UNIVERSITÉ DE VALENCIENNES

Master de Mathématiques
Enseignement et recherche

A. El Kacimi
(Responsable pédagogique)

Contenu des programmes des unités d'enseignement disciplinaire

Woman teaching geometry
Euclid's Elements

Année universitaire 2012-2013

UE disciplinaires - Enseignants

PREMIER SEMESTRE

Analyse 1

- Colette De Coster : Partie I
- Aziz El Kacimi : Partie II
  www.univ-valenciennes.fr/lamav/elkacimi/M1_CoursAnalyse1_VC_2013.pdf
  www.univ-valenciennes.fr/lamav/elkacimi/M1_Analyse1Seminaires_2013.pdf

Analyse 2

- Colette De Coster & Jalel Tabka

Algèbre enseignement

- Manfred Hartl

Probabilités-Statistiques

- Fouzia Baghery

Projet en mathématiques S7

- Richard Massy : Algèbre recherche
- Luc Vrancken : Géométrie différentielle

Stages et culture professionnelle

- Jean-Philippe Dalle & Jacky Sip

Anglais

- Angela Degallaix

DEUXIÈME SEMESTRE

Mathématiques pour l'enseignement

- François Goichot, Jalel Tabka & Juliette Venel

Géométrie

- Aziz El Kaccimi

Analyse numérique et programmation

- Denis Mercier & Serge Nicaise

Arithmétique

- Bouchaïb Sodaïgui

Leçons de mathématiques et initiation à la recherche

- Jalel Tabka & Juliette Venel

Projet en mathématiques S8

- Aziz El Kacimi : Courbure des surfaces. Cas hyperbolique
  www.univ-valenciennes.fr/lamav/elkacimi/M1_CoursCourbureSurfaces2012.pdf
- Felix Ali-Mehmeti : Compléments d'analyse

Stages et culture professionnelle

- Jean-Philippe Dalle & Jacky Sip

ANALYSE 1

Recherche et Enseignement

6 ECTS – Volume horaire : 60 heures

PARTIE I

Analyse fonctionnelle

Le contenu est dans la continuité du cours d'*Analyse* de Licence 3. Il est axé essentiellement sur l'étude des espaces normés dont les exemples typiques sont les espaces fonctionnels. De façon plus précise :

- Espaces métriques complets. Espaces métriques compacts.
- Opérateurs linéaires continus.
- Théorème d'Arzela-Ascoli.
- Théorème de Baire.
- Théorème de l'application ouverte, théorème du graphe fermé.
- Théorème de Hahn-Banach.

PARTIE II

1. Variable complexe

Cette partie est une reprise (plus étoffée géométriquement) du cours de *Variable complexe* de Licence 3.

- Séries entières. Rayon de convergence. Fonctions analytiques.
- Linéarité réelle, complexe. Fonctions holomorphes.
- Intégration complexe. Théorème et formule de Cauchy.
- Homographies. Groupe des automorphismes de certains ouverts de $\mathbb{C}$.
- Séries de Taylor, séries de Laurent. Théorème des résidus et ses applications.

2. Notions d'intérêt pour le secondaire

Le but est d'attirer l'attention de l'étudiant sur ce que peut être l'utilisation d'un dessin dans la résolution d'un problème mathématique (analyse, géométrie, algèbre...). Voici les sujets proposés en 2012-2013 :

- La limite uniforme d'une suite de fonctions C^1 n'est pas forcément C^1.
- Détermination des quadrilatères qui maximisent l'aire à périmètre prescrit.
- Description explicite des sous-groupes de type fini de $\mathbb{R}$.
- Recollement de fonctions continues définies sur des parties fermées connexes.
- Démonstration du *Théorème de d'Alembert* par les indices de chemins.

ANALYSE 2

Recherche et Enseignement

4 ECTS – Volume horaire : 40 heures

C'est une unité d'enseignement proposée aux étudiants de la spécialité enseignement. Elle se compose de deux parties indépendantes, de volumes horaires égaux, et dont les contenus sommaires sont les suivants.

1. Analyse hilbertienne

Les espaces de Hilbert constituent la généralisation naturelle des espaces euclidiens (espaces de dimension finie munis d'une forme bilinéaire symétrique définie positive). Cette partie de l'UE Analyse 2 a donc pour but l'extension aux espaces de dimension infinie des résultats vus pour les espaces euclidiens.

Le programme se compose des quatre chapitres suivants :

– Définition d'un produit scalaire sur un espace euclidien, d'un espace préhilbertien et d'un espace de Hilbert et premières propriétés.

– Notion de projection orthogonale et propriétés dont le théorème de représentation de Riesz.

– Système orthonormé et propriétés dont les théorèmes de Pythagore, Bessel et Riesz-Fischer.

– Bases hilbertiennes et caractérisations équivalentes.

2. Equations différentielles

Cette partie de l'UE Analyse 2 prolonge et complète l'étude des équations différentielles faite dans l'UE Analyse 6 de la Licence.

Le programme se compose des trois chapitres suivants :

– Exemples de techniques de résolution d'équations différentielles non linéaires. Equations à variables séparables.

– Systèmes différentiels linéaires du premier ordre. Cas des coefficients constants.

– Utilisation de l'exponentielle d'une matrice. Lien avec les équations différentielles linéaires scalaires à coefficients constants (d'ordre quelconque).

– Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire. Solutions maximales. Etude qualitative des courbes intégrales.

ALGÈBRE ENSEIGNEMENT

Recherche et Enseignement

6 ECTS – Volume horaire : 60 heures

Contenu de l'enseignement.

– Classes de conjugaison et formule des classes du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$. Simplicité du groupe alterné A_n pour $n \geq 5$.

– Générateurs et classes de conjugaison des groupes $\mathrm{O}(n)$ et $\mathrm{SO}(n)$. Simplicité du groupe orthogonal $\mathrm{SO}(3)$. Simplicité, modulo leur centre, des groupes $\mathrm{SO}(n)$ pour $n \geq 5$.

– Corps des quaternions. Non simplicité du groupe $\mathrm{SO}(4)$.

– Définition des angles de demi-droites et de droites comme orbites par l'action de $\mathrm{O}(n)$ en général et de $\mathrm{SO}(2)$ dans le cas du plan.

– Détermination des sous-groupes finis du groupe $\mathrm{SO}(3)$. (Ce paragraphe inclut donc les groupes diédraux et les groupes du tétraèdre, du cube et de l'icosaèdre.)

– Construction d'un sous-groupe libre de rang 2 du groupe $\mathrm{SO}(3)$. Paradoxe de Banach-Tarski.

Notions d'intérêt pour un enseignant du secondaire.

– Les 5 solides de Platon.

– Les divers aspects de la notion d'angle.

– Historique dans la recherche des corps de nombres, réels, complexes, quaternioniques.

– L'axiome du choix et ses conséquences.

PROBABILITÉS-STATISTIQUES

Recherche et ***Enseignement***

6 ECTS – Volume horaire : 60 heures

<u>Contenu de l'enseignement</u>

1. Rappels et compléments sur les variables et vecteurs aléatoires et les théorèmes limites. Vecteurs aléatoires gaussiens. Théorème limite central avec autonormalisation, théorème limite central vectoriel (cas i.i.d.) et approximation gaussienne de la loi multinomiale, théorème de Lindeberg-Lévy et applications.

2. Estimation ponctuelle ou par intervalle de confiance de paramètres dune loi. Méthode du maximum de vraisemblance. (Les développements théoriques autour du maximum de vraisemblance sont exclus.)

3. Exemples de méthodes de simulation de vecteurs aléatoires (loi uniforme sur des domaines simples du plan, vecteurs gaussiens,. . .). Méthode de Monte-Carlo. La simulation de vecteurs aléatoires doit être loccasion de mettre en oeuvre quelques notions dalgèbre (vecteurs gaussiens et formes quadratiques), ou de géométrie (barycentre, effet dune application affine sur les aires et les volumes pour la simulation de lois uniformes : triangle, parallélogramme, ellipse,. . .). La méthode de Monte-Carlo pour le calcul des intégrales fournit une belle illustration des intervalles de confiance et des vitesses de convergence dans le TLC. Elle devra évidemment être vue en liaison avec lunité danalyse numérique.

4. Tests dhypothèse. Il sagit de présenter la problématique et le vocabulaire basique (erreurs de 1ère et 2ème espèce, puisssance, . . .) à partir dexemples et des simulations.

5. Exemples de tests sur les paramètres dune loi (binomiale, gaussienne,. . .), avec des illustrations informatiques.

6. Test de comparaison des moyennes de deux échantillons, avec des exemples concrets (efficacité dun nouveau médicament).

Sur les douze séances de T.D., trois au moins pourraient se faire sous forme de T.P. sur machine. Le programme sy prête tout à fait à partir de la cinquième semaine, notamment les intervalles de confiance, la méthode de Monte-Carlo, les exemples de tests.

<u>Notions d'intérêt pour un enseignant du secondaire</u>.

– Loi multinomiale et intervalle de confiance permettent une lecture critique des sondages (statistique et citoyenneté).
– Intervalles de confiance et précision dune mesure (lien avec les sciences expérimentales).
– Caractère universel des lois gaussiennes.
– Regard critique sur les simulations numériques (vitesse de convergence).
– Tester une hypothèse simple en présence de données réelles ou simulées. Prise dune décision pratique avec risque derreur contrôlé.

PROJET EN MATHÉMATIQUES S7

Recherche

6 ECTS – Volume horaire théorique : 60 heures

Algèbre recherche

1. Théorèmes de Sylow

2. Théorie des modules

1. Généralités
2. Modules quotients
3. Modules et anneaux de fractions
4. Modules et anneaux noethériens
5. Modules de type fini sur un anneau principal
6. Suite exacte de modules

3. Séminaires

- Anneaux factoriels
- Anneaux de Dedekind
- Présentation de groupes par générateurs et relations

Géométrie différentielle

1. Études des courbes dans l'espace

– Courbes paramétrées, paramétrisation par longueur d'arc.
– Le répère de Frenet.
– Courbure et torsion.
– Courbes planaires.
– Théorème d'existence et d'unicité.

2. Introduction à la géométrie des surfaces dans l'espace

– Définition et exemples d'une surface différentiable.
– Espace tangent.
– Applications différentiables.
– La différentielle d'une application.
– Surfaces orientables.
– La première forme fondamentale et l'intégration sur une surface.

MATHÉMATIQUES POUR L'ENSEIGNEMENT

Enseignement

6 ECTS – Volume horaire : 72 heures

Le tiers du module, soit 8 séances, sera consacré au compte rendu des épreuves écrites d'entraînement. Les autres séances seront consacrées à des révisions, essentiellement sur les thèmes suivants :

- Intégrale à paramètre sur un segment,
- Suites de fonctions,
- Séries de fonctions,
- Séries entières,
- Lois de probabilités usuelles discrètes et continues,
- Couple de variables aléatoires,
- Arithmétique des entiers et des polynômes,
- Algorithmique,
- Utilisation de la calculatrice,
- Groupes, anneaux, corps,
- Courbes paramétrées,
- Espaces euclidiens et hermitiens,
- Fractions rationnelles.

GÉOMÉTRIE

Enseignement

2 ECTS – Volume horaire : 24 heures

Cette UE est proposée dans le Master 1 enseignement en vue de la préparation au concours spécial du CAPES en juin 2013. Elle sera dispensée sous forme de Cours-TD sur des fiches de travail préalablement mises à la disposition des étudiants.

Contenu

- Isométries de l'espace : réflexion (ou symétrie par rapport à un plan), rotation par rapport à un axe, vissage, rotation symétrie...
- Birapport d'un faisceau de quatre droites. Faisceau harmonique. L'exemple de deux demi-droites et des bissectrices de l'angle qu'elles forment ; les conséquences géométriques auxquelles il donne lieu. Polaire d'un point.
- Puissance d'un point par rapport à un cercle. Axe radical de deux cercles, comment le construire géométriquement.
- Inversion. Cercle d'inversion. Composition d'inversions. Inverses de cercles et de droites. Application à certains problèmes de construction.
- Étude purement géométrique des trois coniques : la parabole, l'ellipse, l'hyperbole et quelques-unes de leurs principales propriétés.
- D'autres thèmes seront abordés sous forme d'exercices si le temps le permet.

ANALYSE NUMÉRIQUE ET PROGRAMMATION

Recherche et Enseignement

6 ECTS – Volume horaire : 48 heures

---

1. Arithmétique des nombres à point flottant normalisé et propagation des erreurs d'arrondis.

2. Approximation des fonctions : meilleure approximation au sens d'une norme. Approximation uniforme : théorème d'alternance de Tchebychev, l'algorithme de Remez. Application à l'approximation et au calcul des fonctions élémentaires. Approximation au sens des moindres carrés continus et discrets : exemples d'approximation par des polynômes et par des polynômes trigonométriques.

3. Vitesse de convergence des suites. Accélération de la convergence : le procédé Δ^2 d'Aitken, le procédé d'extrapolation de Richardson.

4. Formules de quadrature numérique : Rappels sur les méthodes de Newton- Côtes composites. La méthode de Romberg-Richardson. Application de la théorie des polynômes othogonauxaux aux formules de quadrature de Gauss : Gauss-Legendre, Gauss-Laguerre, Gauss-Tchebychev, Gauss-Hermite.

5. Approximation des solutions d'équations différentielles : méthodes à pas séparés, Euler, Runge-Kutta.

6. Optimisation en contraintes linéaires : méthode du simplexe. Optimisation convexe: conditions de Kuhn-Tucker.

Ce cours doit être accompagné de TD-TP sur ordinateur illustrant chacun des chapitres en langage Scilab.

Notions d'intérêt pour un enseignant du secondaire.

Arithmétique des nombres à point flottant normalisé - Propagation des erreurs d'arrondis - Calcul de la somme de séries convergentes - Calcul des fonctions élémentaires sur machine - Méthodes d'intégration numériques - Méthode d'Euler - Méthode du simplexe.

ARITHMÉTIQUE

Recherche et Enseignement

6 ECTS – Volume horaire : 48 heures

La motivation principale de ce cours est la recherche d'une solution au problème de la résolution par radicaux d'une équation polynomiale et celui des constructions géométriques à la règle et au compas : deux problèmes qui ont occupé les mathématiciens pendant plusieurs siècles. La théorie de Galois donne une solution satisfaisante à ces questions naturelles, mais difficiles et intéressantes.

Une extension d'un corps commutatif K est un corps commutatif L tel que K est un sous-corps de L. Dans le cours, après des rappels sur les anneaux et les corps, on étudie les extensions algébriques, normales, séparables et galoisiennes ; on donnera beaucoup d'exemples concrets de ces notions abstraites. On verra qu'à une extension galoisienne, ou à un polynôme, on peut associer un groupe qu'on appelle son groupe de Galois ; c'est la structure d'un tel groupe qui permet de résoudre les deux problèmes cités ci-dessus.

La dernière partie de ce cours consiste à expliquer, via l'exemple des extensions quadratiques L de $\mathbb{Q}$ (i.e. la dimension du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel L est 2), comment on peut généraliser la notion d'entiers de $\mathbb{Z}$ et l'arithmétique de $\mathbb{Z}$ à d'autres anneaux, en utilisant les racines des polynômes unitaires à coefficients dans $\mathbb{Z}$ et les idéaux premiers au lieu des nombres premiers, généralisation nécessaire dans la perspective de la démonstration du théorème de Fermat-Wiles.

Il s'agit d'un enseignement qui apporte une culture scientifique disciplinaire offrant une base minimale pour une formation en Arithmétique de niveau Master 1. D'une part, il est utile pour une préparation à l'Agrégation. D'autre part, il permettra immédiatement après le concours du CAPES, ou l'Agrégation, ou le Master Enseignement, ou après quelques années d'exercices du métier d'enseignant du secondaire à poursuivre une formation doctorale en Arithmétique, Algèbre ou Géométrie Algébrique.

LECONS DE MATHÉMATIQUES ET INITIATION À LA RECHERCHE

Enseignement et ***Recherche***

6 ECTS – Volume horaire : 48 heures

Le module **Leçons de mathématiques** est une unité d'enseignement commune aux deux Masters (Enseignement et Recherche). L'objectif de ce module est de voir ou de rappeler des notions de mathématiques au programme de l'écrit du CAPES même si des approfondissements seront proposés également aux étudiants inscrits en spécialité recherche.

Le module se compose de 16 séances de 3H.

Huit séances seront consacrées à l'exposé, par des étudiants qui les ont préalablement préparés, de leçons dont les thèmes sont :

- Déterminants et applications en géométrie,
- Réduction des endomorphismes,
- Formes quadratiques sur un espace réel,
- Réduction des endomorphismes symétriques et orthogonaux,
- Polynômes orthogonaux et applications,
- Compacité, connexité,
- Complétude,
- Théorème du point fixe et applications.

Remarque : *Les thèmes de Topologie seront abordés dans le cadre restreint des espaces vectoriels normés.*

Les huit séances restantes seront employées à travailler sur des exercices, sujets en lien avec les précédentes leçons.

PROJET EN MATHÉMATIQUES S8

Recherche

6 ECTS – Volume horaire théorique : 48 heures

Compléments d'analyse

1 - ESPACES $L^p(\Omega, \mu)$

- Leur définition
- Leur complétude

2 - OPÉRATEURS BORNÉS

- Premières propriétés
- Spectre d'un opérateur
- Opérateurs compacts
- Spectre d'un opérateur compact

3. OPÉRATEURS BORNÉS SUR LES HILBERT

- Adjoint et opérateurs hermitiens
- Opérateurs positifs
- Spectre d'un opérateur hermitien compact

Courbure des surfaces. Cas hyperbolique

1 - SURFACES DIFFÉRENTIABLES

- Définitions et exemples
- Applications différentiables
- Espace tangent
- Actions de groupes

2 - COURBURE

- Métrique riemannienne sur une surface
- Connexions affines. Connexion de Levi-Civita
- Courbure d'une surface
- Exemples de calcul
- Théorème de classification

3 - SURFACES HYPERBOLIQUES

- Deux modèles : le demi-plan de Lobatchevski $\mathbb{H}$ et le disque de Poincaré $\mathbb{D}$
- Les géodésiques de $\mathbb{H}$ et de $\mathbb{D}$; leurs groupes d'isométries respectifs
- Les surfaces hyperboliques compactes