sea igual a 1 (pues $z = \lim z_{n_k}$ con $||z_{n_k}|| = 1$). Por tanto $S : V \longrightarrow \operatorname{Im} S$ es un isomorfismo topológico. Pero como V es topológicamente isomorfo a $E/\operatorname{Ker} S$, el operador

$$E/\operatorname{Ker} S \longrightarrow \operatorname{Im} S$$

inducido por S es un isomorfismo topológico.

iii) Demostremos que $\overline{\operatorname{Im} S} = \operatorname{Im} S$. Para ello sea $y \in \overline{\operatorname{Im} S}$, entonces existe una sucesión x_n en E tal que

$$y = \lim_{n \to +\infty} Sx_n.$$

La sucesión Sx_n es por tanto acotada. Como el operador $S^{-1} : \operatorname{Im} S \longrightarrow V$ es continuo la sucesión x_n es acotada. Al ser T compacto, de Tx_n podemos extraer una subsucesión $T(x_{n_k})$ que converge a un vector z. Entonces la sucesión

$$x_{n_k} = S(x_{n_k}) + T(x_{n_k})$$

converge hacia $y + z$. De donde

$$y = \lim_{k \to +\infty} S(x_{n_k}) = S(y + z),$$

es decir, $y \in \operatorname{Im} S$, lo cual prueba que $\operatorname{Im} S$ es cerrado.

Supongamos que $\operatorname{Im} S$ es de codimensión infinita. Entonces podemos encontrar una sucesión estrictamente creciente de subespacios cerrados V_n con $V_0 = \operatorname{Im} S$. Esta sucesión verificará necesariamente para todo $n \in \mathbb{N}^*$ que

$$S(V_n) \subset S(E) = \operatorname{Im} S = V_0 \subset V_{n-1}.$$

Pero esto es imposible, pues por la proposición 5.4.2. esta sucesión debe ser estacionaria $\square$

De este teorema y bajo las mismas hipótesis se obtiene el siguiente corolario.

5.4.4 Corolario. *Si S es inyectivo entonces S es un isomorfismo topológico de E sobre su imagen.*

El teorema que vamos a enunciar y demostrar precisa la naturaleza de los valores espectrales así como la estructura conjuntista y topológica del espectro de un operador compacto.

5.4.5 Teorema. *Sea T un operador compacto sobre E. Entonces*

i) Todo valor espectral no nulo de T es un valor propio y la dimensión de subespacio propio asociado a λ es finita es decir, λ es de multiplicidad finita.

ii) El espectro $\sigma(T)$ de T es un conjunto compacto numerable con 0 como único punto de acumulación posible.

Demostración. i) Sea λ un número complejo no nulo que no sea valor propio de T. Entonces el operador $T-\lambda I$ es inyectivo. Como $T-\lambda I = -\lambda(I-\frac{1}{\lambda}T)$, por el apartado ix) del ejercicio 5.C el operador $T-\lambda I$ es un isomorfismo topológico de E en sí mismo, por tanto λ no es valor espectral de T, es decir, todo valor espectral no nulo de T es un valor propio de T.

El subespacio propio V_λ asociado a λ es el núcleo de $T-\lambda I$ que es de dimensión finita por la parte i) del teorema 5.4.3.

ii) Para demostrar este punto bastará ver que para todo número real $\delta > 0$ sólo hay un número finito de valores propios (distintos o no) fuera de disco $D(0,\delta)$. Sea $\delta > 0$, λ_n una sucesión de valores propios tales que $|\lambda_n| > \delta$ y x_n la sucesión de vectores propios asociados a dichos valores propios que supondremos linealmente independientes. Para todo n denotemos por E_n el subespacio de dimensión finita (por tanto cerrado) engendrado por los vectores $x_1, \ldots, x_n$. La sucesión E_n es por tanto estrictamente creciente. Entonces por el punto i) de la demostración de lema 5.4.1. existen vectores $y_1, \ldots, y_n, \ldots$ tales que

$$y_n \in E_n, \qquad ||y_n|| \leq 1 \qquad \text{y} \qquad d(y_n, E_{n-1}) \geq \frac{1}{2}. \tag{5.11}$$

Como $|\lambda_n| > \delta$ la sucesión $\frac{y_n}{\lambda_n}$ es acotada, por tanto en la sucesión $T\left(\frac{y_n}{\lambda_n}\right)$ podemos extraer una subsucesión $T\left(\frac{y_{n_k}}{\lambda_{n_k}}\right)$ tal que

$$T\left(\frac{y_{n_k}}{\lambda_{n_k}}\right) \qquad \text{converge.} \tag{5.12}$$

Por otra parte $y_n \in E_n$ puede escribirse $y_n = \mu_1 x_1 + \ldots \mu_n x_n$. De donde

$$T\left(\frac{y_n}{\lambda_n}\right) = \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k \frac{\mu_k}{\lambda_n} x_k + \mu_n x_n.$$

Poniendo

$$z_n = \sum_{k=1}^{n-1} \mu_k \left(\frac{\lambda_k}{\lambda_n} - 1\right) x_k,$$

que es un vector de E_{n-1}, se obtiene

$$T\left(\frac{y_n}{\lambda_n}\right) = y_n + z_n.$$

Sean $n, m \in \mathbb{N}$ tales que $n > m$, entonces el vector $y_m + z_m - z_n$ está en E_{n-1}. Tendremos entonces que

$$\begin{aligned}\left\|T\left(\frac{y_n}{\lambda_n}\right) - T\left(\frac{y_m}{\lambda_m}\right)\right\| &= ||y_n + z_n - (y_m + z_m)|| \\ &= ||y_n - (y_m + z_m - z_n)|| \\ &\geq d(y_n, E_{n-1}) \\ &\geq \frac{1}{2},\end{aligned}$$

es decir,

$$\left\|T\left(\frac{y_n}{\lambda_n}\right) - T\left(\frac{y_m}{\lambda_m}\right)\right\| \geq \frac{1}{2}. \tag{5.13}$$

Como T es compacto, las afirmaciones establecidas por (5.12) y (5.13) sólo son compatibles cuando la sucesión de vectores linealmente independientes x_n es finita. Esto prueba que el número de valores propios λ tales que $|\lambda| > \delta$ es finito.

Entonces el conjunto $\sigma(T) - \{0\}$ es numerable y discreto en $\mathbb{C}$. Si $\dim E = +\infty$ al ser el operador T compacto no puede ser invertible, por tanto $0 \in \sigma(T)$. □

De la proposición 5.3.3. podemos obtener una consecuencia importante. Sea $\widehat{E}$ el completado de E. Para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ resulta que

$$\operatorname{Ker}(T - \lambda I) \subset \operatorname{Ker}(\widehat{T} - \lambda I);$$

por otra parte, si para $\lambda \neq 0$ se tiene que $\widehat{T}x - \lambda x = 0$ con $x \in \widehat{E}$ entonces $x = \frac{1}{\lambda}\widehat{T}x \in E$. Luego para todo $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tenemos que

$$\operatorname{Ker}(\widehat{T} - \lambda I) \subset \operatorname{Ker}(T - \lambda I).$$

Deducimos que $\sigma(\widehat{T}) = \sigma(T)$. Por tanto podremos estudiar el espectro de un operador compacto T sobre un espacio no completo E pasando a la prolongación canónica $\widehat{T}$ de T en el completado $\widehat{E}$.

Vamos a terminar el apartado con un cálculo explícito del espectro de un operador compacto en el caso de dimensión infinita.

5.4.6 Ejemplo. Sea E el espacio de Banach de las funciones reales continuas periódicas de periodo 1 en $\mathbb{R}$ con la norma $\| \ \|_\infty$. Para toda función $f \in E$ ponemos

$$T(f)(x) = \int_0^1 K(x,y) f(y) dy,$$

donde K es la función continua definida sobre el cuadrado $[0,1] \times [0,1]$ mediante

$$K(x,y) = \begin{cases} x(1-y) & \text{si } 0 \leq x \leq y \leq 1 \\ y(1-x) & \text{si } 0 \leq y \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Se verifica fácilmente que para toda $f \in E$, $T(f)(0) = T(f)(1) = 0$. La función $T(f)$, definida a priori sobre $[0,1]$, se prolonga por periodicidad a una función continua periódica de periodo 1 sobre todo $\mathbb{R}$. Obtenemos pues un operador T sobre E. Por ii) del apartado 5.3.6., T es compacto.

i) *Para toda función $f \in E$, $T(f)$ es de clase C^2*. En efecto,

$$\begin{aligned} T(f)(x) &= \int_0^x y(1-x) f(y) dy + \int_x^1 x(1-y) f(y) dy \\ &= (1-x) \int_0^x y f(y) dy + x \int_x^1 (1-y) f(y) dy. \end{aligned}$$

Derivando $T(f)$ se obtiene

$$T(f)'(x) = -\int_0^x y f(y) dy + \int_x^1 (1-y) f(y) dy.$$

Repitiendo la operación

$$T(f)''(x) = -x f(x) - (1-x) f(x) = -f(x),$$

es decir,

$$T(f)'' = -f. \tag{5.14}$$

Como f es continua esto demuestra que $T(f)$ es de clase C^2. Tomemos ahora una función g de clase C^2 en E, entonces de un cálculo simple aunque un poco largo resulta que

$$T(g'') = -g(x) + (1-x) g(0) + x g(1).$$

Vemos por tanto que $T(g'') = -g$ si y sólo si g verifica $g(0) = g(1) = 0$. Pongamos

$$V = \left\{ g \in E \;\middle|\; g \text{ de clase } C^2 \text{ y g(0)=g(1)=0} \right\}.$$

Como $T(f)'' = -f$ entonces $T(f) = 0$ implica $f = 0$, es decir, T es inyectivo. Luego

$$T : E \longrightarrow V$$

es un isomorfismo (algebraico), por tanto 0 no es valor propio de T pero es valor espectral (y es el único que no es valor propio).

ii) Busquemos los valores propios no nulos λ de T. La ecuación $T(f) = \lambda f$ deberá tener solución $f \in E$ no nula que verifique $f(0) = f(1) = 0$ (puesto que $f = T(\frac{f}{\lambda})$). Por (5.14) dicha función debe ser de clase C^2 y satisface la ecuación diferencial de segundo orden con coeficientes constantes

$$\lambda f'' = -f. \tag{5.15}$$

Recíprocamente, si $f \in V$ es no nula de clase C^2 y verifica (5.15) tenemos que

$$T(f) = T(-\lambda f'') = -\lambda T(f'') = -\lambda(-f) = \lambda f,$$

es decir, f es un vector propio asociado a λ. Para determinar los valores propios no nulos de T bastará resolver la ecuación diferencial (5.15). Pongamos $\omega^2 = \frac{1}{\lambda}$, entonces las soluciones serán a priori de la forma

$$f(x) = A \operatorname{sen}(\omega x) + B \cos(\omega x),$$

donde A y B son constantes reales. Como f debe ser periódica de periodo 1 y debe verificar $f(0) = f(1) = 0$, ω será un múltiplo entero de 2π y B será nula. De donde

$$\omega = 2n\pi \quad \text{con} \quad n \in \mathbb{Z}^*.$$

Los valores propios no nulos serán entonces

$$\lambda_n = \frac{1}{4\pi^2 n^2} \quad \text{con} \quad n \in \mathbb{N}^*$$

y cada valor propio λ_n está asociado al vector propio

$$e_n = \operatorname{sen}(2n\pi x).$$

5.5 EJERCICIOS

5.A Sean $E = L^2([0,1])$ el espacio de las clases (con igualdad casi por todas partes respecto la medida de Lebesgue) de funciones reales de cuadrado integrable sobre el intervalo $[0,1]$ y $\varphi : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ un homeomorfismo.

i) Dar una condición suficiente sobre φ para que la aplicación T_φ que a una función f sobre $[0,1]$ asocia la función $T_\varphi(f) = f \circ \varphi$ defina un operador acotado en E.

ii) Demostrar que no todo homeomorfismo φ da lugar a un operador acotado (dar un ejemplo se este hecho).

5.B Denotamos por E el espacio de las funciones continuas periódicas de periodo 2π en $\mathbb{R}$ con la norma de la convergencia uniforme.

i) Calcular los valores propios y los vectores propios correspondientes al operador $T(f)(x) = f(-x)$.

ii) Demostrar que el operador

$$S(f)(x) = \int_{-\pi}^{+\pi} \cos(x+y) f(y) dy$$

es de rango finito y calcular sus valores y vectores propios.

5.C Sea S un operador en un espacio normado E. Para todo $k \in \mathbb{N}^*$ ponemos $N_k = \operatorname{Ker} S^k$ y $R_k = \operatorname{Im} S^k$ donde S^k es el k-ésimo iterado de S.

i) Demostrar que N_k es una sucesión creciente y que si existe k tal que $N_k = N_{k+1}$ entonces $N_k = N_{k+n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

ii) Demostrar que la sucesión R_k es decreciente y que si existe k tal que $R_k = R_{k+1}$ entonces $R_k = R_{k+n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Supongamos que $S = I - T$ con T compacto.

iii) Demostrar que las sucesiones N_k y R_k son estacionarias a partir de algunos rangos que denotaremos p y q, respectivamente.

iv) Demostrar que $N_p \cap R_p = \{0\}$.

v) Demostrar que $N_q + R_q = E$.

vi) Demostrar que $N_q \subset N_p$, que $R_q \subset R_p$ y que $p = q$.

Ponemos $N = N_p$ y $R = R_p$.

vii) Demostrar que la restricción de S a R es un automorfismo topológico.

viii) Demostrar que N es el subespacio más grande sobre el cual S es nilpotente y que R es el subespacio más grande estable por S sobre el cual S es un automorfismo topológico.

ix) Deducir que si S es inyectivo entonces S es un automorfismo topológico de E.

5.D Sean l^2 el espacio de las sucesiones complejas de cuadrado sumable con la norma

$$||x|| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

y $T : l^2 \longrightarrow l^2$ el operador definido por

$$T(x) = (0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$$

para todo $x = (x_1, \dots, x_n, \dots) \in l^2$.

Demostrar que T es acotado y calcular su espectro.

5.E Sea $E = C^0([0,1])$ el espacio de las funciones complejas continuas con la norma de la convergencia uniforme.

i) Calcular el espectro del operador

$$T(f)(x) = xf(x)$$

y probar que no contiene valor propio alguno.

ii) Demostrar que el operador

$$S(f)(x) = \int_0^1 (x^2 + x) f(y) dy$$

es de rango finito, calcular su espectro y precisar la naturaleza de los valores espectrales.

5.F Recordemos que el círculo $\mathbb{S}^1$ puede identificarse con el conjunto de los números complejos de módulo 1. Todo punto $z \in \mathbb{S}^1$ se escribe $z = e^{2i\pi x}$, donde $x \in \mathbb{R}$. El espacio $L^2(\mathbb{S}^1)$ será por definición el espacio de Hilbert de las funciones complejas medibles en $\mathbb{R}$, periódicas de periodo 1 y cuya restricción a $[0,1]$ es de cuadrado integrable. El producto escalar viene definido por

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)\overline{g(x)} dx.$$

El conjunto $\{e^{2i\pi nx} \mid n \in \mathbb{Z}\}$ es una base de Hilbert de $L^2(\mathbb{S}^1)$, es decir, toda función $f \in L^2(\mathbb{S}^1)$ se desarrolla en serie de Fourier en esta base con

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} f_n e^{2i\pi nx},$$

donde los f_n son números complejos tales que la serie $\sum_{-\infty}^{+\infty} |f_n|^2$ converge.

Admitimos la afirmación siguiente : *si α es un número real no racional entonces el conjunto $\{e^{2i\pi n\alpha}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es denso en el círculo $\mathbb{S}^1$.*

Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y denotemos por $R_\alpha : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$ la rotación de ángulo $2\pi\alpha$.

i) Dar la expresión analítica de R_α en función de $z \in \mathbb{S}^1$.

ii) Sea $\lambda = \rho e^{2i\pi\theta}$ un número complejo. Resolver en $L^2(\mathbb{S}^1)$ la ecuación de incógnita f siguiente

$$f \circ R_\alpha - \lambda f = g$$

(donde $g \in L^2(\mathbb{S}^1)$ está dada) en los dos casos siguientes

a) $\rho \neq 1$,

b) $\rho = 1$ y α racional.

Indicación: desarrollar f y g en serie de Fourier y razonar a nivel de coeficientes.

Para toda función $f \in L^2(\mathbb{S}^1)$ ponemos $T_\alpha(f) = f \circ R_\alpha$.

iii) Demostrar que T_α es un automorfismo unitario de $L^2(\mathbb{S}^1)$, es decir, un automorfismo que verifica además $\langle T_\alpha(f), T_\alpha(g)\rangle = \langle f, g\rangle$ para f y g cualesquiera en $L^2(\mathbb{S}^1)$.

iv) Supongamos $\alpha \in [0,1) \cap \mathbb{Q}$. Demostrar que el espectro $\sigma(T_\alpha)$ de T_α sólo contiene valores propios, darlos explícitamente así como los subespacios propios asociados.

v) Supongamos $\alpha \in [0,1) \cap \mathbb{Q}^c$ (donde $\mathbb{Q}^c$ es el conjunto de los reales irracionales). Demostrar que $\sigma(T_\alpha)$ se confunde con el conjunto de los números complejos de módulo 1.

CAPÍTULO 6

OPERADORES ACOTADOS EN ESPACIOS DE HILBERT

Este capítulo lo dedicamos al estudio de los operadores acotados en espacios de Hilbert. La existencia de un producto escalar y el conocimiento explícito de las formas lineales continuas permite detallar muchas nociones como por ejemplo la de operador adjunto y también establecer la existencia de un orden en el conjunto de los operadores hermíticos. El espectro de un operador hermítico compacto posee propiedades similares a las de las matrices hermíticas que operan sobre un espacio de dimensión finita. En lo que sigue $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ será un espacio de Hilbert (real o complejo).

6.1 ADJUNTO Y OPERADORES HERMÍTICOS

Sea T un operador sobre E. Como toda forma lineal continua y' sobre E viene definida por un elemento $y \in E$, es decir,

$$y'(x) = \langle x, y \rangle$$

para todo $x \in E$ (véase el teorema 4.3.1) el adjunto T^* de T define un operador sobre E que denominaremos también adjunto y denotaremos siempre por T^*. Este operador se caracteriza por la igualdad

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle \qquad \text{con} \qquad x, y \in E. \tag{6.1}$$

La aplicación $T \in L(E) \longrightarrow T^* \in L(E)$ es una involución antilineal, es decir, verifica

$$(T+S)^* = T^* + S^*$$
$$(\lambda T)^* = \overline{\lambda} T^*$$
$$(T^*)^* = T$$

Además tenemos que

$$(TS)^* = S^* T^*.$$

El operador I verifica $I^* = I$. Si $T \in L(E)$ entonces T es invertible por la izquierda si y sólo si T^* es invertible por la derecha, invertible si y sólo si T^* lo es y $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

Diremos que el operador T es *hermítico* (si E es complejo) o *autoadjunto* (si E es real) si es igual a su adjunto, es decir, si para todos $x, y \in E$ tenemos

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle. \tag{6.2}$$

Tanto si E es real como complejo diremos simplemente que T es un operador hermítico. La igualdad (6.2) define un operador hermítico sobre un espacio E que no es necesariamente complejo.

6.1.1 Ejemplos de operadores hermíticos. i) Sea T un operador cualquiera en E, entonces los operadores

$$\frac{1}{2}(T+T^*), \qquad \frac{1}{2i}(T-T^*) \quad \text{y} \quad T^*T$$

son hermíticos.

ii) Si T es hermítico y $S \in L(E)$ cualquiera, entonces S^*TS es hermítico.

iii) Si T y S son dos operadores hermíticos que conmutan, su producto TS es hermítico.

iv) Sea V un subespacio cerrado de E y consideremos el operador de proyección ortogonal $P : E \longrightarrow V$. Entonces P es hermítico. En efecto, tenemos para todo $x, y \in E$ que

$$\langle Px, y\rangle = \langle Px, Py + y - Py\rangle.$$

Como $\langle Px, y - Py\rangle = 0$, tenemos que $\langle Px, y\rangle = \langle Px, Py\rangle$. Por la misma razón $\langle Px, Py\rangle = \langle x - x + Px, Py\rangle = \langle x, Py\rangle$, de donde

$$\langle Px, y\rangle = \langle x, Py\rangle,$$

es decir, P es hermítico.

v) Es evidente que toda matriz compleja hermítica de orden n define un operador hermítico en $\mathbb{C}^n$.

vi) Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y denotemos por E el espacio de Hilbert de las clases de funciones medibles complejas de cuadrado integrable en Ω con el producto escalar

$$\langle f, g\rangle = \int_\Omega f(x)\overline{g(x)}d\mu(x).$$

Sea φ función μ-esencialmente medible acotada en Ω. Para toda $f \in E$, ponemos

$$T_\varphi(f)(x) = \varphi(x)f(x).$$

Entonces T_φ es un operador acotado en E. Se verifica fácilmente que el adjunto de T_φ es $T_\varphi^* = T_{\overline{\varphi}}$, luego si φ es real T_φ es hermítico.

Un operador hermítico es invertible cuando es invertible por la derecha o por la izquierda. Como en un espacio de Hilbert un subespacio cerrado admite siempre un suplementario (su ortogonal) podemos dar un enunciado más preciso del teorema 5.1.3. que se demuestra exactamente del mismo modo.

6.1.2 Teorema. *Sea $T \in L(E)$ hermítico. Entonces las tres afirmaciones siguientes son equivalentes*

i) T es invertible,

ii) existe un número real $m > 0$ tal que para todo $x \in E$

$$||Tx|| \geq m||x||,$$

iii) T es inyectivo e $\mathrm{Im}(T)$ *es un subespacio cerrado.*

Tenemos también la siguiente proposición.

6.1.3 Proposición. *Sea T un operador positivo en E. Entonces*

$$(\mathrm{Im}\, T)^\perp = KerT^* \quad y \quad (KerT)^\perp = \overline{(\mathrm{Im}\, T^*)}.$$

Demostración. Si $y \in E$ es ortogonal a la imagen de T para todo $x \in E$ tenemos que

$$\langle Tx, y\rangle = 0.$$

Pero $\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle$ por definición de adjunto, luego

$$\langle x, T^*y\rangle = 0$$

para todo $x \in E$, por consiguiente $T^*y = 0$ e $y \in KerT^*$

Recíprocamente sea $y \in KerT^*$, del mismo modo se prueba que $y \in (\mathrm{Im}\, T)^\perp$. Para la segunda igualdad tenemos que

$$\overline{\mathrm{Im}(T^*)} = \left(\mathrm{Im}(T^*)^\perp\right)^\perp = (Ker(T))^\perp.$$

Lo cual demuestra la proposición. $\square$

Observemos que si el operador T es hermítico entonces

$$E = \operatorname{Ker} T \oplus \overline{\operatorname{Im} T}. \tag{6.3}$$

Sea $T \in L(E)$, entonces podemos definir una forma sesquilineal en E poniendo

$$f(x,y) = \langle Tx, y\rangle$$

para $x, y \in E$. Se verifica fácilmente que T es hermítico si y sólo si la forma sesquilineal f es hermítica o bien si $\langle Tx, x\rangle$ es real para todo $x \in E$.

6.1.4 Proposición. *Sea T un operador hermítico en E. Entonces su norma $|||T|||$ viene dada por*

$$|||T||| = \sup_{||x||\le 1} |\langle Tx, x\rangle| = \sup_{||x||=1} |\langle Tx, x\rangle|,$$

es decir, $|||T|||$ es igual a la norma de la forma cuadrática Φ asociada a la forma hermítica $f(x,y) = \langle Tx, y\rangle$ definida por T.

Demostración. i) Veamos primeramente la igualdad $|||T||| = |||f|||$. Tenemos que

$$\begin{aligned} |||f||| &= \sup_{||x||,||y||\le 1} |\langle Tx, y\rangle| \\ &\le \sup_{||x||\le 1} ||Tx|| \\ &\le |||T|||. \end{aligned}$$

Puesto que $y = \frac{Tx}{||Tx||}$ la igualdad es cierta. Esto prueba que $|||T||| = |||f|||$.

ii) La norma de Φ viene dada por

$$\begin{aligned} |||\Phi||| &= \sup_{x\neq 0} \frac{|\langle Tx, x\rangle|}{||x||^2} \\ &= \sup_{||x||\le 1} |\langle Tx, x\rangle| \\ &\le \sup_{||x||\le 1, ||y||\le 1} |\langle Tx, y\rangle|. \end{aligned}$$

Tenemos entonces que

$$|||\Phi||| \le |||f||| = |||T|||.$$

Sean $x, y \in E$ tales que $||x|| \leq 1$ y $||e|| \leq 1$, calculemos el valor absoluto de la parte real del número complejo $\langle Tx, y\rangle$ utilizando la forma cuadrática Φ. Tenemos que

$$\begin{aligned}\left|\mathcal{R}\langle Tx, y\rangle\right| &= \left|\frac{1}{4}\left\{\Phi(x+y) - \Phi(x-y)\right\}\right| \\ &\leq \frac{1}{4}\left\{|\Phi(x+y)| + |\Phi(x-y)|\right\} \\ &\leq \frac{1}{4}|||\Phi|||\left\{||x+y||^2 + ||x-y||^2\right\}\end{aligned}$$

El último término es igual (por la identidad del paralelogramo) a

$$2|||\Phi|||\left\{||x||^2 + ||y||^2\right\}.$$

Por tanto

$$|\mathcal{R}\langle Tx, y\rangle| \leq \frac{1}{2}|||\Phi|||\left\{||x||^2 + ||y||^2\right\} \leq |||\Phi|||.$$

Observemos que para cualesquiera $x, y \in E$ el número complejo $\langle Tx, e^{i\theta}y\rangle$ (cuando no es nulo) es real si $\theta = \operatorname{Arg}\langle Tx, y\rangle$ y tiene igual módulo que $\langle Tx, y\rangle$. Luego podemos suponer que $\langle Tx, y\rangle$ es real. Por tanto, gracias a lo anterior, tendremos que

$$|\langle Tx, y\rangle| \leq |||\Phi|||$$

para todo $x, y \in E$ con norma inferior o igual a 1. Por consiguiente $|||f||| \leq |||\Phi|||$, luego

$$|||T||| = |||\Phi|||.$$

□

6.1.5 Corolario. *Para todo operador hermítico $T \in L(E)$*

$$|||T^n||| = |||T|||^n \tag{6.4}$$

para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. i) Demostremos en primer lugar que para todo operador $T \in L(E)$ (sea hermítico o no)

$$|||T^*T||| = |||T|||^2.$$

En efecto, para todo $x \in E$

$$\langle T^*Tx, x\rangle = \langle Tx, Tx\rangle = ||Tx||^2.$$

Y tomando el supremo para $||x|| \leq 1$

$$|||T^*T||| = |||T|||^2.$$

ii) Esta igualdad aplicada a T hermítico da $|||T^2||| = |||T|||^2$. Por consiguiente, para todo $m \in \mathbb{N}$

$$\left|\left|\left|T^{2^m}\right|\right|\right| = \left|\left|\left|T\right|\right|\right|^{2^m}.$$

Sean $n \in \mathbb{N}$ cualquiera y $p \geq n$ tal que $p = 2^m$ para cierto entero m. Entonces

$$\begin{aligned} |||T|||^p &= |||T^p||| \\ &= |||T^{n+(p-n)}||| \\ &\leq |||T^n|||.|||T^{(p-n)}||| \\ &\leq |||T^n|||.|||T|||^{(p-n)}. \end{aligned}$$

Obteniendo que

$$|||T|||^n \leq |||T^n|||.$$

Puesto que en general

$$|||T^n||| \leq |||T|||^n$$

tenemos la igualdad

$$|||T^n||| = |||T|||^n$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. □

Obsérvese que si un subespacio vectorial V de E es estable por un operador T, entonces su adherencia $\overline{V}$ es también estable por T.

6.1.6 Proposición. *Sean V un subespacio vectorial cerrado de E y $T \in L(E)$ operador hermítico. Entonces*

i) si V es estable por T su ortogonal $V^\perp$ es también estable por T,
ii) para que V sea estable por T es necesario y suficiente que T conmute con el operador de proyección $P : E \longrightarrow V$.

Demostración. i) Supongamos V estable por T y sean $x \in V^\perp$ e $y \in V$. Entonces

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle = 0,$$

luego $V^\perp$ es también estable por T. El recíproco se demuestra igual.

ii) Supongamos V estable por T y sea $x \in E$, entonces $Px \in V$, y $TPx \in V$, por consiguiente $PTPx = TPx$ pues P coincide con la identidad de V. Tenemos así que

$$PTP = TP.$$

Tomemos los adjuntos de los dos miembros de esta igualdad, obtenemos que

$$PTP = PT$$

ya que T y P son hermíticos. De donde $TP = PT$. Recíprocamente supongamos $TP = PT$ y sea $x \in V$, tenemos que $Px = x$, luego $PTx = TPx = Tx$. Como $PTx \in V$ deducimos que $Tx \in V$, es decir, V es estable por T.□

Acabaremos este primer apartado con la importante propiedad de densidad del espacio $\mathcal{RF}(E)$ de operadores de rango finito sobre E (es decir, cuya imagen es de dimensión finita) en el espacio $\mathcal{K}(E)$ de los operadores compactos.

6.1.7 Proposición. *El espacio $\mathcal{RF}(E)$ es denso en $\mathcal{K}(E)$ con la topología de la norma.*

Demostración. Sean $T \in \mathcal{K}(E)$, $\varepsilon > 0$ y B la bola unidad de E. Como $T(B)$ es una parte relativamente compacta podemos recubrirla por un número finito de bolas $B(y_1, \varepsilon), \ldots, B(y_k, \varepsilon)$ de radio ε. Sea F el subespacio de dimensión finita (inferior o igual a k) engendrado por $y_1, \ldots, y_k$. Entonces F es completo y podemos considerar la proyección ortogonal $P : E \longrightarrow F$. El operador $S = PT$ es de rango finito. Sea $x \in B$, entonces existe k_0 tal que $Tx \in B(y_{k_0}, \varepsilon)$, luego $||Sx - Tx|| \leq \varepsilon$. Por tanto

$$|||T - S||| \leq \varepsilon,$$

y esto implica que $\overline{\mathcal{RF}(E)} = \mathcal{K}(E)$. □

6.2 OPERADORES POSITIVOS

La existencia de un orden en el cuerpo real $\mathbb{R}$ permite dotar al conjunto de operadores hermíticos en un espacio de Hilbert de un orden parcial.

6.2.1 Definición. *Diremos que un operador hermítico T en E es positivo, $T \geq 0$, si para todo $x \in E$*

$$\langle Tx, x\rangle \geq 0$$

o si la forma cuadrática Φ definida por T es positiva. Diremos que es estrictamente positivo si $\langle Tx, x\rangle > 0$ para todo x no nulo.

Es evidente que la suma de dos operadores positivos (resp. estrictamente positivos) es un operador positivo (resp. estrictamente positivo) y que el producto de un operador positivo por un real positivo es un operador positivo.

Obviamente la noción de positividad no tiene sentido más que para los operadores hermíticos: "operador positivo" significa implicitamente "operador hermítico positivo". Hay muchos ejemplos de operadores hermíticos positivos, demos algunos de ellos.

6.2.2 Ejemplos. i) El operador identidad I de E es estrictamente positivo pues para todo $x \in E$ no nulo tenemos que $\langle x, x\rangle = ||x||^2 > 0$.

ii) Para todo operador $T \in L(E)$ no nulo el operador T^*T es positivo, en efecto si $x \in E$

$$\langle T^*Tx, x\rangle = \langle Tx, Tx\rangle = ||Tx||^2 \geq 0.$$

iii) Sean V un subespacio vectorial cerrado de E y $P : E \longrightarrow V$ el operador proyección ortogonal sobre V. Entonces P es positivo ya que

$$\langle Px, x\rangle = \langle Px, Px\rangle = ||Px||^2 \geq 0.$$

iv) Tomemos de nuevo el ejemplo 6.1.1. vi). Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y denotemos por E el espacio de Hilbert de las funciones medibles complejas de cuadrado integrable en Ω con el producto escalar

$$\langle f, g\rangle = \int_\Omega f(x)\overline{g(x)}d\mu(x).$$

Para toda función real φ medible μ-esencialmente acotada sobre Ω ponemos

$$T_\varphi(f)(x) = \varphi(x)f(x).$$

Entonces T_φ es un operador hermítico en E. Si φ es positiva, T_φ es positivo. Si además φ es estrictamente positiva fuera de un conjunto de medida nula T es estrictamente positivo.

Sea $T \in L(E)$ positivo, como la forma hermítica asociada a T es positiva tenemos la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$|\langle Tx, y\rangle|^2 \leq \langle Tx, x\rangle\langle Ty, y\rangle \tag{6.5}$$

para todo $x, y \in E$. De esta desigualdad deducimos, tomando el supremo de los dos miembros para $||y|| \leq 1$, que

$$||Tx||^2 \leq |||T|||\langle Tx, x\rangle. \tag{6.6}$$

De esta relación obtenemos la implicación siguiente

$$\langle Tx, x\rangle = 0 \Longrightarrow Tx = 0$$

luego si $\langle Tx, x\rangle = 0$ para todo $x \in E$ entonces $T = 0$. Es evidente que si T y $-T$ son positivos el operador T es idénticamente nulo. Esto nos permite definir la relación siguiente: sean T y S dos operadores hermíticos, entonces

$$T \leq S \Longleftrightarrow S - T \geq 0.$$

Se verifica fácilmente que "$\leq$" es una relación de orden parcial en el espacio $\mathcal{H}(E)$ de operadores hermíticos en E invariante por traslación, es decir, para cualesquiera $T, S, U \in \mathcal{H}(E)$

$$T \leq S \Longrightarrow T + U \leq S + U.$$

Sea $T \in \mathcal{H}(E)$, entonces al ser T acotado los dos números reales siguientes existen

$$\alpha = \inf_{||x||=1} \langle Tx, x\rangle \quad \text{y} \quad \beta = \sup_{||x||=1} \langle Tx, x\rangle. \tag{6.7}$$

Se llaman, respectivamente, la *cota inferior* y la *cota superior* de T. Así tenemos que

$$|||T||| = \max(|\alpha|, |\beta|). \tag{6.8}$$

6.2.3 Proposición. *Sea T un operador hermítico en E, entonces las dos afirmaciones siguientes son equivalentes*

i) T es invertible,

ii) su cota inferior α es estrictamente positiva.

Demostración.

ii)$\Longrightarrow$i)

Supongamos ii) cierto. En particular esto significa que T es estrictamente positivo. Tenemos que

$$\alpha = \inf_{||x||=1} \langle Tx, x\rangle = \inf_{x\neq 0} \frac{\langle Tx, x\rangle}{||x||^2},$$

de donde para todo $x \in E$

$$\langle Tx, x\rangle \geq \alpha ||x||^2.$$

Como T es positivo, la forma hermítica $f(x, y) = \langle Tx, y\rangle$ es positiva y utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwarz obtenemos que

$$||Tx||.||x|| \geq \langle Tx, x\rangle \geq \alpha ||x||^2.$$

Simplificando

$$||Tx|| \geq \alpha ||x||$$

para todo $x \in E$. Luego T es invertible gracias a la proposición 1.2. de este capítulo.

i)$\Longrightarrow$ii)

Supongamos T invertible y sea S su inversa. Para todo $x \in E$ tenemos $STx = x$ luego

$$||x|| = ||STx|| \leq |||S|||.||Tx||$$

y

$$||x||^2 \leq |||S|||^2.||Tx||^2.$$

La desigualdad (6.6) implica entonces que

$$||x||^2 \leq |||S|||^2.|||T|||\langle Tx, x\rangle,$$

lo cual equivale a

$$\langle Tx, x\rangle \geq \frac{1}{|||S|||^2.|||T|||} ||x||^2.$$

Esto prueba de manera evidente que

$$\alpha \geq \frac{1}{|||S|||^2.|||T|||} > 0.$$

Con esto acaba la demostración de la proposición. $\square$

6.3 ESPECTRO DE UN OPERADOR HERMÍTICO COMPACTO

El teorema de descomposición espectral de un operador hermítico compacto es ciertamente uno de los resultados más profundos de la teoría de operadores en los espacios de Hilbert. La demostración que aquí daremos permite construir los vectores propios asociados a los valores propios no nulos.

6.3.1 Proposición. *Sea T un operador hermítico compacto no nulo en E, entonces*

i) todos los valores propios de T son reales,

ii) T admite un valor propio de valor absoluto igual a la norma de T.

Demostración. i) Sea $\lambda \in \mathbb{C}$ un valor propio no nulo de T asociado a un vector propio x, entonces

$$\lambda\langle x, x\rangle = \langle Tx, x\rangle = \langle x, Tx\rangle = \overline{\lambda}\langle x, x\rangle.$$

Simplificando por $\langle x, x\rangle$ que es no nulo obtenemos $\lambda = \overline{\lambda}$. Esto prueba que el valor propio λ es real.

ii) Por la proposición 6.1.4. tenemos que

$$|||T||| = \sup_{||x||=1} |\langle Tx, x\rangle|.$$

Luego existe una sucesión x_n de vectores con norma igual a 1 tal que

$$|\langle Tx_n, x_n\rangle| \stackrel{n\to+\infty}{\longrightarrow} |||T|||.$$

Quitando una subsucesión, si fuera necesario, podemos suponer que x_n es tal que $\langle Tx_n, x_n\rangle$ tiende a un número λ con $|\lambda| = |||T|||$. Como T es compacto, también podemos suponer que la sucesión Tx_n converge a un vector $z \in E$. Entonces

$$\begin{aligned}||Tx_n - \lambda x_n||^2 &= \langle Tx_n - \lambda x_n, Tx_n - \lambda x_n\rangle \\ &= ||Tx_n||^2 - 2\mathcal{R}(\overline{\lambda}\langle Tx_n, x_n\rangle) + \lambda^2||x_n||^2.\end{aligned}$$

Utilizando que $|\lambda| = |||T|||$ obtenemos

$$||Tx_n - \lambda x_n||^2 \leq 2\left(|||T|||^2 - \mathcal{R}(\overline{\lambda}\langle Tx_n, x_n\rangle)\right).$$

Esto prueba que si $n \to +\infty$, el vector $Tx_n - \lambda x_n \to 0$ y por consiguiente $x_n \to \frac{z}{\lambda}$ que denotaremos x. Por tanto

$$Tx = \lim_{n\to+\infty} Tx_n = \lambda x.$$

Esto prueba que λ es un valor propio del operador T asociado al vector propio no nulo x ya que $||x|| = 1$ pues $x = \lim_{n\to+\infty} x_n$ y $||x_n|| = 1$. □

Sea T un operador hermítico compacto en E. Denotaremos por V_∞ su núcleo. Sabemos (véase el teorema 5.4.5) que todos los elementos no nulos del espectro $\sigma(T)$ son valores propios. Para todo $\lambda \in \sigma(T) - \{0\}$ denotemos por V_λ el subespacio propio asociado a λ que es de dimensión finita.

6.3.2 Teorema. *Sea T un operador hermítico compacto en E, entonces*

i) los subespacios V_λ son ortogonales dos a dos,

ii) tenemos que

$$\left(\bigoplus_{\lambda\in\sigma(T)-\{0\}} V_\lambda\right)^\perp = V_\infty.$$

iii) El espacio E es suma directa ortogonal de V_∞ y de todos los subespacios V_λ:

$$E = V_\infty \oplus \left(\bigoplus_{\lambda\in\sigma(T)-\{0\}} V_\lambda\right).$$

Demostración. i) Sean λ y μ valores propios no nulos y diferentes asociados respectivamente a dos vectores propios x e y. Tenemos que

$$\lambda\langle x, y\rangle = \langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle = \mu\langle x, y\rangle,$$

entonces $\langle x, y\rangle = 0$ y x e y son ortogonales, por consiguiente los subespacios V_λ y V_μ son ortogonales.

ii) Por la proposición 6.3.1. existe un $\lambda \in \sigma(T)$ tal que

$$|\lambda| = |||T|||.$$

Pongamos $\lambda_0 = \lambda$ y sea e_0 un vector propio de norma 1 asociado a λ_0. Denotemos por E_1 el subespacio de E ortogonal a e_0. E_1 es cerrado, luego es completo. Como T es hermítico, E_1 es estable por T y la restricción T_1 de T en este subespacio es un operador hermítico compacto. La proposición 6.3.1. aplicada a T_1 operando en E_1 prueba la existencia de un valor propio λ_1 asociado a un vector propio e_1 de norma 1 y tal que

$$|\lambda_1| = |||T_1|||.$$

Tenemos por tanto que $|\lambda_1| \leq |\lambda_0|$.

Repitiendo el proceso obtenemos una sucesión de operadores hermíticos compactos T_n ($T_0 = T$) operando respectivamente en los subespacios cerrados E_n ($E_0 = E$) en E tales que

$$E_n \subset E_{n-1} \quad \text{y} \quad T_n = T_{n-1|_{E_n}} \quad n \geq 1$$

y una sucesión de valores propios λ_n asociados a una sucesión e_n de vectores propios con

$$|\lambda_n| \leq |\lambda_{n-1}|$$

y tales que E_n es el ortogonal de $\bigoplus_{k=0}^{n-1} \mathbb{K}e_k$.

Probemos que la sucesión λ_n tiende a 0. Supongamos lo contrario, entonces existe un real $\delta > 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$|\lambda_n| \geq \delta.$$

Como los vectores e_n forman un sistema ortonormal tenemos que

$$||Te_n - Te_m|| = ||\lambda_n e_n - \lambda_m e_m|| \geq \delta\sqrt{2}.$$

Esto contradice que la sucesión Te_n deba ser relativamente compacta ya que el operador T es compacto.

Estamos ya en condiciones de demostrar la afirmación ii). El subespacio ortogonal a todos los vectores e_n es

$$A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n.$$

Sea $x \in A$, entonces para todo $n \in \mathbb{N}$ tenemos que

$$||Tx|| \leq |\lambda_n| \cdot ||x||.$$

Como $\lim \lambda_n = 0$ tenemos que $Tx = 0$ y $x \in V_\infty$. Recíprocamente, supongamos $Tx = 0$ entonces para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\lambda_n \langle x, e_n\rangle = \langle x, Te_n\rangle = \langle Tx, e_n\rangle = 0.$$

Luego x es ortogonal a todos los e_n. Esto significa que

$$\left(\bigoplus_{\lambda\in\sigma(T)-\{0\}} V_\lambda \right)^{\perp} = V_\infty.$$

iii) El subespacio V_∞ es ortogonal a todos los vectores e_n, por tanto es ortogonal (y es exactamente el ortogonal) al subespacio vectorial cerrado engendrado por dichos vectores. Como para todo subespacio cerrado X de E tenemos que $E = X \oplus X^\perp$ resulta que

$$E = V_\infty \oplus \bigoplus_{\lambda \in \sigma(T) - \{0\}} V_\lambda.$$

El teorema queda así demostrado. □

6.4 ¿PARA QUÉ SIRVE EL ESPECTRO?

Muchos problemas de la Física dan lugar a *ecuaciones integrales* del tipo

$$f(x) = \int_a^b K(x,y) f(y) dy + g(x),$$

donde K es una función real continua simétrica en $[a,b] \times [a,b]$, g una función real L^2 en $[a,b]$ y f una función real L^2 que queremos determinar. Este tipo de ecuaciones se escribe en general del modo siguiente:

$$(*) \qquad Tx - \lambda x = y$$

donde x e y son vectores de un espacio de Hilbert E y T un operador hermítico compacto en E. El concocimiento del espectro de T permite dar explícitamente las soluciones de la ecuación $(*)$.

Denotemos por $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de valores propios no nulos de T dada por el teorema 6.3.2. Tomaremos $\lambda_\infty = 0$, V_∞ será el núcleo de T y V_n el subespacio propio asociado a λ_n. Para todo vector $z \in E$, sean z_∞ su proyección ortogonal sobre V_∞ y z_n aquella sobre V_n. Entonces tenemos el desarrollo

$$z = z_\infty + \sum_{n\in\mathbb{N}} z_n \quad \text{con} \quad ||z||^2 = ||z_\infty||^2 + \sum_{n\in\mathbb{N}} ||z_n||^2.$$

Desarrollando x e y de este modo y reemplazando formalmente en la ecuación $(*)$ obtenemos

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} (\lambda_n - \lambda) x_n - \lambda x_\infty = y_\infty + \sum_{n\in\mathbb{N}} y_n$$

que nos da el siguiente sistema equivalente a la ecuación $(*)$:

$$(\mathrm{S}) \qquad \begin{cases} -\lambda x_\infty = y_\infty \\ (\lambda_n - \lambda) x_n = y_n \\ \sum_{n\in\mathbb{N}} ||x_n||^2 < +\infty. \end{cases}$$

La última condición expresa la pertenencia de la solución al espacio E.

<u>1$^{\text{er}}$ caso</u> : $\lambda = 0$

Una condición necesaria para que el sistema tenga solución es que $y_\infty = 0$. Supongámosla cierta, el sistema se reduce entonces a

$$(\mathrm{S}) \qquad \begin{cases} \lambda_n x_n = y_n \\ \sum_{n\in\mathbb{N}} ||x_n||^2 < +\infty. \end{cases}$$

Si la solución x existe, viene dada necesariamente por

$$x_n = \frac{y_n}{\lambda_n}$$

y x_∞ es arbitrario. El vector así definido es una verdadera solución si y sólo si

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{||y_n||^2}{\lambda_n^2} < +\infty$$

y el espacio de soluciones está parametrizado por V_∞.

<u>2$^{\text{o}}$ caso</u> : existe $k \in \mathbb{N}$ $t.q.$ $\lambda = \lambda_k$

Para que (S) tenga una solución es necesario tener $y_k = 0$, supongamos que esto es cierto y tomemos un x_k cualquiera. Para $n \neq k$ tenemos entonces

$$x_\infty = -\frac{y_\infty}{\lambda} \quad \text{y} \quad x_n = \frac{y_n}{\lambda_n - \lambda}.$$

Como el conjunto $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es discreto

$$\delta = \inf_{n\neq k} |\lambda_n - \lambda| > 0.$$

Luego

$$\left|\left| \frac{y_n}{\lambda_n - \lambda} \right|\right| \leq \delta^{-1} ||y_n||$$

para $n \neq k$. Por consiguiente

$$\sum_{n \neq k} ||x_n||^2 < +\infty,$$

y la solución general es

$$x = -\frac{y_\infty}{\lambda} + \sum_{n \neq k} \frac{y_n}{\lambda_n - \lambda},$$

que está parametrizada por V_k.

<u>3^er caso</u> : $\lambda \notin \sigma(T)$

Esta vez no hay obstrucción alguna. Para todo $y \in E$ hay una única solución $x \in E$ dada por

$$x = -\frac{y_\infty}{\lambda} + \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{y_n}{\lambda_n - \lambda}.$$

El razonamiento es prácticamente el mismo de antes. □

6.5 EJERCICIOS

6.A Sean $(E, \langle \ \ , \ \ \rangle)$ un espacio de Hilbert y $T : E \longrightarrow E$ una aplicación lineal tal que exista otra aplicación lineal $S : E \longrightarrow E$ que verifican

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, Sy \rangle \quad \forall x, y \in E.$$

Demostrar que T es un operador acotado en E.

Indicación: demostrar que la aplicación $(x, y) \in E \times E \longrightarrow \langle Tx, y \rangle \in \mathbb{K}$ *es separadamente continua y aplicar el teorema de Banach-Steinhaus.*

6.B Sea E un espacio de Hilbert separable. Recuérdese que una parte M de E se denomina *débilmente acotada* si para todo $x \in E$ el conjunto $(\langle f, x \rangle)_{f \in M}$ es acotado en $\mathbb{C}$, se denomina *débilmente compacta* si de toda sucesión $(f_n)_{n \geq 1}$ en M podemos extraer una subsucesión f_{n_k} débilmente convergente en M (es decir, que existe una $f \in M$ tal que $\forall x \in E$ la sucesión $\langle f_{n_k}, x \rangle$ converge hacia $\langle f, x \rangle$). Tenemos la propiedad siguiente:

Toda parte débilmente acotada es débilmente relativamente compacta.

Sean $(e_n)_{n \geq 1}$ una base de Hilbert en E y $(\lambda_n)_{n \geq 1}$ una sucesión de números reales tendiendo a 0. Para todo $x \in E$ ponemos

$$T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, e_n \rangle e_n$$

Demostrar que T es un operador autoadjunto y compacto en E.

6.C Sean E un espacio de Hilbert separable, $(e_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ una base de Hilbert y T un operador acotado en E.

i) Demostrar que el número (finito o infinito)

$$\sum_{i=1}^{\infty} ||Te_i||^2$$

no depende de la base (e_i) elegida.

Diremos que T es de Hilbert-Schmidt si

$$\sum_{i=1}^{\infty} ||Te_i||^2 < +\infty.$$

ii) Deducir que el adjunto de un operador de Hilbert-Schmidt es también de Hilbert-Schmidt.

Sea $\mathcal{HS}(E)$ el conjunto de operadores de Hilbert-Schmidt en E.

iii) Demostrar que $\mathcal{HS}(E)$ es un espacio vectorial.

iv) Demostrar que

$$|||T|||_0 = \left(\sum_{i=1}^{\infty} ||Te_i||^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

es una norma en $\mathcal{HS}(E)$.

v) Demostrar que $|||T||| \leq |||T|||_0$ donde $|||\ \ |||$ es la norma habitual del operador T.

vi) Demostrar que $\mathcal{HS}(E)$ es un espacio de Banach.

vii) Demostrar que $\mathcal{HS}(E)$ es un ideal bilátero del álgebra $L(E)$ de operadores acotados en E.

viii) Demostrar que $\mathcal{HS}(E)$ contiene los operadores de rango finito de E y que son densos para la norma $|||\ \ |||_0$.

ix) Deducir que todo operador de Hilbert-Schmidt es compacto.

6.D Sea E el espacio de las funciones continuas en $[0,1]$ a valores complejos con el producto escalar

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}dx,$$

siendo $K : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ una función continua a valores complejos que verifica $K(x,y) = \overline{K(y,x)}$ y T el operador compacto en E definido por

$$T(f)(x) = \int_0^1 K(x,y)f(y)dy,$$

i) Demostrar que el operador T es hermítico.

ii) Demostrar que la sucesión (λ_n) de valores propios de T (cada uno contado con su orden de multiplicidad) verifica

$$\sum_n \lambda_n^2 \leq \int_0^1 \left(\int_0^1 |K(x,y)|^2 dy \right) dx$$

iii) Deducir que T se prolonga en un operador de Hilbert-Schmidt en el completado $\widehat{E}$ de E.

6.E Para todo cuerpo $\mathbb{K}$ sea $\mathbb{K}[X]$ el álgebra de polinomios de una variable con coeficientes en $\mathbb{K}$. Para todo $P \in \mathbb{C}[X]$, $\overline{P}$ es el polinomio cuyos coeficientes son los conjugados respectivos de los de P. Si E es un espacio de Hilbert complejo, $L(E)$ sera el álgebra de Banach de los operadores acotados en E. Para todo $T \in L(E)$ denotaremos por T^* al adjunto de T.

Sea $T \in L(E)$, para todo $P \in \mathbb{C}[X]$ de la forma $P(X) = a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n$ ponemos

$$P(T) = a_0 I + a_1 T + \ldots + a_n T^n.$$

i) Demostrar que la aplicación $\Phi_T : \mathbb{C}[X] \longrightarrow L(E)$ definida por $\Phi_T(P) = P(T)$ es un morfismo de álgebras.

ii) Demostrar que $(P(T))^* = \overline{P}(T^*)$.

Supongamos T hermítico y sean α y β sus cotas inferior y superior, respectivamente.

iii) Dar una condición suficiente sobre P para que el operador $P(T)$ sea hermítico.

iv) Admitamos que el producto de dos operadores positivos que conmutan es positivo. Demostrar que si $P \in \mathbb{R}[X]$ es positivo en el intervalo $[\alpha, \beta]$ entonces $P(T)$ es positivo. Deducir que si $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ son tales que $P(x) \leq Q(x)$ para todo $x \in [\alpha, \beta]$ entonces $P(T) \leq Q(T)$ y que

$$|||P(T)||| \leq \sup_{x \in [\alpha, \beta]} |P(x)|$$

v) Demostrar que Φ_T se prolonga a un morfismo continuo del álgebra (de Banach) de las funciones continuas en el intervalo $[\alpha, \beta]$ (con la norma $\| \ \|_\infty$ de la convergencia uniforme) en el álgebra $L(E)$.

vi) Deducir que si T es positivo existe un único operador hermítico positivo D en E tal que $D^2 = T$ (decimos que el operador D es la *raíz cuadrada* de T).

vii) Deducir también que si $\alpha > 0$ entonces el operador T es invertible.

SOLUCIÓN A LOS EJERCICIOS

Capítulo 1

Ejercicio 1.A

i) La aplicación $d : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ es la distancia euclidiana en el plano.

Demostremos que d' es una distancia en $\mathcal{P}$. La simetría $d'(M, N) = d'(N, M)$ es inmediata, así que $d'(M, M) = 0$. Sean $M, N \in \mathcal{P}$ tales que $d'(M, N) = 0$. Entonces $d(M, O) = d(N, O) = 0$ y como d es una distancia tenemos que $M = O = N$, lo cual prueba la propiedad de separación. Demostremos la desigualdad triangular. Sean M, N y $P \in \mathcal{P}$, tenemos

$$\begin{aligned} d'(M, N) &= d(M, O) + d(N, O) \\ &\leq d(M, O) + d(P, O) + d(P, O) + d(N, O) \\ &= d'(M, P) + d'(P, N). \end{aligned}$$

ii) Sea $(M_k)_{k \geq 1}$ una sucesión de Cauchy en $(\mathcal{P}, d')$. Entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe un $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$k, l \geq N_\varepsilon \Longrightarrow d'(M_k, M_l) < \varepsilon.$$

Esto implica que la sucesión M_k es estacionaria a partir de un número k_0 o que $d(M_k, O) < \varepsilon$ para $k \geq N_\varepsilon$, es decir, M_k converge hacia el punto O para d. Como $d'(M_k, O) = d(M_k, O)$, M_k converge hacia O respecto a d'. Por tanto el espacio métrico $(\mathcal{P}, d')$ es completo.

iii) Es evidente que la sucesión $M_k = (1, \frac{1}{k})$ converge respecto a d hacia el punto $M_0 = (1, 0)$. Pero para d' esta sucesión no es ni siquiera de Cauchy, en efecto, para $k, l \in \mathbb{N}$ tenemos que

$$\begin{aligned} d'(M_k, M_l) &= d(M_k, O) + d(M_l, O) \\ &= \sqrt{1 + \frac{1}{k^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{l^2}} \\ &\geq 2. \end{aligned}$$

Por tanto podemos afirmar que las distancias d y d' no son equivalentes. □

Ejercicio 1.B

Las propiedades de simetría y de separación para d_1 se deducen fácilmente del hecho de que d es una distancia. Para demostrar que d_1 verifica la desigualdad triangular vamos primero a demostrar que si a, b y c son tres números reales positivos tales que $a \leq b + c$ entonces

$$\frac{a}{1+a} \leq \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c}.$$

Para fijar las ideas supondremos que $c \leq b$ (que no es ninguna restricción). Tenemos $a+ab \leq (b+c)+a(b+c)$, es decir, $a(1+b) \leq (1+a)(b+c)$. Dividiendo los dos miembros de esta desigualdad por el número estrictamente positivo $(1+a)(1+b)$ y en teniendo en cuenta que $c \leq b$ se obtiene

$$\frac{a}{1+a} \leq \frac{b+c}{1+b} \leq \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c}.$$

Sean x, y y z tres elementos de X, aplicando la desigualdad que acabamos de ver a los tres números reales positivos

$$a = d(x,y) \qquad b = d(x,z) \qquad \text{y} \qquad c = d(z,y)$$

se obtiene que

$$d_1(x,y) \leq d_1(x,z) + d_1(z,x).$$

Que d_2 sea una distancia es un hecho fácil de probar. Demostremos que d_1 y d_2 son uniformemente equivalentes a d. Para ello basta establecer la bicontinuidad uniforme de las identidades

$$i : (X,d) \longrightarrow (X,d_1) \qquad \text{y} \qquad j : (X,d) \longrightarrow (X,d_2).$$

i) Como $d_1(x,y) \leq d(x,y)$ para todo $x, y \in X$, i es lipschitziana y por tanto uniformemente continua. Demostremos la continuidad de la inversa $i^{-1} : (X,d_1) \longrightarrow (X,d)$, para ello bastará probar que para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\eta > 0$ tal que si $x, y \in X$

$$d_1(x,y) < \eta \Longrightarrow d(x,y) < \varepsilon.$$

Pero dado un número $\varepsilon > 0$ bastará tomar $\eta = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$.

ii) Tenemos siempre que $d_2(x,y) \leq d(x,y)$ para $x, y \in X$, por tanto j es uniformemente continua. Demostremos que j^{-1} es uniformemente continua. Sea $\varepsilon > 0$ y tomemos η tal que $\eta < \inf\{1, \varepsilon\}$. Es evidente que

$$d_2(x,y) < \eta \Longrightarrow d(x,y) < \varepsilon.$$

Luego j es uniformemente bicontinua.

EJERCICIO 1.C

i) Sea A_n un abierto de X_n. Entonces $\pi_n^{-1}(A_n) = \prod_{n\in\mathbb{N}^*} \Omega_i$ (donde $\Omega_n = A_n$ y $\Omega_i = X_i$ para $i \neq n$) que es un abierto de X en la topología $\mathcal{T}$. Para todo $n \in \mathbb{N}^*$ la proyección $\pi_n : X \longrightarrow X_n$ es continua.

Sean A un abierto de X, $x_n \in \pi_n(A)$ y $x \in X$ tal que $\pi_n(x) = x_n$. Como A es abierto, para cada $n \in \mathbb{N}^*$ existe un abierto A_n de X_n tal que $x_n \in A_n$ y $A \supset \prod_{n\geq 1} A_n$. Por consiguiente $\pi_n(A) \supset A_n$ y el conjunto $\pi_n(A)$ es abierto ya que es entorno de cada uno de sus puntos. Esto prueba que π_n es abierta.

ii) Sea $\mathcal{S}$ una topología sobre X para la cual las proyecciones π_n son continuas. Es obvio que $\mathcal{S}$ contiene todas aquellas partes $\prod_{i\in\mathbb{N}^*} \Omega_i$ tales que $\Omega_i = X_i$ excepto como mucho para un índice $n \in \mathbb{N}^*$ para el cual $\Omega_n = A_n$ abierto de X_n, y por tanto todas sus intersecciones finitas que son las partes de la forma

$$\prod_{i\in\mathbb{N}^*} \Omega_i$$

con

$$\Omega_i = \begin{cases} A_{n_j} & \text{para } i = n_j,\ j = 1, \ldots, k \\ X_i & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

(A_{n_j} abierto de X_{n_j}) así como las reuniones (cualesquiera) de partes de este tipo. Luego $\mathcal{S}$ contiene a $\mathcal{T}$.

iii) Sean $x \in X$ y $\varepsilon > 0$. Por definición

$$B(x,\varepsilon) = \left\{ y = (y_n) \in X \,\middle|\, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} d_n(x_n, y_n) < \varepsilon \right\}.$$

Como la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ es convergente (de suma 1) existe un $N \in \mathbb{N}^*$ tal que

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \varepsilon.$$

Sea $\eta = \varepsilon - \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} > 0$, entonces la parte

$$\prod_{n=1}^{N} B(x_n, \eta) \times \prod_{n>N} X_n$$

está contenida en $B(x,\varepsilon)$. En efecto, sea $y \in X$ tal que $d_n(x_n, y_n) < \eta$ para $n = 1, \ldots, N$. Entonces

$$\begin{aligned} d(x,y) &= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n} d_n(x_n, y_n) + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} d_n(x_n, y_n) \\ &< \left(1 - \frac{1}{2^N}\right)\eta + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \\ &< \eta + \varepsilon - \eta. \end{aligned}$$

iv) Se deduce de iii) que para todo punto $x \in X$ todo entorno de x respecto a d es un entorno de x respecto a $\mathcal{T}$. Luego $\mathcal{T}$ es más fina que la topología $\mathcal{T}_d$ definida por d. Pero como para todo $n \in \mathbb{N}^*$, $d_n \leq 2^n d$, $\mathcal{T}_d$ hace continuas todas las proyecciones π_n. Por tanto $\mathcal{T}_d$ es más fina que $\mathcal{T}$. Por consiguiente $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$.

v) Si $f : Y \longrightarrow X$ es continua, $\pi_n \circ f : Y \longrightarrow X_n$ es continua para todo $n \in \mathbb{N}^*$. Recíprocamente, supongamos que para todo $n \in \mathbb{N}^*$ $\pi_n \circ f$ es continua. Sea $\mathcal{S}$ la topología más fina en X que haga continua f, los abiertos de $\mathcal{S}$ son las imágenes por f de los abiertos de Y. Esta topología hace en particular continuas todas las proyecciones π_n ya que si A_n es un abierto de X_n, $f^{-1}\left(\pi_n^{-1}(A_n)\right) = (\pi_n \circ f)^{-1}(A_n)$ es abierto ($\pi_n \circ f$ es continua). Por tanto la topología $\mathcal{S}$ más fina que $\mathcal{T}$. Dado que $f : Y \longrightarrow (X, \mathcal{S})$ es continua resulta que $f : Y \longrightarrow (X, \mathcal{T})$ también lo es.

vi) Supongamos X_n completo para todo $n \in \mathbb{N}^*$. Sea $(x^k)_{k\geq 1}$ una sucesión de Cauchy en (X, d). Para todo $\varepsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}^*$ tal que

$$k, l \geq N \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} d_n(x_n^k, x_n^l) < \varepsilon.$$

Esto implica que $d_n(x_n^k, x_n^l) < 2^n \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$, es decir, si fijamos $n \in \mathbb{N}^*$, la sucesión $(x_n^k)_{k\geq 1}$ es de Cauchy en X_n. Como X_n es completo, x_n^k converge (cuando $k \to +\infty$) hacia un elemento $x_n \in X_n$. Además existe una constante $C > 0$ tal que

$$k \geq N \Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, \;\; d_n(x_n^k, x_n) \leq C\varepsilon.$$

Los límites x_n definen un elemento $x = (x_n)_n$ de X. Demostremos que x^k converge hacia x en X. Para $k \geq N$ tenemos que

$$\begin{aligned} d(x^k, x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} d_n(x_n^k, x_n) \\ &\leq C\varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = C\varepsilon. \end{aligned}$$

El espacio métrico (X, d) es por tanto completo. □

EJERCICIO 1.D

La función $f(x) = x^{\frac{1}{n}}$ es claramente continua y, como $[0,1]$ es compacto, es uniformemente continua. Será lipschitziana si existe un número real $k > 0$ tal que para todo $x, y \in [0,1]$

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|.$$

Esto implica en particular que el valor

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|}$$

está acotado (por k) sobre el conjunto $\{(x, y) \in [0,1] \times [0,1] \; : \; x \neq y\}$. Y

$$\frac{|f(x) - f(0)|}{|x - 0|} = \frac{|f(x)|}{|x|} = x^{\frac{1-n}{n}}, \quad x \in (0,1]$$

sólo lo es cuando $n \geq 2$. Luego f no puede ser lipschitziana. □

EJERCICIO 1.E

i) Si uno de los dos números a o b es nulo, la desigualdad se verifica trivialmente. Supongamos por tanto $ab > 0$. Tenemos

$$\begin{aligned} \log(ab) &= \log a + \log b \\ &= \frac{1}{p} \log a^p + \frac{1}{q} \log b^q \\ &\leq \log\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\right). \end{aligned}$$

ya que la función logaritmo es cóncava. Tomando la exponencial de cada uno de los dos miembros se obtiene

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

ii) La desigualdad buscada se verifica si una de las funciones f ó g es nula μ-cpt. Supongamos por tanto que f y g son las dos nulas μ-cpt. Aplicando la desigualdad que precede (en cada punto) a las funciones positivas

$$a = \frac{|f|}{||f||_p} \quad \text{y} \quad b = \frac{|g|}{||g||_q}$$

se obtiene

$$\frac{|fg|}{||f||_p||g||_q} \leq \frac{|f|^p}{p||f||_p} + \frac{|g|^q}{q||g||_q}.$$

E integrando los dos miembros

$$\frac{1}{||f||_p||g||_q} \int_\Omega |fg| \leq \frac{1}{p} \cdot \frac{\int_\Omega |f|^p}{||f||_p^p} + \frac{1}{q} \cdot \frac{\int_\Omega |g|^q}{||g||_q^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

De donde

$$||fg||_1 \leq ||f||_p||g||_q.$$

iii) Para $p = 1$ la desigualdad es inmediata. Supongamos $p > 1$, entonces $q = \frac{p}{p-1}$. Como $f, g \in L^p$, $f + g \in L^p$ luego $(f+g)^{p-1} \in L^q$. Tenemos que

$$\begin{aligned}\int_\Omega |f+g|^p &= \int_\Omega |f+g| \cdot |f+g|^{p-1} \\ &\leq \int_\Omega |f| \cdot |f+g|^{p-1} + \int_\Omega |g| \cdot |f+g|^{p-1}.\end{aligned}$$

Y por la desigualdad de Hölder

$$\begin{aligned}\int_\Omega |f+g|^p \leq &\left(\int_\Omega |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega |f+g|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}} + \\ &\left(\int_\Omega |g|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega |f+g|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}},\end{aligned}$$

es decir,

$$||f+g||_p^p \leq ||f||_p \cdot ||f+g||_p^{\frac{p}{q}} + ||g||_p \cdot ||f+g||_p^{\frac{p}{q}}$$

obteniendo que

$$||f+g||_p^{p-\frac{p}{q}} \leq ||f||_p + ||g||_p.$$

Pero como $p - \frac{p}{q} = p - \frac{p(p-1)}{p} = 1$ tenemos

$$||f+g||_p \leq ||f||_p + ||g||_p$$

que es la desigualdad buscada.

iv) La aplicación $|| \ ||_p$ que a $f \in L^p$ asocia $||f||_p \in \mathbb{R}_+$ verifica por tanto la desigualdad triangular. Las propiedades de separación y homogeneidad son inmediatas. Esto prueba que $|| \ ||_p$ es una norma en el espacio vectorial L^p.

v) Como f_n es una sucesión de Cauchy, para todo $k \in \mathbb{N}$ existe un entero N_k tal que

$$n, p \geq N_k \Longrightarrow ||f_n - f_p||_p \leq \frac{1}{2^k}.$$

Así, si definimos la sucesión de enteros $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tal que para todo $k \in \mathbb{N}$, $n_k \geq N_k$, la sucesión $(f_{n_k})_k$ verifica que

$$||f_{n_{k+1}} - f_{n_k}||_p \leq \frac{1}{2^k}.$$

vi) Al ser las funciones f_k medibles, las h_k también lo serán y por consiguiente h es medible. Por otra parte, h_k tiende a h de forma creciente entonces la propiedad de Beppo Levi implica que

$$\left(\int_\Omega h_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \uparrow \left(\int_\Omega h^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Además para todo $k \in \mathbb{N}^*$ tenemos

$$\begin{aligned}
||h_k||_p &\leq ||f_{n_1}||_p + \sum_{i=1}^{k} ||f_{n_{i+1}} - f_{n_i}||_p \\
&\leq ||f_{n_1}||_p + \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2^i} \\
&\leq ||f_{n_1}||_p + 1 \\
&< +\infty.
\end{aligned}$$

Luego $h \in L^p$ puesto que las normas $||h_k||_p$ están mayoradas independientemente de k.

vii) Como $h \in L^p$ es μ-cpt finita. La serie (u_n) cuyo término general viene dado por

$$u_1 = f_{n_1} \quad \text{y} \quad u_k = f_{n_{k+1}} - f_{n_k} \quad \text{para} \quad k \geq 2$$

tiene por suma parcial $S_k = f_{n_k}$. Decimos que esta serie converge absolutamente μ-cpt, por tanto la sucesión $(f_{n_k})_{k\geq 1}$ converge absolutamente μ-cpt hacia una función medible f.

viii) Tenemos

$$\begin{aligned}|f_{n_k}| &= \left| f_{n_1} + \sum_{i=1}^{k} (f_{n_{i+1}} - f_{n_i}) \right| \\ &\leq |f_{n_1}| + \sum_{i=1}^{k} \left| f_{n_{i+1}} - f_{n_i} \right| = h_k.\end{aligned}$$

Como $h \in L^p$ el teorema de Lebesgue nos dice que $f \in L^p$ y f_{n_k} tiende a f en L^p cuando $k \to +\infty$.

Para $n \geq n_k$ tenemos

$$\begin{aligned}||f_n - f||_p &\leq ||f_n - f_{n_k}||_p + ||f_{n_k} - f||_p \\ &\leq \frac{1}{2^n} + ||f_{n_k} - f||_p\end{aligned}$$

lo que demuestra que $f_n \to f$ en L^p.

Por tanto hemos visto que $(L^p, ||\ \ ||)$ es un espacio de Banach. □

Ejercicio 1.F

Demostremos en primer lugar que p_n es una norma en $\mathcal{H}$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$. La única propiedad no inmediata es la separación. Sea $f \in \mathcal{H}$ tal que $p_n(f) = 0$, f es por tanto idénticamente nula sobre el disco K_n y por tanto en todas partes por ser analítica.

La sucesión creciente de normas $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ define una topología sobre $\mathcal{H}$ que es la misma a aquella asociada a la distancia invariante por traslación

$$d(f, g) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{p_n(f-g)}{1 + p_n(f-g)}.$$

Para demostrar que $\mathcal{H}$ con esta sucesión de normas es un espacio de Fréchet basta probar que es completo con esta distancia. Sea $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $\mathcal{H}$. Para todo $n \in \mathbb{N}^*$ y todo $k \in \mathbb{N}$ denotemos por f_k^n la restricción de f_k a K_n. La sucesión $(f_k^n)_k$ es de Cauchy en el espacio de Banach $C^0(K_n, \mathbb{C})$ de las funciones complejas continuas sobre K_n dotado de la norma p_n. Por tanto converge hacia un elemento f^n tal que para todo $n \in \mathbb{N}^*$ la restricción de f^{n+1} a K_n es igual a f_n; existe por tanto una función continua $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ cuya restricción a K_n es precisamente f^n. Luego, la sucesión f_k converge uniformemente sobre todo compacto K_n hacia f. Demostremos que f es holomorfa. Para ello vamos a usar el teorema de Morera que recordaremos.

Sea $\mathcal{O}$ un abierto de $\mathbb{C}$. Llamamos camino cerrado en $\mathcal{O}$ a toda aplicación continua $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathcal{O}$ tal que $\gamma(0) = \gamma(1)$. Si $f : \mathcal{O} \longrightarrow \mathbb{C}$ es una función continua, la integral de f a lo largo de γ será, por definición, el número complejo (cuya existencia se muestra de manera similar a la de la integral de Riemann de una función continua sobre un intervalo compacto de $\mathbb{R}$):

$$\int_\gamma f(z)dz = \lim_{\delta\to 0} \sum_{j=1}^{n} f(\zeta_j)(\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})),$$

donde $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$ es una subdivisión cualquiera de $[0,1]$, $\delta = \sup\{|t_j - t_{j-1}|\}$ y ζ_j un elemento arbitrario de $[t_{j-1}, t_j]$.

Teorema de Morera : *Si para todo camino cerrado γ de $\mathcal{O}$*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0$$

entonces f es holomorfa en $\mathcal{O}$.

Vuelta al ejercicio: Sea γ un camino cerrado en $\mathbb{C}$. Entonces existe un $n \in \mathbb{N}^*$ tal que la imagen de γ está en el interior de disco K_n. Como f_n es holomorfa, el teorema de Morera nos dice que

$$\int_\gamma f_n(z)dz = 0.$$

Y como f_n converge uniformemente sobre K_n hacia f, f_n converge uniformemente hacia f sobre γ. Luego

$$\int_\gamma f(z)dz = \lim_{n\to+\infty} \int_\gamma f_n(z)dz = 0,$$

y f es holomorfa en $\mathbb{C}$. El espacio $\mathcal{H}$ es por tanto completo y por consiguiente de Fréchet. $\square$

Ejercicio 1.G

i) Sean $t \in \mathbb{R}$ y $A_t = t + A$, entonces $\mathbf{1}_{A\cap A_t}(x) = \mathbf{1}_A(x+t)\mathbf{1}_A(x)$. Como $A_t \cap A \subset A$ tenemos que $\mathbf{1}_{A\cap A_t} \leq \mathbf{1}_A$ y por tanto

$$\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_A(x+t)\mathbf{1}_A(x)d\lambda(x) \leq \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_A(x)d\lambda(x) = \lambda(A) < +\infty,$$

es decir, la función $x \longrightarrow \gamma(x,t)$ es integrable para todo $t \in \mathbb{R}$.

ii) Para x fijado la función $t \longrightarrow \varphi_\varepsilon(x+t)\mathbf{1}_A(x)$ es continua y para t fijado, $x \longrightarrow \varphi_\varepsilon(x+t)\mathbf{1}_A(x)$ es integrable ya que $|\varphi_\varepsilon(x+t)\mathbf{1}_A(x)| \leq |\gamma(x,t)|$ que es integrable por i).

Sean $t \in \mathbb{R}$ y t_n una sucesión de números reales que tienden hacia t. Pongamos para todo $n \in \mathbb{N}$ que $\varphi_\varepsilon^n(x) = \varphi_\varepsilon(x+t_n)\mathbf{1}_A(x)$, entonces

a) $|\varphi_\varepsilon^n(x)| \leq \mathbf{1}_A(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$,

b) $\varphi_\varepsilon^n(x)$ converge hacia $\varphi_\varepsilon(x,t)$ para x fijado ya que φ_ε es continua en t. Entonces el teorema de la convergencia dominada implica que la integral de $\varphi_\varepsilon^n(x)$ converge hacia la integral de $\varphi_\varepsilon(x+t)\mathbf{1}_A(x)$, es decir, $h_\varepsilon(t)$ es continua en t.

iii) Calculemos

$$\begin{aligned}
|h(t) - h_\varepsilon(t)| &= \left|\int_{\mathbb{R}} \gamma(x,t)d\lambda(x) - \int_{\mathbb{R}} \varphi_\varepsilon(x+t)\mathbf{1}_A(x)d\lambda(x)\right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} |\gamma(x,t) - \varphi_\varepsilon(x+t)\mathbf{1}_A(x)|\, d\lambda(x) \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} |\mathbf{1}_A(x+t) - \varphi_\varepsilon(x+t)|\, d\lambda(x) \\
&\leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

Luego

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |h(t) - h_\varepsilon(t)| \leq \varepsilon.$$

Esto implica que h_ε tiende uniformemente a h cuando ε tiende a 0. Por consiguiente h es continua pues es límite uniforme de funciones continuas.

iv) Tenemos

$$h(0) = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_A(x)\mathbf{1}_A(x)d\lambda(x) = \lambda(A).$$

Como h es continua y $\lambda(A) > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que para todo $t \in (-\delta, +\delta)$, $h(t) > 0$.

v) Para $t \in (-\delta, +\delta)$ la integral

$$\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_A(x+t)\mathbf{1}_A(x)d\lambda(x)$$

es estrictamente positiva, la función integrada es por tanto estrictamente positiva en por lo menos un punto (dependiente de t) que denotaremos x_t. Este punto es tal que $\mathbf{1}_A(x+t) > 0$ y $\mathbf{1}_A(x) > 0$, es decir, $x_t \in A$ y $x_t+t \in A$.

vi) Por lo anterior, para todo $t \in (-\delta, +\delta)$, $x_t \in A$ y $x_t + t \in A$, por tanto $t = x_t + t - x_t \in A - A = E$. Dicho de otro modo, $(-\delta, +\delta) \subset E$. Esto prueba que E es un entorno de 0.

Como se dice en el enunciado del problema, este resultado sigue siendo válido incluso si $\lambda(A) = +\infty$.

vii) Supongamos que F contiene un racional no nulo r. Esto significa que $r = x - y$ con $x \in B$ e $y \in B$, x e y son por tanto equivalentes (y diferentes), lo cual contradice el hecho de que B contiene un único elemento de cada clase de equivalencia. Entonces el conjunto F no puede ser un entorno de 0.

viii) Sean r y r' elementos distintos de $\mathbb{Q}$ tales que $(r+B)\cap(r'+B) \neq \emptyset$. Entonces existen $x, y \in B$ tales que $r + x = r' + y$, de donde $x - y = r' - r$. Esto implica que $x \neq y$ y x es equivalente a y. Contradicción puesto que B contiene como mucho un elemento de cada clase de equivalencia, por consiguiente $(r + B) \cap (r' + B) = \emptyset$. Todo elemento $z \in \mathbb{R}$ está en una única clase de equivalencia, es decir, existe un único elemento $x \in B$ tal que $z - x = r \in \mathbb{Q}$ esto es $z \in r + B$. Luego $\mathbb{R} = \bigcup_{r\in\mathbb{Q}}(r + B)$.

ix) Como $B \in \mathcal{B}$ (es la hipótesis que hemos hecho), $(r + B) \in \mathcal{B}$ ya que al ser la aplicación $x \longrightarrow x + r$ continua es medible, aplicando viii)

$$+\infty = \lambda(\mathbb{R}) = \sum_{r\in\mathbb{Q}} \lambda(r + B).$$

Existe por tanto un $r \in \mathbb{Q}$ tal que $\lambda(r + B) > 0$. Como λ es invariante por traslación tenemos que $\lambda(r + B) = \lambda(B)$ lo cual prueba que $\lambda(B) > 0$.

x) Por vi) $F = B - B$ es un entorno de 0 cosa que contradice vii). Por tanto el conjunto B no es medible en el sentido de Lebesgue.

Capítulo 2

Ejercicio 2.A

Es evidente que la restricción $\mathcal{T}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{U}}$ de la topología $\mathcal{T}_{\mathcal{C}}$ a $\mathcal{U}$ es más fina que la restricción $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}^{\mathcal{U}}$ de la topología $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$ a $\mathcal{U}$. Demostremos que $\mathcal{T}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{U}} \subset \mathcal{T}_{\mathcal{F}}^{\mathcal{U}}$. Como $\mathcal{U}$ es equicontinua es acotada para la norma $||| \ |||$ de $L_c(E,F)$, consideremos $\alpha = \sup_{u\in\mathcal{U}}\{|||u|||\}$. Sean K un compacto de E, $\varepsilon > 0$ y pongamos $\eta = \frac{\varepsilon}{1+2\alpha}$. Entonces K puede recubrirse por un número finito de bolas $\{B(a_i,\eta)\}_{i=1,\dots,n}$ donde a_i son elementos de K. Para demostrar $\mathcal{T}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{U}} \subset \mathcal{T}_{\mathcal{F}}^{\mathcal{U}}$ basta probar entonces que el conjunto

$$V(u,K,\varepsilon) = \left\{ v \in \mathcal{U} \middle| \sup_{y\in K} ||u(y) - v(y)|| < \varepsilon \right\}$$

contiene la intersección de $\mathcal{U}$ con la parte

$$\bigcap_{i=1}^{n} V(u,\{a_i\},\eta).$$

Sean $x \in B(a_i,\eta)$ y $v \in \mathcal{U} \cap V(u,\{a_i\},\eta)$. Entonces

$$\begin{aligned} ||u(x) - v(x)|| &\leq ||u(x) - u(a_i)|| + ||u(a_i) - v(a_i)|| + ||v(a_i) - v(x)|| \\ &\leq |||u|||\eta + \eta + |||v|||\eta \\ &\leq (1+2\alpha)\eta = \varepsilon. \end{aligned}$$

Luego para todo $i = 1,\dots,n$, $v \in \mathcal{U} \cap V(u,\{a_i\},\eta) \subset \mathcal{U} \cup V(u,K,\varepsilon)$. $\square$

Ejercicio 2.B

i) Es evidente que E contiene la reunión de los A_n. Sea $x \in E$, entonces

$$\alpha = \sup_{u\in\mathcal{U}} ||u(x)|| < +\infty$$

ya que la familia $\mathcal{U}$ es simplemente acotada. Si $n \in \mathbb{N}^*$ es tal que $n \geq \alpha$ es obvio que $x \in A_n$. Esto da la igualdad

$$E = \bigcup_n A_n.$$

Los A_n son claramente cerrados y su reunión es de interior no vacío (igual a E). Por el teorema de Baire, uno de los A_n tiene interior no vacío y por tanto todos ya que para cualquier $n \in \mathbb{N}^*$ $A_n = nA_1$ y en particular A_1 es de interior no vacío.

ii) Sean $x, y \in A_1$ y $t \in [0,1]$, entonces para todo $u \in \mathcal{U}$ tenemos que

$$||u(tx + (1-t)y)|| = ||tu(x) + (1-t)u(y)|| \leq t + (1-t) = 1,$$

es decir, A_1 es convexo. Por otra parte, si $x \in A_1$ entonces $-x \in A_1$, es decir, A_1 es además simétrico, por tanto su interior contiene $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}(-x) = 0$. Existe entonces $\rho > 0$ tal que la bola $B(0,\rho)$ está contenida en A_1. Para todo $x \in E$ no nulo, $\rho\frac{x}{||x||} \in B(0,\rho) \subset A_1$, tenemos por tanto

$$\sup_{u\in\mathcal{U}} |||u||| = \sup_{u\in\mathcal{U}} \left\{ \sup_{||x||\leq 1} ||u(x)|| \right\} \leq \frac{1}{\rho}.$$

Esto prueba que la familia $\mathcal{U}$ es acotada en el espacio normado $L_c(E,F)$ luego fuertemente acotada. $\square$

Ejercicio 2.C

i) Como para todo $x \in E$ la aplicación parcial $\phi(x,\cdot)$ es continua la sucesión $\phi(\cdot, y_n)$ que está en $L_c(E,G)$ converge simplemente hacia 0. Por el teorema de Banach-Steinhaus esta sucesión converge uniformemente sobre todo compacto de E hacia 0, en particular sobre el compacto $\{x_n | n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$. Esto implica que $\phi(x_n, y_n)$ tiende a 0 cuando $n \to +\infty$. Por consiguiente ϕ es continua como aplicación bilineal de $E \times F$ en G.

ii) Sea $a \in \mathbb{R}$, hay que demostrar que $\tau_x(f)$ tiende a $\tau_a(f)$ cuando $x \to a$. Sea $\varepsilon > 0$, entonces existe $\varphi \in \mathcal{K}(\mathbb{R})$ tal que $||f-\varphi||_p \leq \frac{\varepsilon}{3}$ (se deduce de la densidad de $\mathcal{K}(\mathbb{R})$ en L^p que admitiremos). Tenemos que

$$||\tau_x(f) - \tau_a(f)||_p \leq ||\tau_x(f) - \tau_x(\varphi)||_p + ||\tau_x(\varphi) - \tau_a(\varphi)||_p + ||\tau_a(\varphi) - \tau_a(f)||_p.$$

Pero

$$\begin{aligned} ||\tau_x(f) - \tau_x(\varphi)||_p &= \left\{ \int_{\mathbb{R}} |f(x-y) - \varphi(x-y)|^p dy \right\}^{\frac{1}{p}} \\ &= ||f-\varphi||_p \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3}. \end{aligned}$$

Igualmente

$$\begin{aligned}||\tau_a(f) - \tau_a(\varphi)||_p &= \left\{ \int_{\mathbb{R}} |f(a-y) - \varphi(a-y)|^p dy \right\}^{\frac{1}{p}} \\ &= ||f - \varphi||_p \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3}.\end{aligned}$$

Por otra parte

$$\begin{aligned}||\tau_a(\varphi) - \tau_x(\varphi)||_p &= \left\{ \int_{\mathbb{R}} |\varphi(a-y) - \varphi(x-y)|^p dy \right\}^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \delta ||\tau_a(\varphi) - \tau_x(\varphi)||_\infty,\end{aligned}$$

donde $\delta = \mu(K)^{\frac{1}{p}}$ con K soporte de φ. Como φ es uniformemente continua (pues es continua con soporte compacto) existe $\eta > 0$ tal que

$$|x-a| < \eta \Longrightarrow ||\tau_a(\varphi) - \tau_x(\varphi)||_\infty < \frac{\varepsilon}{3\delta}.$$

Tenemos finalmente que para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\eta > 0$ tal que

$$|x-a| < \eta \Longrightarrow ||\tau_x(f) - \tau_a(f)||_p < \varepsilon$$

que prueba la continuidad de $a \in \mathbb{R} \longrightarrow \tau_a(f) \in L^p$.

iii) Sean $f \in L^p$ y $g \in L^q$, por ii) se cumple que para todo $x \in \mathbb{R}$ la función $\tau_x(f)$ está en L^p y por tanto, por la desigualdad de Hölder (véase el ejercicio 1.E), la función $\tau_x(f)g$ está en L^1. Tenemos que

$$|f * g(x)| = \left| \int_{\mathbb{R}} \tau_x(f)(y) g(y) dy \right| \leq ||\tau_x(f)||_p \cdot ||g||_q = ||f||_p \cdot ||g||_q.$$

Luego $f * g$ está definida en todas partes, como el último término no depende de x, esta función es acotada. Queda demostrar que $f * g$ es uniformemente continua. Sean a y b reales tenemos que

$$\begin{aligned}|f * g(a) - f * g(b)| &= \left| \int_{\mathbb{R}} (\tau_a(f)(x) - \tau_b(f)(x)) g(x) dx \right| \\ &\leq ||\tau_a(f) - \tau_b(f)||_p \cdot ||g||_q.\end{aligned}$$

Sabemos entonces por ii) que para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\eta > 0$ tal que

$$|a-b| < \eta \Longrightarrow ||\tau_a(f) - \tau_b(f)||_p < \varepsilon.$$

Luego

$$|a-b| < \eta \Longrightarrow ||g||_q \cdot \varepsilon.$$

Esto prueba la continuidad uniforme de $f * g$.

iv) Sean f y g en $\mathcal{K}$ y $x \notin \mathrm{sop}(f) + \mathrm{sop}(g)$, entonces para todo $y \in \mathrm{sop}(g)$, $x - y \notin \mathrm{sop}(f)$ y por consiguiente $f(x-y) = 0$, por tanto $f * g(x) = 0$, es decir, $\mathrm{sop}(f * g) \subset \mathrm{sop}(f) + \mathrm{sop}(g)$.

Si f y g tienen soporte compacto entonces $\mathrm{sop}(f) + \mathrm{sop}(g)$ es también compacto, por tanto $f * g$ es a soporte compacto. $\square$

Ejercicio 2.D

Para todo número complejo $z = \alpha + i\beta$ la parte real de iz es igual a $-\beta$ de donde $z = \mathcal{R}z - i\mathcal{R}(iz)$. Como $\mathcal{R}(if(x)) = \mathcal{R}f(ix) = u(ix)$, poniendo $z = f(x)$ se obtiene para todo $x \in E$ que

$$f(x) = u(x) - iu(ix).$$

Esto prueba la identidad.

Puesto que para todo $x \in E$ $|u(x)| \leq |f(x)|$ resulta que $|||u||| \leq |||f|||$. Por otra parte, para todo $x \in E$ existe un $\theta \in \mathbb{R}$ tal que $|f(x)| = e^{i\theta} f(x)$. Como $f(e^{i\theta}x)$ es real tenemos que

$$|f(x)| = f(e^{i\theta}x) = u(e^{i\theta}x).$$

Pero

$$f(e^{i\theta}x) = u(e^{i\theta}x) \leq |||u||| \cdot ||e^{i\theta}x|| = |||u||| \cdot ||x||.$$

Esto implica $|||f||| \leq |||u|||$, luego

$$|||u||| = |||f|||.$$

$\square$

Ejercicio 2.E

i) La evaluación $\langle \delta_a^{n+1}, \varphi\rangle$ sólo tiene sentido cuando φ es derivable hasta el orden $n+1$ en a. Existen funciones $\varphi \in \mathcal{D}^n(\mathbb{R})$ que no son $(n+1)$ veces derivables en a, por tanto la distribución δ_a^{n+1} no puede extenderse al espacio $\mathcal{D}^n(\mathbb{R})$, es decir, no puede ser de orden n.

ii) Para todo $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ la suma

$$\langle \sum_{n=0}^{\infty} \delta_{a_n}^n, \varphi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi^{(n)}(a_n)$$

es finita, por tanto la suma de las $\delta_{a_n}^n$ define una forma lineal en $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Demostremos que es continua. Sea φ_k una sucesión en $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ tendiendo hacia 0. Esto significa que existe un compacto fijo K de $\mathbb{R}$ tal que

– $\mathrm{sop}(\varphi_k) \subset K$ para todo k,

– para todo $r \in \mathbb{N}$, la derivada de orden r de φ_k tiende a 0 uniformemente cuando k tiende a infinito.

Como la sucesión a_n tiende a infinito existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que para $n > N$, $a_n \notin K$. La suma

$$\sum_{n=0}^{N} \varphi_k^{(n)}(a_n)$$

converge por tanto a 0 cuando $k \to +\infty$. □

Ejercicio 2.F

i) El espacio V_2 (resp. V_1) es el núcleo de la primera proyección

$$p_1 : (x_1, x_2) \longrightarrow x_1 \in V_1$$

(resp. la segunda proyección $p_2 : (x_1, x_2) \longrightarrow x_2 \in V_2$) que es continua, por tanto V_2 y V_1 son cerrados.

ii) Sea $(v_1, \ldots, v_n)$ una base de V_1. Para todo $i = 1, \ldots, n$ la aplicación

$$f_i : \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \in V_1 \longrightarrow \lambda_i \in \mathbb{K}$$

es una forma lineal continua en V_1. Por el teorema de Hahn-Banach se prolonga en una forma lineal continua φ_i en E, por consiguiente la identidad de V_1 definida por las f_i se prolonga en la aplicación lineal continua $\Phi : E \longrightarrow V_1$ definida por

$$\Phi(x) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x) v_i.$$

iii) Pongamos $V_2 = \operatorname{Ker} \Phi$. Entonces V_2 es un subespacio cerrado de E y la aplicación lineal $\Theta : (x_1, x_2) \in V_1 \times V_2 \longrightarrow x_1 + x_2 \in E$ es continua, biyectiva y admite por inversa la aplicación lineal continua $\Theta^{-1} : E \longrightarrow V_1 \times V_2$ definida por

$$\Theta^{-1}(x) = (\Phi(x), x - \Phi(x)).$$

Esto prueba que V_2 es un suplementario topológico de V_1. $\square$

Capítulo 3

Ejercicio 3.A

Supongamos $k = 1$, por ser $\operatorname{Ker} f_1 \subset \operatorname{Ker} f$, f_1 y f inducen formas lineales en el cociente $E/\operatorname{Ker} f$. Como este cociente es un espacio vectorial de dimensión 1 todas sus formas lineales son proporcionales, existe por tanto un escalar λ_1 tal que $f = \lambda_1 f_1$.

Supongamos $f_1, \ldots, f_k$ linealmente independientes y que la afirmación es cierta para $p \leq k-1$. Podemos encontrar vectores $e_1, \ldots, e_k$ tales que $f_i(e_j) = \delta_i^j$. En efecto, para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$ la forma f_i es no nula en el espacio

$$E_i = \bigcap_{j \neq i} \operatorname{Ker} f_i$$

en caso contrario la hipótesis de inducción implicaría que f_i es una combinación lineal de $f_1, \ldots, f_{i-1}, f_{i+1}, \ldots, f_k$, situación que hemos excluido. Podemos por tanto encontrar $e_i \in E_i$ tales que $f_i(e_i) = 1$ y $f_j(e_i) = 0$ para $j \in \{1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, k\}$.

Todo $x \in E$ puede escribirse como

$$x = \sum_{i=1}^{k} f_i(x)e_i + z.$$

Evaluando la forma f_i en x se obtiene

$$\begin{aligned} f_i(x) &= f_i(f_1(x)e_1 + \ldots + f_k(x)e_k) + f_i(z) \\ &= f_i(x) + f_i(z) \end{aligned}$$

que implica $f_i(z) = 0$ para todo $i = 1, \ldots, k$ es decir, $z \in \bigcap_{i=1}^{k} \operatorname{Ker} f_i$. Por consiguiente $z \in \operatorname{Ker} f$, luego

$$f(x) = \sum_{i=1}^{k} f(e_i) f_i(x).$$

Poniendo $\lambda_i = f(e_i)$ para $i = 1, \ldots, k$ tenemos que

$$f = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f_i.$$

Si $f_1, \ldots, f_k$ no son linealmente independientes tomamos una base, formada por $(f_{i_1}, \ldots, f_{i_s})$, del subespacio vectorial del dual de E engendrado por las $f_1, \ldots, f_k$. Entonces

$$\bigcap_{j=1}^{s} \operatorname{Ker} f_{i_j} \subset \bigcap_{i=1}^{k} \operatorname{Ker} f_i \subset \operatorname{Ker} f.$$

Luego existen escalares $\lambda_{i_1}, \ldots, \lambda_{i_s}$ tales que $f = \lambda_{i_1} f_{i_1} + \ldots \lambda_{i_k} f_{i_k}$, de donde

$$f = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f_i$$

con

$$\lambda_i = \begin{cases} \lambda_{i_j} & \text{si } i = i_j \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$\square$

EJERCICIO 3.B

i) Sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces

$$f^{-1}([\alpha, +\infty)) = \left(f^{-1}((-\infty, \alpha))\right)^c,$$

donde para todo $A \subset \mathbb{R}$, A^c denota su complementario. Vemos entonces que $f^{-1}([\alpha, +\infty))$ es cerrado si y sólo $f^{-1}((-\infty, \alpha))$ es abierto. Esto prueba la equivalencia buscada. El razonamiento es el mismo para la semicontinuidad inferior.

ii) Es evidente que si f es continua es semicontinua superior e inferiormente. Demostremos el recíproco. Basta probar que para todo intervalo abierto I de $\mathbb{R}$, $f^{-1}(I)$ es abierto. Pero I puede ser únicamente de tres tipos

$$(-\infty, \beta), \quad (\alpha, \beta) \quad \text{o} \quad (\alpha, +\infty).$$

Para el primero utilizamos la semicontinuidad superior, para el tercero la semicontinuidad inferior y para el segundo utilizamos las dos y que

$$\begin{aligned} f^{-1}((\alpha, \beta)) &= f^{-1}((-\infty, \beta) \cap (\alpha, +\infty)) \\ &= f^{-1}((-\infty, \beta)) \cap f^{-1}((\alpha, +\infty)). \end{aligned}$$

iii) Vamos a hacer el razonamiento para la envolvente inferior $\underline{f}$, el caso de la envolvente superior se hace exactamente igual. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$, tenemos

$$\underline{f}^{-1}((-\infty, \alpha)) = \bigcup_{i \in I} f_i^{-1}((-\infty, \alpha)).$$

En efecto, la inclusión

$$\bigcup_{i \in I} f_i^{-1}((-\infty, \alpha)) \subset \underline{f}^{-1}((-\infty, \alpha))$$

es evidente. Sea $x \in \underline{f}^{-1}((-\infty, \alpha))$, como $\underline{f}(x) = \inf_{i \in I} f_i(x)$ y $\underline{f}(x) < \alpha$ existe un $i \in I$ tal que $\underline{f}(x) \leq f_i(x) < \alpha$, es decir, $x \in f_i^{-1}((-\infty, \alpha))$. Esto prueba la igualdad anunciada. Como $f_i^{-1}((-\infty, \alpha))$ es abierto para todo $i \in I$, $\underline{f}^{-1}((-\infty, \alpha))$ será también abierto, lo cual da la semicontinuidad superior de $\underline{f}$. □

Ejercicio 3.C

i) Tenemos

$$|||e'_n||| = \sup_{||x|| \leq 1} |\langle x, e'_n \rangle| = \sup_n |\langle e_n, e'_n \rangle| = 1,$$

luego $|||ne'_n||| = n$.

ii) Sea $x = \sum_{i=1}^s \lambda_i e_i \in E$. Entonces

$$\langle x, ne'_n \rangle = \sum_{i=1}^s n\lambda_i \langle e_i, e'_n \rangle \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Esto prueba que la sucesión ne'_n tiende débilmente a 0, por tanto es débilmente acotada.

iii) Observamos que la sucesión ne'_n es débilmente acotada pero no acotada, por tanto en un espacio normado no completo no hay en general equivalencia entre las propiedades "débilmente acotado" y "acotado". □

Ejercicio 3.D

Para demostrar que $u' : F' \longrightarrow E'$ es continua basta demostrar que es acotada en la bola unidad de F'. Para todo $x \in E$ y toda $f' \in F'$

$$|\langle x, u'(f')\rangle| = |\langle u(x), f'\rangle| \leq |||f'||| \cdot |||u||| \cdot ||x||,$$

luego

$$|||u'(f')||| \leq |||u||| \cdot |||f'|||$$

y por consiguiente

$$\sup_{|||f'|||\leq 1} |||u'(f')||| \leq |||u|||.$$

Esto prueba la continuidad de u' y da la mayoración

$$|||u'||| \leq |||u|||.$$

Como u no es nula, existe un $x \in E$ tal que $u(x) \neq 0$. Pongamos $y_0 = \frac{u(x)}{||u(x)||}$ que es un vector de F con norma 1. Por el teorema de Hahn-Banach existe un elemento $f' \in F'$ tal que

$$|||f'||| = 1 \quad \text{y} \quad \langle y_0, f'\rangle = 1.$$

Esto implica que $\langle u(x), f'\rangle = ||u(x)||$, por tanto tendremos

$$\begin{aligned} ||u(x)|| &= \langle u(x), f'\rangle \\ &= \langle x, u'(f')\rangle \\ &\leq |||u'(f')||| \cdot ||x|| \\ &\leq |||u'||| \cdot |||f'||| \cdot ||x|| = |||u'||| \cdot ||x||, \end{aligned}$$

es decir, $|||u||| \leq |||u'|||$, Tenemos por tanto la igualdad

$$|||u'||| = |||u|||.$$

$\square$

EJERCICIO 3.E

i) Sea $\mathcal{S}$ la topología engendrada por $u_i^{-1}(\mathcal{T}_i)$. Es evidente que $\mathcal{S}$ hace continuas todas las aplicaciones u_i, por tanto $\mathcal{T} \subset \mathcal{S}$. Como $\mathcal{T}$ debe contener todos los elementos de la forma $u_i^{-1}(U_i)$ donde U_i es un abierto de X_i, contiene evidentemente $\mathcal{S}$, por tanto $\mathcal{T} = \mathcal{S}$.

ii) Si $f : E \longrightarrow (X, \mathcal{T})$ es continua, entonces para todo $i \in I$ la aplicación $u_i \circ f : E \longrightarrow X_i$ es continua. Supongamos que para todo $i \in I$ $u_i \circ f$ es continua. Sea $\mathcal{S}$ la topología más fina de X que haga f continua (véase el ejercicio 1.C), entonces $\mathcal{S}$ hace continuas las u_i ya que si U_i es un abierto de X_i, $f^{-1}\left(u_i^{-1}(U_i)\right) = (u_i \circ f)^{-1}(U_i)$ es abierto en E, por tanto $u_i^{-1}(U_i)$ es abierto (para $\mathcal{S}$) en X por definición de $\mathcal{S}$ y por tanto $\mathcal{T} \subset \mathcal{S}$. Por consiguiente la aplicación

$$f : E \xrightarrow{f} (X, \mathcal{S}) \xrightarrow{id} (X, \mathcal{T})$$

es continua. □

Ejercicio 3.F

i) Sean x' e y' de $A^{\perp}$, $\lambda \in \mathbb{K}$ y $a \in A$, entonces

$$\langle x' + y', a \rangle = \langle x', a \rangle + \langle y', a \rangle = 0$$

y

$$\langle a, \lambda x' \rangle = \lambda \langle a, x' \rangle = 0.$$

Esto prueba que $A^{\perp}$ es un subespacio vectorial de E'.

Sea x'_n una sucesión de $A^{\perp}$ convergente (en la topología de la norma) hacia $x' \in E'$, entonces esta sucesión converge hacia x' en la topología débil, por tanto

$$\langle a, x' \rangle = \lim_{n \to +\infty} \langle a, x'_n \rangle = 0$$

y por consiguiente $A^{\perp}$ es cerrado en E'.

ii) La aplicación j' asocia a toda forma lineal continua sobre E su restricción a V. Es exhaustiva, en efecto si v' es una forma lineal continua sobre V, v' por el teorema de Hahn-Banach se prolonga en una forma lineal continua x' sobre E tal que $|||x'||| = |||v'|||$.

Sea u' una forma lineal sobre E/V tal que $\pi'(u') = 0$, esto significa que para todo $x \in E$, $u'(\pi(x)) = 0$. Como π es exhaustiva u' es nula en todo el espacio E/V, esto prueba que π' es inyectiva.

Demostremos que $\operatorname{Ker} j' = \operatorname{Im} \pi'$. Sea $y' \in E'$ tal que $y' = \pi'(u')$ con $u' \in (E/V)'$, entonces para todo $v \in V$ tenemos que

$$\langle v, y' \rangle = \langle v, \pi'(u') \rangle = \langle \pi v), u' \rangle = \langle 0, u' \rangle = 0,$$

es decir que la restricción de y' a V es nula, dicho de otro modo $j'(y') = 0$. Sea ahora $y' \in \operatorname{Ker} j'$, entonces la restricción de y' a V es nula y por tanto y' define por paso al cociente una forma lineal continua u' tal que $j' = y' \circ \pi$, es decir, $j' = \pi'(u')$. Esto prueba que $\operatorname{Ker} j' = \operatorname{Im} \pi'$.

iii) Es evidente que el dual $(E/V)'$ de E/V es el espacio de las formas lineales continuas sobre E que son nulas sobre V y es isométrico a $V^{\perp}$. Como la sucesión

$$0 \longrightarrow V^{\perp} \xrightarrow{\pi'} E' \xrightarrow{j'} V' \longrightarrow 0$$

(donde las flechas π' y j' son isometrías) es exacta, el dual V' de V es isométrico a $E'/V^{\perp}$.

iv) Como V es cerrado en E reflexivo, se identifica con su biortogonal $(V^{\perp})^{\perp}$. Por otra parte, por lo precedente, V' se identifica a $E'/V^{\perp}$ y por consiguiente V'' se identifica con $\left(E'/V^{\perp}\right)'$ el cual se identifica con $(V^{\perp})^{\perp}$, esto demuestra que V es reflexivo. Del mismo modo $(E/V)''$ se identifica a $E''/(V^{\perp})^{\perp}$ que no es más que E/V puesto que E es reflexivo por hipótesis y V lo es por lo que acabamos ver. Luego E/V es reflexivo. □

EJERCICIO 3.G

Sea $\varphi \in \mathcal{K}(\mathbb{R})$, entonces la suma

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \varphi(n)$$

es finita ya que el soporte de φ sólo contiene un número finito de enteros relativos. La linealidad es trivial.

Para todo $p \in \mathbb{N}^*$ sea φ_p la función definida por

$$\varphi_p(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in (-\infty, 0] \cup [p+1, +\infty) \\ \frac{1}{p} & \text{si } x \in [1, p) \\ \frac{1}{p}x & \text{si } x \in (0, 1) \\ \frac{1}{p}(-x+p+1) & \text{si } x \in [p, p+1). \end{cases}$$

Entonces $\varphi_p \in \mathcal{K}(\mathbb{R})$ y $||\varphi_p||_\infty = \frac{1}{p} \to 0$ pero

$$\langle \varphi_p, T \rangle = \sum_{n=1}^{p} \varphi(n) = \frac{1}{p} \times p = 1.$$

Por tanto la forma lineal T no es continua en $\mathcal{K}(\mathbb{R})$ □

Capítulo 4

Ejercicio 4.A

En este ejercicio se trata de encontrar una aplicación bilineal simétrica g en E tal que para todo $x \in E$ se dé $||x||^2 = g(x,x)$. Si dicha aplicación existe será forzosamente definida positiva. Para $x, y \in E$ cualesquiera pongamos

$$g(x,y) = \frac{1}{4}(||x+y||^2 - ||x-y||^2).$$

Es evidente que la g así definida es simétrica y verifica $g(x,x) = ||x||^2$ para todo $x \in E$. Falta comprobar la bilinealidad de g. Por simetría bastará hacerlo respecto a la primera variable. Pongamos para x, x' e y en E

$$f(x,x',y) = 4(g(x+x',y) - g(x,y) - g(x',y)).$$

Decir que g es aditiva respecto a x es decir que f es idénticamente nula y es esto lo que probaremos. Tenemos, por definición de g, que

$$(*) \qquad \begin{aligned} f(x,x',y) =& ||x+x'+y||^2 - ||x+x'-y||^2 - ||x+y||^2 + \\ &+ ||x-y||^2 - ||x'+y||^2 + ||x'-y||^2 \end{aligned}$$

Por la identidad de paralelogramo

$$||x+x'+y||^2 = 2(||x+y||^2 + ||x'||^2) - ||x+y-x'||^2$$

y

$$||x+x'-y||^2 = 2(||x-y||^2 + ||x'||^2) - ||x-y-x'||^2.$$

La igualdad $(*)$ resulta entonces

$$(**) \qquad \begin{aligned} f(x,x',y) =& - ||x+y-x'||^2 + ||x-y-x'||^2 + ||x+y||^2 \\ &- ||x-y||^2 + ||x'-y||^2 - ||x'+y||^2. \end{aligned}$$

La suma miembro a miembro de las igualdades $(*)$ y $(**)$ da

$$\begin{aligned} 2f(x,x',y) =& \left(||x'+y+x||^2 + ||x'+y-x||^2\right) \\ &- \left(||x'-y+x||^2 + ||x'-y-x||^2\right) \\ &+ 2\left(||x'-y||^2 - ||x'+y||^2\right). \end{aligned}$$

La igualdad de paralelogramo aplicada al primero y al segundo término del segundo miembro da finalmente

$$\begin{aligned}2f(x,x',y) =&2\left(||x'+y||^2+||x||^2\right)\\&-2\left(||x'-y||^2+||x||^2\right)+2\left(||x'-y||^2-||x'+y||^2\right)\\=&0.\end{aligned}$$

Demostremos la homogeneidad (siempre respecto a la primera variable). Sean $x, y \in E$, es evidente que $g(0\cdot x, y) = 0 = 0\cdot g(x,y)$. Por otra parte

$$g(2x,y) = g(x,y) + g(x,y) = 2g(x,y).$$

Repitiendo esta operación para todo $n \in \mathbb{N}$ se obtiene $g(nx,y) = ng(x,y)$. Como $g(-x,y) = -g(x,y)$ (inmediato por definición de g) tenemos para todo $n \in \mathbb{Z}$ que $g(nx,y) = ng(x,y)$. Escribiendo $x = n\cdot(\frac{x}{n})$ para $n \geq 1$ y aplicando lo precedente encontramos $g(x,y) = ng(\frac{x}{n},y)$ y por tanto $g(\frac{1}{n}x,y) = \frac{1}{n}g(x,y)$. Por consiguiente, para todo racional $\frac{p}{q}$

$$g(\frac{p}{q}x,y) = \frac{p}{q}g(x,y).$$

Fijemos $y \in E$, entonces las aplicaciones $\tau_y : x \in E \longrightarrow ||x+y|| \in \mathbb{R}_+$ y $\tau_{-y} : x \in E \longrightarrow ||x-y|| \in \mathbb{R}_+$ son continuas y la aplicación $g(\cdot,y) : x \in E \longrightarrow g(x,y) \in \mathbb{R}$ es también continua. Sea $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces λ es límite de una sucesión de racionales r_n. Tendremos

$$g(\lambda x,y) = g((\lim r_n)x,y) = \lim g(r_n x,y) = (\lim r_n)g(x,y) = \lambda g(x,y).$$

Esto acaba la cuestión de linealidad de g respecto a x. □

EJERCICIO 4.B

Sean E un espacio de Hilbert, V un subespacio cerrado de E y $f : V \longrightarrow \mathbb{K}$ una forma lineal continua. Como V es completo es de Hilbert por tanto existe $y \in V$ tal que para todo $x \in E$

$$f(x) = \langle x, y\rangle$$

con $|||f||| = ||y||$. Es evidente que la forma lineal continua $\widetilde{f}$ sobre E definida para todo $x \in E$ por

$$\widetilde{f}(x) = \langle x, y\rangle$$

se prolonga f y tiene su misma norma. □

EJERCICIO 4.C

Sea M una parte totalmente acotada de E, entonces M admite una ε-red finita para todo $\varepsilon > 0$, en particular admite una 1-red finita A. Para todo $x \in M$ existe por tanto un $a \in A$ tal que $m \in B(a, 1)$, de donde

$$M \subset \bigcup_{a \in A} B(a, 1).$$

Como A es finita, M es necesariamente acotada.

ii) Obsérvese en primer lugar que si $N \subset M$ y M es totalmente acotada, también lo es N. Para demostrar que en $\mathbb{R}^n$ toda parte acotada es totalmente acotada basta por tanto hacerlo para $M = I_R \times \ldots \times I_R$ (n veces), donde I_R es el intervalo $[-R, +R]$ con $R > 0$. Sea $\varepsilon > 0$, dividimos M en hipercubos cuyas aristas tengan medida $a \leq \frac{2\varepsilon}{\sqrt{n}}$, los vértices de estos cubos dan lugar a una ε-red finita para M.

iii) Basta demostrar que la esfera infinita $\mathbb{S}^\infty$ de l^2 contiene una parte M no totalmente acotada. Tomemos como M una parte infinita $\{m_k\}$, $k \in \mathbb{N}^*$, tal que $\delta = \inf_{k,l} ||m_k - m_l|| > 0$ (por ejemplo para $k \in \mathbb{N}^*$, $m_k = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots) = k$-ésimo vector de la base canónica). Sea $\varepsilon < \frac{\delta}{2}$, como las bolas $B(m_k, \varepsilon)$ son disjuntas dos a dos, toda ε-red A para M es necesariamente infinita puesto que toda bola $B(m_k, \varepsilon)$ debe contener por lo menos un elemento de A. Por tanto la parte M no puede ser totalmente acotada y por consiguiente $\mathbb{S}^\infty$ no lo es.

iv) Hemos admitido que en un espacio métrico completo toda parte cerrada totalmente acotada es compacta (véase Kolmogorov (1974)), bastará por tanto probar que Π es totalmente acotado.

Sea $\varepsilon > 0$, como la sucesión $\frac{1}{2^n}$ tiende a 0, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq N \Longrightarrow \frac{1}{2^{n-1}} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sean V el subespacio de dimensión finita de l^2 engendrado por los N primeros vectores de la base canónica y $P : E \longrightarrow V$ la proyección ortogonal. Entonces para todo $x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots) \in \Pi$ tenemos que

$$||x - Px|| = \sqrt{\sum_{N+1}^{\infty} x_n^2} \leq \sqrt{\sum_{N}^{\infty} \frac{1}{2^k}} \leq \frac{1}{2^{N-1}} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Como V es de dimensión finita y Π es acotado, $P(\Pi)$ es totalmente acotado. Por tanto admite una $\frac{\varepsilon}{2}$-red finita A. Sea $x \in \Pi$, entonces existe $a \in M$ tal que

$$||Px - a|| < \frac{\varepsilon}{2},$$

de donde

$$||x - a|| \leq ||x - Px|| + ||Px - a|| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

es decir, A es una ε-red finita para Π. El paralelepípedo de Hilbert Π es por tanto compacto. □

EJERCICIO 4.D

i) La inclusión $E_\rho \subset E_{\rho'}$ es evidente. Vamos a construir una función $\rho < 1$ tal que E_1 esté estrictamente contenido en E_ρ. Para todo $t \in [-1, +1]$ pongamos

$$\rho(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{t^2}} & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Entonces es fácil ver que la función $\rho : [-1, +1] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ así definida es medible (de hecho de clase C^∞), estrictamente inferior a 1 y estrictamente positiva sobre un conjunto de medida total. Sea $f : [-1, +1] \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Entonces la función $\rho(t)|f(t)|^2 = \frac{e^{-\frac{1}{t^2}}}{t^2}$ es continua en $[-1, +1]$, por tanto integrable y por consiguiente $f \in E_\rho$. Pero es evidente que $f \notin E_1$, lo cual prueba que la inclusión $E_1 \subset E_\rho$ es estricta.

ii) Sea $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la sucesión de funciones en $C^0([-1, +1], \mathbb{C})$ definida por

$$\varphi_n(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } t \in [-1, -\frac{1}{n}] \\ 1 & \text{si } t \in [\frac{1}{n}, 1] \\ nt & \text{si } t \in (-\frac{1}{n}, +\frac{1}{n}). \end{cases}$$

Esta sucesión de funciones converge (para la norma L^2) hacia la función medible de cuadrado integrable

$$\varphi(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } t \leq 0 \\ +1 & \text{si } t > 0. \end{cases}$$

Pero φ no es continua y su clase en $L^2([-1,+1],\mathbb{C})$ no contiene función continua alguna, por tanto $C^0([-1,+1],\mathbb{C})$ no es cerrado en el espacio $L^2([-1,+1],\mathbb{C})$. □

Ejercicio 4.E

i) Si $y \in E$, la forma lineal $f_y : x \in E \longrightarrow \langle x, y\rangle \in \mathbb{K}$ es continua, por tanto su núcleo es cerrado. Por consiguiente

$$M^{\perp} = \{x \in E \,|\, \langle x, y\rangle = 0,\ \forall y \in M\} = \bigcap_{y \in M} \operatorname{Ker} f_y$$

es cerrado. Resulta inmediatamente de esta observación y de la propiedad de la relación de ortogonalidad que $(M^{\perp})^{\perp} = M$.

ii) El resultado evidentemente no es cierto pues es necesario que M sea cerrado para ser el ortogonal de una parte. □

Ejercicio 4.F

i) Como la sucesión $\lambda = (\lambda_k)$ es acotada (por 1), la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k y_k$$

es convergente para todas $x = (x_k)$ e $y = (y_k)$ en E y define una función en $E \times E$, la bilinealidad es inmediata. Por otra parte, como todos los reales λ_k son estrictamente positivos, esta forma bilineal es definida positiva, es pues un producto escalar sobre E. Pero E dotado de este producto escalar (denotaremos $\|\ \|_\lambda$ su norma asociada para distinguirla de la norma habitual obtenida cuando $\lambda_k = 1$ para todo k) no es completo en general. En efecto, supongamos que la sucesión λ_k se ha elegido de modo que la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k$$

converja. Consideremos la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ en E definida por

$$x_k = (\underbrace{1, \dots, 1}_{k \text{ veces}}, 0, \dots)$$

Sean $m, n \in \mathbb{N}^*$ con $m \geq n$ (que no es una restricción), entonces

$$||x_n - x_m||_\lambda = \sum_{k=n+1}^{m}$$

lo cual prueba que (x_n) es una sucesión de Cauchy (ya que la serie definida por la sucesión de las λ_k es convergente). Pero la sucesión (x_k) no converge en E respecto a la norma $||\ \ ||_\lambda$, luego $(E, ||\ \ ||_\lambda)$ no es completo.

ii) Sea e el vector de E dado por

$$e = (\underbrace{1, \dots, 1}_{k \text{ veces}}, 0, \dots).$$

Entonces M no es más que el ortogonal del subespacio N engendrado por e. Luego $E = M \oplus N = M \oplus \mathbb{K}e$. $\square$

EJERCICIO 4.G

Los tres puntos f, g y h en $L^2((-1,+1), \mathbb{R})$ son los vértices de un triángulo Δ. Sean α, β y γ sus ángulos respectivos. Calculemos, por ejemplo, el ángulo γ, formado por los vectores $u = f - h$ y $v = g - h$, por tanto su coseno es

$$\cos\gamma = \frac{\langle u, v\rangle}{||u|| \cdot ||v||}.$$

Tenemos que

$$\langle u, v\rangle = \int_{-1}^{+1} x(x-1)dx$$

y

$$||u||^2 = \int_{-1}^{+1} x^2 dx \ \text{ y } \ ||v||^2 = \int_{-1}^{+1} (1-x)^2 dx.$$

Un cálculo inmediato da

$$\langle u, v\rangle = \frac{2}{3}, \ \ ||u||^2 = \frac{2}{3} \ \text{ y } \ ||v||^2 = \frac{8}{3}.$$

De donde $\cos\gamma = \frac{1}{2}$, luego $\gamma = \frac{\pi}{6}$. El lector podrá observar que al ser la función $u(x) = -x$ impar, es ortogonal a $w(x) = g - f$ y por tanto $\alpha = \frac{\pi}{2}$, por consiguiente $\beta = \frac{\pi}{3}$. Esto termina el cálculo de los ángulos. □

Ejercicio 4.H

Sea $x \in E$, entonces la distancia de x a $V^{\perp}$ no es más que la norma de la proyección ortogonal $Px = \lambda a$ ($\lambda \in \mathbb{K}$) sobre V. Podemos escribir x como $x = \lambda a + u$, donde u es ortogonal a V (por tanto a a). Tendremos entonces que

$$\begin{aligned} \langle x, a\rangle &= \langle \lambda a + u, a\rangle \\ &= \lambda ||a||^2 \end{aligned}$$

y por tanto

$$d(x, V^{\perp}) = |\lambda| \cdot ||a|| = \frac{|\langle x, a\rangle|}{||a||}.$$

□

Ejercicio 4.I

i) El espacio V no es otra cosa que el núcleo de la forma lineal continua

$$f \in E \longrightarrow \langle f, 1\rangle \in \mathbb{R}.$$

Es por tanto un hiperplano cerrado de E.

ii) Por el ejercicio 4.H la distancia de $f(x) = x^2$ a V no es más que el número real

$$d(f, V) = \frac{|\langle f, 1\rangle|}{||1||} = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}.$$

□

EJERCICIO 4.J

El subespacio V_n es el núcleo de la forma lineal continua

$$x \in l^2 \longrightarrow \langle x, a \rangle \in \mathbb{K},$$

donde a es el vector de l^2 cuyas n primeras componentes son iguales a 1 y las otras son nulas. Por el ejercicio 4.H tenemos (pues a es ortogonal a V_n) que

$$d_n = d(x, V_n) = \frac{|\langle x, a \rangle|}{||a||} = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Claramente, $\lim d_n = 0$ cuando $n \to +\infty$. $\square$

Capítulo 5

Ejercicio 5.A

i) Si φ es un difeomorfismo de clase C^1 de $[0,1]$ (es decir, φ es biyectiva derivable y con derivada continua así como su inversa φ^{-1}) entonces T_φ define un operador acotado en E. En efecto, sea f una función medible sobre $[0,1]$, entonces

$$\int_{[0,1]} |f\circ\varphi(x)|^2 d\lambda(x) = \int_{[0,1]} |f(x)|^2 \cdot |(\varphi^{-1})'(x)| d\lambda(x).$$

Como φ es un difeomorfismo de clase C^1, $(\varphi^{-1})'$ es acotada en $[0,1]$. Por consiguiente

$$\int_{[0,1]} |f\circ\varphi(x)|^2 d\lambda(x) \leq ||(\varphi^{-1})'||_\infty \left(\int_{[0,1]} |f(x)|^2 d\lambda(x)\right),$$

es decir,

$$||f\circ\varphi|| \leq \sqrt{||(\varphi^{-1})'||_\infty}\cdot ||f||.$$

Esto prueba que T_φ está bien definido y es acotado en E.

ii) Hay homeomorfismos φ de clase C^1 (la inversa no necesariamente de clase C^1) en $[0,1]$ para los cuales existe $f\in E$ tal que $f\circ\varphi\notin E$. Por ejemplo, si tomamos $\varphi(x)=x^2$ y $f(x)=\frac{1}{x^\alpha}$ con $\frac{1}{4}<\alpha<\frac{1}{2}$. Es evidente que $f\in E$ pero $f\circ\varphi(x)=\frac{1}{x^{2\alpha}}$ no está en E. □

Ejercicio 5.B

i) Toda función $f\in E$ se escribe de manera única como suma de las funciones

$$f_+(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2} \text{ y } f_-(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}.$$

La función f_+ es par y f_- es impar. Esto da una descomposición del espacio E en suma directa

$$E = P\oplus I,$$

donde P es el subespacio de E de las funciones pares e I el de las funciones impares. Por tanto, el operador T tiene dos valores propios 1 y -1 con subespacios propios respectivos P e I.

ii) Primeramente, S no puede ser inyectivo puesto que su imagen es de dimensión finita, por tanto 0 es un valor propio. El subespacio propio asociado es el ortogonal de $A = \{\cos x, \operatorname{sen} x\}$ en E respecto al producto escalar

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx,$$

(hemos tomado las funciones con valores reales)

Sean λ una valor propio no nulo de S y $f \in E$ un vector propio asociado a λ. Tenemos que $S(f) = \lambda f$, por consiguiente f está en la imagen de S, por tanto es de la forma $f(x) = a\cos x + b \operatorname{sen} x$ con a y b reales que no se anulan simultáneamente. Calculemos $S(f)$, tenemos que

$$\begin{aligned}
S(f)(x) =&\cos x \int_{-\pi}^{\pi} (\cos y)(a\cos y + b\operatorname{sen} y)dy \\
&- \operatorname{sen} x \int_{-\pi}^{\pi} (\operatorname{sen} y)(a\cos y + b\operatorname{sen} y)dy \\
=&a\cos x \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 y dy - b\operatorname{sen} x \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^2 y dy \\
&+ (b\cos x - a\operatorname{sen} x) \int_{-\pi}^{\pi} \cos y \operatorname{sen} y dy \\
=&a\cos x \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 y dy - b\operatorname{sen} x \int_{-\pi}^{\pi} (1-\cos^2 y)dy \\
=&(a\cos x + b\operatorname{sen} x) \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 y dy - b\operatorname{sen} x \int_{-\pi}^{\pi} dy \\
=&\pi(a\cos x - b\operatorname{sen} x).
\end{aligned}$$

Por otra parte

$$S(f)(x) = \lambda f(x) = \lambda(a\cos x + b\operatorname{sen} x) = \pi(a\cos x - b\operatorname{sen} x)$$

obteniendo así el sistema

$$\begin{cases} \lambda a &= \pi a \\ \lambda b &= -\pi b. \end{cases}$$

Este sistema tiene dos soluciones $\lambda = \pi$ y $\lambda = -\pi$. El subespacio propio asociado a π está engendrado por la función $\cos x$ y el asociado a $-\pi$ está engendrado por la función $\operatorname{sen} x$.

Por tanto el espectro de S está formado por tres valores propios : π, $-\pi$ y 0. □

EJERCICIO 5.C

i) Sea $x \in N_k$, entonces $S^k(x) = 0$, por tanto $S^{k+1}(x) = S(S^k(x)) = 0$ y por consiguiente $x \in N_{k+1}$, es decir, $N_k \subset N_{k+1}$.

Supongamos que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $N_k = N_{k+1}$, entonces queremos ver que para todo $n \in \mathbb{N}$, $N_k = N_{k+n}$. Por hipótesis, el resultado es cierto para $n = 0$ y 1, supongámoslo cierto para n y probemos que lo es para $n+1$. Sea $x \in N_{k+n+1}$, entonces $S^{k+1}(S^n(x)) = 0$, por tanto $S^n(x) \in N_{k+1}$. Pero $N_{k+1} = N_k$, por tanto $S^n(x) \in N_k$ y por consiguiente $x \in N_{k+n}$. Esto prueba que $N_{k+1} = N_{k+n+1}$, hemos visto pues que para todo $n \in \mathbb{N}$, $N_k = N_{k+n}$ cuando $N_k = N_{k+1}$.

ii) Actuaremos como en i). Sea $x \in R_{k+1}$, entonces existe $y \in E$ tal que $x = S^{k+1}(y)$ que puede escribirse también $x = S^k(S(y))$, por tanto $x \in R_k$. La sucesión R_k es entonces decreciente.

Supongamos que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $R_k = R_{k+1}$, veamos entonces que para todo $n \in \mathbb{N}$, $R_k = R_{k+n}$. El resultado es cierto para $n = 0$ y 1, supongámoslo cierto para n. Sea $x \in R_k$, entonces $x \in R_{k+n}$ (hipótesis de inducción), es decir, $x = S^{k+n}(y)$ para un cierto $y \in E$. Pero $S^k(y)$ es un elemento de $R_k = R_{k+1}$, por tanto $S^k(y) = S^{k+1}(z)$ y por consiguiente $x = S^n(S^k(x)) = S^n(S^{k+1}(z)) = S^{k+n+1}(z)$, es decir, $x \in R_{k+n+1}$. De donde $R_k = R_{k+n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

iii) Para todo $k \in \mathbb{N}$ tenemos $S(N_{k+1}) \subset N_k$, en efecto, sea $x = S(y)$ con $y \in N_{k+1}$, entonces $S^k(x) = S^k(S(y)) = S^{k+1}(y) = 0$. Por la proposición 5.4.2. la sucesión $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es estacionaria. Como para todo $k \in \mathbb{N}^*$ R_k es cerrado, por el teorema 5.4.3. el mismo razonamiento sirve para la sucesión $(R_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Denotamos por p y q los enteros más pequeños a partir de los cuales las sucesiones (N_k) y (R_k) estabilizan, son también los enteros k y l más pequeños tales que $N_{k+1} = N_k$ y $R_{l+1} = R_l$.

iv) Sea $x \in N_p \cap R_p$, entonces $S^p(x) = 0$ y $x = S^p(y)$ para un cierto $y \in E$, de donde $S^{2p}(y) = S^p(x) = 0$, por tanto $y \in N_{2p}$. Pero $N_{2p} = N_p$, por tanto $S^p(y) = 0$ y por consiguiente $x = 0$. Hemos probado finalmente que $N_p \cap R_p = \{0\}$.

v) Sea $x \in E$, entonces $S^q(x) \in R_q$, pero $S^q(R_q) = R_{2q} = R_q$ y por tanto $S^q(x) \in S^q(R_q)$, es decir, $S^q(x) = S^q(y)$ para un cierto $y \in R_q$. Luego $x - y \in N_q$, es decir, $x = z + y$ con $z = x - y \in N_q$ e $y \in R_q$. Esto nos da igualdad $E = N_q + R_q$.

vi) Si $q \leq p$, $N_q \subset N_p$ ya que la sucesión (N_k) es creciente, si $q > p$, $N_q = N_p$ ya que (N_k) estabiliza a partir de p. En todos los casos $N_q \subset N_p$. Igualmente si $q \leq p$, $R_q = R_p$ ya que (R_k) estabiliza a partir de q. Si $q > p$,

$R_q \subset R_p$ ya que la sucesión (R_k) es decreciente.

Tenemos que

$$\begin{cases} N_q \subset N_p \\ R_q \subset R_p \\ N_p \cap R_p = \{0\} \\ N_q + R_q = E \end{cases}$$

Esto sólo es posible si $N_p = N_q$, $R_p = R_q$ y por tanto $p = q$.

vii) Dado que la sucesión N_k es creciente, $N_1 = \operatorname{Ker} S \subset N_p = N$, de donde $\operatorname{Ker} S \cap R = \{0\}$, por tanto la restricción $S_{|R}$ de S a R es inyectiva. Es por tanto una biyección continua de R sobre sí mismo, es de hecho un isomorfismo topológico por el corolario 5.4.4.

viii) Sea F un subespacio de E estable por S y sobre el cual S es nilpotente, es decir, existe un $k \in \mathbb{N}^*$ tal que $\left(S_{|F}\right)^k = 0$. Entonces forzosamente $F \subset N_k$, por tanto $F \subset N$. Luego N es el subespacio estable por S más grande sobre el cual S es nilpotente.

Igualmente, sea B un subespacio estable por S sobre el cual S es un automorfismo topológico, entonces $S(B) = B$ y por consiguiente $S^k(B) = B$ para todo $k \geq 1$. Luego $B \subset R_k$ para todo $k \geq 1$, es decir, $B \subset \bigcap_k R_k$ probando que R es el subespacio estable más grande por S sobre el cual S es un automorfismo topológico.

ix) Si S es inyectivo, todos los N_k se reducen a $\{0\}$ y por tanto $N = \{0\}$. De ahí que $E = R$, es decir, S es exhaustivo. Por viii) S es un automorfismo topológico de E. $\square$

Ejercicio 5.D

El operador $T : l^2 \longrightarrow l^2$ es una isometría, su norma es igual a 1 y por tanto su espectro $\sigma(T)$ estará incluido en el disco unidad cerrado de $D(0,1)$. Demostremos que de hecho $\sigma(T) = D(0,1)$. Sea $\lambda \in D(0,1)$, es fácil ver que $T - \lambda I$ es un operador inyectivo, por tanto no tendrá valores propios. Por otra parte, T no es exhaustivo y por tanto $0 \in \sigma(T)$. Supongamos λ no nulo y veamos que $T - \lambda I$ no puede ser exhaustivo. Sea $y \in l^2$, entonces la ecuación $T(x) - \lambda x = y$ es equivalente al sistema

$$\begin{cases} -\lambda x_1 & = y_1 \\ x_n - \lambda x_{n+1} & = y_{n+1} \text{ para } n \geq 1 \end{cases}$$

cuya resolución da

$$x_1 = -\frac{y_1}{\lambda} \text{ y } x_n = -\left(\frac{y_1}{\lambda^n} + \ldots + \frac{y_n}{\lambda}\right).$$

Sea y el vector de l^2 dado por $y_1 = 1$ e $y_n = 0$ para $n \geq 2$, entonces cuando $n \geq 2$

$$x_n = -\frac{1}{\lambda^n}$$

cuyo módulo se mantiene constante igual a 1 si $|\lambda| = 1$ y tiende a $+\infty$ cuando $|\lambda| < 1$.

Luego para todo $\lambda \in D(0,1)$ existe un $y \in E$ tal que la ecuación $T(x) - \lambda x = y$ no tiene solución en l^2. Como el espectro es cerrado es igual al disco cerrado $D(0,1)$. □

EJERCICIO 5.E

i) El operador T es de norma 1. En efecto, tenemos

$$\begin{aligned} ||T(f)||_\infty &= \sup_{x\in[0,1]} |xf(x)| \\ &\leq \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| = ||f||_\infty, \end{aligned}$$

luego $|||T||| \leq 1$. Si tomamos $f(x) = 1$ entonces $||T(f)||_\infty = ||f||_\infty = 1$, por tanto el espectro $\sigma(T)$ está contenido en el disco $D(0,1)$. Vamos a demostrar que se confunde con el intervalo $[0,1]$ y que no contiene valor propio alguno. Sea $\lambda \in D(0,1)$, entonces $T - \lambda I$ es siempre inyectivo. En efecto, sea $f \in E$ tal que $T(f) - \lambda f = 0$, esto significa que $(x - \lambda)f(x) = 0$ para todo $x \in [0,1]$, luego f es nula en al abierto $[0,1] - \{\lambda\}$ que es denso en $[0,1]$. Como es continua, es idénticamente nula, lo cual prueba la inyectividad de $T - \lambda I$ (para todo λ en $\mathbb{R}$). Por tanto el espectro no contiene ningún valor propio.

– Supongamos $\lambda \in D(0,1) - [0,1]$, entonces para toda $g \in E$ la ecuación $T(f) - \lambda f = g$ tiene una solución en E que es la función

$$f(x) = \frac{g(x)}{x - \lambda},$$

luego $T - \lambda I$ es invertible para esos valores de λ.

– Si $\lambda \in [0,+1]$ entonces la imagen del operador $T - \lambda I$ es el conjunto de funciones $g \in E$ tales que $g(\lambda) = 0$. El operador $T - \lambda I$ no es pues exhaustivo. Deducimos que $\sigma(T) = [0,1]$.

ii) Para toda función $f \in E$

$$S(f)(x) = (x^2 + x) \int_0^1 f(y)dy.$$

Y la imagen de T es un subespacio vectorial de E de dimensión 1 engendrado por la función $f_0(x) = x^2 + x$, por tanto es de rango finito y no es inyectivo, por consiguiente 0 es un valor propio y el subespacio propio asociado se confunde con el núcleo de la forma lineal continua

$$f \in E \longrightarrow \int_0^1 f(y)dy.$$

Es fácil ver que la otra parte del espectro está formada por el valor propio $\frac{5}{6}$ con subespacio propio el subespacio de dimensión 1 engendrado por f_0.
$\square$

EJERCICIO 5.F

i) La expresión analítica de R_α es evidente. Para $z \in \mathbb{S}^1$ tenemos que $R_\alpha(z) = e^{2i\pi\alpha} z$ o, poniendo $z = e^{2i\pi x}$ con $x \in \mathbb{R}$, $R_\alpha(z) = e^{2i\pi(x+\alpha)}$.

ii) Desarrollemos f y g en serie de Fourier:

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} f_n e^{2i\pi nx} \quad \text{y} \quad g(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} g_n e^{2i\pi nx}.$$

Entonces la ecuación es

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} (e^{2i\pi n\alpha} - \lambda) f_n e^{2i\pi nx} = \sum_{-\infty}^{+\infty} g_n e^{2i\pi nx}.$$

Como el desarrollo de Fourier de una función es única, esta igualdad nos da el sistema

$$\text{(S)} \qquad (e^{2i\pi n\alpha} - \lambda) f_n = g_n \quad \text{para} \quad n \in \mathbb{Z}.$$

a) Supongamos $\rho \neq 1$.
En este caso la cantidad $e^{2i\pi n\alpha} - \lambda$ es no nula para todo $n \in \mathbb{Z}$, de donde

$$f_n = \frac{g_n}{e^{2i\pi n\alpha} - \lambda}, \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Falta demostrar que la función f así definida (mediante sus coeficientes de Fourier) está en $L^2(\mathbb{S}^1)$. Tenemos que $|e^{2i\pi n\alpha} - \lambda| \geq |1-\rho|$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Queda la desigualdad

$$(I_1) \qquad |f_n| \leq \frac{|g_n|}{|1-\rho|} \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Como $g \in L^2(\mathbb{S}^1)$, f estará también en $L^2(\mathbb{S}^1)$.

b) Supongamos $\rho = 1$ y α racional.
En este caso podemos escribir $\alpha = \frac{p}{q}$ con $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$ y p y q primos entre ellos.

– Si $\lambda = e^{\frac{2ki\pi}{q}}$ con $k \in \{0, 1, \ldots, q-1\}$ entonces el sistema (S) sólo tiene solución si $g_n = 0$ para n congruente con k módulo q.

– Supongamos que λ no es raíz q-ésima de la unidad, entonces el sistema (S) admite por solución

$$f_n = \frac{g_n}{e^{2i\pi n\alpha} - \lambda}, \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Sea $\delta = \inf_{n\in\{0,1,\ldots,q-1\}} |e^{2i\pi n\alpha} - \lambda| > 0$, entonces

$$(I_2) \qquad |f_n| \leq \frac{|g_n|}{\delta}, \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Como $g \in L^2(\mathbb{S}^1)$, f estará también en $L^2(\mathbb{S}^1)$.

Las desigualdades (I_1) e (I_2) prueban que en cualquiera de los casos a) o b), cuando la ecuación $f \circ R_\alpha - \lambda f = g$ tiene una solución (que es única), la aplicación que a g asocia f es un operador acotado en $L^2(\mathbb{S}^1)$.

iii) La aplicación $T_\alpha : L^2(\mathbb{S}^1) \longrightarrow L^2(\mathbb{S}^1)$ es un isomorfismo de espacios vectoriales con inversa $T_{-\alpha}$ (fácil de ver). Por otra parte, si $f, g \in L^2(\mathbb{S}^1)$

$$\begin{aligned}\langle T_\alpha(f), T_\alpha(g)\rangle &= \int_0^1 f(x+\alpha)\overline{g(x+\alpha)}dx \\ &= \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}dx \\ &= \langle f, g\rangle\end{aligned}$$

que prueba que T_α es un automorfismo unitario de $L^2(\mathbb{S}^1)$.

iv) Sea $\alpha \in [0,1) \cap \mathbb{Q}$, entonces $\alpha = \frac{p}{q}$ con $p \in \mathbb{Z}$ y $q \in \mathbb{N}^*$ y tenemos

$$R_\alpha^q = \underbrace{R_\alpha \circ \ldots \circ R_\alpha}_{q \text{ veces}} = \mathrm{id}_{\mathbb{S}^1} .$$

Por consiguiente $T_\alpha^q = \mathrm{id}_{L^2(\mathbb{S}^1)}$ y por tanto los valores propios $\lambda \in \mathbb{C}$ de T_α verifican que $\lambda^q = 1$. Vendrán dadas por

$$\lambda_k = e^{\frac{2ik\pi}{q}} \qquad k = 0, 1, \ldots, q-1.$$

Si $\alpha = 0$, $T_\alpha = \mathrm{id}$ y sólo hay un valor propio $\lambda_0 = 1$ de subespacio propio todo $L^2(\mathbb{S}^1)$. Supongamos $\alpha \neq 0$, es fácil ver que el subespacio propio asociado a $\lambda_k = e^{\frac{2ik\pi}{q}}$ es el subespacio cerrado de $L^2(\mathbb{S}^1)$ engendrado por la familia libre $\left\{e^{2i\pi(k+sq)}\right\}_{s\in\mathbb{Z}}$

El espectro $\sigma(T_\alpha)$ se reduce a los valores propios

$$\left\{1, e^{\frac{2i\pi}{q}}, \ldots, e^{\frac{2i\pi(q-1)}{q}}\right\}.$$

En efecto, hemos visto en ii)-b) que si

$$\lambda \notin \left\{1, e^{\frac{2i\pi}{q}}, \ldots, e^{\frac{2i\pi(q-1)}{q}}\right\}$$

entonces el operador $T_\alpha - \lambda I$ es invertible. Esto responde a la cuestión.

v) Supongamos $\alpha \in [0,1) \cap \mathbb{Q}^c$ y busquemos en primer lugar los valores propios de T_α. Esto se reduce a determinar los números $\lambda \in \mathbb{C}$ para los cuales existe una $f \in L^2(\mathbb{S}^1)$ no nula tal que

$$(e^{2i\pi n\alpha} - \lambda) f_n = 0 \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{Z}.$$

Vemos entonces que todo número $\lambda_n = e^{2i\pi n\alpha}$ es valor propio de T_α con subespacio propio $E_n = \mathbb{C}e^{2i\pi nx}$. Como el conjunto $\{e^{2i\pi n\alpha}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es denso en $\mathbb{S}^1$ (lo hemos supuesto) y el espectro $\sigma(T_\alpha)$ es cerrado, tenemos que $\mathbb{S}^1 \subset \sigma(T_\alpha)$. Hay de hecho igualdad es decir, para todo número complejo λ tal que $|\lambda| \neq 1$, el operador $T_\alpha - \lambda I$ es invertible. Esto se deduce inmediatamente de la cuestión ii) parte a). $\square$

Capítulo 6

Ejercicio 6.A

Sea $y \in E$ y denotemos por $T_y : E \longrightarrow \mathbb{R}$ la aplicación lineal continua que a x asocia $T_y(x) = \langle Tx, y\rangle$. Entonces T_y es continua, en efecto

$$||T_y(x)|| = |\langle Tx, y\rangle| = |\langle x, Sy\rangle| \leq ||Sy|| \cdot ||x||.$$

Igualmente, para todo $x \in E$ tenemos que

$$|\langle Tx, y\rangle| \leq ||Tx|| \cdot ||y||$$

para todo $y \in E$. Las dos desigualdades que acabamos de ver prueban que la aplicación bilineal $f : (x, y) \in E \times E \longrightarrow \langle Tx, y\rangle \in \mathbb{K}$ es separadamente continua y por tanto continua (por 2.C), de donde

$$\begin{aligned} |||T||| &= \sup_{||x||\leq 1} ||Tx|| \\ &\leq \sup_{||x||\leq 1, ||y||\leq 1} \langle Tx, y\rangle \\ &= \sup_{||x||\leq 1, ||y||\leq 1} |f(x, y)| \\ &= |||f||| \end{aligned}$$

lo cual prueba que T es acotado. □

Ejercicio 6.B

La sucesión (λ_k) tiende a 0 por tanto es acotada. Sea $\alpha = \sup |\lambda_k|$, claramente tenemos que $||Tx|| \leq \alpha ||x||$ por tanto T está bien definido y es acotado. El hecho que sea autoadjunto es inmediato. Para demostrar que T es compacto bastará probar que para toda sucesión (x_n) tal que $||x_n|| \leq 1$ para todo n, la sucesión $T(x_n)$ admite una subsucesión convergente.

Como T es acotado, la sucesión $T(x_n)$ es acotada, por tanto débilmente acotada y por consiguiente admite una subsucesión $T(x'_n)$ débilmente convergente, es decir, existe un $y \in E$ tal que para todo $u \in E$

$$\lim_{n\to+\infty} \langle T(x'_n), u\rangle = \langle y, u\rangle.$$

Vamos a demostrar que la sucesión $T(x'_n)$ converge fuertemente en E, para ello basta probar que es de Cauchy.

Sean $\varepsilon > 0$ y k y l enteros naturales, tenemos que

$$||T(x'_k - x'_l)||^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 |\langle x'_k - x'_l, e_n\rangle|^2.$$

Como λ_n tiende a 0 existe un $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq N_0 \Longrightarrow |\lambda_n| < \varepsilon,$$

de ahí que

$$\begin{aligned}
\sum_{n=N_0}^{\infty} |\langle T(x'_k - x'_l), e_n\rangle|^2 &= \sum_{n=N_0}^{\infty} |\lambda_n|^2 |\langle x'_k - x'_l, e_n\rangle|^2 \\
&\leq \varepsilon^2 \sum_{n=N_0}^{\infty} |\langle x'_k - x'_l, e_n\rangle|^2 \\
&\leq \varepsilon^2 ||x'_k - x'_l||^2.
\end{aligned}$$

Por otra parte, como $T(x'_n)$ es débilmente convergente, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$k, l \geq N_1 \Longrightarrow |\langle T(x'_k - x'_l), e_n\rangle|^2 \leq \frac{\varepsilon^2}{N_0} \quad \text{para todo } n \in \{1, \ldots, N_0 - 1\}.$$

Tenemos por tanto para $k, l \geq N_1$ que

$$\begin{aligned}
||T(x'_k) - T(x'_l)||^2 &= \sum_{n=1}^{N_0} |\langle T(x'_k) - T(x'_l), e_n\rangle|^2 + \sum_{n=N_0+1}^{\infty} |\lambda_n|^2 |\langle x'_k - x'_l, e_n\rangle|^2 \\
&\leq N_0 \frac{\varepsilon^2}{N_0} + \varepsilon^2 ||x'_k - x'_l||^2 \\
&\leq C^2 \varepsilon^2,
\end{aligned}$$

donde C es una constante positiva. Entonces $||T(x'_k) - T(x'_l)|| \leq C\varepsilon$ y $(T(x'_n))$ es una sucesión de Cauchy, luego T es compacto. $\square$

EJERCICIO 6.C

i) Sean $(e_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ y $(f_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$ dos bases de Hilbert E. Tenemos que

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\infty}||Te_i||^2 &= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|\langle Te_i, f_j\rangle|^2\\ &= \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}|\langle e_i, T^*f_j\rangle|^2\\ &= \sum_{j=1}^{\infty}||T^*f_j||^2.\end{aligned}$$

En particular, si las bases (e_i) y (f_j) son iguales

$$\sum_{i=1}^{\infty}||Te_i||^2 = \sum_{i=1}^{\infty}||T^*e_i||^2,$$

de donde

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\infty}||Te_i||^2 &= \sum_{i=1}^{\infty}||T^*e_i||^2\\ &= \sum_{i=1}^{\infty}||T^{**}f_i||^2\\ &= \sum_{i=1}^{\infty}||Tf_i||^2.\end{aligned}$$

ii) De lo anterior deducimos que T es de Hilbert-Schmidt si y sólo si T^* lo es.

iii) Sean T y S dos operadores de Hilbert-Schmidt y $(e_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ una base de Hilbert de E, tenemos que

$$\begin{aligned}||(T+S)e_i||^2 &= \langle Te_i + Se_i, Te_i + Se_i\rangle\\ &= ||Te_i||^2 + ||Se_i||^2 + \langle Te_i, Se_i\rangle + \langle Se_i, Te_i\rangle\\ &\leq ||Te_i||^2 + ||Se_i||^2 + 2||Te_i||\cdot||Se_i||\\ &\leq (||Te_i|| + ||Se_i||)^2 \leq 2\left(||Te_i||^2 + ||Se_i||^2\right).\end{aligned}$$

Sumando por la izquierda y por la derecha respecto a $i \in \mathbb{N}^*$ se obtiene que

$$\sum_{i=1}^{\infty} ||(T+S)e_i||^2 \leq 2\sum_{i=1}^{\infty} \left(||Te_i||^2 + ||Se_i||^2\right) < +\infty,$$

luego $T + S \in \mathcal{HS}(E)$. Es evidente que $T \in \mathcal{HS}(E) \Longrightarrow \lambda T \in \mathcal{HS}(E)$ para todo $\lambda \in \mathbb{K}$, por consiguiente $\mathcal{HS}(E)$ es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial.

iv) Es evidente que $|||T|||_0 = 0$ si $T = 0$. Supongamos $|||T|||_0 = 0$, entonces para todo $i \in \mathbb{N}^*$, $Te_i = 0$. Como (e_i) es una base de Hilbert, $T = 0$.

La desigualdad triangular puede obtenerse a partir de los cálculos realizados en iii).

v) Sean $T \in \mathcal{HS}(E)$, $x \in E$ y (e_i) una base de Hilbert de E, entonces

$$\begin{aligned} Tx &= T\left(\sum_{i=1}^{\infty} \langle x, e_i\rangle e_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, e_i\rangle \cdot Te_i \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} ||Tx|| &\leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\langle x, e_i\rangle|^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{\infty} ||Te_i||^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= ||x|| \cdot |||T|||_0. \end{aligned}$$

Por consiguiente

$$|||T||| = \sup_{x\neq 0} \frac{||Tx||}{||x||} \leq |||T|||_0.$$

vi) Sea $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $(\mathcal{HS}(E), |||\ |||_0)$. Como $|||\ ||| \leq |||\ |||_0$, T_n es una sucesión de Cauchy en $(E, |||\ |||)$. Por tanto converge hacia un elemento $T \in L(E)$.

Sea $\varepsilon > 0$, existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > m \geq N \Longrightarrow |||T_n - T_m|||_0 < \varepsilon,$$

es decir,

$$\sum_{i=1}^{\infty} ||(T_n - T_m)(e_i)||^2 < \varepsilon^2.$$

Para todo $r \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{i=1}^{r} ||(T_n - T_m)(e_i)||^2 < \varepsilon^2.$$

Fijamos n y tomamos el límite para m, se obtiene que

$$\sum_{i=1}^{r} ||(T_n - T)(e_i)||^2 \leq \varepsilon^2.$$

Haciendo límite para r obtenemos

$$\sum_{i=1}^{\infty} ||(T_n - T)(e_i)||^2 \leq \varepsilon^2.$$

Esta desigualdad prueba que

(*) $T_n - T \in \mathcal{HS}(E)$, por tanto T es de Hilbert-Schmidt,

(**) $|||T_n - T|||_0 \leq \varepsilon$ es decir, la sucesión T_n converge hacia T en la norma $|||\ \ |||_0$.

Por lo tanto, el espacio normado $(\mathcal{HS}(E), |||\ \ |||_0)$ es de Banach, de hecho es de Hilbert pues su norma proviene del producto escalar

$$\langle T, S\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \langle Te_i, Se_i\rangle.$$

vii) Sean $A \in L(E)$, T un operador de Hilbert-Schmidt y $(e_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ una base de Hilbert de E. Para todo $i \in \mathbb{N}^*$

$$||AT(e_i)|| \leq |||A||| \cdot ||T(e_i)||.$$

De ahí que

$$\sum_{i=1}^{\infty} ||AT(e_i)||^2 \leq |||A|||^2 \cdot \sum_{i=1}^{\infty} ||T(e_i)||^2 < +\infty,$$

luego $AT \in \mathcal{HS}(E)$.

Como $T \in \mathcal{HS}(E)$, $T^* \in \mathcal{HS}(E)$ por la cuestión i). Entonces $(TA)^* = A^*T^* \in \mathcal{HS}(E)$ por lo anterior y por consiguiente $TA \in \mathcal{HS}(E)$.

$\mathcal{HS}(E)$ es por tanto un ideal bilátero de $L(E)$.

viii) Sea K un operador de rango finito y denotemos por F su imagen que es un subespacio de dimensión finita n de E. Claramente tenemos que $K = PK$, donde P es la proyección ortogonal sobre F. Para demostrar que K es de Hilbert-Schmidt bastará probar, en virtud de lo anterior (puesto que K es acotado), que P es de Hilbert-Schmidt. Elijamos una base de Hilbert $(e_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ de E tal que los n primeros vectores $e_1, \ldots, e_n$ formen una base ortonormal de F, entonces

$$\sum_{i=1}^{\infty} ||P(e_i)||^2 = \sum_{i=1}^{n} ||e_i||^2 = n,$$

es decir, $P \in \mathcal{HS}(E)$.

Sean $T \in \mathcal{HS}(E)$, $(e_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ una base de Hilbert de E y $\varepsilon > 0$, entonces existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{N+1}^{\infty} ||T(e_i)||^2 < \varepsilon^2.$$

Sea $K_\varepsilon \in L(E)$ definido por

$$K_\varepsilon(e_i) = \begin{cases} T(e_i) & \text{si } i \in \{1, \ldots, N\} \\ 0 & \text{si } i \geq N+1, \end{cases}$$

es evidente que K_ε es de rango finito y que

$$|||T - K_\varepsilon|||_0^2 = \sum_{N+1}^{\infty} ||T(e_i)||^2 < \varepsilon^2.$$

Esto prueba que el espacio $\mathcal{RF}(E)$ de operadores de rango finito en E es denso en $(\mathcal{HS}(E), |||\ \ |||_0)$.

ix) Por lo anterior y el hecho que $|||\ \ ||| \leq |||\ \ |||_0$, todo operador T de Hilbert-Schmidt es límite, en norma $|||\ \ |||$, de una sucesión de operadores de rango finito. Luego $T \in \overline{\mathcal{RF}(E)} = \mathcal{K}(E)$ por la proposición 6.1.7 siendo $\mathcal{K}(E)$ el espacio de operadores compactos en E. $\square$

Ejercicio 6.D

i) Sean $f, g \in E$, tenemos que

$$\begin{aligned}\langle Tf, g\rangle &= \int_0^1 \left(\int_0^1 K(x,y)f(y)dy\right)\overline{g(x)}dx \\ &= \int_0^1 \int_0^1 K(x,y)f(y)\overline{g(x)}dydx \\ &= \int_0^1 f(y)\overline{\left(\int_0^1 K(y,x)g(x)dx\right)}dy \\ &= \langle f, Tg\rangle\end{aligned}$$

y T es hermítico.

ii) Sea $\widehat{E}$ el completado de E, que no es más que el espacio de Hilbert $L^2([0,1],\mathbb{C})$ (separable) de las clases de funciones complejas, medibles y de cuadrado integrable. El operador T se prolonga de manera canónica a $\widehat{E}$ en un operador compacto $\widehat{T}$ sobre $\widehat{E}$. Por la observación que sigue a la demostración del teorema 5.4.5, $\widehat{T}$ tiene los mismos valores propios no nulos que T. Sea $(e_i)_{i\geq 1}$ una base de Hilbert propia de $(\operatorname{Ker}\widehat{T})^{\perp}$ asociada a $\widehat{T}$. Para toda función $f \in E$ tenemos la desigualdad (de Bessel)

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\langle f, e_i\rangle|^2 \leq ||f||^2$$

Esta desigualdad aplicada a la función continua $\overline{K(x,\cdot)} : y \longrightarrow \overline{K(x,y)}$ (que está en E) da

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{\infty}\left|\int_0^1 K(x,y)e_i(y)dy\right|^2 &= \sum_{i=0}^{\infty} |\langle e_i, \overline{K(x,\cdot)}\rangle|^2 \\ &\leq \int_0^1 |K(x,y)|^2 dy \\ &= ||K(x,\cdot)||^2.\end{aligned}$$

De ahí que

$$\int_0^1 K(x,y)e_i(y)dy = (Te_i)(x) = \lambda_i e_i(x).$$

De donde

$$\sum_{i=0}^{\infty} |\lambda_i e_i(x)|^2 \leq \int_0^1 |K(x,y)|^2 dy \leq ||K||_\infty < +\infty.$$

Esto prueba que el primer miembro es una serie que converge uniformemente respecto a x. Después de la integración del primer miembro (que es legítima) y la del segundo miembro se obtiene que

$$\sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i^2 \left(\int_0^1 |e_i(x)|^2 dx \right) \leq \int_0^1 \int_0^1 |K(x,y)|^2 dx dy$$

y teniendo en cuenta que $||e_i|| = 1$,

$$\sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i^2 \leq \int_0^1 \int_0^1 |K(x,y)|^2 dx dy.$$

iii) Completemos $(e_i)_{i \geq 1}$ en una base de Hilbert $(\varepsilon_j)_{j \geq 1}$ de $E = \operatorname{Ker} \widehat{T} \oplus (\operatorname{Ker} T)^{\perp}$, entonces

$$\sum_{j=1}^{\infty} ||\widehat{T}\varepsilon_j||^2 = \sum_{i=0}^{\infty} ||\widehat{T}e_i||^2 = \sum_{i=0}^{\infty} ||Te_i||^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^2 < +\infty.$$

Por tanto el operador $\widehat{T}$ es de Hilbert-Schmidt sobre $\widehat{E}$. □

EJERCICIO 6.E

i) Esta cuestión es trivial, se reduce a una simple verificación de las igualdades

$$\begin{aligned}(P+Q)(T) =& P(T) + Q(T)\\ (\lambda P)(T) =& \lambda P(T)\\ (P.Q)(T) =& P(T)Q(T)\end{aligned}$$

$\forall \lambda \in \mathbb{K}$ y $\forall P, Q \in \mathbb{K}[X]$.

ii) Sea $P(X) = a_0 + a_1 X + \ldots a_n X^n$ un polinomio de $\mathbb{C}[X]$, tenemos que

$$P(T) = a_0 I + a_1 T + \ldots a_n T^n$$

Como $(\lambda T)^* = \overline{\lambda} T^*$ y $(T^n)^* = (T^*)^n$

$$(P(T))^* = \overline{a}_0 + \overline{a}_1 T^* + \dots \overline{a}_n (T^*)^n = \overline{P}(T^*).$$

iii) Si $T = T^*$ una condición suficiente para que $P(T)$ sea hermítico es que

$$a_k = \overline{a}_k \quad \text{para } k = 0, 1, \dots, n,$$

es decir, $P \in \mathbb{R}[X]$.

iv) Sea $P \in \mathbb{R}[X]$, por la cuestión iii), $P(T)$ es hermítico. Supongamos P positivo en $[\alpha, \beta]$ y sean $\alpha_1, \dots, \alpha_r, \lambda_1, \dots, \lambda_n, \beta_1, \dots, \beta_s$ las raíces reales de P tales que

– para todo $i = 1, \dots, r$ con $\alpha_i \leq \alpha$,

– para todo $j = 1, \dots, s$ con $\beta_j \leq \beta$,

– los λ_k son distintos y verifican $\lambda_k \in (\alpha, \beta)$ para todo $k = 1, \dots, n$

y $u_1 + \sqrt{-1}v_1, u_1 - \sqrt{-1}v_1, \dots, u_q + \sqrt{-1}v_q, u_q - \sqrt{-1}v_q$ las otras raíces (complejas). Como P es positivo en $[\alpha, \beta]$, la multiplicidad de cada λ_k es forzosamente par, denotémosla por $2m_k$.

Obsérvese en primer lugar que

- todos los operadores $T - \alpha_i I$, $\beta_j I - T$ son positivos, conmutan entre ellos y conmutan con los operadores $T - \lambda_k I$ y $\left((T - u_l I)^2 + v_l^2 I\right)$,
- para todo $k = 1, \dots, n$ el operador $(T - \lambda_k I)^{2m_k}$ es positivo ya que para todo $x \in E$ tenemos que $\langle (T - \lambda_k I)^{2m_k} x, x\rangle = \langle (T - \lambda_k I)^{m_k} x, (T - \lambda_k I)^{m_k} x\rangle \geq 0$.
- para todo $l = 1, \dots, q$ el operador $\left((T - u_l I)^2 + v_l^2 I\right)$ es positivo por ser suma de dos operadores positivos.

El polinomio P se escribe

$$P(X) = c \prod_{i=1}^{r} (X - \alpha_i) \prod_{j=1}^{s} (\beta_j - X) \prod_{k=1}^{n} (X - \lambda_k)^{2m_k} \prod_{l=1}^{q} \left((X - u_l)^2 + v_l^2\right)$$

con c real positivo, de donde

$$P(T) = c \prod_{i=1}^{r} (T - \alpha_i I) \prod_{j=1}^{s} (\beta_j I - T) \prod_{k=1}^{n} (T - \lambda_k I)^{2m_k} \prod_{l=1}^{q} \left((T - u_l I)^2 + v_l^2 I\right)$$

Como cada uno de los factores $(T - \alpha_i I)$, $(\beta_j I - T)$, $(T - \lambda_k I)^{2m_k}$ y $\left((T - u_l I)^2 + v_l^2 I\right)$ es un operador positivo y todos estos factores conmutan entre ellos, el operador $P(T)$ es positivo.

Tenemos que $Q - P \geq 0$ en $[\alpha, \beta]$, por tanto $Q(T) - P(T)$ es un operador positivo, es decir, $P(T) \leq Q(T)$.

Sea $P \in \mathbb{R}[X]$ y pongamos $\sigma = \sup_{x\in[\alpha,\beta]} |P(x)|$. Por supuesto que se cumple

$$-\sigma \leq P(x) \leq +\sigma \quad \text{ para todo } x \in [\alpha, \beta],$$

luego $-\sigma I \leq P(T) \leq +\sigma I$ y por consiguiente

$$|||P(T)||| \leq \sigma.$$

v) Sea B el álgebra de funciones continuas en $[\alpha, \beta]$ con la norma de la convergencia uniforme $|| \ \ ||_\infty$. B contiene el álgebra $\mathcal{P}$ de las funciones polinómicas que es densa gracias al teorema de Stone-Weierstrass. Por la cuestión iv), el morfismo de álgebras

$$\Phi_T : \mathcal{P} \longrightarrow L(E)$$

verifica

$$|||\Phi_T(P)||| \leq ||P||_\infty,$$

por tanto es continuo y por consiguiente se prolonga en un morfismo continuo de álgebras

$$\Phi_T : B \longrightarrow L(E).$$

vi) Si T es positivo su cota inferior α es positiva. En este caso la imagen por Φ_T de la función continua $p : x \in [\alpha, \beta] \longrightarrow \sqrt{x} \in \mathbb{R}$ es un operador positivo D que verifica

$$D^2 = \Phi_T(p)\Phi_T(p) = \Phi_T(p^2) = \Phi_T(x) = T.$$

vii) Si $\alpha > 0$ la función $q : x \in [\alpha, \beta] \longrightarrow x \in \mathbb{R}$ es invertible en el álgebra B y su inversa $\psi(x) = \frac{1}{x}$ verifica

$$\Phi_T(1) = \Phi_T(q.\psi) = \Phi_T(q)\Phi_T(\psi) = TT' = T'T = I,$$

es decir, T es invertible y tiene por operador inverso la imagen por Φ_T de la función ψ. $\square$

BIBLIOGRAFÍA

He aquí una lista de obras que el lector podrá utilizar para completar y profundizar sus conocimientos de Análisis Funcional. El curso aquí presentado se inspira en algunas de ellas.

H. Brezis, *Análisis Funcional.* Alianza Universidad Textos (1984).

P. Fernandez, *Medida e integraçao.* Projeto Euclides, IMPA (1976).

P. Jacob, *Cours de probabilités et intégration.* Notas de curso, Universidad de Lille I (1984).

L. Kantorovitch et G. Akilov, *Analyse fonctionnelle (I et II).* Editorial MIR (1977).

A. Kirilov et A. Gvichiani, *Théorèmes et problèmes d'Analyse fonctionnelle.* Editorial MIR (1982).

A. Kolmogorov et S. Fomine, *Elementos de la teoría de funciones y del Análisis Funcional.* Editorial MIR (1974).

L. Lusternik et V. Sobolev, *Précis d'analyse fonctionnelle.* Editorial MIR (1982).

M. Métivier, *Notions fondamentales de théorie des probabilités.* Dunod Université (1979).

M. Parreau, *Compléments d'Analyse.* Notas de curso, Universidad de Lille I (1971).

W. Rudin, *Análisis Real y Complejo.* Alhambra, Colección Ciencias y Técnica (1985).

H.H. Schaefer, *Topological vector spaces.* Colección GTM n. 3 (1980).

L. Schwartz, *Théorie des distributions.* Hermann (1966).

L. Schwartz, *Topologie générale et Analyse fonctionnelle.* Hermann (1970).

L. Schwartz, *Analyse hilbertienne.* Collection Méthodes, Hermann (1979).

J. Thayer, *Operadores auto-adjuntos e equaçoes diferenciais parciais.* Projeto Euclides, IMPA (1987).

V. Trénoguine, *Analyse fonctionnelle.* Editorial MIR (1980).

V. Trenoguin, B. Pissarevski et T. Soboleva, *Problemas y ejercicios de Análisis Funcional.* Editorial MIR (1987).

ÍNDICE ALFABÉTICO

ÍNDICE ALFABÉTICO