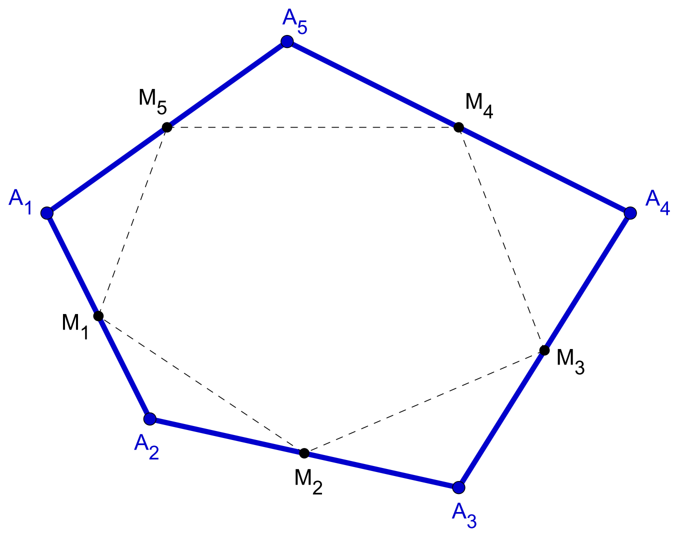
LE PROBLÈME DE SIN PAN

Aziz El Kacimi

La légende raconte que Sin Pan, géomètre chinois d'antan, voulait fonder une académie de géométrie. Il a demandé à l'empereur de l'époque de lui céder un terrain pour bâtir un édifice à cet effet. Celui-ci, voulant d'abord s'assurer qu'il avait affaire à un vrai géomètre, lui répond : "*Je dispose d'un terrain sous forme de pentagone. J'ai fait marquer par cinq bornes les milieux des côtés. Trace les limites de ce pentagone et le terrain est à toi.*"



À ma connaissance, Sin Pan n'a pas résolu cette question. Et nulle part, je n'en ai vu de solution. Alors en voici une pour la :

Version générale du problème. *Soit $M_1 \cdots M_n$ un n-gone (polygone à $n \geq 3$ côtés). Construire un n-gone $A_1 \cdots A_n$ ayant les points $M_1, \cdots, M_n$ comme milieux respectifs des côtés $A_1A_2, \cdots, A_nA_1$.*

- Que doit vérifier le n-gone $M_1 \cdots M_n$ pour que $A_1 \cdots A_n$ existe ?
- Dans le cas où $A_1 \cdots A_n$ existe, comment le construire géométriquement ?

Ce sont les deux questions auxquelles nous répondons dans ce texte. Pour rendre notre démarche accessible à un large lectorat, nous commencerons par mettre en place (de façon informelle) les ingrédients de géométrie plane élémentaire dont nous aurons besoin.

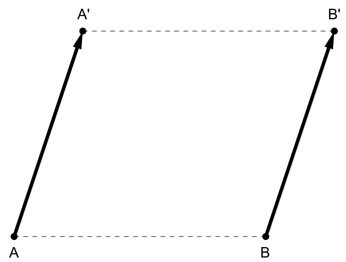
1. PRÉLIMINAIRES

On travaille sur un plan, c'est-à-dire un ensemble $\mathbb{E}$ dont les éléments sont des *points* tel par exemple le tableau noir sur lequel on écrit, un sol bien aplani d'une grande salle, une table lisse... On s'y déplace dans tous les sens, sans contrainte et sans limite.

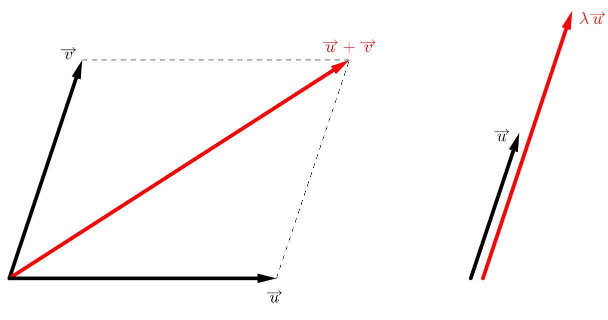
1.1. Une *transformation* f du plan $\mathbb{E}$ est simplement une bijection de $\mathbb{E}$: à tout point $A \in \mathbb{E}$ on associe un autre $A' = f(A)$ de telle sorte que $A \neq B$ implique $f(A) \neq f(B)$ et, pour tout A' de $\mathbb{E}$, il existe A dans $\mathbb{E}$ tel que $A' = f(A)$; A' est l'*image* de A par f et A est l'*antécédent* de A'. On dit que A est un point *fixe* (ou *invariant*) d'une transformation f si $f(A) = A$ (son image par f est A lui-même). La transformation qui fixe tous les points est appelée *identité*.

Soient f et g deux transformations du plan. Quand on applique f puis après g on obtient une nouvelle transformation qu'on note $g \circ f$. On fera usage de cette notation par la suite.

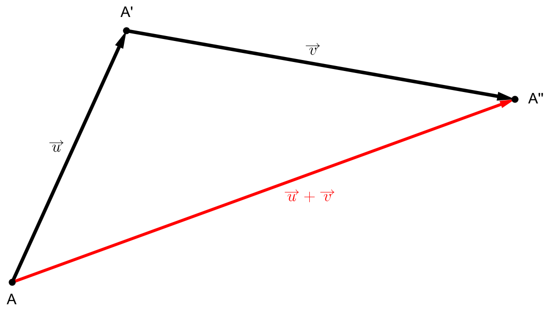
1.2. Deux points A et A' de ce plan sont les extrémités d'un segment $[AA']$; si on s'y déplace de A vers A' on le marquera comme une flèche qu'on notera $\overrightarrow{AA'}$. Sa "fonction" est celle d'une force qui pousse le point A vers le point A' dans une direction, un sens et avec une certaine intensité (mesurée par la longueur AA'). Si cette même force poussait un autre point B, elle le mènerait vers un point B' de telle sorte que le quadrilatère $AA'B'B$ (voir dessin ci-dessous) soit un parallélogramme. Ainsi, cette force, représentée par son effet sur A ou sur B (ou sur tout autre point) sera notée $\overrightarrow{u}$ et appelée *vecteur* du plan $\mathbb{E}$.



1.3. Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ s'additionnent et donnent un nouveau vecteur $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$. De même, tout vecteur $\overrightarrow{u}$ peut être multiplié par un nombre réel λ pour donner $\lambda \cdot \overrightarrow{u}$ (ou $\lambda\overrightarrow{u}$). On ne définit rien formellement, on regarde simplement les dessins qui suivent :



1.4. Du point de vue force, la somme de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ produit l'effet illustré dans le dessin qui suit : pousser A vers A' par $\overrightarrow{u}$ puis A' vers A'' par $\overrightarrow{v}$ revient à pousser A vers A'' par $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$.



Lorsque $A = A'$, le point A ne bouge pas : aucune force n'est exercée dessus. On parle alors de *vecteur nul*, on le note $\overrightarrow{0}$ et on le représente par $\overrightarrow{AA}$ où A est un point quelconque. Le vecteur nul est aux vecteurs ce qu'est le nombre 0 aux nombres. Si la force qui pousse A vers A' est représentée par $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AA'}$, celle qui pousse A' vers A est représentée par $\overrightarrow{A'A} = -\overrightarrow{u}$ (*opposé* du vecteur $\overrightarrow{u}$). Par exemple, dans le parallélogramme $AA'B'B$ (qu'on a déjà considéré), on a :

$$\overrightarrow{AA'} = -\overrightarrow{A'A} \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'A} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}\ ; \quad \text{de même} \quad \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B'A'} = \overrightarrow{0} \cdots$$

Tout découle de la fameuse *relation de Chasles* qu'on énonce comme suit. Soient A, B et C trois points du plan $\mathbb{E}$; alors :

$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}.$$

Chaque vecteur $\overrightarrow{u}$ définit une *transformation* du plan $\mathbb{E}$ notée $\tau_{\overrightarrow{u}}$: elle transforme A en le point A' tel que $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{u}$; $\tau_{\overrightarrow{u}}$ est appelée *translation de vecteur* $\overrightarrow{u}$. On dit aussi *translater* par $\overrightarrow{u}$ pour désigner l'effet de $\tau_{\overrightarrow{u}}$.

La translation associée au vecteur nul $\overrightarrow{0}$ n'a aucun effet. C'est identité.

Comme on vient de le voir (*cf.* dessin ci-dessus), translater par $\overrightarrow{u}$ puis après par $\overrightarrow{v}$ revient à translater par $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$. Ceci se généralise à un nombre fini de translations $\tau_{\overrightarrow{u}_1}, \cdots, \tau_{\overrightarrow{u}_n}$: translater par $\overrightarrow{u}_1$, puis après par $\overrightarrow{u}_2, \cdots$, et finalement par $\overrightarrow{u}_n$ revient à translater par le vecteur $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}_1 + \cdots + \overrightarrow{u}_n$.

1.5. Soit M un point du plan $\mathbb{E}$. La *symétrie de centre* M est la transformation notée σ_M qui à A associe le point A' tel que $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA'} = \overrightarrow{0}$. Cela signifie que M est le milieu du segment $[AA']$. Il est tout à fait clair que si on applique σ_M à A' on retrouve A ; on dit alors que σ_M est une *involution* : si on la compose avec elle-même, on retrouve l'identité.

Une symétrie de centre M a un, et un seul point fixe : son centre M. Cette remarque nous sera très utile.

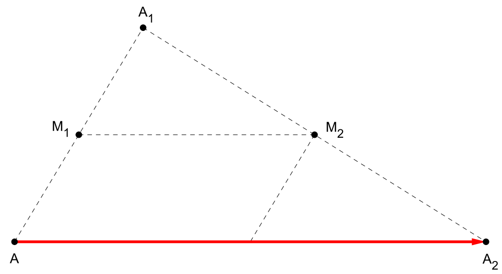
Les translations et les symétries centrales sont les outils essentiels qui permettent de résoudre le problème de Sin Pan. On a vu comment se composent les translations. Qu'en est-il des symétries centrales ? Ce sera le point essentiel qu'on traitera dans la section qui suit et qui nous donnera la clé qu'on cherche pour notre énigme.

2. PREMIÈRE APPROCHE

Pour construire notre polygone $A_1 \cdots A_n$, il suffit d'avoir l'un de ses sommets A_i et le symétriser succesivement par rapport à $M_i, \cdots, M_n, M_1, \cdots, M_{i-1}$ pour obtenir les autres sommets (mais à condition qu'on revienne vers A_i après les n symétrisations) ; par exemple, il suffit d'avoir le sommet A_1.

Il doit y avoir des conditions nécessaires à l'existence de notre polygone. Pour commencer, il faut supposer le problème résolu et voir ce que cela impose : se donner un polygone $A_1 \cdots A_n$ et regarder ce qu'il en est pour le polygone $M_1 \cdots M_n$ dont les sommets sont les milieux des côtés de $A_1 \cdots A_n$. Mais nous allons voir d'abord comment se composent les symétries centrales.

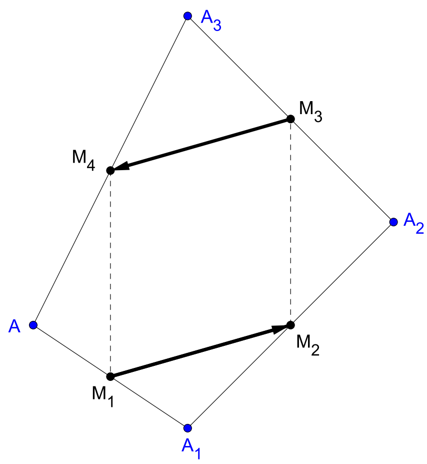
2.1. Soient M_1 et M_2 deux points distincts, centres respectifs des symétries σ_1 et σ_2. Qu'est-ce que $\sigma_2 \circ \sigma_1$? Le lecteur peut se contenter de bien regarder le dessin ci-dessous et constater que $\sigma_2 \circ \sigma_1$ n'est rien d'autre que la translation de vecteur $\overrightarrow{u} = 2\overrightarrow{M_1M_2}$.



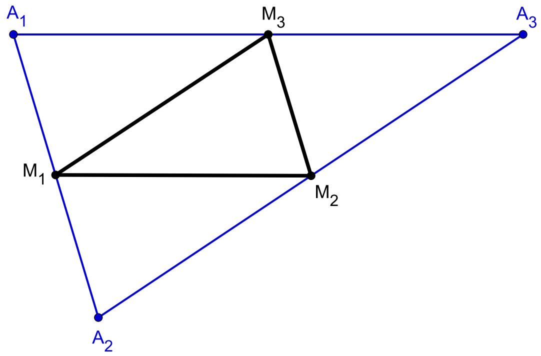
2.2. Donnons-nous maintenant trois points deux à deux distincts M_1, M_2 et M_3, centres respectifs de trois symétries σ_1, σ_2 et σ_3. Qu'est-ce que $\sigma_3 \circ \sigma_2 \circ \sigma_1$? Si M_4 désigne le quatrième sommet du parallélogramme $M_1M_2M_3M_4$ (dans cet ordre) et σ_4 la symétrie dont il est le centre alors, en posant $\overrightarrow{u}_1 = 2\overrightarrow{M_1M_2}$ et $\overrightarrow{u}_2 = 2\overrightarrow{M_3M_4}$, on a :

$$\sigma_4 \circ \sigma_3 \circ \sigma_2 \circ \sigma_1 = (\sigma_4 \circ \sigma_3) \circ (\sigma_2 \circ \sigma_1) = \tau_{\overrightarrow{u}_1} \circ \tau_{\overrightarrow{u}_2} = \tau_{\overrightarrow{u}_1 + \overrightarrow{u}_2} = \tau_{\overrightarrow{0}} = \text{identité}.$$

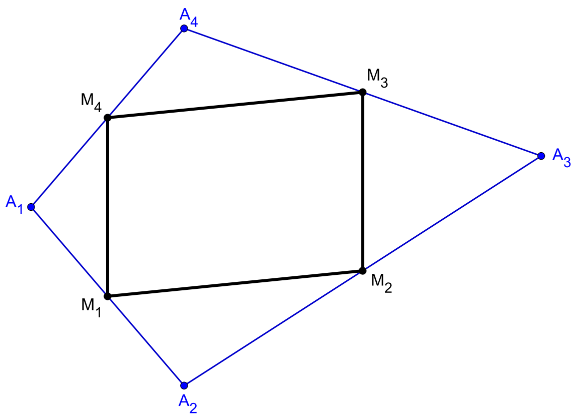
Comme $\sigma_4 \circ \sigma_4$ est l'identité, on en déduit alors que $\sigma_3 \circ \sigma_2 \circ \sigma_1 = \sigma_4$.



2.3. Commençons par regarder ce qui se passe pour les petites valeurs de n. On se donne un triangle $M_1M_2M_3$ et on doit chercher un autre triangle $A_1A_2A_3$ tel que M_1 soit le milieu du côté A_1A_2, M_2 le milieu du côté A_2A_3 et M_3 celui de A_3A_1. Encore une fois, le dessin nous dit comment construire $A_1A_2A_3$: par le sommet M_1 on mène la parallèle à la droite (M_2M_3), par le sommet M_2 on mène la parallèle à la droite (M_3M_1) et par le sommet M_3 on mène la parallèle à la droite (M_1M_2) ; ces trois parallèles se coupent deux à deux et nous donnent le triangle cherché. Il y a donc une, et une seule solution !



2.4. Que se passe-t-il pour un quadrilatère donné $M_1M_2M_3M_4$? Ses sommets sont-ils toujours les milieux des côtés d'un autre quadrilatère $A_1A_2A_3A_4$? Le dessin ci-dessous dit non : il est nécessaire que $M_1M_2M_3M_4$ soit un parallélogramme. (Ce résultat, bien qu'extrêmement élémentaire, porte un nom : le *théorème de Varignon* !)



Nous laissons le soin au lecteur de vérifier lui-même que cette condition nécessaire est suffisante et qu'il y a, en réalité, une infinité de solutions : il suffit de prendre n'importe quel point A_1, le symétriser par rapport à M_1 pour avoir A_2, symétriser ce dernier par rapport à M_2 pour avoir A_3 et enfin symétriser A_3 par rapport à M_3 pour avoir A_4 ; la dernière opération de symétrie (A_4 par rapport à M_4) ramène vers A_1 !

Il semble donc que le cas d'un quadrilatère est différent de celui d'un triangle. C'est en fait lié à la parité de l'entier n. La solution générale éclaircira cela.

3. RÉSOLUTION DU PROBLÈME GÉNÉRAL

3.1. Cas où n est pair

On pose $n = 2r$. Évidemment $r \geq 2$, sans cela le problème est sans intérêt pratique. Pour tout $i = 1, \cdots, n$, on désigne par σ_i la symétrie de centre M_i. On a :

$$f = (\sigma_{2r} \circ \sigma_{2r-1}) \circ \cdots \circ (\sigma_2 \circ \sigma_1) = \tau_r \circ \cdots \circ \tau_1$$

où, pour $i \in \{1, \cdots, r\}$, τ_i est la translation de vecteur $\overrightarrow{u}_i = 2\overrightarrow{M_{2i-1}M_{2i}}$. Par suite, la transformation f est la translation τ de vecteur $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}_1 + \cdots + \overrightarrow{u}_r$. Elle n'admet donc de point fixe que si :

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}_1 + \cdots + \overrightarrow{u}_r = 2\left(\overrightarrow{M_1M_2} + \cdots + \overrightarrow{M_{2r-1}M_{2r}}\right) = \overrightarrow{0}.$$

Mais cette condition force f à être l'identité. Tout point A_1 convient donc et nous permet de construire le n-gone $A_1 \cdots A_n$ en question.

Pour $n = 4$, la condition ci-dessus signifie que le quadrilatère $M_1M_2M_3M_4$ est un parallélogramme. On retrouve donc le cas particulier que nous avons déjà examiné.

3.2. Cas où n est impair

On pose $n = 2r + 1$ où l'entier r est tel que $r \geq 1$. Dans cette situation, on va prendre la décomposition de f en répartissant les symétries σ_i autrement. On commence par :

$$f = (\sigma_{2r+1} \circ \sigma_{2r} \circ \cdots \circ \sigma_4) \circ (\sigma_3 \circ \sigma_2 \circ \sigma_1) = (\sigma_{2r+1} \circ \sigma_{2r} \circ \cdots \circ \sigma_4) \circ \sigma_{\omega_1}$$

où ω_1 est le quatrième sommet du parallélogramme dont les trois premiers sont M_1, M_2 et M_3. De la même manière :

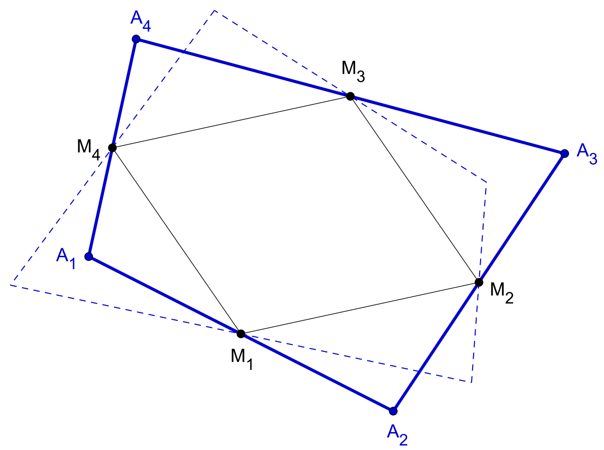
$$f = (\sigma_{2r+1} \circ \sigma_{2r} \circ \cdots \circ \sigma_6) \circ (\sigma_5 \circ \sigma_4 \circ \sigma_{\omega_1}) = (\sigma_{2r+1} \circ \sigma_{2r} \circ \cdots \circ \sigma_6) \circ \sigma_{\omega_2}$$

où ω_2 est le quatrième sommet du parallélogramme dont les trois premiers sont ω_1, M_4 et M_5. En continuant ainsi, on construit une suite finie de points $\omega_1, \cdots, \omega_r$ tels que :

$$\begin{cases} M_1M_2M_3\omega_1 \text{ est un parallélogramme} \\ \omega_1M_4M_5\omega_2 \text{ est un parallélogramme} \\ \cdots \\ \omega_{r-1}M_{2r}M_{2r+1}\omega_r \text{ est un parallélogramme} \end{cases}$$

et f n'est rien d'autre que la symétrie σ_{ω_r}. Son seul point fixe est son centre ω_r. Nous sommes alors obligés de prendre $A_1 = \omega_r$. Notre problème a donc une solution unique $A_1 \cdots A_n$ avec $A_1 = \omega_r$, $A_2 = \sigma_1(A_1)$, $A_3 = \sigma_2(A_2)$...

Ci-dessous, nous avons donné deux dessins : pour $n = 4$ où on voit qu'il y a plusieurs solutions et pour $n = 5$ où la solution est unique.



Voici comment aurait pu procéder Sin Pan (il l'a peut-être fait ainsi) : on construit ω_1 de telle sorte que $M_1M_2M_3\omega_1$ soit un parallélogramme ; ensuite, on construit $\omega_2 = A_1$ tel que $\omega_1M_4M_5A_1$ soit un parallélogramme.