UNIVERSITÉ DE VALENCIENNES

Master de Mathématiques

Analyse 1

par

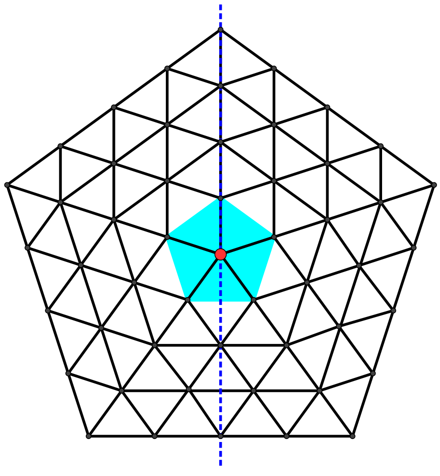
Aziz El Kacimi

aziz.elkacimi@univ-valenciennes.fr

http://www.univ-valenciennes.fr/lamav/elkacimi/

Notions d'intérêt pour un enseignant du secondaire

Le rôle du dessin en analyse, géométrie et topologie



Pavage non périodique ayant un groupe de symétrie isomorphe au groupe diédral D_5 engendré par la rotation d'angle 72° et la réflexion d'axe Δ

Année universitaire 2012-2013

Le rôle du dessin en mathématiques

Faire des mathématiques, demande à réfléchir et souvent de façon intense : on cherche une idée, une méthode d'attaque pour arriver à la solution du problème qu'on se pose. Si c'est un problème de géométrie élémentaire par exemple, on commence par dessiner une figure, on y rajoute éventuellement des éléments (des points, des droites, des cercles...) pour faire sortir une idée, quelque chose qui puisse mener vers une solution ou, du moins, vers une bonne approche de celle-ci ! Le dessin est donc fondamental : c'est un guide ! Certains pensent que son rôle se limite à la géométrie ; ils font une grosse erreur : il déborde ce champ et peut être d'une grande efficacité dans presque toutes les branches des mathématiques. Les exemples appuyant ce point de vue abondent : je pense que tout le monde peut s'accorder pour dire qu'il est souvent plus facile de chercher une fonction réelle vérifiant une certaine propriété d'abord en imaginant son graphe plutôt que commencer à passer du temps pour en donner une expression analytique !

L'objet de la plupart des exposés de séminaire proposés est de montrer, de façon concrète et sur des exemples précis, ce qu'on vient d'évoquer : le dessin est un outil performant pour faire les mathématiques !

- Le premier est un problème d'analyse fonctionnelle. La question suivante est souvent posée aux étudiants : *L'espace normé E est-il complet* ? Ou alors de façon plus "indicative" *Montrer que l'espace normé E est (n'est pas) complet* ? Si l'étudiant doit montrer que l'espace n'est pas complet, il aura à exhiber une suite de Cauchy qui ne converge pas ou, si E est un sous-espace d'un espace complet, montrer qu'il n'est pas fermé dans ce dernier... Dans tous les cas de figures, il doit construire une certaine suite. Comme E est souvent un espace fonctionnel, les éléments de cette suite doivent être des fonctions vérifiant certaines propriétés. L'exposé 1 illustre parfaitement la situation.
- Le deuxième mélange de la géométrie et de l'analyse. Les différentes figures qui illustrent les trois étapes de la réolution du problème facilitent énormément le travail et sont presque décisives.
- Le troisième est très élémentaire bien sûr mais l'interprétation géométrique qu'on peut en donner est une espèce de "machine" qui permet de résoudre graphiquement une équation du second degré à coefficients réels.
- Le quatrième est une question de topologie (un peu théorique). Elle consiste à construire un contre exemple bien précis. Il est plus astucieux et beaucoup plus facile de le faire à l'aide d'un dessin.
- Le cinquième peut se traiter sans dessin. La connaissance des sous-groupes de $\mathbb{R}$, fermés ou non, est fondamentale en mathématiques, en particulier en *systèmes dynamiques* et *théorie ergodique*.
- Enfin le dernier consiste en une démonstration utilisant des rudiments étudiés en variable complexe, tels que les indices de chemins, du théorème fondamental de l'algèbre : *le coprs $\mathbb{C}$ est algébriquement clos*.

1. La convergence uniforme par le dessin

(Michel Martino)

Notons C_0 l'espace vectoriel des fonctions réelles continues sur $[0,1]$. Comme une fonction continue $[0,1] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ est bornée, la quantité :

$$||f|| = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$$

existe et l'application $f \longmapsto ||f|| \in \mathbb{R}_+$ est une norme sur C_0 ; elle en fait un espace de Banach (un espace normé complet). Cette norme a un intérêt fondamental : elle contrôle la *convergence uniforme* des fonctions et permet la conservation de la continuité par passage à la limite ! En est-il de même pour la dérivabilité ? La réponse est non ! L'objet de cet atelier est de voir cela en utilisant des dessins très simples.

1 - Expliquer ce qu'on entend par "Un sous-espace vectoriel F de C_0 est fermé".

Soit C_1 le sous-espace vectoriel de C_0 constitué des fonctions $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 *i.e.* f est dérivable sur $]0,1[$, à dérivée f' continue et se prolongeant par continuité, à droite au point 0 et à gauche au point 1.

2 - Soit $\mathfrak{X}$ l'ensemble des courbes $\chi : t \in [0,1] \longmapsto \chi(t) \in \mathbb{R}^2$ d'origine un point (qui est $\chi(0)$) de l'axe des ordonnées et d'extrémité un point (qui est $\chi(1)$) de la droite d'équation $X = 1$. Montrer que le graphe d'une fonction $f \in C_0$ est un élément χ_f de $\mathfrak{X}$. Une courbe quelconque $\chi \in \mathfrak{X}$ est-elle toujours de la forme χ_f avec $f \in C_0$? Autrement dit, l'application :

$$f \in C_0 \longmapsto \chi_f \in \mathfrak{X}$$

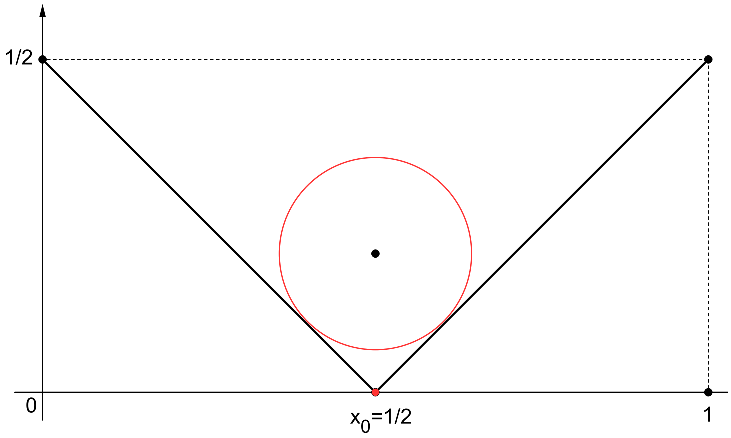
est-elle bijective ? Sinon, que faut-il imposer à χ pour que ce soit le cas ?

3 - Soit (f_n) une suite dans C_0 qui converge vers $f \in C_0$ (pour la norme $||\ \ ||$ bien sûr). Interpréter géométriquement ce que cela signifie à l'aide d'un dessin.

Nous allons montrer que le sous-espace C_1 n'est pas fermé dans C_0. À cet effet, nous allons exhiber une suite (f_n) dans C_1 qui converge vers $f \in C_0 \setminus C_1$.

4 - Donner un exemple de fonction $f \in C_0$ dérivable partout sauf au point $x_0 = \frac{1}{2}$. (Cette fonction est donc dans $C_0 \setminus C_1$.) Tracer son graphe.

5 - Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, trouver une fonction $f_n \in C_1$, en exhibant son graphe, de telle sorte que la suite (f_n) converge vers f (pour la norme $||\ \ ||$). Conclure ! (S'inspirer du dessin qui suit pour trouver la suite f_n.)



Un ballon au fond d'un ravin !

2. Aire d'un quadrilatère à périmètre prescrit

(Grégory Bergamini, Fanny Descamd & Margot Lecœuvre)

On se donne un plan affine euclidien $(\mathcal{P}, \overrightarrow{\mathcal{V}}, \langle\ ,\ \rangle)$. La norme d'un vecteur $\overrightarrow{MN}$ (ou la distance entre les points M et N) sera notée simplement MN. On va penser tout bêtement que $(\mathcal{P}, \overrightarrow{\mathcal{V}}, \langle\ ,\ \rangle)$ est $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire usuel $\left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \right\rangle = xx' + yy'$. Pour les besoins des constructions on suppose qu'un segment de longueur $L > 0$ est donné.

Soient $\mathcal{Q}$ l'ensemble de tous les quadrilatères du plan et $\mathcal{Q}_0(L)$ celui des quadrilatères de périmètre égal à L. On note $\mathcal{A} : \mathcal{Q} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ la fonction qui à q associe son aire $\mathcal{A}(q)$. L'objet du problème est de décrire les quadrilatères $q \in \mathcal{Q}_0(L)$ dont l'aire $\mathcal{A}(q)$ est maximale.

Partie I

1 - Montrer que l'ensemble $\mathcal{Q}_0(L)$ n'est pas vide en donnant des exemples explicites de quadrilatères ayant un périmètre égal à L. Montrer que, pour tout $q \in \mathcal{Q}_0(L)$, il existe $q' \in \mathcal{Q}_0(L)$ convexe tel que $\mathcal{A}(q') \geq \mathcal{A}(q)$.

On peut donc restreindre le travail à la partie $\mathcal{Q}(L)$ de $\mathcal{Q}_0(L)$ constituée uniquement de quadrilatères convexes.

2 - Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que l'ensemble $\mathcal{Q}(L)$ puisse être considéré comme un fermé de l'espace euclidien $\mathbb{R}^N$. Montrer que la fonction $\mathcal{A} : \mathcal{Q}(L) \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est continue.

3 - Montrer que l'ensemble $\mathcal{Q}(L)$ est un compact de l'espace euclidien $\mathbb{R}^N$. En déduire qu'il existe $q_0 \in \mathcal{Q}(L)$ tel que :

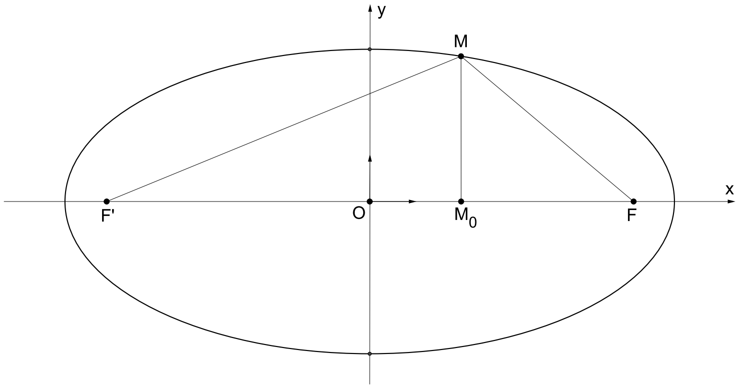
$$\sup_{q \in \mathcal{Q}(L)} \mathcal{A}(q) = \mathcal{A}(q_0).$$

Dans l'ensemble des quadrilatères à prérimètre prescrit, il en existe donc au moins un d'aire maximale. Nous allons voir quelle tête il peut avoir !

Partie II

Soient a et c deux réels strictement positifs tels que $a > c$ et $b = \sqrt{a^2 - c^2}$. On note F et F' les deux points du plan de coordonnées respectives $(0, c)$ et $(-c, 0)$. On appelle *ellipse* de *foyers* F et F' et de *grand axe* a l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M tels que $|MF + MF'| = 2a$.

4 - Montrer que l'ensemble $\mathcal{E}$ est non vide et donner un procédé de construction de ses points. Les axes de coordonnés sont des axes de symétrie. (La droite (FF') est l'*axe focal* de $\mathcal{E}$.)



5 - Donner l'équation cartésienne de l'ensemble $\mathcal{E}$ et montrer que c'est une courbe qui admet une tangente en chacun de ses points.

6 - Pour quelle position du point M sur l'ellipse $\mathcal{E}$ l'aire du triangle MFF' est-elle maximale ?

Partie III

7 - Soit ABC un triangle dont le périmètre $L > 0$ et la base $BC = \ell > 0$ sont prescrits. Comment choisir ce triangle de façon à ce que son aire soit maximale ?

8 - Soit ABC un triangle dont le périmètre $L > 0$ est prescrit. Comment choisir ce triangle de façon à ce que son aire soit maximale ?

9 - Soit $q = ABCD$ un quadrilatère dont le périmètre $L > 0$ est prescrit. Comment choisir ce quadrilatère de façon à ce que son aire $\mathcal{A}(q)$ soit maximale ?

3. Recollement de fonctions continues

(Lucie Valli)

Soient (X, d) et (Y, δ) deux espaces métriques et $\{E_i\}_{i \in I}$ une famille de fermés connexes de X tels que $A = \bigcap_{i \in I} E_i$ soit non vide ; on pose $E = \bigcup_{i \in I} E_i$. Pour tout $i \in I$, soit $f_i : E_i \longrightarrow Y$ une fonction continue. On suppose que $f_i(x) = f_j(x)$ pour tout $x \in E_i \cap E_j$. On définit $f : E \longrightarrow Y$ par $f(x) = f_i(x)$ si $x \in E_i$.

1 - On suppose l'ensemble I fini, par exemple $I = \{1, \cdots, n\}$. Montrer que la fonction $f : E \longrightarrow Y$ est continue.

2 - On suppose cette fois-ci l'ensemble I infini. Montrer, en fabriquant un contre exemple à l'aide d'un dessin, que f n'est pas continue en général. (On donnera le contre exemple pour I dénombrable, par exemple $I = \mathbb{N}^*$.)

4. Sous-groupes de $\mathbb{R}$

(Aurélie Quersin)

On rappelle que $\mathbb{R}$ (l'ensemble des réels), muni de l'addition est un groupe commutatif. Ses sous-groupes jouent souvent un rôle prépondérant en arithmétique, topologie et analyse. Les connaître de façon précise est donc une question centrale.

1 - Commençons d'abord par les sous-groupes de $\mathbb{Z}$. Soit G un sous-groupe non réduit à $\{0\}$ de $\mathbb{Z}$. Montrer qu'il est de la forme $G = a\mathbb{Z} = \{am : m \in \mathbb{Z}\}$ où a est un entier naturel non nul.

Pour le groupe $\mathbb{R}$, la situation est un peu différente. On verra que certaines propriétés topologiques et arithmétiques vont intervenir.

2 - Soit G un sous-groupe de $\mathbb{R}$ (non réduit à $\{0\}$). On pose $\alpha = \inf\{g \in G : g > 0\}$. Déterminer la forme du groupe G suivant la valeur de α.

3 - Soient α et β deux nombres réels. On note G le sous-groupe de $\mathbb{R}$ qu'ils engendrent. Discuter la nature de G suivant α et β.

4 - Même question pour le groupe G engendré par n nombres réels $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$.

5. Le théorème fondamental de l'algèbre

(Selim Hachelef)

C'est l'un des théorèmes les plus puissants des mathématiques : il dit que *tout polynôme à coefficients complexes admet au moins une racine (complexe)*. On exprime cela en disant que le corps $\mathbb{C}$ est *algébriquement clos*. Ce théorème a été démontré par d'Alembert (il porte d'aileurs son nom). Plusieurs démonstrations en ont été données depuis lors. En voici une utilisant les indices de chemins dans $\mathbb{C}$

Soit $P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ un polynôme de degré $n \geq 1$. Soient $R > 0$ et γ le chemin dans $\mathbb{C}$, image du cercle $\mathcal{C}_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| = R\}$ par l'application continue $z \in \mathcal{C}_R \longmapsto P(z) \in \mathbb{C}$.

1 - Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que, pour $|z| \geq \alpha$, on ait :

$$|z^n| > |a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0|.$$

2 - Montrer que, pour $R \geq \alpha$, γ ne passe pas par l'origine.

3 - Montrer que, pour $R \geq \alpha$, $I(\gamma, 0) = n$.

4 - En déduire qu'il existe au moins $z \in \mathbb{C}$ tel que $P(z) = 0$ *i.e.* le polynôme P admet au moins une racine.