Jouons binaire : je devine ce que tu penses !

Aziz El Kacimi
Université de Valenciennes
Cité des Géométries - Gare numérique de Jeumont

Atelier mathématique
Collège Pablo Neruda - Wattrelos le 21 mai 2012
Rallye mathématique des Collèges, IREM - Lille le 16 juin 2012
Collge Jacques Brel - Louvroil le 18 mars 2013
Collge Vauban - Maubeuge le 20 mars 2013
Stage Maths (élèves de Seconde) - UVHC le 18 juin 2013

0. Je devine ce que tu penses

Pense à un nombre entre 1 et 100 !

Parmi les listes qui suivent,
indique-moi celles où il figure !

Je devine alors le nombre
auquel tu as pensé !

1	3	5	7	9	11	13	15	17	19
21	23	25	27	29	31	33	35	37	39
41	43	45	47	49	51	53	55	57	59
61	63	65	67	69	71	73	75	77	79
81	83	85	87	89	91	93	95	97	99

2 3 6 7 10 11 14 15 18 19

22 23 26 27 30 31 34 35

38 39 42 43 46 47 50 51

54 55 58 59 62 63 66 67

70 71 74 75 78 79 82 83

86 87 90 91 94 95 98 99

4	5	6	7	12	13	14	15	20
21	22	23	28	29	30	31	36	
37	38	39	44	45	46	47	52	
53	54	55	60	61	62	63	68	
69	70	71	76	77	78	79	84	
85	86	87	92	93	94	95	100	

8	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
24	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**	**31**
40	**41**	**42**	**43**	**44**	**45**	**46**	**47**
56	**57**	**58**	**59**	**60**	**61**	**62**	**63**
72	**73**	**74**	**75**	**76**	**77**	**78**	**79**
88	**89**	**90**	**91**	**92**	**93**	**94**	**95**

16	17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30	31
48	49	50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61	62	63
80	81	82	83	84	85	86	87
88	89	90	91	92	93	94	95

32 33 34 35 36 37 38

39 40 41 42 43 44

45 46 47 48 49 50

51 52 53 54 55 56

57 58 59 60 61 62

63 96 97 98 99 100

64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	
77	78	79	80	81	82	
83	84	85	86	87	88	
89	90	91	92	93	94	
95	96	97	98	99	100	

Question naturelle :

Comment j'ai fait pour

deviner le nombre auquel

tu as pensé ?

Nous allons tenter de comprendre cela !

1. Le système décimal

1.1. Quelques opérations arithmétiques

Quotient et reste

Soient u et b deux nombres entiers strictement positifs. On sait alors qu'il existe deux entiers q et r tels que :

$$u = qb + r \quad \textbf{avec} \quad 0 \leq r \leq b - 1.$$

Ces deux entiers sont *uniques*. On dira que q est le *quotient* de la division de u par b et que r en est le *reste*.

Par exemple :

$$47 = 9 \times 5 + 2 \quad (u = 47,\ b = 5,\ q = 9 \textbf{ et } r = 2)$$

$$258 = 11 \times 23 + 5 \quad (u = 258,\ b = 23,\ q = 11 \textbf{ et } r = 5)$$

Puissance

Soient u et n deux nombres entiers strictement positifs. On rappelle :

- **que la puissance $n^{\text{ème}}$ de u est le nombre entier noté u^n et défini par :**

$$u^n = \overbrace{u \times \cdots \times u}^{n \text{ fois}}.$$

- **Par convention : $u^0 = 1$.**
- **On a les règles de calcul suivantes :**

$$(u \times v)^n = u^n \times v^n \quad \textbf{et} \quad u^{n+m} = u^n \times u^m.$$

Par contre, *on n'a pas* **:**

$$(u + v)^n = u^n + v^n.$$

Exemples

- **Prenons $u = 10$. On a :**

$$10^0 = 1$$
$$10^1 = 10$$
$$10^2 = 100$$
$$10^3 = 1\ 000$$
$$10^4 = 10\ 000$$
$$10^5 = 100\ 000$$
$$10^6 = 1\ 000\ 000$$
$$10^7 = 10\ 000\ 000$$
$$10^8 = 100\ 000\ 000$$
$$10^9 = 1\ 000\ 000\ 000$$
$$10^{10} = 10\ 000\ 000\ 000$$
$$10^{11} = 100\ 000\ 000\ 000$$

....

- **Prenons $u = 2$. On a :**

$$
\begin{aligned}
2^0 &= 1\\
2^1 &= 2\\
2^2 &= 4\\
2^3 &= 8\\
2^4 &= 16\\
2^5 &= 32\\
2^6 &= 64\\
2^7 &= 128\\
2^8 &= 256\\
2^9 &= 512\\
2^{10} &= 1\,024\\
2^{11} &= 2\,048\\
2^{12} &= 4\,096
\end{aligned}
$$

....

1.2. L'écriture d'un nombre

Pour représenter un nombre entier naturel, on utilise un *système de numération*. Celui que l'on connaît le plus est le *système décimal* composé des 10 chiffres :

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Par exemple :

7

32

247

1 032

18 546

365 249

4 985 321

- **Le *nombre de chiffres* qui forment un nombre est le premier élément qui permet de donner une *indication* sur sa *taille* : plus il y en a, plus ce nombre paraît *grand* !**
- **Les chiffres peuvent se répéter, par exemple 2 099 777 444.**
- **On demande à ce que le premier (en partant de la gauche) soit toujours différent de 0.**
- **Tout nombre inférieur à 10 utilise exactement 1 chiffre.**
- **Tout nombre inférieur à 100 utilise au plus 2 chiffres.**
- **Tout nombre inférieur à 1 000 utilise au plus 3 chiffres.**
- **Tout nombre inférieur à 10 000 utilise au plus 4 chiffres.**
- **Tout nombre inférieur à 100 000 utilise au plus 5 chiffres.**
- **Tout nombre inférieur à 1 000 000 utilise au plus 6 chiffres.**
- **.........................**

Prenons le nombre $u = 3274$. On peut le décomposer comme suit :

$$\begin{aligned} 3\ 274 &= 3\ 000 + 200 + 70 + 4 \\ &= 3 \times 1000 + 2 \times 100 + 7 \times 10 + 4 \times 1 \\ &= 3 \times 10^3 + 2 \times 10^2 + 7 \times 10^1 + 4 \times 10^0. \end{aligned}$$

Prenons un autre nombre $v = 14305$. On peut aussi le décomposer comme suit :

$$\begin{aligned} 14\ 305 &= 10\ 000 + 4\ 000 + 300 + 5 \\ &= 1 \times 10\ 000 + 4 \times 1\ 000 + 3 \times 100 + 0 \times 10 + 5 \times 1 \\ &= 1 \times 10^4 + 4 \times 10^3 + 3 \times 10^2 + 0 \times 10^1 + 5 \times 10^0. \end{aligned}$$

Que constate-t-on alors ?

De façon générale, tout entier u à $k+1$ chiffres, s'écrit :

$$u = u_k u_{k-1} \cdots u_1 u_0$$

avec $u_k \neq 0$. Si on pose $d = 10$, u se décompose en la somme :

$$u = u_k d^k + u_{k-1} d^{k-1} + \cdots + u_1 d^1 + u_0 d^0.$$

Tout nombre entier naturel u s'écrit sous cette forme, et de [façon unique](), c'est-à-dire, si :

$$u = u_k d^k + u_{k-1} d^{k-1} + \cdots + u_1 d^1 + u_0 d^0$$

et :

$$v = v_\ell d^\ell + v_{\ell-1} d^{\ell-1} + \cdots + v_1 d^1 + v_0 d^0$$

alors :

$$u = v \iff \left(k = \ell \quad \textbf{et} \quad \begin{cases} u_k & = v_k \\ \cdots & = \cdots \\ u_0 & = v_0 \end{cases} \right).$$

$$10 = \overbrace{\heartsuit\heartsuit\heartsuit\heartsuit\heartsuit\heartsuit\heartsuit\heartsuit\heartsuit\heartsuit}^{\textbf{paquet de 10}} = \spadesuit$$

$$100 = 10^2 = \left\{\begin{array}{l}\heartsuit\heartsuit\heartsuit\heartsuit\heartsuit\heartsuit\heartsuit\heartsuit\heartsuit\heartsuit\\\heartsuit\heartsuit\heartsuit\heartsuit\heartsuit\heartsuit\heartsuit\heartsuit\heartsuit\heartsuit\\\heartsuit\heartsuit\heartsuit\heartsuit\heartsuit\heartsuit\heartsuit\heartsuit\heartsuit\heartsuit\\\heartsuit\heartsuit\heartsuit\heartsuit\heartsuit\heartsuit\heartsuit\heartsuit\heartsuit\heartsuit\\\heartsuit\heartsuit\heartsuit\heartsuit\heartsuit\heartsuit\heartsuit\heartsuit\heartsuit\heartsuit\\\heartsuit\heartsuit\heartsuit\heartsuit\heartsuit\heartsuit\heartsuit\heartsuit\heartsuit\heartsuit\\\heartsuit\heartsuit\heartsuit\heartsuit\heartsuit\heartsuit\heartsuit\heartsuit\heartsuit\heartsuit\\\heartsuit\heartsuit\heartsuit\heartsuit\heartsuit\heartsuit\heartsuit\heartsuit\heartsuit\heartsuit\\\heartsuit\heartsuit\heartsuit\heartsuit\heartsuit\heartsuit\heartsuit\heartsuit\heartsuit\heartsuit\\\heartsuit\heartsuit\heartsuit\heartsuit\heartsuit\heartsuit\heartsuit\heartsuit\heartsuit\heartsuit\end{array}\right. = \overbrace{\spadesuit\spadesuit\spadesuit\spadesuit\spadesuit\spadesuit\spadesuit\spadesuit\spadesuit\spadesuit}^{\textbf{paquet de 10}} = \clubsuit$$

$$1000 = 10^3 = \overbrace{\clubsuit\clubsuit\clubsuit\clubsuit\clubsuit\clubsuit\clubsuit\clubsuit\clubsuit\clubsuit}^{\textbf{paquet de 10}} = \bigstar$$

$$10^4 = \left\{ \begin{array}{l} \clubsuit\clubsuit\clubsuit\clubsuit\clubsuit\clubsuit\clubsuit\clubsuit\clubsuit\clubsuit \\ \clubsuit\clubsuit\clubsuit\clubsuit\clubsuit\clubsuit\clubsuit\clubsuit\clubsuit\clubsuit \\ \clubsuit\clubsuit\clubsuit\clubsuit\clubsuit\clubsuit\clubsuit\clubsuit\clubsuit\clubsuit \\ \clubsuit\clubsuit\clubsuit\clubsuit\clubsuit\clubsuit\clubsuit\clubsuit\clubsuit\clubsuit \\ \clubsuit\clubsuit\clubsuit\clubsuit\clubsuit\clubsuit\clubsuit\clubsuit\clubsuit\clubsuit \\ \clubsuit\clubsuit\clubsuit\clubsuit\clubsuit\clubsuit\clubsuit\clubsuit\clubsuit\clubsuit \\ \clubsuit\clubsuit\clubsuit\clubsuit\clubsuit\clubsuit\clubsuit\clubsuit\clubsuit\clubsuit \\ \clubsuit\clubsuit\clubsuit\clubsuit\clubsuit\clubsuit\clubsuit\clubsuit\clubsuit\clubsuit \\ \clubsuit\clubsuit\clubsuit\clubsuit\clubsuit\clubsuit\clubsuit\clubsuit\clubsuit\clubsuit \\ \clubsuit\clubsuit\clubsuit\clubsuit\clubsuit\clubsuit\clubsuit\clubsuit\clubsuit\clubsuit \end{array} \right. = \overbrace{\bigstar\bigstar\bigstar\bigstar\bigstar\bigstar\bigstar\bigstar\bigstar\bigstar}^{\textbf{paquet de 10}} = \diamondsuit$$

1.3. Questions naturelles

Existe-t-il des systèmes de numération autres que le sytème décimal ?

• **La réponse est évidemment OUI ! Tout entier naturel non nul b peut jouer le même rôle que la** *base* $d = 10$.

• **Problème : si $b \geq 11$, par exemple $b = 12$, il faut trouver des symboles pour compléter l'ensemble des chiffres :**

$$\{0, \ 1, \ 2, \ 3, \ 4, \ 5, \ 6, \ 7, \ 8, \ 9\}$$

afin de représenter 10 et 11. On peut bien entendu faire cela mais on risque de s'y perdre : nous sommes trop habitués aux chiffres $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$!

• **Supposons $b \leq 9$ et posons-nous la question :** *sachant qu'on sait écrire n'importe quel entier dans le système décimal, quelle serait la base minimale b permettant d'en donner une représentation ?*

- **Si $b = 1$, on a $b^k = 1$ pour tout entier k ; on n'aura donc pas une base. Au minimum on doit prendre $b = 2$. Dans ce cas on choisira les deux chiffres 0 et 1 pour la numération. On obtient alors un système dont le principe consiste à compter par paquet de 2.**

$$2 = \overbrace{\heartsuit\heartsuit}^{\textbf{paquet de 2}} = \spadesuit$$

$$4 = 2^2 = \begin{cases} \heartsuit\heartsuit \\ \heartsuit\heartsuit \end{cases} = \overbrace{\spadesuit\spadesuit}^{\textbf{paquet de 2}} = \clubsuit$$

$$8 = 2^3 = \begin{cases} \heartsuit\heartsuit \\ \heartsuit\heartsuit \\ \heartsuit\heartsuit \\ \heartsuit\heartsuit \end{cases} = \begin{cases} \spadesuit\spadesuit \\ \spadesuit\spadesuit \end{cases} = \overbrace{\clubsuit\clubsuit}^{\textbf{paquet de 2}} = \diamondsuit$$

2. Le système binaire

2.1. Quelques exemples d'abord

- **Prenons le nombre $u = 221$. On peut le décomposer en une somme :**

$$\begin{aligned} 221 &= 128 + 64 + 16 + 8 + 4 + 1 \\ &= 2^7 + 2^6 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 1 \\ &= 1 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 \end{aligned}$$

- **De même, pour $v = 78$, on peut écrire :**

$$\begin{aligned} 78 &= 64 + 8 + 4 + 2 \\ &= 2^6 + 2^3 + 2^2 + 2 \\ &= 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 \end{aligned}$$

Que remarque-t-on ?

• Les nombres que nous avons considérés s'écrivent sous forme d'une somme de puissances du nombre $b = 2$!

Pour $u = 221$, on a utilisé $1 = 2^0$, $2 = 2^1$, 2^3, 2^4, 2^6 et 2^7. Il manque les deux puissances 2^2 et 2^5 ! En réalité elles sont là aussi mais affectées du coefficient 0.

On peut faire le même constat pour $v = 78$: on a utilisé $2 = 2^1$, 2^2, 2^3 et 2^6. Il manque les trois puissances 2^0, 2^4 et 2^5 ! En réalité, comme pour le nombre précédent, elles sont là aussi mais affectées du coefficient 0.

Que se passe-t-il alors de façon générale ?

Nous allons le voir tout de suite !

2.2. Écriture générale

• Soit u un entier naturel (il peut être égal à 0) écrit dans le système décimal. On souhaite l'écrire dans le système binaire $\mathfrak{b} = \{0, 1\}$, c'est-à-dire le représenter sous la forme :

$$u = \varepsilon_k \varepsilon_{k-1} \cdots \varepsilon_1 \varepsilon_0$$

où chacun des $\varepsilon_k, \cdots, \varepsilon_0$ est soit 0 soit 1.

• Cela signifie que :

$$\begin{aligned} u &= \varepsilon_k \cdot 2^k + \varepsilon_{k-1} \cdot 2^{k-1} + \cdots + \varepsilon_1 \cdot 2^1 \varepsilon_0 \cdot 2^0 \\ &= 2^k \varepsilon_k + 2^{k-1} \varepsilon_{k-1} + \cdots + 2\varepsilon_1 + \varepsilon_0 \end{aligned}$$

• Les nombres $\varepsilon_k, \varepsilon_{k-1} \cdots, \varepsilon_1, \varepsilon_0$ sont les *coefficients binaires* de l'entier u.

Comment trouver les coefficients $\varepsilon_k, \varepsilon_{k-1} \cdots, \varepsilon_1, \varepsilon_0$ *?*

La réponse est assez simple !

• On part de $2^k\varepsilon_k + 2^{k-1}\varepsilon_{k-1} + \cdots + 2\varepsilon_1 + \varepsilon_0$. C'est équivalent à : $u = 2q_1 + \varepsilon_0$ où $q_1 = 2^{k-1}\varepsilon_k + \cdots + 2\varepsilon_2 + \varepsilon_1$. Donc ε_0 est le reste r_0 de la division de u par 2 ; il est forcément égal soit à 0 soit à 1.

• L'écriture de $q_1 = 2^{k-1}\varepsilon_k + \cdots + 2\varepsilon_2 + \varepsilon_1$ est similaire à l'écriture initiale de u. Pour trouver ε_1, il suffit donc de faire comme précédemment : on divise q_1 par 2 et on retient le reste r_1 qui ne sera rien d'autre que ε_1, c'est-à-dire 0 ou 1 ! Ainsi $q_1 = 2q_2 + r_1$ avec $q_2 = 2^{k-2}\varepsilon_k + \cdots + 2\varepsilon_3 + \varepsilon_2$.

• On applique à q_2 exactement la même chose : le reste r_2 de la division de q_2 par 2 donne ε_2 qui sera 0 ou 1 !

• On continue ainsi jusqu'à q_k qui sera forcément 0 ou 1 ; c'est aussi le reste r_k de sa division par 2 dont le quotient est 0 ! Ainsi $\varepsilon_k = r_k = q_k$.

2.3. L'algorithme

Soit $u > 0$ un entier naturel.

Soit k l'entier naturel non nul tel que $2^{k-1} \leq u < 2^k$. Voici l'algorithme qui permet d'obtenir les coefficients binaires $\varepsilon_k, \varepsilon_{k-1} \cdots, \varepsilon_1, \varepsilon_0$.

$$
\begin{aligned}
u &= 2q_1 + r_0 \\
q_1 &= 2q_2 + r_1 \\
q_2 &= 2q_3 + r_2 \\
\cdots &= \cdots \\
q_{k-2} &= 2q_{k-1} + r_{k-2} \\
q_{k-1} &= 2q_k + r_{k-1} \\
q_k &= 2 \times 0 + r_k.
\end{aligned}
$$

On a alors $\varepsilon_0 = r_0, \varepsilon_1 = r_1, \cdots, \varepsilon_{k-1} = r_{k-1}$ et $\varepsilon_k = r_k$.

2.4. Application

$$
\begin{aligned}
221 &= 2 \times 110 + 1 \\
110 &= 2 \times 55 + 0 \\
55 &= 2 \times 27 + 1 \\
27 &= 2 \times 13 + 1 \\
13 &= 2 \times 6 + 1 \\
6 &= 2 \times 3 + 0 \\
3 &= 2 \times 1 + 1 \\
1 &= 2 \times 0 + 1.
\end{aligned}
$$

Par suite 221 **s'écrit** 11011101 **dans le sysème binaire.**
Vérifions cela :

$$
\begin{aligned}
u &= 1 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 \\
&= 128 + 64 + 16 + 8 + 4 + 1 \\
&= 221.
\end{aligned}
$$

3. Exercices

3.1. **Écrire les nombres qui suivent dans le système binaire :**

$$u = 4 \qquad v = 256 \qquad w = 511 \qquad z = 133$$

3.2. **Les nombres qui suivent sont écrits dans le système binaire. Les écrire dans le système décimal.**

$$u' = 10 \qquad v' = 1111111111 \qquad w' = 10011 \qquad z' = 100001$$

3.3. **Dresser la liste des nombres de 1 à 100 qui ont leur décomposion en somme de puissances de 2 contenant :**

- $1 = 2^0$;
- $2 = 2^1$;
- $4 = 2^2$;
- $8 = 2^3$;
- $16 = 2^4$;
- $32 = 2^5$;
- $64 = 2^6$.

CONCLUSION !

Je joue à la devinette avec toi.

Je pense à un nombre entre 1 et 100.

Es-tu capable de me dire lequel ?