La théorie de la déformation en géométrie

Aziz El Kacimi
Université de Valenciennes

Journées du GGTM
Casablanca 26, 27 et 28 octobre 2011

C'est un thème central sur lequel

beaucoup de mathématiciens

travaillent actuellement !

Les problèmes y sont nombreux

et pas mal d'entre eux

restent encore ouverts !

Nous tenterons d'expliquer

sur quelques exemples assez

simples ce que cela représente.

LA THÉORIE DE LA DÉFORMATION

UTILISE DES OUTILS DE DIVERSES

BRANCHES DES MATHÉMATIQUES :

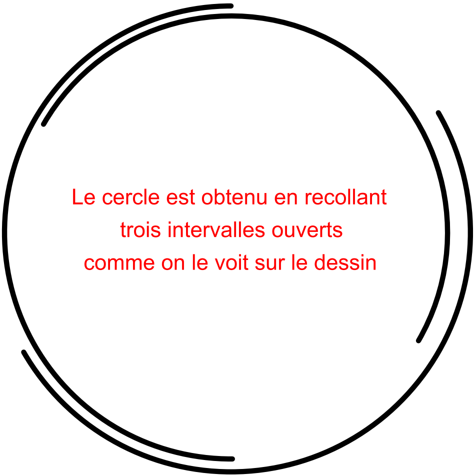
ANALYSE, GÉOMÉTRIE, ALGÈBRE...

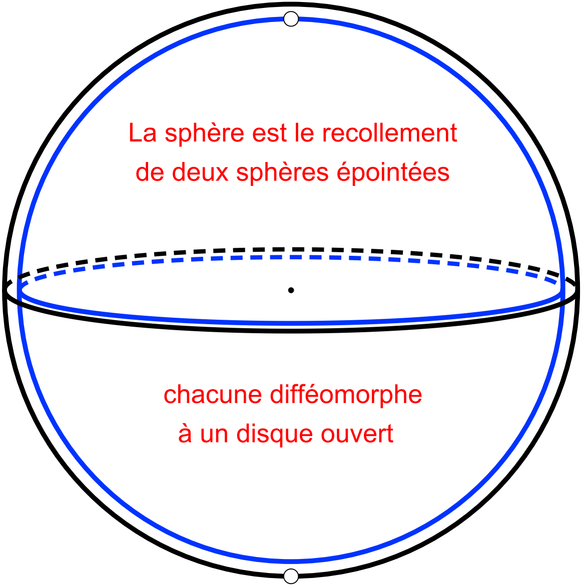
Partie I

DÉFORMATIONS DES STRUCTURES GÉOMÉTRIQUES

I. 1. Structures géométriques

I.1.1. **Une n-variété compacte M est obtenue en recollant un nombre fini de boules de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ à l'aide de difféomorphismes.**




La sphère est le recollement
de deux sphères épointées
chacune difféomorphe
à un disque ouvert

I.1.2. Toute ***structure géométrique*** supplémentaire (***métrique, complexe, symplectique, feuilletée*** ou autre) sur ces boules ***compatible*** avec ces recollements donne une strusture géométrique ***globale*** $\mathcal{S}$ du même type sur M.

Mais ces boules sont toutes difféomorphes à $V = \mathbb{R}^n$. Il est donc plus facile de les voir en premier lieu sur cet espace. En général, elles sont données par des éléments sur les espaces $S^k V$ (puissance symétrique), $\Lambda^k V$ (puissance extérieure), $\mathrm{End}(V)$ (endomorphismes de V)... Par exemple :

– Une ***métrique*** est une 2-forme symétrique définie positive.
– Une ***structure symplectique*** est une 2-forme alternée ω non dégénérée. Ceci impose à n d'être pair $n = 2p$. La non dégénérescence de ω est équivalente à : $\omega \wedge \cdots \wedge \omega$ (p fois) non nulle.
– Une ***structure complexe*** est un endomorphisme $J : V \longrightarrow V$ tel que $J^2 = -\mathrm{identit\acute{e}}$. Ceci impose aussi à n d'être pair.

À chaque point x d'une variété (connexe, compacte pour simplifier) de dimension n, est associé l'*espace tangent* T_xM qui est un n-espace vectoriel ; la réunion :

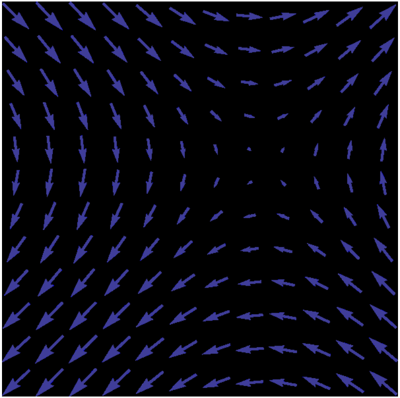
$$TM = \bigcup_{x \in M} T_xM$$

de tous ces espaces est le *fibré tangent* à M. Un élément de TM est la donnée d'un couple (x, u_x) où $x \in M$ et u_x un vecteur tangent à M au point x. TM est muni d'une structure de variété différentiable de dimension $2n$ et on a une submersion C^∞ :

$$\pi : (x, u_x) \in TM \longmapsto x \in M$$

munissant TM d'une structure de *fibré vectoriel* de rang n au-dessus de M.

I.1.3. Une application différentiable $X : M \longrightarrow TM$ telle que $\pi \circ X(x) = x$ pour tout x est appelée ***section*** de TM ou ***champ de vecteurs*** sur M.



Un champ de vecteurs sur le plan

L'ensemble $\mathfrak{X}(M)$ des champs de vecteurs sur M est un module sur l'anneau $C^\infty(M)$ des fonctions différentiables sur M. Il est finiment engendré et lorsqu'il est libre de rang n, on dira que M est *parallélisable*; ceci signifie qu'il existe n champs de vecteurs $(X_1, \cdots, X_n)$ sur M linéairement indépendants en chaque point : c'est un *parallélisme* sur M qui permet le transport des objets géométriques sans altération!
Un autre objet naturellement associé à M est son *groupe de difféomorphismes* $\mathrm{Diff}(M)$. Il s'interprète comme le *groupe des symétries* de M et est d'un intérêt capital :
– il permet de transporter les objets géométriques de M,
– de faire des changements de coordonnées pour, éventuellement,
– rendre plus facile un calcul, la résolution d'une équation (différentielle, intégrale ou autre) etc.

I.1.4. Exemples de structures géométriques

Elles sont pratiquement toutes données par une section d'un fibré vectoriel $\xi : E \longrightarrow M$ construit à partir du fibré tangent TM : une puissance symétrique $S^k T^* M$, une puissance extérieure $\Lambda^k T^* M$, le fibré End(TM) et tant d'autres. Nous nous contenterons d'exemples, ils parlent mieux !

– Une *métrique riemannienne* est une section g *définie positive* du fibré :

$$S^2 T^* M \longrightarrow M$$

des 2-formes symétriques au-dessus de M : à chaque $x \in M$, on associe un *produit scalaire* g_x sur $T_x M$ de telle sorte que la variation de g_x en fonction de x soit différentiable.
Faire de la géométrie riemannienne, c'est étudier les propriétés, les invariants... liés à une *métrique riemannienne* sur une variété. C'est tout un monde !

– Une ***structure presque complexe*** est une section du fibré : $\mathbf{End}(TM) \longrightarrow M$ au-dessus de M dont la fibre en x est l'espace des endomorphismes de T_x : à chaque $x \in M$, on associe un endomorphisme $J_x : T_xM \longrightarrow T_xM$ de telle sorte que $J_x^2 = -1$ et la variation de J_x en fonction de x soit différentiable.
Pour chaque x, J_x définit une structure complexe sur l'espace vectoriel T_xM ; ceci force la variété à avoir une dimension paire $2n$. Par exemple, les ***variétés complexes***, celles qui sont modelées localement sur un ***polydisque*** de $\mathbb{C}^n$, possèdent une structure presque complexe. Mais, en général, une structure presque complexe J ne définit pas toujours une ***structure complexe***. Quand c'est le cas, on dira que J est ***intégrable***. Ceci se traduit par la nullité du ***tenseur de Nijenhuis*** :

$$\mathcal{N}(X,Y) = 2\{[JX,JY] - [X,Y] - J[JX,Y] - J[X,JY]\}.$$

– Une *forme symplectique* est une *forme différentielle fermée, de degré 2 et non dégénérée* ω *i.e.* ω est une section du fibré $\Lambda^2 T^*M \longrightarrow M$ des 2-formes alternées au-dessus de M : à chaque $x \in M$, on associe une **2-*forme alternée*** ω_x sur T_xM de telle sorte que la variation de ω_x en fonction de x soit différentiable, $d\omega = 0$ et non dégénérée. Là aussi, la variété doit avoir une dimension paire $2n$. La non dégénérescence de ω est équivalente à la condition :

La $2n$-forme différentielle $\overbrace{\omega \wedge \cdots \wedge \omega}^{n \text{ fois}}$ est partout non nulle.

Faire de la géométrie symplectique, c'est étudier les propriétés, les invariants... liés à une *forme symplectique* sur une variété.

Si M est compacte il y des obstructions topologiques à l'existence d'une structure symplectique : *pour tout* $p = 1, \cdots, n$, *la* $2p$-*forme* ω^p *ne doit pas être exacte et donc l'espace vectoriel de cohomologie* $H^{2p}(M, \mathbb{R})$ *doit être non nul !*

I. 2. Déformations

I.2.1. Si on suppose que les recollements des boules qui constituent les morceaux de M dépendent continûment d'un paramètre $t \in]-T, T[$, pour des petites valeurs de t, la **structure différentiable de M reste la même** ; par contre la nouvelle structure géométrique $\mathcal{S}_t$ peut être différente de $\mathcal{S}$ pour t aussi proche de 0 que l'on veut ! On obtient ainsi une famille continue de structures géométriques $(\mathcal{S}_t)$ (paramétrée par $t \in]-T, T[$) sur M qu'on appelle *déformation* de $\mathcal{S} = \mathcal{S}_0$.

L'objet de la théorie des déformations est de *mesurer* les variations de $\mathcal{S}_t$ en fonction du paramètre t au voisinage de 0. C'est ce qu'on tentera d'expliquer dans ce mini-cours à travers des exemples simples.

I.2.2. L'exemple d'une variété complexe

Nous allons juste considérer un exemple sur lequel nous verrons les déformations de façon effective.

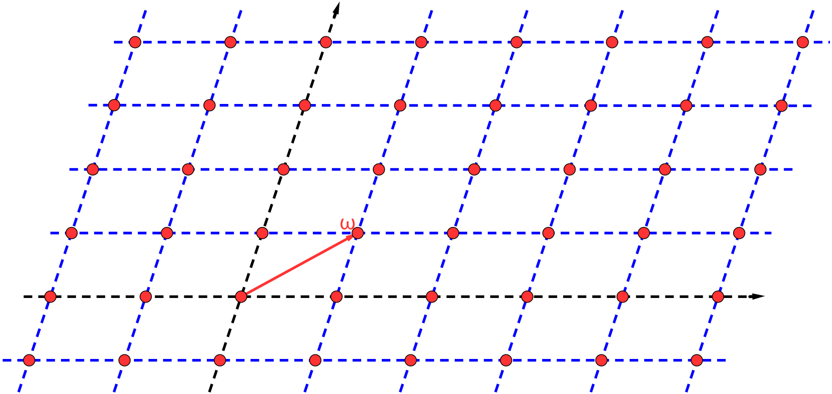
On sait que l'une des ***variétés complexes*** **les plus simples est l'espace vectoriel** $\mathbb{C}$**. C'est même un** ***groupe de Lie complexe*****. Soit** $\omega \in \mathbb{H} = \{\omega = \omega_1 + i\omega_2 \in \mathbb{C} : \omega_2 > 0\}$**. Alors** $\omega = \omega_1 + i\omega_2$ **définit un réseau :**

$$\Gamma_\omega = \omega_1\mathbb{Z} \oplus i\omega_2\mathbb{Z}$$

dans $\mathbb{C}$**. L'action naturelle de** Γ_ω **sur** $\mathbb{C}$ **(par translations) est évidemment holomorphe, propre et libre. Le quotient :**

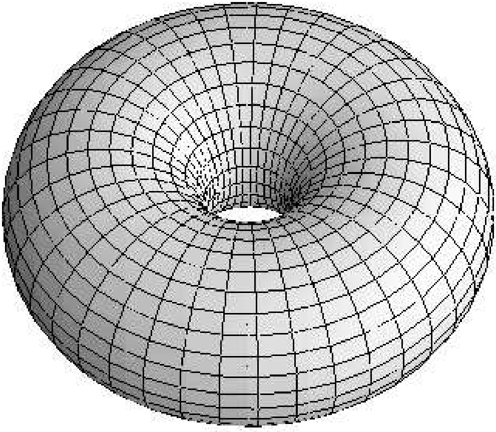
$$\Sigma_\omega = \mathbb{C}/\Gamma_\omega$$

est une variété complexe de dimension 1 **qu'on appelle courbe elliptique.**



Le réseau Γ_ω dans C défini par le
vecteur ω du demi-plan de Poincaré H

Domaine fondamental du réseau Γ_ω



Le quotient de C par le réseau Γ_ω

C'est une courbe elliptique Σ_ω

I.2.3. Toutes les courbes elliptiques Σ_ω sont difféomorphes au tore $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ mais elles n'ont pas la même structure complexe. En fait, on démontre facilement que :

$$\Sigma_\omega \text{ isomorphe à } \Sigma_{\omega'} \Longleftrightarrow \exists \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbf{SL}(2,\mathbb{Z}) : \ \omega' = \frac{a\omega + b}{c\omega + d}.$$

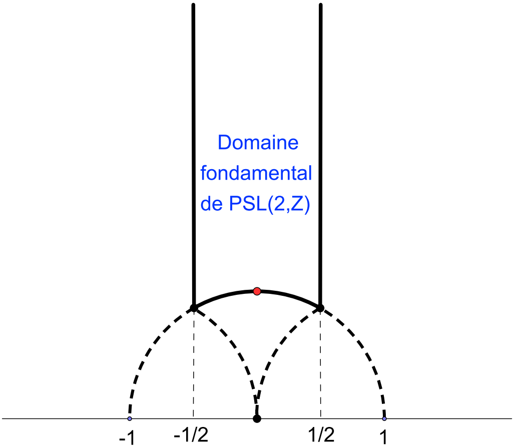
Ainsi, chaque classe d'isomorphie de structures complexes sur le tore $\mathbb{T}^2$ correspond à une orbite de l'action sur le demi-plan $\mathbb{H}$ du groupe modulaire :

$$\mathbf{PSL}(2,\mathbb{Z}) = \mathbf{SL}(2,\mathbb{Z})/\{I, -I\}$$

$$\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \omega\right) \in \mathbf{SL}(2,\mathbb{Z}) \times \mathbb{H} \longmapsto \frac{a\omega + b}{c\omega + d} \in \mathbb{H}.$$

Cette action est propre et le quotient $\mathcal{O} = \mathbb{H}/\mathbf{PSL}(2,\mathbb{Z})$ est une surface de Sataké appelée orbifold modulaire ; elle paramètre ces classes d'isomorphie de structures complexes sur $\mathbb{T}^2$.

Le groupe **PSL**$(2,\mathbb{Z})$ est le produit libre $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3$ et est engendré par les matrices T et ST où $S = \begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Voici son domaine fondamental :



Partie II

DÉFORMATIONS DES ACTIONS DE GROUPES

II.1.1. Soient X un ensemble et $\mathcal{B}(X)$ le groupe de ses bijections (la loi étant la composition des applications).
On appelle ***action*** d'un groupe G sur X la donnée d'un morphisme :

$$\rho : G \longrightarrow \mathcal{B}(X).$$

Cela équivaut à dire qu'il existe une application
$\Phi : (g, x) \in G \times X \longmapsto \Phi(g, x)$ telle que :
– $\Phi(e, x) = x$ pour tout $x \in X$;
– $\Phi(g', \Phi(g, x)) = \Phi(g'g, x)$ pour tous $g, g' \in G$ et tout $x \in X$.
L'action Φ est dite ***triviale*** si l'image de ρ est l'identité de X.

L'action Φ est dite ***fidèle*** si ρ est injectif. Le groupe G, a priori abstrait, se voit alors à l'aide de ρ comme un groupe de bijections de l'ensemble X.

On supposera désormais que c'est toujours le cas !

II.1.2. Soit Φ une action de G sur X donnée par un morphisme $\rho : G \longrightarrow \mathcal{B}(X)$. Pour tout $x \in X$ et tout $g \in G$, l'élément $\Phi(g, x)$ sera noté gx. On appelle :

– **orbite** de x la partie de X :

$$G(x) = \{gx : g \in G\}$$

– **stabilisateur** (ou **groupe d'isotropie**) de x le sous-groupe de G :

$$G_x = \{g \in G : gx = x\}.$$

On dira que Φ est :

– **libre** si $G_x = \{e\}$ pour tout $x \in X$;

– **transitive** s'il existe $x \in X$ tel que $G(x) = X$. Autrement dit, pour tous $x, y \in X$, il existe $g \in G$ tel que $y = gx$.

II. 2. Déformations

II.2.1. Soient M une variété différentiable connexe compacte et **Diff**(M) son groupe de difféomorphismes (de classe C^∞). Comme on l'a déjà dit, **Diff**(M) s'interprète comme le groupe de symétrie de M.

Soit Γ un groupe dénombrable de présentation finie i.e. ayant un nombre fini de générateurs $\gamma_1, \cdots, \gamma_n$ vérifiant un nombre fini de relations. On appelle *action* de Γ sur M toute représentation injective $\rho : \Gamma \hookrightarrow \mathbf{Diff}(M)$.

Le triplet (M, Γ, ρ) est un *système dynamique*. À l'aide de ρ, le groupe abstrait Γ est vu comme groupe de difféomorphismes de M : ses éléments poussent les points de M en respectant un certain nombre de règles dictées par Γ et par ρ.

II.2.2. On dira que l'action ρ est *C^r-rigide* ou *C^r-stable* (avec $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty, \omega\}$) si, pour toute action ρ' suffisamment proche de ρ (pour la topologie C^∞), il existe un homéomorphisme h de M de classe C^r tel que :

$$h^{-1} \circ \rho' \circ h = \rho.$$

Cela signifie qu'à changement de coordonnées près, les deux systèmes dynamiques (M, Γ, ρ) et (M, Γ, ρ') sont les mêmes du point de vue C^r (on dit qu'ils sont *C^r-conjugués*).

Mais dans toute la suite on ne considérera que l'étude de la stabilité C^∞. Plusieurs outils mathématiques sont alors mis en œuvre à cet effet, entre autres la *cohomologie des groupes discrets* que nous n'allons pas manquer d'introduire.

II.2.3. Cohomologie des groupes discrets

Soit Γ un *groupe discret* (dénombrable et de *présentation finie* pour simplifier) agissant sur un module E. L'action d'un élément $\gamma \in \Gamma$ sur un élément $x \in E$ sera notée $\gamma \cdot x$.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, soit $C^k(\Gamma, E)$ l'ensemble des fonctions de Γ^k dans E qu'on appelle *k-cochaînes inhomogènes* sur Γ à valeurs dans E ; avec la convention $\Gamma^0 = \{e\}$, $C^0(\Gamma, E)$ n'est rien d'autre que E.
On définit l'application linéaire $d : C^k(\Gamma, E) \longrightarrow C^{k+1}(\Gamma, E)$, qu'on appelle *opérateur cobord*, par :

$$(dc)(\gamma_1, \cdots, \gamma_{k+1}) = \gamma_1 \cdot c(\gamma_2, \cdots, \gamma_{k+1})$$
$$+ \sum_{i=1}^{k} (-1)^i c(\gamma_1, \cdots, \gamma_i\gamma_{i+1}, \cdots, \gamma_{k+1}) + (-1)^{k+1} c(\gamma_1, \ldots, \gamma_k).$$

L'opérateur d satisfait $d^2 = 0$; l'image de l'application linéaire :

$$C^{k-1}(\Gamma, E) \xrightarrow{d} C^k(\Gamma, E)$$

qu'on notera $B^k(\Gamma, E)$ est donc un sous-module du noyau $Z^k(\Gamma, E)$ de d opérant de $C^k(\Gamma, E)$ vers $C^{k+1}(\Gamma, E)$. Les quotients :

$$H^k(\Gamma, E) = Z^k(\Gamma, E)/B^k(\Gamma, E) \quad \textbf{pour} \quad k \in \mathbb{N}$$

sont appelés les ***groupes de cohomologie*** de Γ à valeurs dans le Γ-module E.

Supposons, pour simplifier, que l'action de Γ sur E soit triviale. Une autre manière de définir la cohomologie $H^*(\Gamma, E)$ est la suivante. Il existe un espace topologique connexe noté $K(\Gamma, 1)$ (ou $B\Gamma$) appelé *classifiant* de Γ, défini à *homotopie près* par les conditions :

$$\pi_i(K(\Gamma, 1)) = \begin{cases} \Gamma & \text{si } i = 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par définition la cohomologie de Γ à coefficients dans E sera la *cohomologie singulière* à coefficients dans E de l'espace $K(\Gamma, 1)$. Si Γ agit *librement* et *proprement* sur un espace *contractile* M, $K(\Gamma, 1) = M/\Gamma$ et donc la cohomologie du groupe Γ est celle de l'espace quotient M/Γ.

Donnons quelques exemples.

(1) - $\Gamma = \mathbb{Z}^n$ **; alors** $K(\mathbb{Z}^n, 1)$ **est (à type d'homotopie près) le tore** $\mathbb{T}^n$**. Donc :**

$$H^*(\mathbb{Z}^n, E) = E^{C_n^*}$$

avec $C_n^* = \frac{n!}{*!(n-*)!}$**.**

(2) - Γ **est le groupe engendré par** $\gamma_1, \ldots, \gamma_g, \sigma_1, \ldots, \sigma_g$ **(avec** $g \geq 2$**) vérifiant la relation** $\gamma_1\sigma_1\gamma_1^{-1}\sigma_1^{-1} \ldots \gamma_g\sigma_g\gamma_g^{-1}\sigma_g^{-1} = 1$**. Alors** $K(\Gamma, 1)$ **est la surface compacte orientable de genre** g**. Dans ce cas la cohomologie de** Γ **est donnée par :**

$$H^*(\Gamma, E) = \begin{cases} E & \text{si } * = 0, 2 \\ E^{2g} & \text{si } g = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(3) - Γ **est le produit semi-direct de** $\mathbb{Z}^n \rtimes \mathbb{Z}$ **où** $\mathbb{Z}$ **agit sur** $\mathbb{Z}^n$ **à l'aide d'une matrice hyperbolique (toutes les valeurs propres sont de module** $\neq 1$**)** $A \in \mathbf{SL}(n, \mathbb{Z})$ **; alors** $K(\Gamma, 1)$ **est le fibré plat** $\mathbb{T}^n \hookrightarrow B \longrightarrow \mathbb{S}^1$**. Dans ce cas :**

$$H^*(\Gamma, \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \textbf{si } * = 0, 1, n, n+1 \\ 0 & \textbf{sinon.} \end{cases}$$

(4) - $\Gamma = \mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ **; alors** $K(\Gamma, 1)$ **est l'*espace lenticulaire infini*** $L(\infty, p) = \mathbb{S}^\infty / \mathbb{Z}_p$ **où l'action de** $\mathbb{Z}_p$ **sur** $\mathbb{S}^\infty$ **est donnée par :**

$$([\ell], (z_n)) \in \mathbb{Z}_p \times \mathbb{S}^\infty \longmapsto (e^{2i\pi\ell p} z_n) \in \mathbb{S}^\infty.$$

La cohomologie de $\mathbb{Z}_p$ **à coefficients dans** $\mathbb{Z}$ **est donnée par :**

$$H^*(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \textbf{pour } * = 0 \\ \mathbb{Z}_p & \textbf{si } * \textbf{ est pair } > 0 \\ 0 & \textbf{pour tout autre entier.} \end{cases}$$

Mais l'exemple qui va vraiment nous intéresser dans presque toute la suite est :

(5) - Le groupe $\Gamma = \mathbb{Z}$ agissant sur un espace de Fréchet E par un automorphisme γ. En explicitant les opérateurs cobord d, on peut montrer facilement que :

$$H^*(\mathbb{Z}, E) = \begin{cases} E & \text{si } * = 0 \\ E/B & \text{si } * = 1 \\ 0 & \text{si } * \geq 2 \end{cases}$$

où B est le sous-espace vectoriel de E engendré par les éléments x de E qui sont de la forme $x = z - \gamma \cdot z$ avec $z \in E$.

II. 3. Retour aux déformations

II.3.1. Lorsque le système dynamique n'est pas rigide, on cherche à déterminer ses *déformations*. Cela passe souvent par le calcul de l'espace des *déformations infinitésimales* contenues dans le premier espace de cohomologie $H^1(\Gamma, \mathfrak{X}(M))$ du groupe discret Γ à valeurs dans le module $\mathfrak{X}(M)$ des champs de vecteurs sur M qui est un Γ-module via l'action :

$$(\gamma, X) \in \Gamma \times \mathfrak{X}(M)) \longmapsto \gamma_* X \in \mathfrak{X}(M).$$

Lorsque le groupe Γ est $\mathbb{Z}$ et que l'action ρ est engendrée par un difféomorphisme γ, cet espace n'est rien d'autre que le quotient de $\mathfrak{X}(M)$ par le sous-espace engendré par les éléments de la forme $X - \gamma_* X$ avec X variant dans $\mathfrak{X}(M)$.

Désormais, Γ sera isomorphe à $\mathbb{Z}$ engendré par un difféomorphisme $\gamma : M \longrightarrow M$

II.3.2. **Pour simplifier la suite de l'exposé, supposons que le $C^\infty(M)$-module $\mathfrak{X}(M)$ est libre engendré par n (dimension de M) champs de vecteurs $X_1, \cdots, X_n$ (partout linéairement indépendants) et en plus invariants par γ. Dans ce cas, l'action de Γ sur $\mathfrak{X}(M)$ se fait uniquement sur $C^\infty(M)$ et on a :**

$$H^1(\Gamma, \mathfrak{X}(M)) = H^1(\Gamma, C^\infty(M)) \otimes \mathbb{R}^n.$$

Le calcul revient donc à celui de $H^1(\Gamma, C^\infty(M))$ qui est le quotient de $C^\infty(M)$ par le sous-espace $\mathcal{C}$ engendré par les éléments de la forme $f - f \circ \gamma$ avec f variant dans $C^\infty(M)$. Nous sommes alors amenés à résoudre l'*équation cohomologique* :

(EC) **Soit $g \in C^\infty(M)$. Existe-t-il $f \in C^\infty(M) : f - f \circ \gamma = g$?**

Une *distribution* sur M est une forme linéaire continue $T : C^\infty(M) \longrightarrow \mathbb{C}$ (M est compacte). On dira que T est Γ-*invariante* si, pour toute fonction $\varphi \in C^\infty(M)$ on a :

$$\langle T, \varphi \circ \gamma \rangle = \langle T, \varphi \rangle.$$

L'espace $\mathcal{D}_\Gamma(M)$ des distributions Γ-invariantes sur M contient les obstructions à la résolution de l'équation cohomologique (EC) : *pour que cette équation admette une solution, il est nécessaire que* $\langle T, g \rangle = 0$ *pour toute distribution* $T \in \mathcal{D}_\Gamma(M)$. (C'est une équation d'une importance capitale en systèmes dynamiques.)

Le calcul de l'espace des déformations infinitésimales $H^1(\Gamma, \mathfrak{X}(M))$ est lié à la résolution de l'équation cohomologique (EC) qui, elle-même est liée au calcul des distributions γ-invariantes !

Regardons un exemple bien concret !

II.3.3. On prend pour M le tore $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$. On considère l'action de $\Gamma = \mathbb{Z}$ engendrée par une translation :

$$\gamma : x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{T}^n \longmapsto x + a = (x_1 + a_1, \cdots, x_n + a_n) \in \mathbb{T}^n$$

où $a = (a_1, \cdots, a_n)$ est un élément de $\mathbb{T}^n$ mais qui peut être aussi vu comme un vecteur de $\mathbb{R}^n$. Nous travaillerons avec les fonctions complexes (cela ne change rien à la situation). L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ sera équipé de son produit scalaire habituel $\langle\ ,\ \rangle$ et la norme associée sera notée $|\ \ |$.
Une fonction sur $\mathbb{T}^n$ n'est rien d'autre qu'une fonction $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ qui vérifie $f(x + \mathbf{m}) = f(x)$ pour tous $x \in \mathbb{R}^n$ et $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n$. Pour $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n$, on note $\Theta_{\mathbf{m}}$ la fonction $\Theta_{\mathbf{m}}(x) = e^{2i\pi\langle \mathbf{m}, x\rangle}$.

Si f est intégrable, elle peut être développée en ***série de Fourier*** :

$$f(x) = \sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^n} f_{\mathbf{m}}\Theta_{\mathbf{m}}(x)$$

où les $f_{\mathbf{m}}$ sont les ***coefficients de Fourier*** donnés par les formules intégrales :

$$f_{\mathbf{m}} = \int_{\mathbb{T}^n} f(x)e^{-2i\pi\langle\mathbf{m},x\rangle}dx.$$

Si, en plus, f est de carré intégrable, les coefficients $f_{\mathbf{m}}$ vérifient la condition de convergence $\sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^n} |f_{\mathbf{m}}|^2 < +\infty$.

De la même façon, toute distribution T sur le tore $\mathbb{T}^n$ (vue comme une distribution $\mathbb{Z}^n$-périodique sur $\mathbb{R}^n$) peut s'écrire sous la forme :

$$T = \sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^n} T_{\mathbf{m}}\Theta_{\mathbf{m}}$$

où la famille de nombres complexes $T_{\mathbf{m}}$ (indexée par $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n$) est à *croissance polynomiale*, c'est-à-dire, il existe un entier $r \in \mathbb{N}$ et une constante $C > 0$ tels que $|T_{\mathbf{m}}| \leq C|\mathbf{m}|^r$ pour tout $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n$.
Pour tout $r \in \mathbb{N}$, on note $W^{2,r}$ l'espace des fonctions f sur le tore $\mathbb{T}^n$ données par leurs coefficients de Fourier $(f_{\mathbf{m}})_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^n}$ vérifiant la condition $\sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^n} |\mathbf{m}|^{2r}|f_{\mathbf{m}}|^2 < +\infty$. C'est un espace complet pour la norme :

$$||f||_{2,r} = \sqrt{|f_0|^2 + \sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^n\setminus\{\mathbf{0}\}} |\mathbf{m}|^{2r}|f_{\mathbf{m}}|^2} \quad \text{pour } f \in W^{2,r}.$$

$W^{2,r}$ est le $r^{\text{ème}}$ *espace de Sobolev* du tore $\mathbb{T}^n$; il a une structure d'espace de Hilbert donnée par le produit hermitien :

$$\langle f, g\rangle_r = f_0\overline{g}_{\mathbf{0}} + \sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^n\setminus\{\mathbf{0}\}} |\mathbf{m}|^{2r} f_{\mathbf{m}}\overline{g}_{\mathbf{m}}.$$

On a des inclusions naturelles :

$$C^\infty(\mathbb{T}^n) \subset \cdots \subset W^{2,r+1} \subset W^{2,r} \subset \cdots \subset W^{2,0} = L^2(\mathbb{T}^n).$$

Proposition

Soit $T = \sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^n} T_{\mathbf{m}}\Theta_{\mathbf{m}}$ *une série (les* $T_{\mathbf{m}}$ *sont des nombres complexes). Alors les assertions* i) et ii) *qui suivent sont équivalentes :*

i) T est une distribution régulière (i.e. T est une fonction de classe C^∞*) ;*

ii) pour tout $r \in \mathbb{N}$, $\sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^n} |\mathbf{m}|^{2r}|T_{\mathbf{m}}|^2$ *est convergente.*

Pour tout $r \in \mathbb{N}$*, l'injection* $j_{2,r} : W^{2,r+1} \hookrightarrow W^{2,r}$ *est un opérateur compact.*

Les points i) et ii) de cette proposition disent : $\bigcap_{r\in\mathbb{N}} W^{2,r} = C^\infty(\mathbb{T}^n).$

Tout vecteur $a \in \mathbb{R}^n$ définit une forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$:
$x \in \mathbb{R}^n \longmapsto \langle a, x \rangle \in \mathbb{R}$ et donc a fortiori aussi sur le réseau $\mathbb{Z}^n$.

Définition

Soit a un vecteur de $\mathbb{R}^n$ dont les composantes $a_1, \cdots, a_n$ sont linéairement indépendantes sur $\mathbb{Q}$.

*i) On dira que le vecteur a est **diophantien** s'il existe des nombres réels $A > 0$ et $\tau > 0$ tels que $|1 - e^{2i\pi\langle m,a\rangle}| \geq \frac{A}{|\mathbf{m}|^\tau}$ pour tout $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$.*

*ii) On dira que a est un **vecteur de Liouville** s'il existe $A > 0$ tel que, pour tout $\tau > 0$, il existe $\mathbf{m}_\tau \in \mathbb{Z}^n$ vérifiant $\left|1 - e^{2i\pi\langle m_\tau,a\rangle}\right| \leq \frac{A}{|\mathbf{m}_\tau|^\tau}$.*

Par exemple, tout vecteur a de $\mathbb{R}^n$ dont les composantes $a_1, \cdots, a_n$ sont des *nombres algébriques $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants* est diophantien.

Pour bien comprendre ce que l'*approximation diophantienne* signifie mettons-nous dans le cas $n = 2$. On a alors $a = (a_1, a_2)$ qu'on peut "normaliser" en $a = (1, \theta)$ et $\mathbf{m} = (m_1, m_2)$. (Ici θ est irrationnel.) D'où $\langle a, \mathbf{m} \rangle = m_1 + m_2\theta$ et donc :

- θ est ***diophantien*** s'il existe des constantes $A > 0$ et $\tau > 0$ telles que, pour tout $m_1 \in \mathbb{Z}$ et tout $m_2 \in \mathbb{Z}^*$, on ait :

$$\left| \theta - \frac{m_1}{m_2} \right| \geq \frac{A}{|m_2|^{2+\tau}}$$

i.e. θ est **très mal approché** par les rationnels.

- θ est ***de Liouville*** s'il existe une constante $A > 0$ telle que, pour tout $s \in \mathbb{N}$, il existe des entiers $m_{1,s} \in \mathbb{Z}$ et $m_{2,s} \in \mathbb{Z}^*$ vérifiant :

$$\left| a - \frac{m_{1,s}}{m_{2,s}} \right| \leq \frac{A}{|m_{2,s}|^{s}}.$$

Les nombres de Liouville sont des irrationnels “très bien approchés” par les rationnels. On peut en construire en prenant des sommes de séries de nombres rationnels à décroissance assez rapide, par exemple : $\theta = \sum_{s=1}^{\infty} 2^{-s!}$ dont Liouville a démontré la *transcendance*.

Donnons-nous un tel vecteur $a = (a_1, \cdots, a_n)$ ayant toutes ses composantes $\mathbb{Q}$-linéairement indépendantes et notons γ la translation associée sur le tore.

On définit une forme linéaire continue $\mathcal{L} : C^\infty(\mathbb{T}^n) \longrightarrow \mathbb{C}$ par :

$$\mathcal{L}(g) = \int_{\mathbb{T}^n} g(x)dx = g_{\mathbf{0}}$$

pour toute fonction $g = \sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^n} g_{\mathbf{m}}\Theta_{\mathbf{m}}$. On peut aussi interpréter $\mathcal{L}$ comme un opérateur sur $C^\infty(\mathbb{T}^n)$ qui à g associe la fonction $\mathcal{L}(g)\mathbf{1}$ où $\mathbf{1}$ est la fonction constante égale à 1 ; il est de rang 1, donc *compact*. Notons $\mathcal{N}$ son noyau.

Théorème

i) Si a *est diophantien, il existe un opérateur borné* $G : C^\infty(\mathbb{T}^n) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{T}^n)$ *tel que* $G\delta = I - \mathcal{L}$*. Il en découle que l'équation* $f - f \circ \gamma = g$ *a une solution* $f \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ *si, et seulement si,* $\mathcal{L}(g) = 0$ *et que l'espace vectoriel* $H^1(\mathbb{Z}, C^\infty(\mathbb{T}^n))$ *est de dimension* 1 *engendré par la fonction constante égale à* 1*.*

ii) Si a *est de Liouville, il existe une famille infinie libre de fonctions* g *vérifiant la condition* $\mathcal{L}(g) = 0$ *et telles que l'équation* $f - f \circ \gamma = g$ *n'ait aucune solution. Dans ce cas,* $H^1(\mathbb{Z}, C^\infty(\mathbb{T}^n))$ *est un espace vectoriel topologique de dimension infinie non séparé. Mais son séparé associé est de dimension* 1*.*

Dans les deux cas l'espace $\mathcal{D}_\Gamma(\mathbb{T}^n)$ *des distributions* γ*-invariantes est de dimension* 1 *engendré par la mesure de Haar* $dx = dx_1 \otimes \cdots \otimes dx_n$*.*

Démonstration. Si on intègre les deux membres de l'équation cohomologique, celui de gauche donne 0. Donc une condition nécessaire d'existence d'une solution est $\mathcal{L}(g) = 0$. Supposons-la remplie. Les développements de Fourier de f et g :

$$f(x) = \sum_{\mathbf{m}\in Z^n} f_{\mathbf{m}} e^{2i\pi\langle x,\mathbf{m}\rangle} \quad \text{et} \quad g(x) = \sum_{\mathbf{m}\in Z^n} g_{\mathbf{m}} e^{2i\pi\langle x,\mathbf{m}\rangle}$$

permettent de ramener l'équation au système :

$$\left(1 - e^{2i\pi\langle \mathbf{m},a\rangle}\right) f_{\mathbf{m}} = g_{\mathbf{m}} \quad \text{avec} \quad \mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n.$$

Comme $\mathcal{L}(g) = g_{\mathbf{0}} = 0$, on peut poser :

$$f_{\mathbf{m}} = \begin{cases} 0 & \text{si } \mathbf{m} = \mathbf{0} \\ \frac{g_{\mathbf{m}}}{1-e^{2i\pi\langle \mathbf{m},a\rangle}} & \text{si } \mathbf{m} \neq \mathbf{0}. \end{cases}$$

La fonction f est donc donnée formellement par ses coefficients de Fourier $(f_{\mathbf{m}})_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^n}$. Étudions sa régularité. Soit $r \in \mathbb{N}$.

i) *a diophantien*

On a :

$$|\mathbf{m}|^{2r}|f_{\mathbf{m}}|^2 = |\mathbf{m}|^{2r}\left|\frac{g_{\mathbf{m}}}{1-e^{2i\pi\langle \mathbf{m},a\rangle}}\right|^2 \leq \frac{1}{A^2}|g_{\mathbf{m}}|^2|\mathbf{m}|^{2(r+\tau)}.$$

Comme g est de classe C^∞, la série numérique $\sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^n}|g_{\mathbf{m}}|^2|\mathbf{m}|^{2(r+\tau)}$ converge, par suite :

$$\sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^n}|\mathbf{m}|^{2r}|f_{\mathbf{m}}|^2 < +\infty$$

qui montre bien que f est de classe C^∞. L'image de l'opérateur $\delta : C^\infty(\mathbb{T}^n) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{T}^n)$ s'identifie donc au sous-espace $\mathcal{N}$; en fait, la restriction de δ à $\mathcal{N}$ est un isomorphisme (algébrique continu) sur $\mathcal{N}$; notons G_0 son inverse : à g dans $\mathcal{N}$ on associe f unique solution dans $\mathcal{N}$ de l'équation $\delta f = g$. On pose alors $G = G_0 P$; on vérifie facilement que $G\delta = I - \mathcal{L}$.

Reste à montrer que G est borné. Il suffit en fait de montrer que G_0 l'est. L'inégalité $|\mathbf{m}|^{2r}|f_{\mathbf{m}}|^2 \leq \frac{1}{A^2}|g_{\mathbf{m}}|^2|\mathbf{m}|^{2(r+\tau)}$ montre que, pour tout entier naturel s, l'opérateur :

$$G_0 : g \in \mathcal{N} \subset W^{2,s+r} \longmapsto G_0(g) = f \in C^\infty(\mathbb{T}^n) \subset W^{2,s}$$

vérifie l'inégalité :

$$||G_0(g)||_{2,s} \leq \beta ||g||_{2,s+r}$$

où $r = 1 +$ **partie entière de** τ et β une constante réelle positive ; G_0 est donc borné.

Il est immédiat de voir que l'espace vectoriel $H^1(\mathbb{Z}, C^\infty(\mathbb{T}^n))$ est de dimension $\mathbf{1}$ engendré par la fonction constante 1 et que $\mathcal{D}_\Gamma(\mathbb{T}^n)$ est aussi de dimension 1 engendré par la n-forme volume $dx = dx_1 \otimes \cdots \otimes dx_n$.

i) *a de Liouville*

On sait qu'il existe $A > 0$ tel que, pour tout $\tau \in \mathbb{N}^*$, il existe $\mathbf{m}_\tau \in \mathbb{Z}^n$ vérifiant :

$$\left|1 - e^{2i\pi\langle \mathbf{m}_\tau, a\rangle}\right| \leq \frac{A}{|\mathbf{m}|^\tau}.$$

Soit $(\tau_k)_k$ une suite strictement croissante dans $\mathbb{N}^*$; les $\mathbf{m}_{\tau_k}$ correspondants seront notés $\mathbf{m}_k$. On définit alors une fonction g à l'aide de ses coefficients de Fourier :

$$g_{\mathbf{m}} = \begin{cases} |\mathbf{m}_k|^{-\frac{\tau_k}{2}} & \text{si } \mathbf{m} = \mathbf{m}_k \\ \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La fonction g est de classe C^∞ et vérifie $\int_{\mathbb{T}^n} g(x)dx = g_{\mathbf{0}} = 0$.

Mais :

$$
\begin{aligned}
|f_{\mathbf{m}_k}|^2 &= \left| \frac{g_{\mathbf{m}_k}}{1 - e^{2i\pi\langle \mathbf{m}, a\rangle}} \right|^2 \\
&= \frac{|\mathbf{m}_k|^{-\tau_k}}{|1 - e^{2i\pi\langle \mathbf{m}, \alpha\rangle}|^2} \\
&\geq \frac{1}{A^2} |\mathbf{m}_k|^{\tau_k}.
\end{aligned}
$$

Les coefficients $f_{\mathbf{m}}$ sont donc à croissance surpolynomiale et ne définissent même pas une distribution f solution de l'équation en question ! De cette façon on peut fabriquer une famille infinie libre de fonctions $(g^{\ell})_{\ell \in \mathbb{N}^*}$ de classe C^{∞} pour lesquelles notre équation n'a pas de solution. Le conoyau de l'opérateur :

$$\delta : C^{\infty}(\mathbb{T}^n) \longrightarrow C^{\infty}(\mathbb{T}^n)$$

est donc de dimension infinie.

Si g est un polynôme trigonométrique sans terme constant, l'équation a toujours une solution : le problème de la convergence ne se pose pas. Comme l'adhérence du sous-espace engendré algébriquement par ces polynômes est de codimension 1 (c'est l'orthogonal de la fonction constante $\mathbf{1}$), l'image de l'opérateur :

$$\delta : C^\infty(\mathbb{T}^n) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{T}^n)$$

n'est pas fermée, donc $H^1(\mathbb{Z}, C^\infty(\mathbb{T}^n))$ n'est pas séparé mais son séparé associé est de dimension 1. Ceci montre en même temps que l'espace vectoriel $\mathcal{D}_\Gamma(\mathbb{T}^n)$ est de dimension 1 engendré par la n-forme volume $dx = dx_1 \otimes \cdots \otimes dx_n$.

II.3.4. **Pour un groupe $\Gamma = \mathbb{Z}$ engendré par un difféomorphisme linéaire d'Anosov A sur le tore $\mathbb{T}^n$, l'équation cohomologique :**

$$f - f \circ A = g$$

a été résolue et les invariants $H^1(\Gamma, C^\infty(\mathbb{T}^n))$ et $\mathcal{D}_\Gamma(\mathbb{T}^n)$ donnés explicitement dans :

A. Dehghan & A. El Kacimi. ***Équations cohomologiques de flots riemanniens et de difféomorphismes d'Anosov*. Journal of the Math. Society of Japan, Vol. 59 N 4 (2007), 1105-1134.**

Beaucoup reste encore à faire ! Il est évident que, multiplier l'examen d'exemples concrets, aura beaucoup d'intérêt dans le développement de la théorie.

II.3.5. Questions ouvertes

Soit (M, Γ) un système dynamique : M est une variété compacte et Γ un sous-groupe de Diff(M). Il n'existe aucune méthode générale pour calculer l'espace des déformations infinitésimales $H^1(\Gamma, \mathfrak{X}(M))$. Nous avons vu que lorsque Γ est isomorphe à $\mathbb{Z}$ engendré par γ, alors le problème se réduit à la résolution de l'équation cohomologique :

Soit $Y \in \mathfrak{X}(M)$. Existe-t-il $X \in \mathfrak{X}(M)$: $X - \gamma_*(X) = Y$?

Nous avons aussi vu que lorsque M est muni d'un parallélisme invariant par γ le calcul de $H^1(\Gamma, \mathfrak{X}(M))$ se ramène à celui de $H^1(\Gamma, C^\infty(M))$ (souvent plus simple). Pour chaque situation, on utilise une méthode particulière. Voici quelques exemples qu'on pourrait regarder.

- ***Transformations projectives du cercle***

On prend $M = \mathbb{S}^1$ (cercle) qu'on regarde comme l'espace projectif réel $P^1(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Le groupe $\mathbf{SL}(2, \mathbb{R})$ (des matrices carrées d'orde 2 et de déterminant 1) agit dessus par transformations projectives comme suit :

$$\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, x\right) \in \mathbf{SL}(2, \mathbb{R}) \times P^1(\mathbb{R}) \longmapsto \frac{ax+b}{cx+d} \in P^1(\mathbb{R}).$$

Tout $\gamma \in \mathbf{SL}(2, \mathbb{R})$ est un difféomorphisme du cercle $\mathbb{S}^1$.

Calculer les espaces vectoriels $H^1(\Gamma, \mathfrak{X}(M))$ et $H^1(\Gamma, C^\infty(M))$.

- ***Transformations projectives de $P^1(\mathbb{C})$***

Même question avec $M = P^1(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{S}^2$ et $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbf{SL}(2, \mathbb{C})$.

Partie III

DÉFORMATIONS DES RÉSEAUX DE GROUPES DE LIE

III.1. Généralités

III.1.1. **Soient G un groupe de Lie connexe et Γ un sous-groupe fermé de G. Comme une translation à gauche commute toujours à une translation à droite, tout autre sous-groupe H (fermé ou non), agit de façon naturelle sur l'*espace homogène* G/Γ ; en particulier $H = G$.**

On appelle *réseau* de G tout sous-groupe discret Γ tel que le quotient G/Γ supporte une mesure de probabilité G-invariante. C'est le cas si l'espace homogène G/Γ est compact ; on dira alors que le réseau est *uniforme* ou *cocompact*

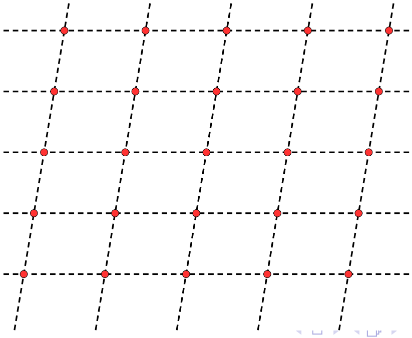
III.1.2. **Le groupe G agit sur son algèbre de Lie $\mathcal{G}$ de la façon suivante : tout $g \in G$ définit un automorphisme intérieur (conjugaison) $x \in G \longmapsto g^{-1}xg \in G$; la dérivée de cet automorphisme donne un automorphisme de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ de G : $\mathrm{Ad}_g : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}$.**

Cela donne un morphisme de groupes :

$$g \in G \longmapsto \mathrm{Ad}(g) \in \mathrm{Aut}(\mathcal{G})$$

qu'on appelle ***représentation adjointe*** **de** G **dans** $\mathcal{G}$**.**
Par restriction, on a une action de Γ **sur** $\mathcal{G}$ **qui devient ainsi un** Γ**-module, ce qui permet de définir la cohomologie** $H^*(\Gamma, \mathcal{G})$ **du groupe discret** Γ **à valeurs dans** $\mathcal{G}$**.**

Un réseau Γ dans l'espace vectoriel réel de dimension 2



III.2. Déformations

III.2.1. Résultats de base

Définition

On dira que Γ est rigide dans G si, pour tout réseau Γ' algébriquement isomorphe à Γ et qui lui est suffisamment proche, il existe $g \in G$ tel que $g^{-1}\Gamma' g = \Gamma$.

Le premier espace $H^1(\Gamma, \mathcal{G})$ décrit les déformations infinitésimales du réseau Γ dans le groupe G.
L'un des premiers résultats marquants de la théorie est le théorème de Weil [Wei] :

Théorème

Soient G un groupe de Lie connexe et Γ un réseau. Alors :

$$\left(H^1(\Gamma,\mathcal{G})=0\right) \Longrightarrow (\Gamma \ \textit{est rigide})\,.$$

- **Quelles sont alors les paires (G,Γ) pour lesquelles ceci a lieu ?**

  Tous les groupes de Lie G semi-simples non localement isomorphes à $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ et Γ irréductible.

- **Qu'en est-il pour les groupes abéliens ?**

  Dans cette situation le quotient G/Γ est compact et :

$$\mathrm{rang}(\Gamma)=n=\dim(G).$$

En plus, l'action de Γ sur l'algèbre de Lie est triviale et par suite on a :

$$H^1(\Gamma, \mathcal{G}) = H^1(\Gamma, \mathbb{R}) \otimes \mathcal{G} = \mathbb{R}^n \otimes \mathcal{G}$$

qui n'est bien sûr jamais nul ! De toute façon, comme G n'a aucun automorphisme intérieur non trivial, deux réseaux ne sont conjugués que s'ils coïncident ! Un réseau se déforme donc toujours !

• À peu de choses près il en est de même pour les groupes nilpotents.

III.2.2. UN CALCUL EXPLICITE

• Rien n'est connu pour les groupes *résolubles* non nilpotents du moins aucun calcul explicite du $H^1(\Gamma, \mathcal{G})$ n'a été fait jusque ces dernières années ; le premier a été mené par Cédric Rousseau dans sa thèse. Je vais dire assez rapidement en quoi cela consiste.

Soient $n \geq 2$ un entier et A une matrice **hyperbolique** dans $\mathbf{SL}(n, \mathbb{Z})$ diagonalisable et ayant toutes ses valeurs propres $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ positives. Alors A donne une action :

$$(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longmapsto A^t x \in \mathbb{R}^n$$

qui permet de définir le produit semi-direct :

$$G = \mathbb{R}^n \rtimes \mathbb{R}$$

qui est un groupe résoluble non nilpotent et dont :

$$\Gamma = \mathbb{Z}^n \rtimes \mathbb{Z}$$

est un réseau cocompact ; le quotient $T_A^{n+1} = G/\Gamma$ est une variété compacte ; plus précisément, c'est un fibré plat au-dessus du cercle $\mathbb{S}^1$ de fibre le tore $\mathbb{T}^n$.

Voici alors un des résultats obtenus par :

C. Rousseau. ***Déformations de réseaux dans certains groupes résolubles***. **Journal of the Math. Society of Japan, Vol. 60 N 2 (2008), 397-421.**

Théorème

Notons** $m_1, \cdots, m_k$ **les multiplicités respectives des valeurs propres** $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ **de la matrice** A**. Alors :

$$dimH^1(\Gamma, \mathcal{G}) = \left(\sum_{\ell=1}^{k} m_\ell^2\right) - 1.$$

Il a en plus montré que ces déformations infinitésimales sont réalisées par de vrais réseaux de G **qu'il a explicitement exhibés !**

Par exemple, pour $n = 2$**, il y a deux valeurs propres** $0 < \lambda < 1 < \frac{1}{\lambda}$ **et donc** $m_1 = m_2 = 1$**. D'où :**

$$H^1(\Gamma, \mathcal{G}) = \mathbb{R}.$$

III.2.3. Encore une question sur les actions !

Elle est intéressante mais sûrement très difficile à résoudre : il s'agit de la détermination de l'espace $H^1(\Gamma, \mathfrak{X}(M))$ pour le système dynamique (M, Γ) qui suit. On reprend la matrice hyperbolique A qu'on vient juste de considérer.

Soient $\lambda \in \{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$ une valeur propre de A et v un vecteur propre associé à λ. Comme $\lambda\langle \mathbf{m}, \mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{m}', \mathbf{v}\rangle$ avec $A'(\mathbf{m}) = \mathbf{m}' \in \mathbb{Z}^n$ (A' est la transposée de A), on peut plonger Γ dans $\mathbf{SL}(n, \mathbb{R})$ et donc dans $\mathbf{SL}(n, \mathbb{C})$ de la façon suivante : on choisit une suite d'entiers relatifs $a_1, \cdots, a_{n-1}$, on pose $a = a_1 + \cdots + a_{n-1}$ et on associe à tout $(\mathbf{m}, \ell) \in \mathbb{Z}^{\mathbf{n}} \rtimes \mathbb{Z}$ la matrice $n \times n$:

$$\lambda^{-\frac{a\ell}{n}} \begin{pmatrix} \lambda^{a_1\ell} & \cdots & 0 & \langle \mathbf{m}, \mathbf{v}\rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \lambda^{a_{n-1}\ell} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(Seuls les termes diagonaux et celui de la 1$^{\text{ère}}$ ligne et la $n^{\text{ème}}$ colonne sont non nuls). On obtient donc une représentation :

$$\rho : \Gamma \longrightarrow \mathbf{Aut}(P^{n-1}(\mathbb{C})).$$

La variété M sera alors l'espace projectif complexe $P^{n-1}(\mathbb{C})$ sur lequel agit le groupe Γ via la représentation ρ.

On pourrait s'exercer à calculer d'abord l'espace vectoriel $H^1(\Gamma, C^\infty(M))$ dont le dual topologique est exactement l'espace $\mathcal{D}_\Gamma(M)$ des distributions sur $P^{n-1}(\mathbb{C})$ invariantes par Γ.

Et ce serait déjà un bon résultat !

RÉFÉRENCES

[EGM] – El Kacim, A., Guasp, G. & Nicolau, M. *On deformations of transersely homogeneous foliations*. *Topology*, 40 (2001), 1363-1393.

[Fis] – Fisher, D. *Local rigidity of group actions : past, present, future*. *Cambridge University Press*, (2004).

[Kod] – Kodaira, K. *Complex Manifolds and Deformation of Complex Structures.* *Grundelhren der mathematischen Wissenschaften* 283, Springer (1986).

[Rou] – Rousseau, C. *Déformations de réseaux dans certains groupes résolubles*. *Journal of the Mathematical Society of Japan*, Vol. 60 N2 (2008), 397-421.

[Wei] – Weil, A. *Remarks on the cohomology of groups*. *Ann. Math.* 80 (1964), 149-157.