Comment faut-il enseigner les fonctions logarithme et exponentielle ?

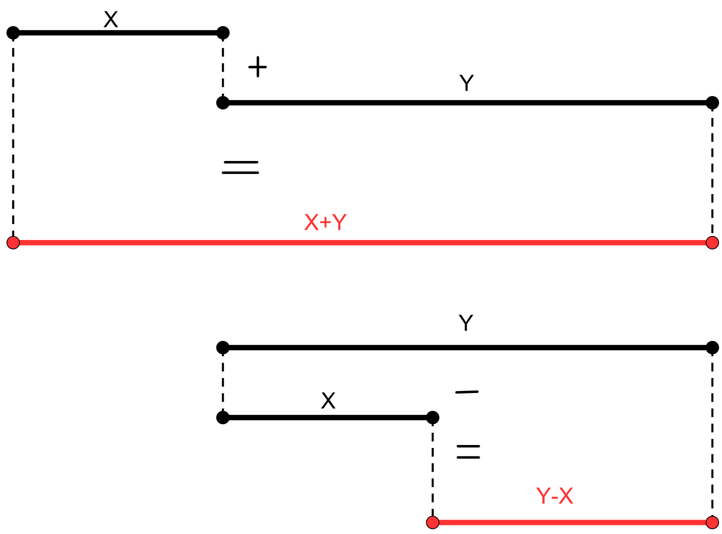
A. El Kacimi

Dans les manuels récents de Terminale (c'est ce qui figure aussi dans les programmes officiels) la fonction *logarithme* est définie comme la primitive qui s'annule en 1 de la fonction $\frac{1}{x}$ (la formule "Primitive(x^n) $= \frac{1}{n+1}x^{n+1}$" n'est pas valide pour $n = -1$) ; ou alors comme la réciproque de la fonction *exponentielle*. Mais pour introduire cette dernière, on fait admettre aux élèves l'existence de l'unique solution valant 1 en 0 de l'équation différentielle $y' = y$. À mon sens, aucune de ces deux manières de procéder n'amène de façon naturelle le *logarithme*. La bonne motivation devrait passer par la propriété essentielle : transformer la multiplication en l'addition. Une de ses premières applications est la "réalisation physique" de la multiplication des nombres réels : elle est à la base, par exemple, de la règle à calcul (ceux qui ont eu l'occasion d'en faire usage en ont apprécié la portée).

Ce texte a pour seul but de rappeler qu'il y a une méthode élémentaire (certainement bien connue) pour introduire le *logarithme* (et donc aussi l'*exponentielle*). Celle-ci ne demande pas (à des élèves de Terminale) d'admettre un théorème aussi fort que celui de l'existence et l'unicité des solutions des équations différentielles même les plus simples. Et en plus, elle motive et impose, sans autre choix, la formule $\ell n(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}$. Alors pourquoi ne pas l'adopter ?

0. Motivation

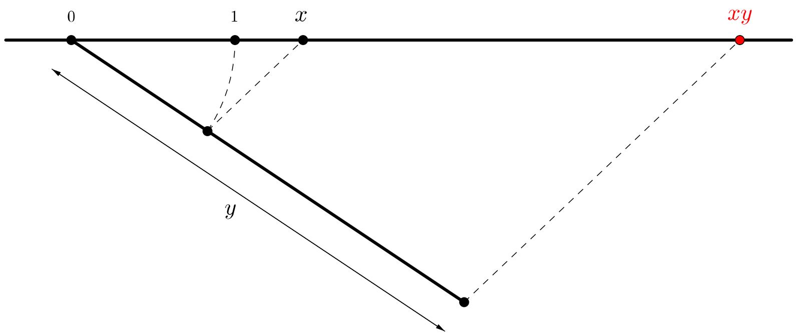
L'addition de deux nombres réels $x \geq 0$ et $y \geq 0$ est facile à réaliser physiquement en partant du fait qu'ils peuvent toujours être représentés par les longueurs respectives de deux segments d'une droite. Comme un "dessin dit plus que mille mots" (proverbe anglais), regardons simplement celui qui suit. Voici comment on réalise $x + y$ et $y - x$.



Dans ce dessin on a opéré en supposant bien sûr que $x \geq 0$, $y \geq 0$ et $y \geq x$. Cela n'a pas d'importance : tous les autres cas s'y ramènent.

Question naturelle : *Comment peut-on réaliser physiquement la multiplication xy de deux nombres réels x et y (qu'on peut supposer, sans aucune perte de généralité, strictement positifs) ?*

Il est évidemment possible de concevoir un instrument à cet effet basé sur la construction géométrique ci-dessous (simple application du théorème de Thalès). Toutefois, son utilisation ne sera pas si immédiate que celle qui consiste à mettre bout à bout deux segments sur une même droite pour effectuer une addition.



On peut aussi se ramener à ce qu'on sait faire déjà, c'est-à-dire à l'addition. C'est ce qui motive l'introduction de la fonction :

1. Logarithme

Il s'agit d'abord de trouver une bijection φ entre l'ensemble $\mathbb{R}_+^*$ des réels strictement positifs et celui $\mathbb{R}$ de tous les réels ; ensuite, on demandera à cette bijection de "transformer la multiplication en l'addition", c'est-à-dire, pour tous $x, y \in \mathbb{R}_+^*$, on a la relation fondamentale :

$$\varphi(xy) = \varphi(x) + \varphi(y). \tag{1}$$

Tant qu'à faire, exigeons un peu plus : φ dérivable et à dérivée continue strictement positive. *Alors peut-on trouver une telle bijection* φ ? Si elle existe, la bijection inverse $\psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ sera dérivable et vérifiera la relation (fondamentale aussi) :

$$\psi(x+y) = \psi(x)\psi(y). \tag{2}$$

Avant de continuer, on peut remarquer que, par la relation (1) (transformant l'opération de multiplication en celle de l'addition), on a :

$$\varphi(1) = \varphi(1 \times 1) = \varphi(1) + \varphi(1) = 2\varphi(1),$$

ce qui implique $\varphi(1) = 0$. Cette condition supplémentaire nous permettra de fixer avec plus de précision la fonction φ qu'on cherche parmi tous les candidats qui se présenteront.

1.1. La dérivée de φ

On a fait l'hypothèse que φ est dérivable et à dérivée f strictement positive. On a donc une application $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$. Dans la relation (1), on garde x constant et on dérive par rapport à

y. On obtient $xf(xy) = f(y)$, pour tous $x, y \in \mathbb{R}_+^*$. En particulier, en prenant $y = 1$, on obtient $xf(x) = f(1)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$. Donc f est nécesairement de la forme :

$$f(x) = \frac{\kappa}{x} \tag{3}$$

où κ (valeur de f au point 1) est une constante réelle strictement positive. Reste donc à déterminer la fonction (ou les fonctions) φ à partir de sa dérivée f.

1.2. Le Logarithme

Nous venons de voir que la fonction qu'on cherche $\varphi : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ avec les propriétés requises a pour dérivée une fonction $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ de la forme $f(x) = \frac{\kappa}{x}$ où κ est une constante strictement positive. Pour retrouver φ, il suffit alors de prendre la primitive de f qui s'annule au point 1 (cette condition doit être satisfaite car imposée par la relation fondamentale (1) comme on l'a déjà fait remarquer). Ceci nous impose :

$$\varphi_\kappa(x) = \int_1^x \frac{\kappa dt}{t}. \tag{4}$$

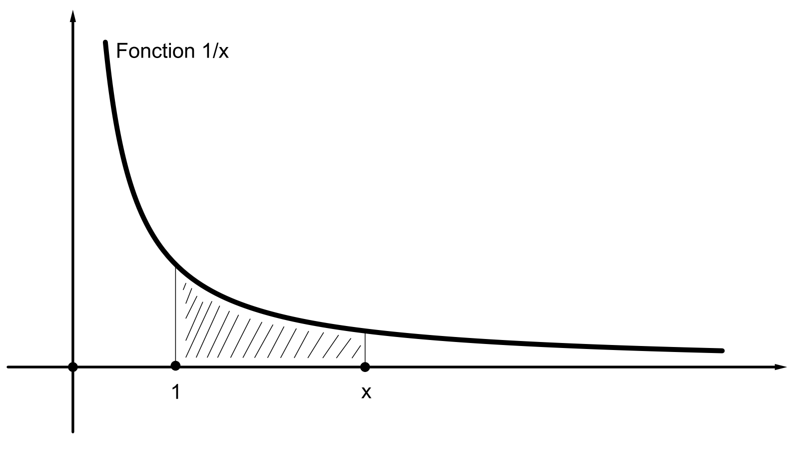
Nous avons donc une famille (paramétrée par la constante $\kappa \in \mathbb{R}_+^*$) de fonctions répondant à la question. Chacune de ces fonctions vérifie la relation fondamentale. En effet, si on dérive la fonction $\varphi_\kappa(xy) - \varphi_\kappa(x) - \varphi_\kappa(y)$ par rapport à x (en gardant y constant), on obtient :

$$y\varphi'_\kappa(xy) - \varphi'_\kappa(x) = y\frac{\kappa}{xy} - \frac{\kappa}{x} = 0.$$

La quantité $\varphi_\kappa(xy) - \varphi_\kappa(x) - \varphi_\kappa(y)$ ne dépend donc pas de x. Comme x et y jouent le même rôle, elle ne dépendra pas non plus de y ; elle est en fait constante ; mais comme elle est nulle pour $x = y = 1$, on a $\varphi_\kappa(xy) = \varphi_\kappa(x) + \varphi_\kappa(y)$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}_+^*$.

On appelle *logarithme népérien*(*), la fonction $\ell n : x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto \ell n(x) \in \mathbb{R}$ donnée par :

$$\ell n(x) = \varphi_1(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}. \tag{5}$$



(*) Appellation (devenue familière) en hommage au mathématicien écossais John Napier qui, le premier, a conçu les Tables logarithmiques. Pour plus de détails, voir l'article dans Wikipédia.

1.3. Étude de la fonction ℓn

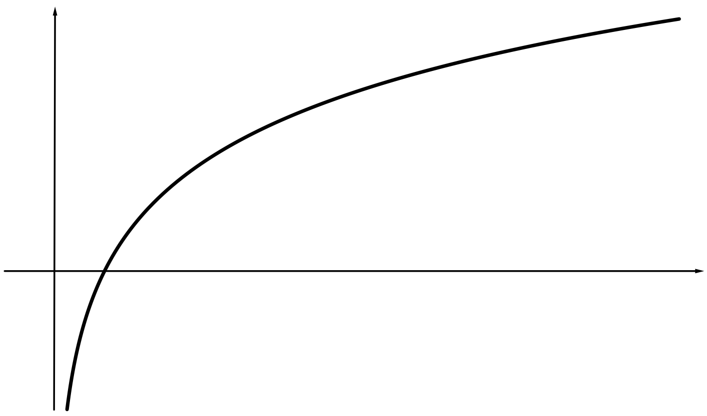
- La fonction ℓn est définie sur $\mathbb{R}_+^*$; elle y est continue, dérivable et a pour dérivée la fonction $f : x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto \frac{1}{x} \in \mathbb{R}_+^*$. Elle est donc indéfiniment dérivable et strictement croissante.
- Comme $\ell n(xy) = \ell n(x) + \ell n(y)$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ et $\ell n(1) = 0$, on a $\ell n\left(\frac{x}{y}\right) = \ell n(x) - \ell n(y)$.
- Soit a un réel tel que $a > 1$; alors $\ell n(a) > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $\ell n(a^n) = n\ell n(a)$. Donc $\ell n(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque $x \to +\infty$ et vers $-\infty$ lorsque $x \to 0^+$.
- Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe donc un nombre $e > 1$ tel que $\ell n(e) = 1$. Ce nombre s'appelle *base* du logarithme népérien.
- Comme la dérivée seconde de ℓn est $-\frac{1}{x^2}$, cette fonction est strictement concave et on a donc $\ell n(x) \leq x - 1$ pour tout $x > 0$. D'où :

  $$\ell n(x) = 2\ell n(\sqrt{x}) \leq 2\left(\sqrt{x} - 1\right) \leq 2\sqrt{x}.$$

  Ceci montre que :

  $$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ell n(x)}{x} = 0.$$

  La courbe représentative de ℓn possède donc une branche parabolique dans la direction de l'axe des abscisses. La fonction ℓn est à *croissance très lente* : si on escalade sa courbe, il faut parcourir à peu près 22 kilomètres horizontalement pour à peine monter de 10 mètres (verticalement) !



2. Exponentielle

Comme on vient de le voir, la fonction logarithme ℓn réalise un isomorphisme du groupe multiplicatif $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$ sur le groupe additif $(\mathbb{R}, +)$. Son inverse $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ est donc aussi un isomorphisme de groupes. Il transforme l'addition des nombres réels en leur multiplication. Comme nous en avions déjà parlé, pour réaliser la multiplication de deux réels positifs x et x', on prend leurs logarithmes $y = \ell n(x)$ et $y' = \ell n(x')$, on construit la somme $y + y'$ qui n'est rien d'autre que le logarithme du produit xx'. Il faut donc un retour pour retrouver ce produit à partir de $y + y'$.

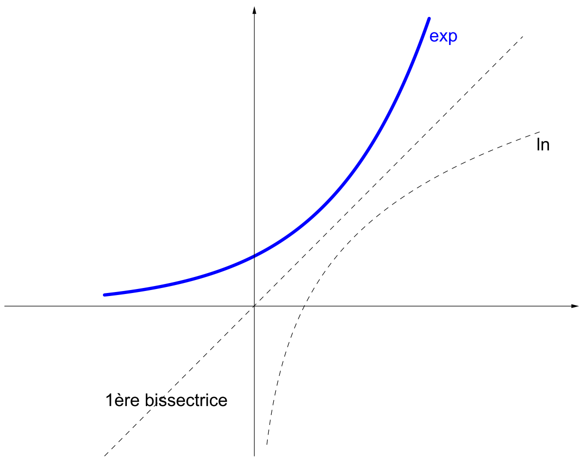
2.1. Définition. *On appelle fonction* ***exponentielle*** *la fonction* $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ *inverse de la fonction logarithme. Elle est donc définie par* :

(6) $$y = \exp(x) \iff x = \ell n(y).$$

Le nombre réel $\exp(x)$ est aussi noté e^x et se lit "exponentielle de x" ou plus simplement "exponentielle x".

2.2. Étude de la fonction exp

- Elle est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier. Comme son inverse ℓn est continue et strictement coissante, elle est aussi continue et strictement croissante.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $(\ell n \circ \exp)(x) = x$. On pose $y = \exp(x)$ et on dérive les deux membres. On trouve $\frac{1}{y} \cdot \exp'(x) = 1$, ce qui donne $\exp'(x) = y = \exp(x)$. La fonction exp est donc dérivable et égale à sa dérivée !
- Comme $\ell n(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque $x \to +\infty$, $\exp(x)$ tend aussi vers $+\infty$ lorsque $x \to +\infty$. De même, comme $\ell n(x)$ tend vers $-\infty$ lorsque $x \to 0^+$, $\exp(x)$ tend vers 0^+ lorsque $x \to -\infty$.
- On peut montrer par un calcul assez simple que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la quantité $x^n e^{-x}$ tend vers 0 quand x tens vers $+\infty$. On dit que "l'exponentielle e^{-x} emporte toute puissance de x."



On voit que le graphe de $\exp(x)$ tend à être vertical lorsque la variable x prend des valeurs de plus en plus grandes ! Dans le langage quotidien, l'expression "*croissance exponentielle*" est devenue assez familière pour décrire l'extrême rapidité avec laquelle certaines quantités deviennent de plus en plus grandes !