UNIVERSITÉS DE LILLE I ET VALENCIENNES

DEA DE MATHÉMATIQUES PURES
Introduction aux formes automorphes

par

Aziz El Kacimi

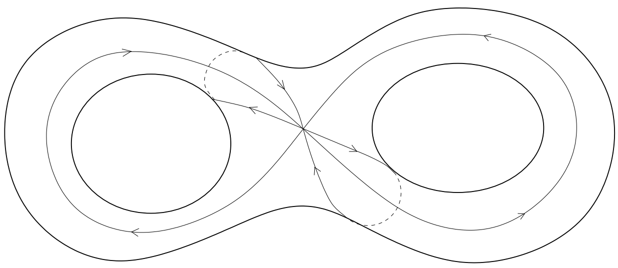
(Université de Valenciennes)

&

Rajagopalan Parthasarathy

(Tata Institute of Fundamental Research, Bombay)

Éléments de topologie algébrique et différentielle



Surface compacte orientable de genre 2

Année universitaire 1996-1997

PRÉSENTATION

Ce texte constitue le contenu du cours fondamental de l'option de DEA *Introduction aux formes automorphes*. Son objectif est de donner aux étudiants le matériel nécessaire pour pouvoir suivre convenablement le cours spécialisé au second semestre.

Dans le chapitre I on commence par des rappels de géométrie hermitienne en dimension finie : formes bilinéaires, produit scalaire, produit hermitien, formes extérieures *etc.* On y a aussi défini les opérateurs associés à une structure hermitienne : opérateur $*$ entre formes extérieures, opérateur L *etc.* Et enfin nous avons donné quelques exemples de groupes classiques de transformations.

Dans le chapitre II on introduit la notion de variété différentiable, variété analytique complexe avec beaucoup d'exemples ainsi que tous les objets associés : fibré tangent, fibré tangent holomorphe, champs de vecteurs *etc.*

Le chapitre III est consacré à la cohomologie de de Rham d'une variété différentiable. Nous avons commencé par donner une motivation et définir les formes différentielles, la différentielle extérieure *etc.* Nous avons dégagé les propriétés essentielles de la cohomologie : fonctorialité, invariance homotopique. Nous avons ensuite donné beaucoup de calculs pour illustrer son intérêt soit de façon directe soit en usant de quelques procédés comme la suite de Mayer-Vietoris ou la formule de Künneth. Nous avons fini le chapitre par quelques digressions portant sur l'intégration des formes différentielles, la cohomologie de Cěch, la cohomologie singulière, le théorème de de Rham et l'invariant d'Euler-Poincaré.

Dans le chapitre IV nous avons abordé un peu la Géométrie différentielle sur une variété du point des métriques riemanniennes : connexions, géodésiques, courbure sectionnelle. Nous avons fait quelques calculs pour les exemples usuels : le plan euclidien $\mathbb{R}^n$, la sphère $\mathbb{S}^2$, le demi-plan de Poincaré $\mathbb{H}$.

Le chapitre V est consacré au groupe fondamental, revêtements et actions de groupes qui permettent de construire beaucoup d'exemples de variétés différentiables et analytiques complexes. Nous avons explicité les conditions d'invariance que doit satisfaire un objet géométrique sur une variété $\widetilde{M}$ munie d'une action d'un groupe discret Γ pour qu'il induise un objet de même nature sur le quotient $\widetilde{M}/\Gamma$.

Le chapitre VI est spécifiquement dédié aux actions des sous-groupes discrets Γ du groupe $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ opérant par isométries sur le demi-plan de Poincaré $\mathbb{H}$ muni de la métrique hyperbolique $\frac{dx^2+dy^2}{y^2}$. Nous avons expliqué la nature des points fixes ainsi que la stucture des "cusps" qu'ils donnent sur le quotient $\mathbb{H}/\Gamma$.

La référence que nous utilisons abondamment pour le cours spécilisé (second semestre) est le livre de E. Freitag, *Hilbert Modular Forms* [Fr]. Comme il traite le sujet en détail nous n'avons donc pas rédigé de notes.

Valenciennes, mars 1997 — A. El Kacimi & R. Parthasarathy

CHAPITRE I

Géométrie en dimension finie

Comme on le verra par la suite, la plupart des objets géométriques que l'on considère sur une variété (métrique riemannienne, hermitienne, forme différentielle *etc.*) sont définis sur l'espace tangent en chaque point et “varient de manière C^∞” d'un point à un autre (on expliquera ce que c'est). Il est donc utile de savoir ce qui se passe d'abord sur chacun des espaces tangents, c'est-à-dire sur un espace vectoriel de dimension finie. C'est l'objet de ce chapitre.

Dans toute la suite E désignera un espace vectoriel de dimension n sur le corps $\mathbb{K}$ (qui sera toujours $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et on conviendra de dire que E est *réel* si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, *complexe* si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

1. Formes bilinéaires

Dans cette section l'espace vectoriel E sera supposé réel. Elle a pour but de rappeler quelques définitions : forme bilinéaire, produit scalaire, forme alternée et produit intérieur.

1.1. Quelques définitions

Soit r un entier > 0 ; on notera $\mathfrak{S}_r$ le groupe des permutations de l'ensemble $\{1, \cdots, r\}$. On appelle *r-forme linéaire* sur E toute application $g : E^r \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que, pour tout $i = 1, \ldots, r$ et tous vecteurs $e_1, \ldots, e_{i-1}, e_{i+1}, \ldots, e_r$ de E, l'application partielle $x \in E \longrightarrow g(e_1, \ldots, e_{i-1}, x, e_{i+1}, \ldots, e_r) \in \mathbb{R}$ soit linéaire. On convient qu'une 0-forme linéaire est la donnée d'un nombre réel. On dira que g est *symétrique*, si pour tout $(x_1, \ldots, x_r) \in E$ et tout $\sigma \in \mathfrak{S}_r$, on a

$$g\left(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(r)}\right) = g(x_1, \ldots, x_r\big) .$$

On dira qu'une r-forme linéaire α est *alternée* ou que α est une *r-forme extérieure* si, pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_r$ et tout $(x_1, \cdots, x_r) \in E^r$, on a

$$\alpha\left(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(r)}\right) = \varepsilon_\sigma \alpha(x_1, \ldots, x_r).$$

où ε_σ désigne la signature de σ ; de manière équivalente, la r-forme α est alternée si $\alpha(x_1, \ldots, x_r) = 0$ lorsque deux quelconques des éléments $x_1, \ldots, x_r$ sont égaux.

On notera
- $\mathcal{L}^r E$ l'ensemble des r-formes linéaires sur E ;
- $\mathcal{S}^r E$ l'ensemble des r-formes linéaires symétriques sur E ;
- $\Lambda^r E$ l'ensemble des r-formes extérieures sur E.

Ce sont des espaces vectoriels réels. On peut remarquer que pour $r = 0$ ou $r = 1$, $\mathcal{L}^r E = \mathcal{S}^r E = \Lambda^r E$. Pour $r \geq n+1$, l'espace $\Lambda^r E$ est réduit à $\{0\}$.

Le groupe $\mathfrak{S}_r$ agit sur $\mathcal{L}^r E$ de la manière suivante : pour $g \in \mathcal{L}^r E$ et $\sigma \in \mathfrak{S}_r$, $\sigma g \in \mathcal{L}^r E$ est défini par

$$(\sigma g)(x_1, \ldots, x_r) = g\left(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(r)}\right).$$

L'espace $\mathcal{S}^r E$ n'est alors rien d'autre que l'ensemble des éléments invariants par cette action. On définit deux applications $S : \mathcal{L}^r E \longrightarrow \mathcal{S}^r E$ et $A : \mathcal{L}^r E \longrightarrow \Lambda^r E$ par

$$S(g) = \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_r} \sigma g \quad \text{et} \quad A(g) = \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_r} \varepsilon_\sigma \sigma g$$

appelées respectivement *symétrisation* et *antisymétrisation.*

Parmi les espaces que nous venons d'introduire, deux nous intéresseront plus particulièremrent par la suite (dans le cas réel) :

$$\mathcal{S}^2 E \quad \text{et} \quad \Lambda^* E = \bigoplus_{r=0}^{n} \Lambda^r.$$

Le premier pour les métriques riemanniennes et le second pour les formes différentielles. Nous nous limiterons donc à ces espaces.

1.2. L'algèbre extérieure $\Lambda^* E$

Soient $\alpha \in \Lambda^r E$ et $\beta \in \Lambda^s E$ deux formes extérieures sur E de degrés respectifs r et s. On définit une forme extérieure $\alpha \wedge \beta \in \Lambda^{r+s} E$ par

$$(\alpha \wedge \beta)(x_1, \ldots, x_{r+s}) = \frac{1}{r!s!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{r+s}} \varepsilon_\sigma \alpha\left(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(r)}\right) \beta\left(x_{\sigma(r+1)}, \ldots, x_{\sigma(r+s)}\right)$$

pour tout $(x_1, \cdots, x_{r+s}) \in E^{r+s}$. On vérifie que cette multiplication est associative et anti-commutative *i.e.* on a

$$\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) = (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma$$

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{rs} \beta \wedge \alpha \quad \forall \alpha \in \Lambda^r E, \quad \forall \beta \in \Lambda^s E.$$

On voit que $\alpha \wedge \alpha = 0$ si α est de degré impair. L'ensemble $\Lambda^* E$ muni de la multiplication ainsi définie est l'*algèbre extérieure* sur E.

Soient $\mathcal{E} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E et $(e^1, \ldots, e^n)$ la base duale. Alors la collection de r-formes $\left\{e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_r}\right\}$, avec $1 \leq i_1 < \ldots < i_r \leq n$, est une base de $\Lambda^r E$; donc $\Lambda^r E$ est de dimension $C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$. Toute r-forme extérieure α sur E s'écrit alors

$$\alpha = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_r \leq n} \alpha_{i_1 \ldots i_r} e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_r}$$

où les $\alpha_{i_1 \ldots i_r}$ sont des nombres réels. L'espace $\Lambda^n E$ est de dimension 1 et est engendré par la n-forme $e^1 \wedge \ldots \wedge e^n$ appelée *forme volume* de E ; elle se transforme sous le changement de base $(e^1, \ldots, e^n) = P(e'^1, \ldots, e'^n)$ en la n-forme $(\det P)(e'^1 \wedge \ldots \wedge e'^n)$.

Soient v et w deux formes volumes sur E *i.e.* v et w sont deux éléments non nuls de $\Lambda^n E$; alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $w = \lambda v$ ($\Lambda^n E$ est de dimension 1). On dira que v et w sont *équivalentes* si $\lambda > 0$. Une *orientation* de E est alors la donnée d'une classe d'équivalence pour cette relation.

1.3. Produit intérieur

Soit E un espace vectoriel réel de dimension n. Pour tout vecteur $x \in E$ on définit une application linéaire $i_x : \alpha \in \Lambda^r E \longrightarrow i_x \alpha \in \Lambda^{r-1} E$ en posant

$$i_x \alpha(x_1, \cdots, x_{r-1}) = \alpha(x, x_1, \ldots, x_{r-1}) \tag{I.1}$$

pour tout système de vecteurs $(x_1, \cdots, x_{r-1})$ de E. Cette application vérifie les propriétés qui suivent :

i) $i_{x+y} = i_x + i_y$;
ii) $i_{\lambda x} = \lambda i_x$;
iii) $i_x \circ i_x = 0$.

L'opérateur i_x est appelé *produit intérieur* par x sur l'algèbre extérieure $\Lambda^* E$. C'est une *dérivation* sur cette algèbre *i.e.* on a, pour toute r-forme α et toute s-forme β,

$$i_x(\alpha \wedge \beta) = i_x \alpha \wedge \beta + (-1)^r \alpha \wedge i_x \beta.$$

Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E et $(e^1, \ldots, e^n)$ la base duale associée alors on a $i_{e_i} e^j = \delta_i^j$ pour tous $i, j = 1, \ldots, n$. (δ_i^j est le symbole de Kronecker qui est 1 si $i = j$ et 0 sinon.)

1.4. Produit scalaire

Soit g une forme bilinéaire symétrique sur E. L'application $Q : E \longrightarrow \mathbb{K}$ définie par $Q(x) = g(x, x)$ est appelée *forme quadratique* associée à g. On dira que g (ou que Q) est *non dégénérée* si

$$\Big(g(x, y) = 0, \quad \forall y \in E\Big) \Longrightarrow x = 0.$$

On dira que g (ou que Q) est *définie positive* si $Q(x) > 0$, pour tout vecteur non nul x de E. Evidemment, si g est définie positive, elle est non dégénérée.

Une forme bilinéaire g symétrique définie positive sur E est appelée *produit scalaire* sur E. L'application

$$(I.2) \qquad || \quad || : x \in E \longrightarrow ||x|| = \sqrt{Q(x)} \in \mathbb{R}_+$$

est alors une *norme* sur E. Deux vecteurs x et y de E sont dits *orthogonaux* si $g(x, y) = 0$. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E et posons

$$g_{ij} = g(e_i, e_j) \quad \text{pour } i, j = 1, \dots, n.$$

Il est alors clair que, une fois qu'on fixe la base $(e_1, \dots, e_n)$, g est complètement déterminée par la matrice (g_{ij}). Cette matrice est bien entendu symétrique et définie positive.

On dira que $(e_1, \dots, e_n)$ est *orthonormée* si $g_{ij} = \delta_i^j$ pour $i, j = 1, \dots, n$. Il existe toujours une base orthonormée : il suffit d'en considérer une quelconque et lui appliquer le procédé d'*orthonormalisation de Schmidt.*

2. Formes hermitiennes

Dans toute cette section nous supposerons que E est un espace vectoriel complexe.

2.1. Les formes de type (p, q)

Notons F l'ensemble des 1-formes complexes $\mathbb{R}$-linéaires *i.e.* les applications $E \xrightarrow{f} \mathbb{C}$ qui vérifient :

i) $f(z + z') = f(z) + f(z')$,
ii) $f(\lambda z) = \lambda f(z)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

Soient F^{10} l'ensemble des formes $\mathbb{C}$-linéaires sur E et F^{01} celui des formes anti-linéaires *i.e.* les applications $f'' : E \longrightarrow$ vérifiant

i') $f''(z + z') = f''(z) + f''(z')$
ii') $f''(\lambda z) = \overline{\lambda} f''(z)$ pout tout $\lambda \in \mathbb{C}$.

La dernière condition peut être remplacée par $f(iz) = -if(z)$. Alors F^{10} et F^{01} sont deux sous-espaces vectoriels complexes de dimension n. Il est évident que $F^{10} \cap F^{01} = \{\mathbf{0}\}$. D'autre part si $f \in F$ les éléments f' et f'' définis par

$$f'(z) = \frac{f(z) - if(iz)}{2} \qquad \text{et} \qquad f''(z) = \frac{f(z) + if(iz)}{2}$$

appartiennent repectivement à F^{10} et F^{01} et vérifient

$$f = f' + f''$$

Autrement dit F est somme directe de F^{10} et F^{01}. Les espaces F^{10} et F^{01} sont bien entendu anti-isomorphes via l'application $f' \in F^{10} \longrightarrow f'' = \overline{f'} \in F^{01}$. Si $(e^1, \dots, e^n)$ est une base de l'espace vectoriel complexe F^{10}, son image $(\overline{e}^1, \ldots, \overline{e}^n)$ par cette application est une base de F^{01} et par suite $(e^1, \ldots, e^n, \overline{e}^1, \ldots, \overline{e}^n)$ est une base de F. On dira alors que l'espace F est le *complexifié* de E en tant qu'espace vectoriel réel ; on le note $E \otimes \mathbb{C}$.

Il est clair que toute r-forme extérieure α sur E s'écrit

$$\alpha = \sum_{p+q=r} \alpha^{pq}$$

où α^{pq} est la r-forme extérieure

$$\alpha^{pq} = \sum \alpha_{i_1 \ldots i_p j_1 \ldots j_q} e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_p} \wedge \overline{e}^{j_1} \wedge \ldots \wedge \overline{e}^{j_q}.$$

Les $\alpha_{i_1 \ldots i_p j_1 \ldots j_q}$ sont des nombres complexes et la sommation est étendue à tous les p-indices $(i_1, \ldots, i_p)$ et q-indices $(j_1, \ldots, j_q)$ vérifiant $1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n$ et $1 \leq j_1 < \ldots < j_q \leq n$. On dira que α^{pq} est une *r-forme de type (p, q)* sur E (ou la *composante de type (p, q)* de α). L'ensemble des r-formes extérieures de type (p, q) sur E est un espace vectoriel complexe. Il sera noté $\Lambda^{pq} E$.

Pour $p, q \in \mathbb{N}$, on notera $\pi_{pq} : \Lambda^r E \longrightarrow \Lambda^{pq} E$ la projection qui à toute r-forme associe sa composante de type (p, q).

On dira qu'un opérateur $T : \Lambda^r F \longrightarrow \Lambda^r F$ est *réel* si pour tout $\alpha \in \Lambda^r F$ il vérifie $T(\overline{\alpha}) = \overline{T(\alpha)}$. Par exemple π_{pp} est réel pour tout $p \in \mathbb{N}$. L'espace $\Lambda^{00} E = \Lambda^0 E$ est engendré par 1 et $\Lambda^{nn} E = \Lambda^{2n} F$ est engendré par l'élément réel

$$\Omega = \left(\frac{i}{2} \right)^n \left(e^1 \wedge \overline{e}^1 \right) \wedge \ldots \wedge \left(e^n \wedge \overline{e}^n \right) \tag{I.3}$$

qui est encore égal (si on pose $e^k = u^k + i v^k$ où u^k et v^k sont respectivement la partie réelle et la partie imaginaire de e^k avec $k = 1, \ldots, n$) à

$$\left(u^1 \wedge v^1 \right) \wedge \ldots \wedge \left(u^n \wedge v^n \right).$$

On peut facilement vérifier qu'on a aussi

$$\Omega = i^{n^2} 2^n \left(e^1 \wedge \ldots \wedge e^n \right) \wedge \left(\overline{e}^1 \wedge \ldots \wedge \overline{e}^n \right).$$

Si $(e'^1, \ldots, e'^n)$ est une autre base de F^{10} telle que $(e^1, \ldots, e^n) = P(e'^1, \ldots, e'^n)$ alors Ω se transforme en

$$\Omega' = (\det P) \overline{(\det P)} \Omega. \tag{I.4}$$

Comme $(\det P)\overline{(\det P)} > 0$, le signe de Ω ne dépend pas du choix de la base $(e^1, \ldots, e^n)$; Ω définit donc une orientation de l'espace vectoriel réel E. Dans toute la suite, on choisira sur E l'orientation pour laquelle la $2n$-forme réelle Ω est positive.

2.2. Formes hermitiennes

Une forme *sesquilinéaire* h sur E est une application $h : E \times E \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que la première application partielle $h(., \mathbf{z}')$ est $\mathbb{C}$-linéaire et la deuxième application partielle $h(z, .)$ est anti-linéaire *i.e.* elle vérifie

i) $h(z, z'_1 + z'_2) = h(z, z'_1) + h(z, z'_2)$,

ii) $h(z, \lambda z') = \overline{\lambda} h(z, z')$.

On dira qu'une forme sesquilinéaire h sur E est *hermitienne* si on a

$$h(z, z') = \overline{h(z', z)}$$

pour tous $z, z' \in E$; ou encore si la forme quadratique associée $Q(z) = h(z, z)$ est réelle.

Toute forme hermitienne h sur E peut s'écrire

$$h(z, z') = S(z, z') + iA(z, z')$$

où S et A sont des formes $\mathbb{R}$-bilinéaires. Il n'est pas difficile de voir que S est symétrique, que A est alternée, qu'on a

$$S(z, z') = -A(iz, z') = A(z, iz') \quad \text{et} \quad A(z, z') = -S(iz, z') = S(z, iz')$$

et que S et A sont invariantes par l'automorphisme complexe J de E qui à z associe $J(z) = iz$ *i.e.* pour tout $z \in E$ on a

$$S(iz, iz') = S(z, z') \quad \text{et} \quad A(iz, iz') = A(z, z').$$

Soient φ et ψ deux formes linéaires sur E ; on appelle *produit tensoriel* de φ par ψ la 2-forme $\varphi \otimes \psi$ définie par

$$\varphi \otimes \psi(z, z') = \varphi(z)\psi(z').$$

Avec cette définition et si on considère une base $(e^1, \ldots, e^n, \overline{e}^1, \ldots, \overline{e}^n)$, la forme hermitienne h s'écrit

$$h = \sum_{k,\ell} h_{k\ell} e^k \otimes \overline{e}^\ell \tag{I.5}$$

où $h_{k\ell}$ sont des nombres complexes vérifiant $h_{k\ell} = \overline{h}_{\ell k}$ *i.e.* la matrice $(h_{k\ell})$, $k, \ell = 1, \ldots, n$ est hermitienne. Il est aisé de voir que la partie alternée A de h est

$$A = -\frac{i}{2}\sum_{k,\ell} h_{k\ell} e^k \wedge \overline{e}^\ell. \tag{I.6}$$

On dira que h est *définie positive* si $h(z,z) > 0$ pour tout z non nul. Dans ce cas la 2-forme réelle symétrique S est définie positive. On dira alors que (E,h) est un *espace hermitien.*

3. Opérateurs associés à une structure hermitienne

Soient E un espace vectoriel réel de dimension n et $(e_1,\ldots,e_n)$ une base de E. Si g est un produit scalaire sur E pour lequel $(e_1,\ldots,e_n)$ est orthonormée alors, pour tout $r\in\{1,\ldots,n\}$, on peut définir sur $\Lambda^r E$ un produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$: il suffit de décréter que la base $\{e^{i_1}\wedge\ldots\wedge e^{i_r}\}$ (où $1\le i_1<\ldots<i_r\le n$) est orthonormée. Si alors

$$\alpha = \sum_{1\le i_1<\ldots<i_r\le n} \alpha_{i_1\ldots i_r} e^{i_1}\wedge\ldots\wedge e^{i_r}$$

$$\beta = \sum_{1\le j_1<\ldots<j_r\le n} \beta_{j_1\ldots j_r} e^{j_1}\wedge\ldots\wedge e^{j_r}$$

on pose

$$\langle\alpha,\beta\rangle = \sum \alpha_{i_1\ldots i_r}\beta_{j_1\ldots j_r}$$

où la sommation est étendue à tous les multi-indices $(i_1,\ldots,i_r)$ et $(j_1,\ldots,j_r)$. Comme la base $\{e^{i_1}\wedge\ldots\wedge e^{i_r}\}$ est orthonormée ; les seuls termes non nuls de cette somme sont ceux pour lesquels $(i_1,\ldots,i_r)=(j_1,\ldots,j_r)$ *i.e.*

$$\langle\alpha,\beta\rangle = \sum_{1\le i_1<\ldots<i_r\le n} \alpha_{i_1\ldots i_r}\beta_{i_1\ldots i_r}. \tag{I.7}$$

Pour tout $(i_1,\cdots,i_r)$ dans $\{1,\cdots,n\}$ notons $(j_1,\cdots,j_{n-r})$ le multi-indice complémentaire et ε_σ la signature de la permutation σ qui à $(1,\cdots,n)$ associe $(i_1,\cdots,r,j_1,\cdots,j_{n-r})$.

3.1. Définition. *L'application* $* : \Lambda^r E \longrightarrow \Lambda^{n-r}E$ *définie sur la base* $\{e^{i_1}\wedge\ldots\wedge e^{i_r}\}$ *par* $*(e^{i_1}\wedge\ldots\wedge e^{i_r}) = \varepsilon_\sigma(e^{j_1}\wedge\ldots\wedge e^{j_{n-r}})$ *où* ε *est la signature de la permutation* $(i_1,\ldots,i_r,j_1,\ldots,j_{n-r})$ *est apelée* ***opérateur de Hodge*** *sur l'algèbre extérieure* $\Lambda^* E$.

On vérifie facilement que, pour tous $\alpha,\beta\in\Lambda^r E$, on a $\alpha\wedge *\beta = \langle\alpha,\beta\rangle\Omega$ où $\Omega = e^1\wedge\ldots\wedge e^n$. Un calcul simple montre que la définition de l'opérateur $*$ ne dépend pas de la base choisie mais seulement du produit scalaire g sur E et que $*$ est un isomorphisme de $\Lambda^r E$ sur $\Lambda^{n-r}E$ ayant pour inverse

$$(\text{I.8}) \qquad *^{-1} = (-1)^{r(n-r)} * .$$

Supposons maintenant que l'espace vectoriel E est complexe et muni d'une forme hermitienne définie positive $h = S + iA$ où S et A sont respectivement la forme bilinéaire réelle définie positive et la 2-forme extérieure associées. On pose $\omega = -A$; c'est une forme réelle de type $(1,1)$. Supposons que la base $(e^1, \ldots, e^n)$ de $\Lambda^{10}F$ soit choisie de telle sorte que $h_{k\ell} = \delta_k^\ell$ *i.e.*

$$h = \sum_{k=1}^{n} e^k \otimes \overline{e}^k.$$

Si on pose $e^k = u^k + iv^k$ alors

$$(\text{I.9}) \qquad h = \sum_{k=1}^{n} \left(u^k \otimes u^k + v^k \otimes v^k\right) - i \sum_{k=1}^{n} \left(u^k \wedge v^k\right)$$

i.e.

$$S = \sum_{k=1}^{n} \left(u^k \otimes u^k + v^k \otimes v^k\right) \quad \text{et} \quad \omega = \sum_{k=1}^{n} u^k \wedge v^k.$$

Ce qui donne

$$\overline{\Omega} = \omega^n = n\,!\,\Omega$$

où $\Omega = (u^1 \wedge v^1) \wedge \ldots \wedge (u^n \wedge v^n)$ est une forme volume sur l'espace réel sous-jacent à E.

Sur le sous-espace

$$\Lambda^* F_0 = \bigoplus_r \Lambda^r F_0$$

des éléments réels de $\Lambda^* F$, on a l'opérateur $* : \Lambda^r F_0 \longrightarrow \Lambda^{2n-r} F_0$ qu'on vient de définir précédemment ; il s'étend par linéarité complexe en un opérateur $* : \Lambda^r F \longrightarrow \Lambda^{2n-r} F$.

3.2. Proposition. *Pour tous $p, q \in \{0, \ldots, n\}$, $*$ vérifie :* $* \circ \pi_{pq} = \pi_{n-q,n-p} \circ *$.

La démonstration de cette relation n'est pas trop compliquée mais un peu lourde à mener ; si le lecteur désire en avoir une tout de même il peut consulter [Wei] page 19. Faisons par exemple le calcul dans $\mathbb{C}$ muni de la forme hermitienne $h = e \otimes \overline{e}$ de partie réelle $S = u \otimes u + v \otimes v$ et de partie alternée $A = -u \wedge v$. On sait que

$$*u = v \qquad \text{et} \qquad * v = -u,$$

et par suite

$$*e = *(u + iv) = v - iu = -ie \text{ et } *\overline{e} = *(u - iv) = v + iu = i\overline{e}.$$

On voit donc, à partir de cet exemple simple, que l'opérateur $*$ transforme une r-forme de type (p, q) en une r-forme de type $(n - q, n - p)$.

Si $\alpha, \beta \in \Lambda^{pq}F$, $\alpha \wedge *\overline{\beta}$ est de la forme $\langle \alpha, \beta \rangle \Omega$ où $\langle \alpha, \beta \rangle$ est un nombre complexe. Il est facile de voir que l'application

$$\langle\ ,\ \rangle : (\alpha, \beta) \in (\Lambda^{pq}F)^2 \longrightarrow \langle \alpha, \beta \rangle \in \mathbb{C} \tag{I.10}$$

est en fait une forme hermitienne définie positive sur $\Lambda^{pq}F$ *i.e.* $\Lambda^{pq}F$ muni de $\langle\ ,\ \rangle$ est un espace hermitien.

3.3. L'opérateur L et son adjoint

On définit l'opérateur $L : \Lambda F \longrightarrow \Lambda F$ par $L\alpha = \omega \wedge \alpha$. Il est de degré 2, c'est-à-dire qu'il envoie $\Lambda^r F$ dans $\Lambda^{r+2}F$. Comme ω est réelle de type $(1, 1)$, L est réel et de bidegré $(1, 1)$ *i.e.* il vérifie

$$L \circ \pi_{pq} = \pi_{p+1,q+1} \circ L. \tag{I.11}$$

L'image par L de $\Lambda^{pq}F$ est donc contenue dans $\Lambda^{p+1,q+1}F$.

Pour $p, q \in \{0, \dots, n\}$ posons $L^* = *^{-1}L*$. *Alors L^* est l'adjoint de L pour le produit hermitien $\langle\ ,\ \rangle$ défini en* (I.10). En effet si $\alpha \in \Lambda^{pq}F$ et $\beta \in \Lambda^{p+1,q+1}F$ on a

$$\langle L\alpha, \beta \rangle \Omega = \omega \wedge \alpha \wedge *\overline{\beta}.$$

Comme ω est de degré 2 on a $\omega \wedge \alpha = \alpha \wedge \omega$. D'où

$$\begin{aligned} \langle L\alpha, \beta \rangle \Omega &= \alpha \wedge \omega \wedge *\overline{\beta} \\ &= \alpha \wedge L(*\overline{\beta}) \\ &= \alpha \wedge * *^{-1} L(*\overline{\beta}) \\ &= \alpha \wedge *(*^{-1}L * \overline{\beta}). \end{aligned}$$

Mais les opérateurs $*$, $*^{-1}$ et L sont réels ; donc

$$*^{-1}L * \overline{\beta} = \overline{*^{-1}L * \beta}.$$

Par suite

$$\begin{aligned}\langle L\alpha, \beta\rangle\Omega &= \alpha \wedge *\overline{(*^{-1}L * \beta)} \\ &= \alpha \wedge *\overline{L^*\beta}\end{aligned}$$

c'est-à-dire $\langle L\alpha, \beta\rangle = \langle \alpha, L^*\beta\rangle$. Ce qui montre bien que L^* est l'adjoint de L. $\square$

4. Effet d'une application linéaire

Dans cette section, nous étudierons l'effet d'une application linéaire sur certains des objets géométriques que nous venons de définir.

4.1. Cas réel

Soient E et F deux espaces vectoriels réels de dimensions respectives n et m. On se donne une application linéaire $\varphi : E \longrightarrow F$.

Il est connu que φ induit une application linéaire $\varphi^* : F^* \longrightarrow E^*$ appelée habituellement *transposée* de φ définie par $\varphi^*(g)(x) = g(\varphi(x))$. Cette définition s'étend de la même manière aux r-formes linéaires : si α est une r-forme sur F, $\varphi^*(\alpha)$ est une r-forme sur E définie par

$$\varphi^*(\alpha)(x_1, \cdots, x_r) = \alpha(\varphi(x_1), \cdots, \varphi(x_r)).$$

On vérifie facilement que si α est symétrique (resp. alternée), il en est de même pour $\varphi^*(\alpha)$. On a donc défini deux applications linéaires :

$$\varphi^* : S^rF \longrightarrow S^rE \quad \text{et} \quad \varphi^* : \Lambda^rF \longrightarrow \Lambda^rE.$$

On dira que $\varphi^*(\alpha)$ est l'*image réciproque* de α par φ. On a de façon évidente les propriétés suivantes :

– si $E = F$ et φ est l'identité de E alors φ^* est l'identité de $\Lambda^r(E)$;

– pour toute suite $E \xrightarrow{\varphi} F \xrightarrow{\psi} G$ on a $(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^*$;

– de ce qui précède on déduit que si φ est un isomorphisme alors φ^* est un isomorphisme et $(\varphi^{-1})^* = (\varphi^*)^{-1}$;

– si φ est un isomorphisme alors $\varphi^* : S^2F \longrightarrow S^2E$ est un isomorphisme. Toute struture euclidienne sur F (resp. sur E) peut être alors transportée à E (resp. à F) à l'aide de φ (resp. φ^{-1}) ;

– pour $\alpha \in \Lambda^rF$ et $\beta \in \Lambda^sF$ on a $\varphi^*(\alpha \wedge \beta) = \varphi^*(\alpha) \wedge \varphi^*(\beta)$.

Soient $(e_1, \cdots, e_n)$ une base de E et $(f_1, \cdots, f_m)$ une base de F ; notons, comme habituellement, $(e^1, \cdots, e^n)$ et $(f^1, \cdots, f^m)$ les bases duales associées. Supposons que, relativement à ces bases, la matrice de φ soit

$$\begin{pmatrix} \varphi_1^1 & \cdots & \varphi_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^m & \cdots & \varphi_n^m \end{pmatrix}$$

Nous allons voir comment s'écrivent les images réciproques dans les bases duales. Nous nous restreindrons aux r-formes alternées ; c'est presque le seul cas qui nous intéressera par la suite. On vérifie facilement que, pour tout $i = 1, \cdots, m$, on a

$$\varphi^*(f^i) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k^i e^k.$$

Nous ferons le calcul pour $r = 2$; pour $r \geq 3$, il est indigeste, nous nous contenterons de donner la formule.

Prenons $\alpha = f^i \wedge f^j$ et calculons $\varphi^*(\alpha)$. On a

$$\begin{aligned}
\varphi^*(f^i \wedge f^j) &= \varphi^*(f^i) \wedge \varphi^*(f^j) \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n} \varphi_k^i e^k \right) \wedge \left(\sum_{\ell=1}^{n} \varphi_\ell^j e^\ell \right) \\
&= \sum_{k<\ell} \left(\varphi_k^i \varphi_\ell^j - \varphi_\ell^i \varphi_k^j \right) e^k \wedge e^\ell \\
&= \sum_{k<\ell} \Delta_{k\ell}^{ij}(\varphi) e^k \wedge e^\ell
\end{aligned}$$

où le nombre $\Delta_{k\ell}^{ij}(\varphi)$ est le déterminant de la matrice carrée d'ordre 2 (extraite de celle de φ)

$$\begin{pmatrix} \varphi_k^i & \varphi_\ell^i \\ \varphi_k^j & \varphi_\ell^j \end{pmatrix}.$$

De façon générale, considérons la r-forme alternée $\alpha = f^{i_1} \wedge \cdots \wedge f^{i_r}$. On a la formule

$$\varphi^*(\alpha) = \sum \Delta_{k_1 \cdots k_r}^{i_1 \cdots i_r}(\varphi) e^{k_1} \wedge \cdots \wedge e^{k_r} \tag{I.12}$$

où la sommation porte sur tous les $(k_1, \cdots, k_r)$ tels que $1 \leq k_1 < \cdots < k_r \leq n$ et le nombre $\Delta_{k_1 \cdots k_r}^{i_1 \cdots i_r}(\varphi)$ est le déterminant de la matrice carrée

$$\begin{pmatrix} \varphi_{k_1}^{i_1} & \cdots & \varphi_{k_r}^{i_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_{k_1}^{i_r} & \cdots & \varphi_{k_r}^{i_r} \end{pmatrix}.$$

4.2. Cas complexe

Soient E et F deux espaces vectoriels complexes de dimensions respectives n et m. On se donne une application linéaire $\varphi : E \longrightarrow F$. Alors E et F sont a fortiori des espaces vectoriels réels et l'application φ est $\mathbb{R}$-linéaire ; toutes les propriétés de φ^* que nous avons décrites dans le cas réel marchent encore dans le cas complexe. Nous allons énoncer quelques propriétés supplémentaires (liées à la $\mathbb{C}$-linéarité) que nous utiliserons peut-être.

– Si $\alpha \in \Lambda^{pq}F$, $\varphi^*(\alpha) \in \Lambda^{pq}E$ autrement dit l'application $\varphi^* : \Lambda^*F \longrightarrow \Lambda^*E$ commute aux projections $\pi_{pq} : \Lambda^*F \longrightarrow \Lambda^{pq}F$ et $\pi_{pq} : \Lambda^*E \longrightarrow \Lambda^{pq}E$.

– Si $h = S + iA$ est forme hermitienne, $\varphi^*(h)$ est aussi une forme hermitienne et $\varphi^*(h) = \varphi^*(S) + i\varphi^*(A)$.

– Si φ est un isomorphisme, toute struture hermitienne sur F (resp. sur E) peut être transportée à E (resp. à F) à l'aide de φ (resp. φ^{-1}).

5. Groupes classiques

Ce sont des groupes de transformations linéaires ou affines d'un espace vectoriel E réel ou complexe qui préservent en plus une structure géométrique (forme volume, produit scalaire, produit hermitien, forme symlectique *etc.*).

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie sur un corps $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On notera $L(E, F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires de E dans F. Lorsque $F = \mathbb{K}$, $L(E, \mathbb{K})$ n'est rien d'autre que le dual de E qu'on notera E^*. Si E et F sont normés respectivement par $|| \ ||_E$ et $|| \ ||_F$, alors $L(E, F)$ est normé par

$$|||\varphi||| = \sup_{||u||_E \leq 1} ||\varphi(u)||_F.$$

Soit $\varphi \in L(E, F)$; on désigne par $\varphi^* : F^* \longrightarrow E^*$ sa *transposée*. On rappelle que $|||\varphi||| = |||\varphi^*|||$ et si φ est un isomorphisme, il en est de même de φ^*. Dorénavant $E = F$ qu'on identifiera à $\mathbb{K}^n$ (à l'aide d'une base de E). La norme $|| \ ||$ sera supposée associée à un produit scalaire ou hermitien $\langle \ , \ \rangle$. La loi de composition interne entre les transformations de E sera toujours la composition des applications.

5.1. Groupe linéaire

On supposera d'abord E réel. L'ensemble des automorphismes linéaires de E est un groupe noté $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ qu'on appelle *groupe linéaire* de E. Comme

$$\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) = \{g \in L(E, E) : \det g \neq 0\}$$

et que la fonction déterminant $\det : L(E, E) \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue, $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ est un ouvert de $L(E, E)$. Pour $n = 1$, $\mathrm{GL}(1, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^*$.

Fixons une orientation de E à l'aide d'une forme volume v (à un facteur positif près). Soit $g \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$; v se transforme par g en $w = (\det g)v$. La transformation g préserve donc l'orientation si, et seulement si, $\det g > 0$. L'ensemble de telles transformations est un sous-groupe $\mathrm{GL}_+(n, \mathbb{R})$ de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. En fait $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ est un groupe ouvert ayant deux composantes connexes dont $\mathrm{GL}_+(n, \mathbb{R})$ est celle qui contient l'identité I de E.

Si E est complexe, l'ensemble $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ des automorphismes linéaires complexes de E est un groupe appelé *groupe linéaire complexe* de E. Mais E peut être considéré aussi comme un espace vectoriel réel de dimension $2n$ (on oublie la structure complexe) ; on a alors un homomorphisme canonique injectif

$$\mathrm{GL}(n,\mathbb{C}) \hookrightarrow \mathrm{GL}(2n,\mathbb{R})$$

donnée par l'application qui à un nombre complexe $a+ib$ associe la matrice carrée réelle $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$. Si on se fixe une orientation sur l'espace vectoriel réel sous-jacent, l'image de cette injection est dans $\mathrm{GL}_+(2n,\mathbb{R})$ (un automorphisme complexe de $\mathbb{C}^n$ préserve toujours l'orientation donnée).

5.2. Groupe affine

Une application $g : E \longrightarrow E$ est dite *affine* si elle est de la forme $gx = Ax + a$ où $A \in L(E,E)$ et $a \in E$; A est la *partie linéaire* de g. Elle est bijective si, et seulemnt si, A l'est ; dans ce cas, on dira que g est une *transformation affine* de E. Les transformations affines de E forment un groupe noté $\mathrm{Aff}(E)$ appelé *groupe affine* de E (réel ou complexe suivant que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Il s'identifie à $\mathbb{K}^n \times \mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$ muni de la multiplication

$$(a,A)(b,B) = (Ab + a, AB).$$

Le groupe $\mathrm{Aff}(E)$ est alors le *produit semi-direct* de $\mathbb{K}^n$ par $\mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$, ce dernier agissant sur $\mathbb{K}^n$ par automorphismes $\mathbb{K}$-linéaires. Soient

$$j : a \in \mathbb{K}^n \hookrightarrow (a,I) \in \mathrm{Aff}(E) \ \text{ et } \ \pi : (a,A) \in \mathrm{Aff}(E) \longrightarrow A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$$

respectivement l'inclusion de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathrm{Aff}(E)$ et la projection de ce dernier sur $\mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$. Alors la suite

$$0 \longrightarrow \mathbb{K}^n \overset{j}{\hookrightarrow} \mathrm{Aff}(E) \xrightarrow{\pi} \mathrm{GL}(n,\mathbb{K}) \longrightarrow \{I\}$$

est exacte. L'application $\sigma : A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{K}) \longrightarrow (0,A) \in \mathrm{Aff}(E)$ est un morphisme de groupes et est une *section* de π *i.e.* $\pi \circ \sigma =$identité.

5.3. Groupe spécial linéaire (ou groupe modulaire)

On regarde E comme espace vectoriel réel et on se donne une forme volume v sur E. Alors la transformation linéaire $g \in \mathrm{GL}(E)$ préserve v *i.e.* $g^*v = v$ si, et seulement si, $\det g = 1$. Une telle transformation est dite *modulaire*. L'ensemble de ces transformations est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_+(n,\mathbb{R})$ appelé *groupe spécial linéaire* ou *groupe modulaire* ; on le note $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$.

De même, si E est complexe le *groupe modulaire complexe* de E sera par définition

$$\mathrm{SL}(n,\mathbb{C}) = \{g \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{C}) : \det g = 1\}.$$

On a une injection canonique $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C}) \hookrightarrow \mathrm{SL}(2n,\mathbb{R})$ induite par celle de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ dans $\mathrm{GL}(2n,\mathbb{R})$.

5.4. Groupes orthogonaux

Supposons E réel muni d'un produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$. On dira que $g \in L(E,E)$ est *orthogonale* si, pour tous $x, y \in E$, on a $\langle g(x), g(y)\rangle = \langle x, y\rangle$ ou de manière équivalente si $g^*g = gg^* = I$ (g^* dénote l'adjointe de g *i.e.* g^* est définie par la relation $\langle g(x), y\rangle = \langle x, g^*(y)\rangle$). Une application orthogonale est toujours bijective. L'ensemble des transformations orthogonales forment un groupe noté $\mathrm{O}(n)$ et appelé *groupe orthogonal*. Il a deux composantes connexes ; celle qui contient l'identité notée $\mathrm{SO}(n)$ est appelée *groupe orthogonal spécial*. Il est caractérisé par

$$\mathrm{SO}(n) = \{g \in \mathrm{O}(n) : \det g = 1\} = \mathrm{O}(n) \cap \mathrm{SL}(n,\mathbb{R}).$$

On a les inclusions $\mathrm{SO}(n) \subset \mathrm{SL}(n,\mathbb{R}) \subset \mathrm{GL}_+(n,\mathbb{R})$.

Par exemple on peut vérifier facilement qu'en prenant $E = \mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire usuel $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2$, tout élément de $\mathrm{SO}(2)$ est défini par une matrice du type

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad \text{avec} \qquad \theta \in \mathbb{R}.$$

Supposons maintenant $E = \mathbb{R}^n$ muni de la forme quadratique non dégénérée $Q(x) = x_1^2 + \ldots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \ldots - x_{p+q}^2$ (avec $p+q = n$). L'ensemble des applications linéaires g qui préservent cette forme quadratique Q (*i.e.* qui vérifient $Q(gx) = Q(x)$ pour tout $x \in E$), est un groupe noté $\mathrm{O}(p,q)$. Soient E_+ et E_- les sous-espaces de E engendrés respectivement par $(e_1, \ldots, e_p)$ et $(e_{p+1}, \ldots, e_n)$. Alors Q induit sur E_+ et E_- deux formes quadratiques $Q_+ = Q_{|E_+}$ et $Q_- = -Q_{|E_-}$ définies positives. Soient g_+ et g_- deux transformations orthogonales respectivement de E_+ et E_- ; elles définissent la transformation $g : E = E_+ \oplus E_- \longrightarrow E_+ \oplus E_-$ par $g(x_+, x_-) = (g_+(x_+), g_-(x_-))$ qui est orthogonale pour le produit scalaire associé à la forme quadratique définie positive $Q' = Q_+ \oplus Q_-$. On a donc une inclusion $\mathrm{O}(p) \times \mathrm{O}(q) \hookrightarrow \mathrm{O}(p,q)$. On pose par définition

$$\mathrm{SO}(p,q) = \mathrm{SL}(n,\mathbb{R}) \cap \mathrm{O}(p,q).$$

On a bien sûr $\mathrm{O}(n,0) = \mathrm{O}(n)$ et $\mathrm{SO}(n,0) = \mathrm{SO}(n)$. A titre d'exemple, on peut voir facilement que le groupe $\mathrm{SO}(1,1)$ est isomorphe à celui des matrices carrées 2×2 de la forme

$$\begin{pmatrix} \mathrm{ch}\ \theta & \mathrm{sh}\ \theta \\ \mathrm{sh}\ \theta & \mathrm{ch}\ \theta \end{pmatrix} \qquad \text{avec} \qquad \theta \in \mathbb{R}$$

où $\mathrm{ch}\ \theta$ et $\mathrm{sh}\ \theta$ sont respectivement le cosinus et le sinus hyperboliques de θ.

De la même manière supposons $E = \mathbb{C}^n$ muni de la forme quadratique non dégénérée $Q(z) = z_1\overline{z}_1 + \ldots + z_p\overline{z}_p - z_{p+1}\overline{z}_{p+1} - \ldots - z_{p+q}\overline{z}_{p+q}$.

(1) $\underline{q = 0}$

Dans ce cas Q est associée à un produit hermitien $\langle\ ,\ \rangle$. Rappelons qu'on dit que g est *unitaire* si, pour tous $z, w \in E$, on a $\langle g(z), g(w)\rangle = \langle z, w\rangle$ ou de façon équivalente, si $gg^* = g^*g = I$. L'ensemble des applications unitaires est un groupe noté $\mathrm{U}(n)$ et appelé *groupe unitaire* ; il contient le *groupe unitaire spécial*

$$\mathrm{SU}(n) = \{g \in \mathrm{U}(n) : \det g = 1\}.$$

(2) $\underline{q > 0}$

On définit, comme dans le cas réel, le groupe $\mathrm{U}(p, q)$ des transformations linéaires de E qui préservent la forme quadratique Q ainsi que son sous-groupe

$$\mathrm{SU}(p, q) = \{g \in \mathrm{U}(p, q) : \det g = 1\}.$$

On a bien sûr

$$\mathrm{U}(p) \times \mathrm{U}(q) \subset \mathrm{U}(n) \quad \text{et} \quad \mathrm{SU}(p) \times \mathrm{SU}(q) \subset \mathrm{SU}(n).$$

5.5. Groupe symplectique

Soient E un espace vectoriel réel et ω une forme bilinéaire sur E. On dira que ω est une *forme symlectique* si elle est alternée et non dégénérée. Dans ce cas l'espace E est nécessairement de dimension paire $2n$ (*cf.* [God]).

Un *espace symplectique* est un espace vectoriel réel E munie d'une forme symlectique ω ; on le notera (E, ω).

Soient E un espace vectoriel réel, E^* son dual et ω une forme bilinéaire sur E ; on a une application linéaire $\# : E \longrightarrow E^*$ associant à tout $x \in E$ la 1-forme $i_x\omega$ (produit intérieur de ω par x). Alors les assertions suivantes sont équivalentes

i) ω est une forme symplectique ;
ii) ω^n (produit extérieur n fois de ω) est une forme volume sur E ;
iii) $\#$ est un isomorphisme.

Sur un espace symplectique (E, ω) de dimension $2n$, il existe toujours une base de 1-formes $(e^1, e^2, \ldots, e^{2n-1}, e^{2n})$ telle que ω s'écrive

$$\omega = e^1 \wedge e^2 + \cdots + e^{2n-1} \wedge e^{2n}.$$

Dans une telle base, la matrice $J = \omega(e^i, e^j)$ de ω est du type

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & & \ddots & \vdots \\ 0 & & \ddots & & 0 \\ \vdots & \ddots & & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Soient (E, ω) un espace symplectique de dimension $2n$, F un espace vectoriel de dimension $2n$ et $\varphi : F \longrightarrow E$ un isomorphisme linéaire ; alors $\Omega = \varphi^*(\omega)$ est une forme symplectique sur F (rappelons que Ω est définie par $\Omega(x, y) = \omega(\varphi(x), \varphi(y))$). On dira que Ω est la *structure symplectique induite* par φ.

Soient (E, ω) et (F, Ω) deux espaces symplectiques et $\varphi : F \longrightarrow E$; on dira que φ est *symplectique* ou que c'est un *symplectomorphisme* si $\varphi^*(\omega) = \Omega$; dans ce cas, φ est nécessairement un isomorphisme linéaire. Si $E = F$ et $\omega = \Omega$ on dira que φ est un *automorphisme symplectique* ; l'ensemble de tels automorphismes forment un groupe noté $\mathrm{Sp}(E, \omega)$. Pour $E = \mathbb{R}^{2n}$ avec la *forme symplectique standard*

$$\omega = e^1 \wedge e^2 + \ldots + e^{2n-1} \wedge e^{2n},$$

ce groupe sera noté $\mathrm{Sp}(n, \mathbb{R})$ et appelé *groupe symplectique réel* en dimension $2n$. Pour $n = 1$, la forme symplectique standard s'écrit $\omega = e^1 \wedge e^2$; les automorphismes symplectiques sont donc les éléments de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ qui préservent le volume ; on a donc $\mathrm{Sp}(1, \mathbb{R}) = \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$.

On peut définir de façon analogue les groupes symplectiques complexes. Ce travail de curiosité est laissé au lecteur.

CHAPITRE II

Variétés réelles et complexes

L'existence de coordonnées globale dans les espaces numériques $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$ les met au premier plan des objets de l'Analyse et de la Géométrie. Bien que cette propriété soit spécifique à ces espaces topologiques beaucoup d'autres se comportent localement comme $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$; on les appelle *variétés.* L'objet de ce chapitre est d'en donner la définition, de décrire certaines de leurs propriétés et les divers objets qui leur sont rattachés.

1. Variétés différentiables

Dans tout ce paragraphe M sera un espace topologique paracompact *i.e.* M est séparé et tel que tout recouvrement ouvert admet un recouvrement ouvert plus fin et localement fini.

1.1. Définition. *On dira que M est une* **variété topologique** *de dimension $n \in \mathbb{N}$ si tout point $x \in M$ possède un voisinage ouvert U homéomorphe à $\mathbb{R}^n$ i.e. il existe une application bijective $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow U$ telle que φ et son inverse φ^{-1} soient continues.*

Pour connaître un point x de U, il suffit donc de connaître les coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ dans $\mathbb{R}^n$ de son image réciproque $\varphi^{-1}(x)$. Pour cette raison on dira que U est un *ouvert de coordonnées locales* de M au voisinage de x. La paire (U, φ) est appelée *carte locale* et $(x_1, \ldots, x_n) = \varphi^{-1}(x)$ seront les *coordonnées* de x. Si (U, φ) et (V, ψ) sont deux cartes locales telles que l'intersection $U \cap V$ soit non vide alors un point $x \in U \cap V$ sera repéré par ses coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ dans U et ses coordonnées $(x'_1, \ldots, x'_n)$ dans V. Comme le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \varphi^{-1}(U \cap V) & \xrightarrow{\varphi} & U \cap V \\ \downarrow & & \| \\ \psi^{-1}(U \cap V) & \xrightarrow{\psi} & U \cap V \end{array}$$

est commutatif on doit avoir

$$(x'_1, \ldots, x'_n) = \psi^{-1} \circ \varphi(x_1, \ldots, x_n). \tag{II.1}$$

L'application $\psi^{-1} \circ \varphi$ est appelée *changement de coordonnées* de la carte (U, φ) à la carte (V, ψ). Souvent on a besoin d'une certaine régularité de cette application ; ce qui nous amène à définir la notion de *variété différentiable* de classe C^r où $r \in \mathbb{N}$.

Dorénavant M sera une variété topologique de dimension n.

1.2. Définition. *Deux cartes locales (U, φ) et (V, ψ) sont dites C^r-***compatibles** *si l'une des conditions suivantes est remplie* *i)* $U \cap V = \emptyset$,

ii) $U \cap V \neq \emptyset$ *et* $\psi^{-1} \circ \varphi$ *est un difféomorphisme de classe* C^r *; ceci a un sens car cette application est définie sur un ouvert de* $\mathbb{R}^n$ *et à valeurs dans* $\mathbb{R}^n$.

Un ensemble de cartes locales $(U_i, \varphi_i)_{i\in I}$ sur M est appelé C^r-*atlas* si $(U_i)_{i\in I}$ est un recouvrement de M et si deux cartes quelconques (U_i, φ_i) et (U_j, φ_j) sont C^r-compatibles. Deux C^r-atlas $(U_i, \varphi_i)_{i\in I}$ et $(V_j, \psi_j)_{j\in J}$ sont dits *équivalents* si leur réunion est un C^r-atlas *i.e.* pour tout $i \in I$ et tout $j \in J$, les cartes (U_i, φ_i) et (V_j, ψ_j) sont C^r-compatibles.

1.3. Définition. *Une classe d'équivalence de* C^r*-atlas est appelée* ***structure différentiable*** *de classe* C^r *sur* M*. On dira que* M *est une variété de classe* C^r.

Pour $r = 0$, M est une variété topologique (notion qu'on a déjà définie). Pour $r = \infty$ on dira que M est une *variété différentiable.* On dira que M est une *variété analytique* (réelle) ou de classe C^ω si elle admet un atlas $(U_i, \varphi_i)_{i\in I}$ tel que les applications $\varphi_j^{-1} \circ \varphi_i$ (pour $U_i \cap U_j \neq \emptyset$) soient analytiques en tant qu'applications d'un ouvert de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

Il est clair que toute variété analytique est une variété différentiable de classe C^r pour tout $r = 1, \ldots, \infty$.

Tout ouvert non vide d'une variété C^r *de dimension* n *est une variété de classe* C^r *de dimension* n.

Une variété de classe C^r (avec $r \geq 1$) M est dite *orientable* si elle peut être définie à l'aide d'un atlas (U_i, φ_i) pour lequel les C^r-difféomorphismes (I.1) préservent l'orientation de $\mathbb{R}^n$: pour $x \in U_i \cap U_j$, le déterminant de l'application linéaire $d\left(\varphi_j^{-1} \circ \varphi_i\right)\left(\varphi_i^{-1}(x)\right)$ est strictement positif.

Dans toute la suite de cette section on ne considérera que les variétés de classe C^∞ connexes.

1.4. Exemples

Souvent nous ne spécifierons que la manière d'obtenir les cartes. Le lecteur peut vérifier lui-même leur compatibilité. On peut obtenir les exemples de variétés de différentes manières. Il est clair que le premier exemple est l'espace $\mathbb{R}^n$ lui-même puisqu'il constiue le *modèle local.*

i) Sous-variéts de $\mathbb{R}^N$

Soient N et N' deux entiers naturels. Une application différentiable $\mathbb{R}^N \xrightarrow{f} \mathbb{R}^{N'}$ est dite de *rang constant*, si le rang de l'application linéaire $d_x f : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^{N'}$ (différentielle de f au point x) ne dépend pas de x. On dira que f est une *immersion* si, en tout point x de M, $d_x f$ est injective ; dans ce cas évidemment $N \leq N'$. On dira que f est une *submersion* si pour tout $x \in M$, $d_x f$ est surjective ; dans ce cas $N \geq N'$. Supposons $N = n+q$, $N' = q$ et posons pour tout $c \in f(\mathbb{R}^N)$:

$$\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^N : f(x) = c\}.$$

Si f est de rang constant (en particulier si f est une submersion) on peut montrer, en utilisant le *théorème des fonctions implicites*, que Σ est une variété différentiable de dimension n. On dira que f est une *fonction definissant* Σ.

Beaucoup de variétés sont obtenues de cette manière ; par exemple la sphère de dimension n dans $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$\mathbb{S}^{n+1} = \left\{ (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \quad : \quad \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1 \right\}.$$

Le cas $n = 1$ donne le cercle qu'on peut voir aussi comme l'ensemble des nombres complexes de module 1.

On peut voir d'une autre manière assez facilement la structure de variété (analytique) de dimension n sur la sphère $\mathbb{S}^n$. Faisons-le pour $n = 2$. Considérons le recouvrement suivant $U_1 = \mathbb{S}^2 - \{N\}$ et $U_2 = \mathbb{S}^2 - \{S\}$ où N et S sont respectivement le *pôle nord* et le *pôle sud* de la sphère. Alors l'application $\varphi_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow U_1 \subset \mathbb{R}^3$ définie par

$$\varphi_1(x_1, x_2) = \left(\frac{2x_1}{1 + x_1^2 + x_2^2}, \frac{2x_2}{1 + x_1^2 + x_2^2}, \frac{-1 + x_1^2 + x_2^2}{1 + x_2^2 + x_2^2} \right)$$

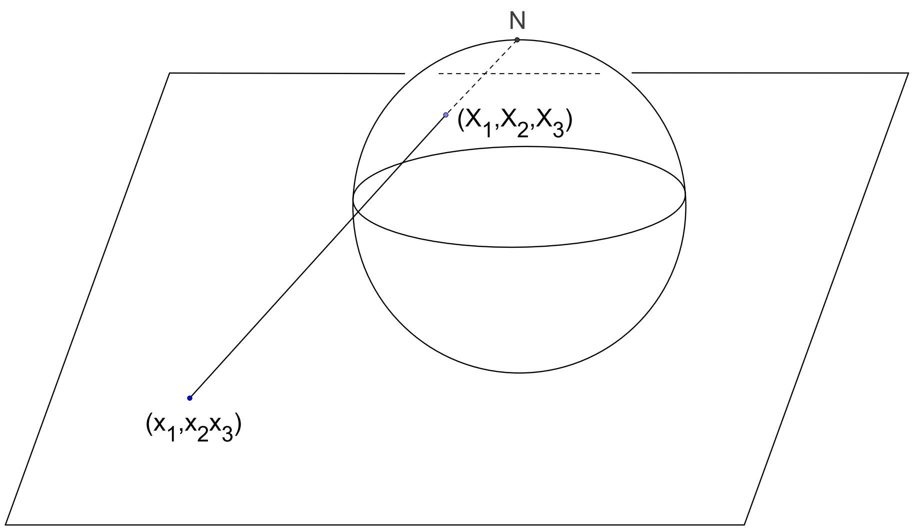


Fig. II.1

est un homéomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur U_1. L'application inverse est donnée par

$$\varphi_1^{-1}(X_1, X_2, X_3) = \left(\frac{X_1}{1 - X_3}, \frac{X_2}{1 - X_3} \right)$$

De même l'application $\varphi_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow U_2$ donnée par

$$\varphi_2(x_1, x_2) = \left(\frac{2x_1}{1 + x_1^2 + x_2^2}, \frac{2x_2}{1 + x_1^2 + x_2^2}, \frac{1 - x_1^2 - x_2^2}{1 + x_2^2 + x_2^2} \right)$$

est aussi un homéomorphisme ; l'inverse $\varphi_2^{-1} : U_2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ a pour expression

$$\varphi_2^{-1}(X_1, X_2, X_3) = \left(\frac{X_1}{1 + X_3}, \frac{X_2}{1 + X_3} \right).$$

L'application de changement de cartes

$$\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1 : \varphi_1^{-1}(U_1 \cap U_2) = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} = \varphi_2^{-1}(U_1 \cap U_2)$$

est définie par

$$\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1(x_1, x_2) = \left(\frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}, \frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2} \right)$$

qui est clairement analytique réelle ainsi que son inverse. Nous avons donc exhibé explicitement un atlas analytique de la sphère $\mathbb{S}^2$. Les applications φ_1^{-1} et φ_2^{-1} sont appelées *projections stereógraphiques* de pôles respectifs N et S.

On appelle *sous-variété de dimension* n de $\mathbb{R}^N$ toute partie fermée M telle que, pour tout $x \in M$, il existe un voisinage ouvert U de x et une application différentiable $U \xrightarrow{f} \mathbb{R}^q$ définissant $M \cap U$.

En fait *toute variété différentiable M de dimension n peut être considérée comme sous-variété différentiable de $\mathbb{R}^N$ pour N suffisamment grand* (c'est le *théorème de plongement* de Whitney [Wh] ; le cas analytique est dû à Grauert [Gr]).

ii) Produit de variétés

Soient M et N deux variétés différentiables (resp. analytiques) de dimensions respectives n et q. Alors le produit cartésien $M \times N$ est une variété différentiable (resp. analytique) de diemnsion $n + q$. De manière générale le produit cartésien d'un nombre fini de variétés différentiables (resp. analytiques) est une variété différentiable (resp. analytique) de dimension la somme des dimensions. Par exemple le produit de n exemplaires du cercle $\mathbb{S}^1$ est une variété de dimension n appelée *n-tore réel* $\mathbb{T}^n = \mathbb{S}^1 \times \ldots \times \mathbb{S}^1$. Nous verrons que $\mathbb{T}^n$ est une variété sur laquelle on peut mener beaucoup de calculs de manière plus aisée que sur d'autres.

iii) L'espace projectif réel

Soit $n \geq 1$ un entier. Sur $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ on considère la relation d'équivalence suivante $x \sim y$ si, et seulement si, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ non nul tel que $y = \lambda x$. L'ensemble quotient

$$P^n(\mathbb{R}) = (\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}) / \sim$$

est appelé *espace projectif réel* de dimension n. Nous allons montrer qu'il possède une structure de variété analytique réelle.

Il est évident que $P^n(\mathbb{R})$ est l'ensemble $\{D\}$ des droites D passant par l'origine. Soit $i \in \{1, \ldots, n+1\}$ et notons H_i l'hyperplan de $\mathbb{R}^{n+1}$ d'équation $x_i = 1$. Alors toute droite $D \in P^n(\mathbb{R})$ non parallèle à H_i peut être repérée par son point d'intersection P avec H_i qui a pour coordonnées $(\xi_1, \ldots, \xi_{i-1}, 1, \xi_i, \ldots, \xi_n)$; il est bien entendu déterminé par sa projection P' de coordonnées $(\xi_1, \ldots, \xi_{i-1}, \xi_i, \ldots, \xi_n)$ sur le sous-espace horizontal $H'_i = \mathbb{R}^n$ d'équation $x_i = 0$ (cf. Fig. II.2).

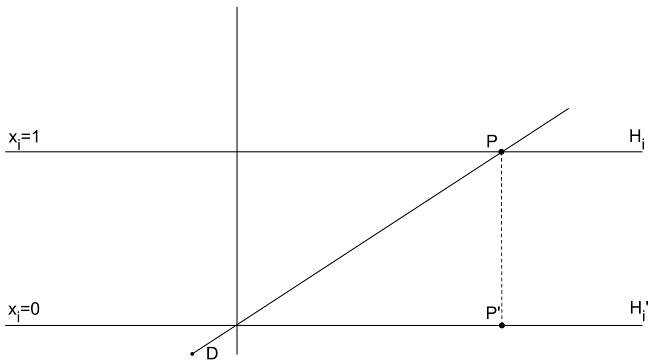


Fig. II.1

L'ensemble des droites D qui rencontrent H_i est un ouvert U_i de $P^n(\mathbb{R})$. On définit l'application $\varphi_i^{-1} : U_i \longrightarrow \mathbb{R}^n$ par

$$\varphi_i^{-1}(D) = (\xi_1, \ldots, \xi_{i-1}, \xi_i, \ldots, \xi_n).$$

On peut calculer les coordonnées $\varphi_i^{-1}(D) = (\xi_1, \ldots, \xi_{i-1}, \xi_i, \ldots, \xi_n)$ en fonction de celles d'un point quelconque $(x_1, \ldots, x_{n+1})$ de la droite D ; elles sont données par

$$\xi_1 = \frac{x_1}{x_i}, \ldots, \xi_{i-1} = \frac{x_{i-1}}{x_i}, \xi_i = \frac{x_{i+1}}{x_i}, \ldots, \xi_n = \frac{x_{n+1}}{x_i}.$$

On a donc un système de cartes locales $(U_i, \varphi_i)_{i=1,\ldots,n+1}$. Vérifions la compatibilité analytique entre deux cartes (U_i, φ_i) et (U_j, φ_j) avec $i \neq j$. Soient $x \in U_i \cap U_j$, $\varphi_i^{-1}(x) = (\xi_1, \ldots, \xi_{i-1}, \xi_i, \ldots, \xi_n)$ et $\varphi_j^{-1}(x) = (\zeta_1, \ldots, \zeta_{j-1}, \zeta_j, \ldots, \zeta_n)$ avec d'une part

$$\xi_1 = \frac{x_1}{x_i}, \ldots, \xi_{i-1} = \frac{x_{i-1}}{x_i}, \xi_i = \frac{x_{i+1}}{x_i}, \ldots, \xi_n = \frac{x_{n+1}}{x_i}$$

et d'autre part

$$\zeta_1 = \frac{x_1}{x_j}, \ldots, \zeta_{j-1} = \frac{x_{j-1}}{x_j}, \zeta_j = \frac{x_{j+1}}{x_j}, \ldots, \zeta_n = \frac{x_{n+1}}{x_j}.$$

Supposons $i < j$; alors les relations suivantes sont évidentes à établir

$$
\text{(II.2)} \qquad \begin{cases} \xi_1 & = \frac{\zeta_1}{\zeta_i} \\ \dots & = \dots \\ \xi_{i-1} & = \frac{\zeta_{i-1}}{\zeta_i} \\ \xi_i & = \frac{\zeta_{i+1}}{\zeta_i} \\ \dots & = \dots \\ \xi_{j-2} & = \frac{\zeta_{j-1}}{\zeta_i} \\ \xi_{j-1} & = \frac{1}{\zeta_i} \\ \xi_j & = \frac{\zeta_j}{\zeta_i} \\ \dots & = \dots \\ \xi_{n-1} & = \frac{\zeta_{n-1}}{\zeta_i} \end{cases}
$$

Ceci montre que les coordonnées ξ_i dépendent analytiquement des coordonnées ζ_j ; autrement dit $P^n(\mathbb{R})$ possède une structure de variété analytique réelle.

1.5. Applications différentiables

Soient M et N deux variétés différentiables de dimensions respectives n et p.

i) Définition. *On dira qu'une application $f : M \longrightarrow N$ est* ***différentiable*** *au point $x \in M$ si, pour toute carte locale de M, (U, φ) contenant x et toute carte locale (V, ψ) de N contenant $f(x)$ et tout voisinage ouvert W de x contenu dans U et tel que $f(W) \subset V$, l'application*

$$\psi^{-1} \circ f \circ \varphi : \varphi^{-1}(W) \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \psi^{-1}(V) \subset \mathbb{R}^p$$

est différentiable. On dira que f est ***différentiable****, si elle est différentiable en tout point de M.*

En particulier, on dira qu'une fonction $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ est *différentiable* si, pour toute carte locale (U, φ), la fonction

$$f \circ \varphi : \varphi^{-1}(U) \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow U \longrightarrow \mathbb{R}$$

est différentiable. La dérivée partielle de $\frac{\partial f}{\partial x_k}(x)$ sera donc par définition

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x) = \frac{\partial (f \circ \varphi)}{\partial x_k}(\varphi^{-1}(x)).$$

Si f est différentiable, bijective et f^{-1} différentiable, on dira que f est un *difféomorphisme* de M sur N. Dans ce cas les variétés M et N ont nécessairement la même dimension.

On notera $C^\infty(M, N)$ l'ensemble des applications différentiables de M dans N et simplement $C^\infty(M)$ lorsque $N = \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) ; ce dernier est une algèbre pour la multiplication des fonctions. L'ensemble des difféomorphismes d'une variété sur elle-même est un groupe (pour la composition des applications) noté Diff(M).

ii) Partition de l'unité.

C'est l'un des instruments les plus puissants en Analyse sur les variétés ; il permet de recoller des objets définis localement en objets globaux.

Soient M une variété et $\rho : M \longrightarrow \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ une fonction. On appelle *support* de ρ et on note supp(ρ) l'adhérence de l'ensemble

$$\{x \in M : \rho(x) \neq 0\}.$$

Soit $\mathcal{U} = (\mathcal{U}_\rangle)_\rangle$ un recouvrement ouvert de M. On dira que $\mathcal{U}$ est *localement fini* si tout point $x \in M$ possède un voisinage qui ne rencontre qu'un nombre fini d'ouverts de la famille $\mathcal{U}$. Sur une variété différentiable (paracompacte comme cela a été supposé avant) un tel recouvrement existe toujours ; on peut même le choisir dénombrable.

Soit $\mathcal{U} = (\mathcal{U}_\rangle)_\rangle$ un recouvrement localement fini sur M. On appelle *partition de l'unité subordonnée* à $\mathcal{U}$ une famille de fonctions réelles différentiables positives $(\rho_i)_i$ telles que

- pour tout $i \in I$, *supp*(ρ_i) est contenu dans U_i,
- $\sum_i \rho_i = 1$.

iii) Proposition. *Tout recouvrement localement fini* $\mathcal{U} = (\mathcal{U}_\rangle)_{\rangle\in\mathcal{I}}$ *admet une partion de l'unité différentiable* $(\rho_i)_{i\in I}$.

Par contre il n'existe pas de partition de l'unité analytique : si ρ_i était analytique, elle serait nulle sur la composante connexe contenant l'ouvert U_i- supp(ρ_i).

1.6. Variétés à bord

Notons $\mathbb{H}^n$ le demi-espace $\{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n \geq 0\}$. Une *variété topologique à bord* est un espace topologique M paracompact dont tout point admet un voisinage homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{H}^n$. Pour avoir de la régularité, on aura besoin de la définition suivante. Une application f d'un ouvert V de $\mathbb{H}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^q$ est dite *différentiable* de classe C^r s'il existe un ouvert $\widetilde{V}$ de $\mathbb{R}^n$ contenant V et une appliaction $\widetilde{f}$ de classe C^r de $\widetilde{V}$ dans $\mathbb{R}^q$ dont la restriction à V est égale à f.

On dira que M est une *variété différentiable à bord* (de classe C^r) s'il existe un recouvrement ouvert $\{U_i\}_{i\in I}$ de M et, pour tout $i \in I$, un homéomorphisme $\varphi_i : \mathbb{H}^n \longrightarrow U_i$ tels que, pour tous $i, j \in I$ avec $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, le changement de coordonnées

$$\varphi_j^{-1} \circ \varphi_i : \varphi_i^{-1}(U_i \cap U_j) \subset \mathbb{H}^n \longrightarrow \varphi_j^{-1}(U_i \cap U_j) \subset \mathbb{H}^n$$

soit de classe C^r. C'est donc la même définition que celle que l'on a donnée pour les variétés sans bord mais avec un modèle local différent (légèrement !). On peut montrer facilement que le *bord* d'une variété à bord de dimension n est une variété (de même classe de différentiabilité) de dimension $n-1$; elle est sans bord et est notée habituellement ∂M.

Si M est orientée, ∂M hérite d'une orientation canoniue : elle est induite par celle de M ; cette observation est très importante, elle intervient dans la formule de Stokes que nous donnerons ultérieurement.

Il existe beaucoup d'exemples de variétés à bord : par exemple les boules fermées dans les espaces numériques $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$: le bord est sphère ; si on enlève une sous-variété N de codimension 1 d'une variété sans bord, on obtient des variétés à bord dont le bord est difféomorphe à N.

2. Variétés complexes

Elles se définissent de la même manière que les variétés différentiables : la notion de difféomorphisme entre ouverts de $\mathbb{R}^n$ sera remplacée par celle d'application biholomorphe entre ouverts de $\mathbb{C}^n$. Nous commencerons par rappeler brièvement la notion de fonction holomorphe, d'abord d'une variable complexe, ensuite de plusieurs variables complexes. Dans toute la suite, $\mathbb{C}^n$ sera identifié à $\mathbb{R}^{2n}$ à l'aide de l'application

$$(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n) \in \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow (x_1 + iy_1, \ldots, x_n + iy_n) \in \mathbb{C}^n. \tag{II.3}$$

Soient U ou ouvert de $\mathbb{C}$ et $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction de classe C^1. Alors la différentielle de φ en un point z quelconque de U est une application $\mathbb{R}$-linéaire $d\varphi_z : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ de matrice

$$d\varphi_z = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(z) & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(z) \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(z) & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}(z) \end{pmatrix}$$

où φ_1 et φ_2 sont les composantes de φ *i.e.* $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$ et $z = x + iy$.

2.1. Définition. *On dira que φ est* ***holomorphe*** *en z si la différentielle $d_z\varphi$ est $\mathbb{C}$-linéaire (via l'identification* (II.3) *entre $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{C}$). On dira que φ est holomorphe sur U si elle est holomorphe en tout point de U.*

Si φ est holomorphe sur U, les coefficients de la matrice $d_z\varphi$ en tout point $z \in U$ vérifient les égalités (dites de *conditions de Cauchy-Riemann*)

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(z) = \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}(z) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(z) = -\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(z). \tag{II.4}$$

On peut aussi écrire

$$d_z\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}dy = \frac{\partial \varphi}{\partial z}dz + \frac{\partial \varphi}{\partial \overline{z}}d\overline{z}$$

où les opérateurs $\frac{\partial}{\partial z}$ et $\frac{\partial}{\partial \overline{z}}$ sont donnés par

(II.5) $$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - i\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + i\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right).$$

On peut vérifier facilement que φ est holomorphe sur U si, et seulement si, la dérivée partielle $\frac{\partial \varphi}{\partial \overline{z}}$ y est identiquement nulle.

La fonction $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{C}$ est holomorphe si, et seulement si, elle est *analytique* sur U *i.e.* pour tout point $z_0 \in U$, il existe un nombre $\rho(z_0) > 0$ tel que φ soit développable en série entière sur le disque ouvert de centre z_0 et de rayon $\rho(z_0)$ *i.e.*

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0) \qquad \text{pour} \qquad |z - z_0| < \rho(z_0)$$

où les a_n sont des constantes complexes.

Soit U un ouvert de $\mathbb{C}^n$. Notons $(z_1, \ldots, z_n)$ les coordonnées complexes d'un point $z \in U$ et $(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n)$ ses coordonnées réelles où, pour tout $k = 1, \ldots, n$, $z_k = x_k + iy_k$. Pour toute fonction $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{C}$ de classe C^1, on pose

$$\partial\varphi = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial z_k} dz_k \quad \text{et} \quad \overline{\partial}\varphi = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial \overline{z}_k} d\overline{z}_k$$

où

(II.6) $$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial z_k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_k} - i\frac{\partial}{\partial y_k}\right) \\ \frac{\partial}{\partial \overline{z}_k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_k} + i\frac{\partial}{\partial y_k}\right). \end{cases}$$

Alors $d\varphi = \partial\varphi + \overline{\partial}\varphi$ où, pour tout point $z \in U$, $\partial_z\varphi$ et $\overline{\partial}_z\varphi$ sont des 1-formes complexes $\mathbb{R}$-linéaires sur $\mathbb{C}^n$. La première est $\mathbb{C}$-linéaire et la deuxième est $\mathbb{C}$-antilinéaire. On dira que φ est *holomorphe*, pour tout point $z \in U \subset \mathbb{C}^n$, la 1-forme $d_z\varphi$ est $\mathbb{C}$-linéaire *i.e.* si la partie antilinéaire $\overline{\partial}_z\varphi$ est nulle.

2.2. Définition. *On dira que φ est* ***holomorphe*** *au point $z \in U \subset \mathbb{C}^n$ si la 1-forme $d_z\varphi$ est $\mathbb{C}$-linéaire i.e. si la partie antilinéaire $\overline{\partial}_z\varphi$ est nulle. On dira que φ est holomorphe sur U si elle est holomorphe en chaque point de U.*

De manière analogue au cas d'une variable, une fonction complexe φ définie sur un ouvert U de $\mathbb{C}^n$, est holomorphe si, et seulement si, elle est *analytique* sur U *i.e.* pour tout $z = (z_1, \ldots, z_n) \in U$, il existe n nombres réels strictement positifs $\rho_1, \ldots, \rho_n$ tels que φ soit développable en série entière sur le polydisque

$$\mathbb{D}^n = \{(w_1, \ldots w_n) \in U \ : \ |w_k - z_k| < \rho_k, \ \ k = 1, \ldots, n\}$$

c'est-à-dire

$$\varphi(w) = \sum_{k_1 \dots k_n} c_{k_1 \dots k_n} (w_1 - z_1)^{k_1} \dots (w_n - z_n)^{k_n} \quad \text{pour} \quad w \in \mathbb{D}^n.$$

Si $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m)$ est une fonction définie sur un ouvert $U \in \mathbb{C}^n$ et à valeurs dans $\mathbb{C}^m$ on dira que φ est *holomorphe* sur U si chacune de ses composantes φ_ℓ, $\ell = 1, \dots, m$ est holomorphe en tant que fonction définie sur U et à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Une *application biholomorphe* d'un ouvert U de $\mathbb{C}^n$ sur un ouvert V de $\mathbb{C}^m$ est une application bijective $\varphi : U \longrightarrow V$ telle que φ et son inverse φ^{-1} soient holomorphes. Dans ce cas, on a nécessairement $n = m$. On dira que les deux ouverts U et V de $\mathbb{C}^n$ sont *holomorphiquement équivalents.*

On est maintenant en mesure de donner la notion de *variété analytique complexe.* Soit M une variété topologique de dimension $2n$.

2.3. Définition. *On dira que M est une* ***variété analytique complexe*** *de dimension n si elle admet un atlas $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$ où, pour tout $i \in I$, φ_i est un homéomorphisme d'un ouvert de $\mathbb{C}^n$ sur U_i tel que si $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ l'homéomorphisme*

$$\varphi_j \circ \varphi_i : \varphi_i^{-1}(U_i \cap U_j) \subset \mathbb{C}^n \longrightarrow \varphi_j^{-1}(U_i \cap U_j) \subset \mathbb{C}^n$$

soit biholomorphe.

Par définition même, toute variété analytique complexe est munie naturellement d'une structure de variété analytique réelle.

Tout ouvert d'une variété analytique complexe (en particulier tout ouvert de $\mathbb{C}^n$) est une variété analytique complexe de même dimension.

2.4. Exemples

Ils seront définis de manière presque similaire que pour le cas réel. Evidemment le premier exemple de variété analytique complexe de dimension n est l'espace $\mathbb{C}^n$.

i) Sous-variétés de $\mathbb{C}^N$

Soient $N = n + q$ et $f : \mathbb{C}^N \longrightarrow \mathbb{C}^q$ une application holomorphe telle que $c \in f(\mathbb{C}^N)$. On pose

$$M = \left\{ z \in \mathbb{C}^N : f(z) = c \right\}.$$

Supposons qu'en tout point $z = (z_1, \dots, z_N) \in M$, la différentielle

$$d_z f : \mathbb{C}^N \longrightarrow \mathbb{C}^q$$

(qui est une application $\mathbb{C}$-linéaire) soit de rang maximum. *Alors la version complexe du théorème des fonctions implicites montre que M possède une structure de variété analytique complexe de dimension n.* On dira que f est une *fonction définissant M.*

Contrairement au cas réel, il existe beaucoup de variétés analytiques complexes qui ne peuvent pas être obtenues de cette manière : il n'existe pas de version holomorphe du *théorème de plongement de Whitney*. Par exemple les variétés analytiques complexes compactes de dimension strictement positive ne peuvent jamais être plongées (de manière holomorphe bien sûr) dans un $\mathbb{C}^N$.

ii) La sphère $\mathbb{S}^2$

Reprenons les notations de 1.4. i). On a deux ouverts

$$U_1 = \mathbb{S}^2 - \{N\} \quad \text{et} \quad U_2 = \mathbb{S}^2 - \{S\}$$

et deux applications $\varphi_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow U_1 \subset \mathbb{R}^3$ et $\varphi_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow U_2 \subset \mathbb{R}^3$ qui, en identifiant $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$ et en posant $z = x_1 + ix_2$, peuvent sécrire sous la forme

$$\varphi_1(z) = \left(\frac{z + \overline{z}}{1 + z\overline{z}}, \frac{i(\overline{z} - z)}{1 + z\overline{z}}, \frac{-1 + z\overline{z}}{1 + z\overline{z}} \right)$$

et

$$\varphi_2(z) = \left(\frac{z + \overline{z}}{1 + z\overline{z}}, \frac{i(\overline{z} - z)}{1 + z\overline{z}}, \frac{1 - z\overline{z}}{1 + z\overline{z}} \right).$$

Leurs inverses s'écrivent respectivement

$$\varphi_1^{-1}(X_1, X_2, X_3) = \frac{X_1}{1 - X_3} + i\frac{X_2}{1 - X_3}$$

et

$$\varphi_2^{-1}(X_1, X_2, X_3) = \frac{X_1}{1 + X_3} + i\frac{X_2}{1 + X_3}.$$

On pose $\psi_1 = \varphi_1 \circ *$ où $* : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ est la conjugaison complexe et $\psi_2 = \varphi_2$. Il est alors facile de vérifier que l'application

$$\psi_1^{-1} \circ \psi_2 : \psi_2^{-1}(U_1 \cap U_2) = \mathbb{C}^* \longrightarrow \psi_1^{-1}(U_1 \cap U_2) = \mathbb{C}^*$$

s'écrit $\psi_1^{-1} \circ \psi_2(z) = \frac{1}{z}$ et est donc une transformation biholomorphe de $\mathbb{C}^*$.

L'atlas $(U_i, \psi_i)_{i=1,2}$ munit donc la sphère $\mathbb{S}^2$ d'une structure de variété analytique complexe de dimension 1.

iii) L'espace projectif complexe

De manière analogue au cas réel, sur $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ on considère la relation d'équivalence

$$z \sim w \Longleftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C}^* \text{ tel que } w = \lambda z.$$

Le quotient $P^n(\mathbb{C})$ de $\mathbb{C}^{n+1}-\{0\}$ par cette relation d'équivalence est appelé *espace projectif complexe* de dimension n. On peut montrer, en suivant exactement la démarche entreprise pour le cas réel, que $P^n(\mathbb{C})$ possède une structure de variété analytique complexe de dimension n : il suffit de remplacer tout objet réel par son analogue complexe. Les changements de cartes sont donnés par les mêmes expressions (II.2) qui montrent qu'ils sont biholomorphes.

2.5. Applications holomorphes

Soient M et N deux variétés analytiques complexes de dimensions respectives n et q.

On dira qu'une application $f : M \longrightarrow N$ est ***holomorphe*** *au point $z \in M$ si, pour toute carte locale de M, (U, φ) contenant z et toute carte locale (V, ψ) de N contenant $f(z)$ et tout voisinage ouvert W de z contenu dans U et tel que $f(W) \subset V$, l'application*

$$\psi^{-1} \circ f \circ \varphi : \varphi^{-1}(W) \subset \mathbb{C}^n \longrightarrow \psi^{-1}(V) \subset \mathbb{C}^q$$

est holomorphe au point $\psi^{-1}(z)$. On dira que f est ***holomorphe*** *si elle est holomorphe en tout point de M.*

Une fonction $f : M \longrightarrow \mathbb{C}$ est dite *holomorphe* si pour toute carte locale (U, φ) la fonction

$$f \circ \varphi : \varphi^{-1}(U) \subset \mathbb{C}^n \longrightarrow U \longrightarrow \mathbb{C}$$

est holomorphe au sens de la définition 2.2.

Si f est holomorphe, bijective et f^{-1} holomorphe on dira que f est un *biholomorphisme* de M sur N. Dans ce cas les variétés M et N ont nécessairement la même dimension.

On notera $\mathcal{H}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ l'ensemble des applications holomorphes de M dans N et simplement $\mathcal{H}(\mathcal{M})$ lorsque $N = \mathbb{C}$; ce dernier est une algèbre pour la multiplication des fonctions. L'ensemble des biholomorphismes (ou automorphismes) d'une variété analytique complexe est un groupe (pour la composition des applications) noté $\mathrm{Aut}(M)$; c'est bien sûr un sous-groupe de $\mathrm{Diff}(M)$.

Une variété différentiable ou analytique complexe est dite *connexe, compacte etc.* si elle est connexe, compacte *etc.* en tant qu'espace topologique. Par exemple $\mathbb{S}^2$, $P^n(\mathbb{R})$ et $P^n(\mathbb{C})$ sont des variétés connexes compactes. Nous donnerons par la suite un procédé de construction permettant de diversifier les exemples de variétés différentiables et analytiques complexes.

3. Espaces tangents

Nous traiterons d'abord le cas réel. Soient M une variété différentiable et $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$ un atlas définissant M. On a vu qu'une fonction $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ est différentiable si, pour tout $i \in I$, la fonction

$$f \circ \varphi_i : \varphi^{-1}(U_i) \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow U_i \longrightarrow \mathbb{R}$$

est différentiable et que la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x_k}(x)$ est donnée par

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x) = \frac{\partial (f \circ \varphi_i)}{\partial x_k}(\varphi_i^{-1}(x)).$$

Pour tout $k = 1, \dots, n$, on obtient donc un opérateur $\frac{\partial}{\partial x_k}$ qui à toute fonction différentiable f sur U_i associe la fonction $\frac{\partial f}{\partial x_k}$. En chaque point $x \in U_i$, les opérateurs $\frac{\partial}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}(x)$ sont linéairement indépendants. Si (U_j, φ_j) est une autre carte locale de système de coordonnés $(x'_1, \dots, x'_n)$ un point $x \in U_i \cap U_j$ est repéré par ses coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ dans U_i et ses coordonnées $(x'_1, \dots, x'_n)$ dans U_j et on a

$$(x'_1, \dots, x'_n) = \varphi_{ij}(x_1, \dots, x_n)$$

avec $\varphi_{ij} = \varphi_j^{-1} \circ \varphi_i$. Il est alors facile de montrer que, pour tout $k = 1, \dots, n$, on a

$$\text{(II.7)} \qquad \frac{\partial}{\partial x_k}(x) = \sum_{\ell=1}^{n} \frac{\partial x'_\ell}{\partial x_k}(x) \frac{\partial}{\partial x'_\ell}(x).$$

En tout point $x \in M$ les opérateurs $\frac{\partial}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}(x)$ engendrent donc sur $\mathbb{R}$ un espace vectoriel de dimension n indépendant de la carte choisie (U_i, φ_i) pour le définir.

3.1. Définition. *On appelle* **espace tangent** *à M en x, l'espace vectoriel T_xM engendré par les opérateurs $\frac{\partial}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}(x)$ à l'aide d'une carte quelconque (U_i, φ_i).*

Pour les variétés qui sont plongées dans un espace euclidien $\mathbb{R}^N$, on peut percevoir de manière très concrète la notion d'espace tangent.

3.2. Courbe Γ dans $\mathbb{R}^2$

La notion d'espace tangent étant purement locale on peut supposer qu'au voisinage d'un point $a \in \Gamma$ de coordonnées (a_1, a_2) la courbe est définie par une équation explicite du type $x_2 = f(x_1)$ où f est une fonction de classe C^∞ sur $]a_1 - \varepsilon, a_1 + \varepsilon[$ avec $\varepsilon > 0$. L'espace tangent à la courbe Γ au point a n'est rien d'autre que la droite affine de $\mathbb{R}^2$ d'équation cartésienne $x_2 - a_2 = f'(a_1)(x_1 - a_1)$ qui peut encore s'écrire, si on pose $F(x_1, x_2) = f(x_1) - x_2$:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}(a)(x_1 - a_1) + \frac{\partial F}{\partial x_2}(a)(x_2 - a_2) = 0$$

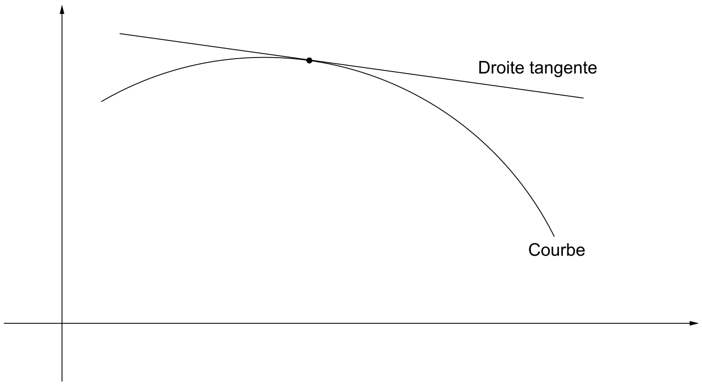


Fig. II.3

3.3. Sous-variétés de codimension 1

Si M est une sous-variété de $\mathbb{R}^N$ définie localement sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^N$ par une équation du type

$$F(x_1, \ldots, x_N) = 0$$

où $F : U \longrightarrow \mathbb{R}$ est C^∞, alors l'espace tangent à M au point $a = (a_1, \ldots, a_N)$ est le noyau de la forme affine sur $\mathbb{R}^N$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} \longmapsto \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial F}{\partial x_k}(a)(x_k - a_k).$$

Par exemple la sphère $\mathbb{S}^{N-1}$ de $\mathbb{R}^N$ est définie par l'équation

$$F(x_1, \ldots, x_N) = 1 - \sum_{k=1}^{N} x_k^2 = 0$$

et a pour espace tangent au point $a = (\frac{1}{\sqrt{N}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{N}})$ l'hyperplan affine de $\mathbb{R}^N$ d'équation

$$\sum_{k=1}^{N} x_k = \sqrt{N}.$$

Soit maintenant h une application différentiable d'une variété M de dimension n dans une variété N de dimension q. On supposera que M et N sont définies par les atlas respectifs $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$ et $(V_j, \psi_j)_{j \in J}$ et, pour ne pas alourdir les notations, on fera comme si les ouverts de coordonnées U_i et V_j étaient en fait les espaces euclidiens $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^q$. Pour tout $x \in M$ de coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ l'application h définit une application linéaire

$$d_x h : T_x M \longrightarrow T_{h(x)} N$$

qui à tout opérateur $\frac{\partial}{\partial x_k}(x)$, k variant de 1 à n, associe l'opérateur $d_x h\left(\frac{\partial}{\partial x_k}(x)\right)$ donné sur une fonction $f : N \longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$d_x h\left(\frac{\partial}{\partial x_k}(x)\right)(f) = \sum_{\ell=1}^{q} \frac{\partial y_\ell}{\partial x_k}(x) \frac{\partial f}{\partial y_\ell}(h(x))$$

où $(y_1, \ldots, y_q)$ sont les coordonnées du point $h(x)$ pour tout $x \in M$. On peut vérifier que la définition de l'application $d_x h$ ne dépend pas du système de coordonnées locales. On l'appelle *application tangente* à h au point $x \in M$.

Soit M une variété différentiable définie par un atlas $(U_i, \varphi_i)_{i\in I}$. Pour tout $i \in I$ on pose

$$\Omega_i = \bigcup_{x\in U_i} T_x M.$$

Alors l'application $\Phi_i : U_i \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \Omega_i$ définie par

$$\Phi_i(x, f_1, \ldots, f_n) = \left(x, \sum_{k=1}^{n} f_k \frac{\partial}{\partial x_k}(x)\right)$$

est une bijection. On munit Ω_i de l'unique topologie $\mathcal{T}_\rangle$ pour laquelle l'application Φ_i est un homéomorphisme ($U_i \times \mathbb{R}^n$ étant muni de la topologie produit). De cette façon on définit une structure de variété topologique de dimension $2n$ sur l'ensemble

$$TM = \bigcup_{x\in M} T_x M$$

à l'aide de l'atlas (Ω_i, Φ_i). (La topologie sur TM est celle engendrée par les $\mathcal{T}_\rangle$.) En fait TM est une variété différentiable. En effet l'application

$$\Phi_j^{-1} \circ \Phi_i : \Phi_i^{-1}(\Omega_i \cap \Omega_j) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \Phi_j^{-1}(\Omega_i \cap \Omega_j) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$$

s'écrit

$$\Phi_j^{-1} \circ \Phi_i(x, u_x) = \left(\varphi_j^{-1} \circ \varphi_i(x), d_x(\varphi_j^{-1} \circ \varphi_i)(u_x)\right)$$

et montre bien que $\Phi_j^{-1} \circ \Phi_i$ est un difféomorphisme de classe C^∞ de $\Phi_i^{-1}(\Omega_i \cap \Omega_j)$ sur $\Phi_j^{-1}(\Omega_i \cap \Omega_j)$.

On a une projection canonique $\pi : TM \longrightarrow M$ définie par $\pi(x, u_x) = x$.

3.4. Définition. *On appelle* ***fibré tangent*** *à M la variété TM et la projection canonique $\pi : TM \longrightarrow M$.*

On a, pour tout couple (i, j) vérifiant $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, une application

$$\gamma_{ij} : U_i \cap U_j \longrightarrow \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$$

définie par $\gamma_{ij}(x) = d_x\left(\varphi_j^{-1} \circ \varphi_i\right)$. Sur l'intersection $U_i \cap U_j \cap U_k$, les applications γ_{ij} vérifient la condition

$$\gamma_{ik} = \gamma_{jk} \circ \gamma_{ij}$$

On dira que $(U_i, \gamma_{ij})_{i,j\in I}$ est un *cocycle* définissant le fibré (TM, π). Le fibré tangent à M peut être vu comme une collection d'espaces vectoriels isomorphes à $\mathbb{R}^n$ (les espaces tangents aux différents points) paramétrée par M.

3.5. Définition. *On appelle* ***section*** *de TM ou* ***champ de vecteurs*** *sur M toute application $X : M \longrightarrow TM$ telle que $\pi \circ X = id_M$.*

Sur une carte locale (U_i, φ_i) de coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$, un champ de vecteurs a pour expression

$$X_i(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \frac{\partial}{\partial x_k}(x) \tag{II.8}$$

où les f_k sont des fonctions de classe C^∞ sur U_i. L'ensemble $C^\infty(TM)$ des champs de vecteurs sur M, ou des sections C^∞ du fibré TM, est un module sur l'anneau $C^\infty(M)$ des fonctions de classe C^∞. On peut y définir une structure multiplicative de la façon suivante : soient X et Y deux champs de vecteurs sur M ; on peut les écrire localement

$$X_i(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \frac{\partial}{\partial x_k}(x) \ \text{ et } \ Y_i(x) = \sum_{\ell=1}^{n} g_\ell(x) \frac{\partial}{\partial x_\ell}(x)$$

Un calcul facile montre que pour toute fonction $h : M \longrightarrow \mathbb{R}$, de classe C^∞, on a

$$X_i(Y_i(h)) - Y_i(X_i(h)) = \sum_{k,\ell} \left(f_k \frac{\partial g_\ell}{\partial x_k} \frac{\partial h}{\partial x_\ell} - g_\ell \frac{\partial f_k}{\partial x_\ell} \frac{\partial h}{\partial x_k} \right).$$

On définit ainsi un nouveau champ (local) de vecteurs $X_iY_i - Y_iX_i$; on montre que ceci ne dépend pas de la carte choisie ; on obtient alors un champ de vecteurs global $XY - YX$ qu'on note $[X, Y]$ et qu'on appelle *crochet* de X et Y ; $[X, Y]$ est le commutateur de X et Y vus comme opérateurs (*différentiels d'ordre* 1) sur $C^\infty(M)$. On vérifie facilement l'identité suivante dite *identité de Jacobi* :

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [Y, X]] = 0 \tag{II.9}$$

On dira que $(C^\infty(TM), [\ ,\ ])$ est l'*algèbre de Lie* des champs de vecteurs sur M.

Une variété M (de dimension n) est dite *parallélisable* s'il existe un difféomorphisme $\Phi : M \times \mathbb{R}^n \longrightarrow TM$ tel que pour tout point x de M, l'application induite $\Phi_x : \{x\} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow T_xM$ soit un isomorphisme d'espaces vectoriels. On dira alors que le fibré tangent TM est *trivial* et que Φ en est une *trivialisation.* La "parallélisabilité" se traduit aussi par l'existence de n champs de vecteurs tangents partout linéairement indépendants ; dans ce cas le $C^\infty(M)$-module $C^\infty(TM)$ est *libre* de rang n.

En général le fibré $TM \longrightarrow M$ n'est pas trivial mais tout point $x \in M$ admet un voisinage ouvert U tel que $TU \longrightarrow U$ soit trivial ; on dira que TM est *localement trivial.* La trivialité locale du fibré tangent découle automatiquement de la manière dont il a été construit.

Le fibré tangent à une variété est un cas particulier d'une notion plus générale : celle de *fibré vectoriel* que nous étudierons par la suite.

3.6. Cas d'une variété complexe

Soit M une variété complexe de dimension n. Au voisinage de chaque point $z \in M$ on a un système de coordonnées locales (holomorphes) $(z_1, \ldots, z_n)$. On a, pour tout $k = 1, \ldots, n$, $z_k = x_k + y_k$ et $(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n)$ est un système de coordonnées locales pour la structure de variété différentiable sous-jacente. Comme

$$\frac{\partial}{\partial z_k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_k} - i\frac{\partial}{\partial y_k}\right) \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial \overline{z}_k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_k} + i\frac{\partial}{\partial y_k}\right) \qquad k = 1, \ldots, n$$

ces champs engendrent au point z, l'espace $T_zM \otimes \mathbb{C}$ qui s'écrit donc sous la forme

$$T_zM \otimes \mathbb{C} = T_z^{10}M \oplus T_z^{01}M$$

où $T_z^{10}M$ et $T_z^{01}M$ sont les sous-espaces de $T_zM \otimes \mathbb{C}$ engendrés (sur $\mathbb{C}$) respectivement par les systèmes libres $\left(\frac{\partial}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial z_n}\right)$ et $\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial \overline{z}_n}\right)$. Ceci donne lieu à une décomposition du fibré $TM \otimes \mathbb{C}$ sous la forme

$$TM \otimes \mathbb{C} = T^{10}M \oplus T^{01}M.$$

Les fibrés $T^{10}M$ et $T^{01}M$ sont appelés respectivement *fibré tangent holomorphe* et *fibré tangent antiholomorphe* de M. Une section de $T^{10}M$ (resp. de $T^{01}M$) est dite *champ de vecteurs de type* $(1,0)$ (resp. de *type* $(0,1)$).

Sur l'espace vectoriel T_zM on a un opérateur réel $J_z : T_zM \longrightarrow T_zM$ défini, pour tout $k = 1, \cdots, n$, par

$$J_z\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right) = \frac{\partial}{\partial y_k} \;\; \text{et} \;\; J_z\left(\frac{\partial}{\partial y_k}\right) = -\frac{\partial}{\partial x_k}.$$

Il vérifie $J^2 = -id$. Et évidemment l'application qui à z associe $J_z \in \mathrm{End}(T_zM)$ est C^∞ (voir le chapitre *fibrés vectoriels* pour la signification de cette notion). L'endomorphisme J

permet de munir chaque espace tangent T_zM d'une structure d'espace vectoriel complexe : multiplier par i revient à appliquer J. On dira que J est une *structure presque complexe* sur M (c'est celle associée à la structure complexe de M).

Réciproquement soit M une variété différentiable de dimension $2n$. On appelle *structure presque complexe* sur M la donnée, pour chaque $z \in M$, d'un élément $J_z \in \mathrm{End}(T_zM)$ variant différentiablement en fonction de z et vérifiant $J^2 = -id$. Une question naturelle est alors de savoir quand la structure presque complexe J provient-elle d'une structure complexe. Quand c'est le cas on dit que J est *intégrable*. Le défaut d'intégrabilité est mesuré par la quantité suivante appelée *tenseur de Nijenhuis* (*cf.* [KN]) :

$$N(X,Y) = \frac{1}{4}\Big\{[X,Y] + J[JX,Y] + J[X,JY] - J[X,Y]\Big\} \tag{II.10}$$

où X et Y sont des champs tangents à M. En fait les assertions suivantes sont équivalentes

i) si X et Y sont de type $(1,0)$, il en est de même pour $[X,Y]$;
ii) si X et Y sont de type $(0,1)$, il en est de même pour $[X,Y]$;
iii) J est intégrable ;
iv) le tenseur N est identiquement nul.

On appelle *champ de vecteurs holomorphe* sur M toute section holomorphe du fibré $\pi : T^{10}M \longrightarrow M$ *i.e.* une application $Z : M \longrightarrow TM$ telle que $\pi \circ Z = id_M$ et pour tout système $(U,(z_1,\ldots,z_n))$ de coordonnées locales, Z a pour expression

$$Z(z) = \sum_{k=1}^{n} h_k(z)\frac{\partial}{\partial z_k}$$

où les h_k sont des fonctions holomorphes sur U. L'ensemble $\mathcal{O}(\mathcal{T}^{\infty\prime}\mathcal{M})$ des champs holomorphes sur M est un module sur l'anneau $\mathcal{O}(\mathcal{M})$ des fonctions holomorphes.

4. Formes différentielles

Elles sont une version paramétrée des formes extérieures. Nous allons d'abord les introduire en supposant que M est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ ensuite nous transposerons la définition dans le cas général par le biais des cartes locales (U_i,φ_i). Nous verrons aussi comment se transportent les formes différentielles par une application différentiable et comment, en degré maximum, elles définissent des mesures sur la variété.

4.1. Généralités

Supposons d'abord que M est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soit r un entier naturel et notons $\Lambda^r\mathbb{R}^n$ l'espace des r-formes extérieures sur $\mathbb{R}^n$. On appelle *forme différentielle de degré r* ou simplement *r-forme* sur M toute application $\alpha : M \longrightarrow \Lambda^r\mathbb{R}^n$ de classe C^∞. Pour chaque $x \in M$, α_x est une r-forme linéaire alternée sur $\mathbb{R}^n$. L'ensemble des r-formes différentielles sur M est donc un espace vectoriel réel ; on le notera $\Omega^r(M)$. On voit que $\Omega^r(M) = \{0\}$ si $r > n$; on pose $\Omega^r(M) = \{0\}$ pour $r < 0$. Décrivons explicitement les espaces $\Omega^r(M)$.

i) $\underline{r=0}$. On a $\Lambda^0\mathbb{R}^n = \mathbb{R}$; donc se donner une 0-forme c'est se donner une fonction C^∞, $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$.

ii) $\underline{r=1}$. Soit $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞. On sait qu'en tout point $x = (x_1, \ldots x_n) \in M$ la différentielle $d_x f$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ *i.e.* $d_x f$ est un élément de $\Lambda^1\mathbb{R}^n$; elle a pour expression

$$d_x f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) dx_i.$$

Les 1-formes $dx_1, \ldots, dx_n$ sont les différentielles des fonctions coordonnées

$$x \in M \longmapsto x_i \in \mathbb{R} \quad \text{pour } i = 1, \ldots, n.$$

Prises en un point, elles constituent une base de l'espace vectoriel $\Lambda^1\mathbb{R}^n$. Comme une 1-forme α sur M est une application $M \longrightarrow \Lambda^1\mathbb{R}^n$, elle s'écrit sous la forme

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i dx_i$$

où les α_i sont des fonction C^∞ sur M.

iii) $\underline{r \text{ quelconque}}$. En prenant tous les produits extérieurs possibles $dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_r}$ pour $1 \leq i_1 < \ldots < i_r \leq n$ on définit une base de $\Lambda^r\mathbb{R}^n$. Ainsi toute r-forme différentielle α sur M est du type

$$\alpha = \sum \alpha_{i_1 \ldots i_r} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_r}$$

où la somme porte sur tous les r-uplets $(i_1, \ldots, i_r)$ tels que $1 \leq i_1 < \ldots < i_r \leq n$ et les $\alpha_{i_1 \ldots i_r}$ sont des fonctions C^∞ sur M. On pose

$$\Omega^*(M) = \bigoplus_{r=0}^{n} \Omega^r(M).$$

Deux formes différentielles $\alpha \in \Omega^r(M)$ et $\beta \in \Omega^s(M)$ s'écrivant

$$\alpha = \sum \alpha_{i_1 \ldots i_r} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_r} \quad \text{et} \quad \beta = \sum \beta_{j_1 \ldots j_s} dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_s}$$

ont pour produit extérieur

$$\alpha \wedge \beta = \sum \alpha_{i_1 \ldots i_r} \beta_{j_1 \ldots j_s} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_r} \wedge dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_s}$$

où la somme est étendue à tous les r-uplets $(i_1, \ldots, i_r)$ et s-uplets $(j_1, \ldots, j_s)$ tels que $1 \leq i_1 < \ldots < i_r \leq n$ et $1 \leq j_1 < \ldots < j_s \leq n$. On obtient ainsi une forme différentielle de degré $r + s$ sur M. On a bien sûr

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{rs} \beta \wedge \alpha$$

et

$$\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) = (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma$$

L'espace $\Omega^*(M)$ est ainsi muni d'une structure d'*algèbre graduée anticommutative.* Le produit extérieur d'une r-forme et d'une fonction est une r-forme différentielle. Chaque espace vectoriel $\Omega^r(M)$ admet donc une structure de *module libre de rang* $N = C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ sur l'anneau des fonctions C^∞ sur M (qui n'est rien d'autre que $\Omega^0(M)$).

4.2. Effet d'une application différentiable

Cette section reprend un peu la section 4 du chapitre I dans le contexte des formes différentielles. Soient M et N deux ouverts respectivement de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$ et $\varphi : M \longrightarrow N$ une application C^∞. Alors pour tout point $x \in M$, la différentielle $d_x\varphi$ est une application linéaire de l'espace $\mathbb{R}^n$ dans l'espace $\mathbb{R}^p$. Pour tout $r \in \mathbb{N}$, elle induit une application linéaire

$$\varphi^* : \Omega^r(N) \longrightarrow \Omega^r(M)$$

définie pour toute r-forme β sur N de la façon suivante : pour tout point $x \in M$ et tout système de r vecteurs $(u_1, \ldots, u_r)$ de $\mathbb{R}^n$ on pose

$$\varphi^*(\beta)(x)(u_1, \ldots, u_r) = \beta(\varphi(x))(d_x\varphi(u_1), \ldots, d_x\varphi(u_r)).$$

On dira que $\varphi^*(\beta)$ est l'*image réciproque* de β par φ. On peut préciser l'écriture à l'aide des composantes $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$ de φ qui sont des fonctions réelles C^∞ sur M. Notons $(x_1, \ldots, x_n)$ et $(y_1, \ldots, y_p)$ les coordonnées respectivement sur $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$. Alors pour tout $j = 1, \ldots, p$ la composante φ_j n'est rien d'autre que la composée $y_j \circ \varphi$, y_j étant considérée comme la projection $(y_1, \ldots, y_p) \in \mathbb{R}^p \longmapsto y_j \in \mathbb{R}$. Alors si β a pour écriture

$$\beta = \sum \beta_{j_1 \ldots j_r} dy_{j_1} \wedge \ldots \wedge dy_{j_r}$$

celle de $\varphi^*(\beta)$ est

$$\varphi^*(\beta) = \sum (\beta_{j_1 \ldots j_r} \circ \varphi) d\varphi_{j_1} \wedge \ldots \wedge d\varphi_{j_r}$$

ou encore

$$\varphi^*(\beta) = \sum (\beta_{j_1 \ldots j_r} \circ \varphi) \Delta_{i_1 \ldots i_r} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_r}$$

où la sommation porte sur tous les r-uplets $(i_1, \ldots i_r)$ et $(j_1, \ldots, j_r)$ vérifiant les inégalités $1 \leq i_1 < \ldots < i_r \leq n$ et $1 \leq j_1 < \ldots < j_r \leq n$ et les $\Delta_{i_1 \ldots i_r}(x)$ sont les déterminants des matrices jacobiennes

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_{j_1}}{\partial x_{i_1}}(x) & \ldots & \frac{\partial \varphi_{j_1}}{\partial x_{i_r}}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_{j_r}}{\partial x_{i_1}}(x) & \ldots & \frac{\partial \varphi_{j_r}}{\partial x_{i_r}}(x) \end{pmatrix}.$$

Les propriétés essentielles de l'application $\varphi^* : \Omega^r(N) \longrightarrow \Omega^r(M)$ sont les suivantes :

(1) si φ est l'identité d'un ouvert $M \subset \mathbb{R}^n$ alors φ^* est l'identité de $\Omega^r(M)$ pour tout r ; si $M \xrightarrow{\varphi} N \xrightarrow{\psi} L$ sont deux applications C^∞ alors $(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^*$.

(2) Si φ est un difféomorphisme alors φ^* est un isomorphisme entre les algèbres graduées $\Omega^*(N)$ et $\Omega^*(M)$ et on a $(\varphi^*)^{-1} = (\varphi^{-1})^*$.

Mettons-nous maintenant dans le cas général *i.e.* M n'est plus forcément un ouvert de $\mathbb{R}^n$ mais une variété quelconque définie comme on l'a dit par l'atlas $(U_i, \varphi_i)_{i\in I}$. On posera $\varphi_{ij} = \varphi_j^{-1} \circ \varphi_i$.

Une *r-forme différentielle* sur M est une collection $\alpha = (\alpha_i)_{i\in I}$ où α_i est une r-forme sur l'ouvert $\varphi_i^{-1}(U_i)$ telle que sur toute intersection non vide $U_i \cap U_j$ on ait la condition de recollement

$$\alpha_i = \varphi_{ij}^*(\alpha_j). \tag{II.11}$$

L'espace des r-formes différentielles sur M sera toujours noté $\Omega^r(M)$. Toutes les propriétés qu'on vient de donner de l'espace $\Omega^r(M)$ dans le cas M difféomorphe à $\mathbb{R}^n$ se transportent systématiquement au cas où M est une variété.

On conviendra que dorénavant l'écriture dans une carte locale $(U, x_1, \ldots, x_n)$ d'une r-forme α sur M sera

$$\alpha = \sum \alpha_{i_1\ldots i_r} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_r} \tag{II.12}$$

où la sommation est, comme d'habitude, étendue à tous les r-uplets d'entiers $(i_1, \ldots, i_r)$ avec $1 \leq i_1 < \ldots < i_r \leq n$.

4.3. Intégration d'une forme volume

Soit $\mathcal{O}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$; la restriction de la mesure de Lebesgue $\lambda = dx_1 \otimes \ldots \otimes dx_n$ induit une mesure λ sur $\mathcal{O}$. Soient $\mathcal{O}'$ un autre ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $\varphi : \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}'$ un difféomorphisme de classe C^1.

Une fonction mesurable $f : \mathcal{O}' \longrightarrow \mathbb{R}$ est λ-intégrable si, et seulement si, $f \circ \varphi$ est μ-intégrable (μ étant la mesure $|J(\varphi)|\lambda$ et $J(\varphi)$ le déterminant jacobien de φ) et on a en plus

$$\int_{\mathcal{O}'} f d\lambda = \int_{\mathcal{O}} f \circ \varphi |J(\varphi)| d\lambda.$$

Soit maintenant ω une n-forme différentielle à support compact sur $\mathbb{R}^n$; alors ω s'écrit $\omega = f dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$ où f est une fonction à support compact. On définit l'intégrale de ω sur $\mathbb{R}^n$ comme étant le nombre

$$\int_{\mathbb{R}^n} \omega = \int_{\mathbb{R}^n} f dx_1 \otimes \ldots \otimes dx_n.$$

On vérifie facilement que, si $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est un difféomorphisme, alors

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi^* \omega = (\text{signe de } J(\varphi)) \int_{\mathbb{R}^n} \omega.$$

Ceci étant, nous allons préciser quand et comment on peut *intégrer sur une variété* M. Supposons qu'elle est définie par un atlas $\mathcal{U} = (\mathcal{U}_\rangle, \varphi_\rangle)_{\rangle \in \mathcal{I}}$ où U_i est un recouvrement (localement fini de M). *Alors M est orientable si elle vérifie l'une des assertions équivalentes suivantes :*

i) Les déterminants jacobiens de tous les difféomorphismes de changement de cartes $\varphi_j^{-1} \circ \varphi_i$ sont positifs ;

ii) Il existe sur M une forme différentielle v de degré n partout non nulle ; ω est appelée <u>forme volume</u> sur M.

Supposons M connexe orientée par la donnée d'une n-forme volume ω. Soit $(\rho_i)_{i \in I}$ une partition de l'unité différentiable subordonnée au recouvrement $\mathcal{U}$. Alors la n-forme $\rho_i \omega$ est à support dans U_i et on a $\omega = \sum_{i \in I} \rho_i \omega$. Le nombre

$$\sum_{i \in I} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_i^*(\rho_i \omega)$$

(s'il existe) *ne dépend ni du choix de l'atlas* (U_i, φ_i) *ni de la partition de l'unité* (ρ_i). On l'appelle *intégrale de ω sur M* et on note $\int_M \omega$. L'intégrale vérifie les propriétés de linéarité évidentes

$$\int_M \omega + \tau = \int_M \omega + \int_M \tau \qquad \text{et} \qquad \int_M \lambda\omega = \lambda \int_M \omega \quad \text{pour tout } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Ainsi toute forme volume ω sur M induit une mesure μ sur la variété définie, sur toute fonction f à support compact (et continue par exemple) par

$$\int_M f(x) d\mu(x) = \int_M f\omega.$$

CHAPITRE III

Actions de groupes et revêtements

Les actions de groupes apparaissent de façon naturelle dans beaucoup de branches des mathématiques et encore plus en topologie algébrique et différentielle ; ils en constituent un élément de base. Ce chapitre leur est dédié et à tout ce qui tourne autour : la notion de revêtement, celle d'objet géométrique invariant *etc.*

1. Actions de groupes

Dans cette section, nous présenterons de manière brève la notion d'action de groupes et nous l'utiliserons pour construire des exemples divers de variétés différentiables ou analytiques complexes.

1.1. La topologie quotient

Soit X un espace topologique muni d'une relation d'équivalence $\mathcal{R}$. Pour tout $x \in X$, on notera $\mathcal{O}_\S$ sa classe d'équivalence. Si A est une partie de X, $\mathrm{Sat}(A)$ sera son saturé *i.e.* $\mathrm{Sat}(A) = \cup_{x\in A}\mathcal{O}_x$. On dira que $\mathcal{R}$ est *ouverte* si, pour tout ouvert A de X, $\mathrm{Sat}(A)$ est un ouvert de X. Soient $\mathcal{R}$ une telle relation d'équivalence, $X = M/\mathcal{R}$ le quotient et notons $\pi : M \longrightarrow X$ la projection canonique. On munit X de la *topologie quotient* : U est un ouvert de X si, et seulement si, $\pi^{-1}(U)$ est un ouvert de M ; c'est la *plus fine des topologies* rendant continue l'application π.

Un *groupe topologique* est un groupe Γ muni d'une topologie pour laquelle les applications $(\gamma_1, \gamma_2) \in \Gamma \times \Gamma \longrightarrow \gamma_1\gamma_2 \in \Gamma$ et $\gamma \in \Gamma \longrightarrow \gamma^{-1} \in \Gamma$ sont continues.

Soient Γ un groupe, M une variété et $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\} \cup \{\omega\}$, on notera $\mathrm{Diff}^r(M)$ le groupe des homéomorphismes de M de classe C^r *i.e.* un élément $h \in \mathrm{Diff}^r(M)$ est un homémorphisme de M tel que h et h^{-1} soient de classe C^r (analytiques pour $r = \omega$). Pour $r = 0$ on posera $\mathrm{Diff}^0(M) = \mathrm{Homéo}(M)$; bien sûr on a $\mathrm{Diff}^r(M) \subset \mathrm{Homéo}(M)$ pour tout $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\} \cup \{\omega\}$.

1.2. Définition. *On appelle* **action** *de classe C^r de Γ sur M une application continue $\Phi : \Gamma \times M \longrightarrow M$ telle que*

i) $\Phi(e, x) = x$ pour tout $x \in M$, e étant l'élément neutre de Γ ;

ii) $\Phi(\gamma\gamma', x) = \Phi(\gamma, \Phi(\gamma', x))$ pour tous $\gamma, \gamma' \in \Gamma$ et tout point $x \in M$;

iii) pour tout $\gamma \in \Gamma$, l'application partielle $\Phi(\gamma, \cdot) : x \in M \longrightarrow \Phi(\gamma, x) \in M$ est un élément de $\mathrm{Diff}^r(M)$.

La donnée d'une action Φ de classe C^r de Γ sur M permet de définir une représentation de Γ dans le groupe $\mathrm{Diff}^r(M)$ *i.e.* un morphisme de groupes $\rho : \gamma \in \Gamma \longmapsto \Phi(\gamma, \cdot) \in \mathrm{Diff}^r(M)$. Tout élément $\gamma \in \Gamma$ sera confondu avec $\rho(\gamma)$ et pour tout point $x \in M$,

$\rho(\gamma)(x) = \Phi(\gamma, x)$ sera noté simplement γx. L'ensemble $\mathcal{O}_{\S} = \{\gamma\S \ :\ \gamma \in -\}$ est appelé *orbite* de x.

i) On dira que $x \in M$ est un *point fixe* de Φ si $\gamma x = x$ pour tout $\gamma \in \Gamma$. L'ensemble $\mathrm{Fix}(\Phi)$ des points fixes de Φ est un fermé de M.

ii) Pour tout $x \in M$, posons $\Gamma_x = \{\gamma \in \Gamma \ :\ \gamma x = x\}$; alors Γ_x est un sous-groupe fermé de Γ appelé *groupe d'isotropie* de x.

iii) On dira que l'action Φ est *libre* si, pour tout $x \in M$, $\Gamma_x = \{e\}$.

iv) Une partie M_0 de M est dite *invariante* par Φ si, pour tout $x \in M_0$, l'orbite $\mathcal{O}_{\S}$ est entièrement contenue dans M_0. On dira que Φ est *transitive* s'il existe x tel que l'orbite $\mathcal{O}_{\S}$ soit égale à M. (Ceci sera donc vrai pour tout $x \in M$.)

Toute action Φ de Γ sur M définit une *relation d'équivalence* $\mathcal{R}$:

$$x\mathcal{R}\dagger \Longleftrightarrow \text{il existe } \gamma \in \Gamma \text{ tel que } y = \gamma x. \tag{III.1}$$

Cette relation d'équivalence est ouverte car, pour tout ouvert U de M, son saturé s'écrit

$$\mathrm{Sat}(U) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma U$$

qui est donc un ouvert car, pour tout γ, γU est ouvert puisque γ est un difféomorphisme. On munit $X_\Phi = M/\Phi = M/\mathcal{R}$ de la topologie quotient. On dira que l'action $\Phi : \Gamma \times M \longrightarrow M$ est :

v) *totalement discontinue* si tout point $x \in M$ admet un voisinage ouvert U tel que, pour tous $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ distincts, on ait $\gamma_1 U \cap \gamma_2 U = \emptyset$;

vi) *séparante* si tous points $x, y \in M$ non équivalents admettent des voisinages ouverts respectifs U et V tels que, pour tous $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$, on ait $\gamma_1 U \cap \gamma_2 V = \emptyset$;

vii) *propre* si, pour tout compact $K \subset M$, l'ensemble $\{\gamma \in \Gamma : \gamma K \cap K \neq \emptyset\}$ est relativement compact (*i.e.* son adhérence est compacte) dans Γ (fini si Γ est discret).

Si Γ est fini et agit librement, alors il agit de façon séparante et totalement discontinue (démonstration laissée au lecteur).

On dira que deux actions Φ_1 et Φ_2 définies respectivement sur les variétés M_1 et M_2 sont *C^s-conjuguées*, s'il existe un homéomorphisme $h : M_1 \longrightarrow M_2$, de classe C^s tel que pour tout $\gamma \in \Gamma$, le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} M_1 & \stackrel{\Phi(\gamma,\cdot)}{\longrightarrow} & M_1 \\ h\downarrow & & \downarrow h \\ M_1 & \stackrel{\Phi(\gamma,\cdot)}{\longrightarrow} & M_1. \end{array} \tag{$*$}$$

Dans toute la suite de cette section Γ sera un groupe topologique dénombrable et discret. Dans ce cas, si Γ agit librement et proprement, il agit de façon séparante et totalement discontinue. On conviendra aussi que le mot "C^k-homéomorphisme" signifiera homéomorphisme pour $k = 0$, difféomorphisme C^k si $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$ et difféomorphisme analytique si $k = \gamma$.

1.3. Proposition. *Soient M une variété de classe C^r ($r \in \mathbb{N} \cup \{\infty, \omega\}$) de dimension n et Φ une action libre et propre de classe C^r de Γ sur M. Alors le quotient $X_\Phi = M/\Phi$ est une variété de classe C^r de dimension n et la projection canonique $\pi : M \longrightarrow X$ est un difféomorphisme local C^r i.e. tout point $x \in M$ admet un vosinage ouvert U tel que la restriction $\pi : U \longrightarrow \pi(U)$ soit un difféomorphisme de classe C^r. Si Ψ est une action C^s-conjuguée à Φ, les variétés X_Φ et X_Ψ sont C^s-homéomorphes.*

Si M est une variété complexe, on dira que Γ *agit holomorphiquement* sur M (ou que l'action de Γ est *holomorphe*) si, pour tout $\gamma \in \Gamma$, le homéomorphisme $\gamma : x \in M \longmapsto \gamma x \in M$ est un *biholomorphisme* (*i.e.* γ est bijectif et γ et γ^{-1} sont holomorphes). La même définition de la conjugaison de deux actions se transpose au cas des variétés complexes : on demande à h dans le diagramme $(*)$ d'être holomorphe et on dira que les actions sont *holomorphiquement conjuguées.* On a une version complexe de la proposition 1.3.

1.4. Proposition. *Soient M une variété complexe de dimension n et Φ une action holomorphe, libre et propre de Γ sur M. Alors le quotient $X_\Phi = M/\Phi$ est une variété complexe de dimension n et la projection canonique $\pi : M \longrightarrow X_\Phi$ est un biholomorphisme local i.e. tout point $x \in M$ admet un vosinage ouvert U tel que la restriction $\pi : U \longrightarrow \pi(U)$ soit un biholomorphisme. Si Ψ est une action holomorphiquement conjuguée à Φ, les variétés X_Φ et X_Ψ sont holomorphiquement équivalentes.*

Il est souvent utile de savoir s'il existe une partie de M (géométriquement intérssante) qui contient le moins possible d'éléments dans chaque orbite. Ceci nous amène à la définition qui suit.

1.5. Définition. *Soit Φ une action de classe C^r propre et discontinue de Γ sur une variété M. On appelle* ***domaine fondamental*** *de cette action toute partie fermée Δ de M telle que*

i) $\bigcup_{\gamma\in\Gamma} \gamma(\Delta) = M$,
ii) $int(\Delta) \cap \gamma(int(\gamma\Delta)) = \emptyset$ *pour tout* $\gamma \neq$ *identité.*

L'ensemble $\partial\Delta = \Delta - int(\Delta)$ est le *bord* du domaine fondamental ; il est de mesure nulle (pour la mesure canonique de M : celle donnée par la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^n$ à l'aide des cartes locales). La variété quotient $X = M/\Gamma$ est obtenue à partir de Δ en identifiant les points de $\partial\Delta$ qui sont Γ-équivalents.

Toute action de classe C^r propre et discontinue de Γ sur une variété différentiable M admet un domaine fondamental. Ce domaine est compact si, et seulement si, le quotient $X = M/\Gamma$ l'est.

Les quotients par des actions de groupes fournissent beaucoup d'exemples de variétés différentiables et analytiques complexes. Nous allons en donner quelques-uns.

1.6. Exemples

i) Soient $M = \mathbb{R}^n$ et $\Gamma = \mathbb{Z}^n$, $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n)$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$ dont les composantes sont toutes non nulles. On définit une action $\Phi : \Gamma \times M \longrightarrow M$ par $\Phi(q, x) = x + \tau q$ où $x = (x_1, \ldots x_n) \in \mathbb{R}^n$, $q = (q_1, \ldots, q_n) \in \mathbb{Z}^n$ et $q\tau = (q_1\tau_1, \ldots, q_n\tau_n)$. Alors Φ est une action analytique libre et propre ; le quotient M/Γ est une variété analytique réelle de dimension n. La structure différentiable sur M/Γ ne dépend pas du τ choisi. Cette variété est appelée *n-tore* et est notée $\mathbb{T}^n$. Pour $n = 2$, $\mathbb{T}^2$ est obtenu en identifiant, deux à deux, les côtés opposés d'un rectangle en respectant l'orientation.

ii) Soient $M = \mathbb{C}^n$ et $\Gamma = \mathbb{Z}^{2n}$, $\tau = (\tau_1, \tau_1' \ldots, \tau_n, \tau_n')$ un vecteur de $\mathbb{R}^{2n}$ dont les composantes sont toutes non nulles. On définit une action $\Phi : \Gamma \times M \longrightarrow M$ par

$$\Phi(q, z) = z + \tau q$$

où $z = (z_1, \ldots z_n) \in \mathbb{C}^n$, $q = (q_1, {q'}_1 \cdots, q_n, {q'}_n) \in \mathbb{Z}^{2n}$ et

$$q\tau = (q_1\tau_1 + i{q'}_1{\tau'}_1, \cdots, q_n\tau_n + i{q'}_n{\tau'}_n).$$

Alors Φ est une action holomorphe, libre et propre ; le quotient M/Γ est une variété complexe de dimension n appelée *n-tore complexe* et est notée $\mathbb{T}^n_\tau$. Contrairement au cas réel, sa structure complexe dépend du choix de $\tau \in \mathbb{R}^{2n}$. Par exemple, supposons $n = 1$; alors se donner $\tau \in \mathbb{R}^2$ revient à se donner $\tau = (1, \omega) \in \mathbb{H}$ où $\mathbb{H}$ est le demi-plan supérieur $\{x + iy \in \mathbb{C} : y > 0\}$. Les tores $\mathbb{T}^2_\tau$ et $\mathbb{T}^2_\sigma$ sont équivalents holomorphiquement (*i.e.* il existe un biholomorphisme $\mathbb{T}^2_\tau \longrightarrow \mathbb{T}^2_\sigma$) si, et seulement si, il existe une matrice

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$$

telle que $\sigma = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}$. Sur le tore réel $\mathbb{T}^2$, il y a donc une infinité de structures complexes ; chacune est codée par $\tau \in \mathbb{H}$. Les classes d'équivalence de structures complexes sur $\mathbb{T}^2$ correspondent bijectivement aux points du quotient $\mathbb{H}/\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ appelé *orbifold modulaire.*

iii) Soient M la sphère $\mathbb{S}^n$, ensemble des vecteurs de l'espace $\mathbb{R}^{n+1}$ vérifiant la relation $x_1^2 + \ldots + x_{n+1}^2 = 1$ et Γ le groupe multiplicatif $\{1, -1\}$ (qu'on peut aussi identifier au groupe additif $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$) ; Γ agit sur $\mathbb{S}^n$ de la façon suivante

$$\Phi : (\gamma, x) \in \Gamma \times \mathbb{S}^n \longmapsto \gamma x \in \mathbb{S}^n.$$

L'action Φ est libre et le quotient $\mathbb{S}^n/\Gamma$ est une variété analytique réelle de dimension n ; c'est l'espace projectif $P^n(\mathbb{R})$.

iv) Soient $M = \mathbb{C}^n - \{0\}$, $\Gamma = \mathbb{Z}$ et $0 < a < 1$. On définit une action de Γ sur M de la façon suivante

$$\Phi : (q, z) \in \Gamma \times M \longmapsto a^q z \in M.$$

Alors Φ est une action holomorphe, libre et propre. Le quotient M/Γ est une variété analytique complexe de dimension n appelée *surface de Hopf*. Comme exercice le lecteur pourrait démontrer que cette variété est difféomorphe à $\mathbb{S}^{2n-1} \times \mathbb{S}^1$.

2. Groupe fondamental

Nous introduisons sommairement le groupe fondamental pour en faire usage dans l'énoncé du théorème d'existence du revêtement universel que nous verrons dans la section 3. La théorie de l'homotopie dans son ensemble sera étudiée de façon plus détaillée par la suite.

Soit X un espace topologique séparé. On appelle *chemin* d'origine x_0 et d'extrémité x_1 toute application continue $\sigma : [0,1] \longrightarrow X$ telle que $\sigma(0) = x_0$ et $\sigma(1) = x_1$.

L'espace X est dit *connexe par arcs* si, pour tous $x_0, x_1 \in X$, il existe un chemin dans X reliant x_0 à x_1. Si $x_0 = x_1$ on dira que σ est un *lacet* de base x_0. Fixons un point $x_0 \in X$.

Dans toute la suite on ne considérera que des espaces séparés connexes par arcs.

2.1. Définition. *Deux lacets σ_0 et σ_1 de base x_0 sont* ***homotopes*** *s'il existe une application continue $H : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow X$ telle que*

$$\begin{cases} H(t,0) = \sigma_0(t) \\ H(t,1) = \sigma_1(t) \\ H(0,s) = H(1,s) = x_0 \end{cases}$$

Cela signifie que le lacet σ_0 peut être déformé de manière continue tout en restant dans l'espace X et être amené sur le lacet σ_1. Par exemple, soit X le plan complexe privé de l'origine et choisissons $x_0 = 1$ comme point base. On voit que tous les lacets basés en x_0 n'ayant pas l'origine comme point intérieur sont homotopes. Mais le cercle trigonométrique (qui est bien sûr un lacet de base x_0) n'est homotope à aucun de ces lacets : l'origine est à l'intérieur et ne peut passer à l'extérieur par déformation continue que si l'on coupe le cercle ; ce qui n'est pas permis.

2.2. Composition des lacets

Soient σ_0 et σ_1 deux lacets dans X de base x_0. On définit un nouveau lacet basé en x_0 et noté $\sigma_0\sigma_1$ en posant

$$(\sigma_0\sigma_1)(t) = \begin{cases} \sigma_0(2t) & \text{pour } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \sigma_1(2t-1) & \text{pour } t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases} \tag{III.2}$$

Le lacet $\sigma_0\sigma_1$ est obtenu en partant du point x_0, en décrivant le lacet σ_0 (pour t croissant), en revenant à x_0 et en décrivant ensuite σ_1 (toujours dans le sens t croissant) pour revenir encore une fois à x_0.

L'ensemble $\Omega(X, x_0)$ des lacets basés en x_0 se trouve ainsi muni d'une loi de composition interne. On vérifie facilement que si σ_0 est homotope à ${\sigma'}_0$ et σ_1 homotope à ${\sigma'}_1$ alors

$\sigma_0\sigma_1$ est homotope à $\sigma'_0\sigma'_1$. Autrement dit l'ensemble $\pi_1(X, x_0)$ des classes d'homotopie de lacets est muni d'une loi de composition interne. Cette loi

i) est associative ;

ii) admet un élément neutre : la classe d'homotopie du lacet constant e défini par $e(t) = x_0$ pour tout $t \in [0, 1]$;

iii) est telle que toute classe d'homotopie $[\sigma]$ admet un inverse : la classe de σ^{-1} défini par $\sigma^{-1}(t) = \sigma(1 - t)$ *i.e.* le lacet σ est décrit dans le sens inverse.

L'ensemble $\pi_1(X, x_0)$ muni de cette loi de composition est donc un groupe.

Soit x_1 un autre point base. Comme X est connexe par arcs, il existe un chemin α d'origine x_0 et d'extrémité x_1. L'application $\Phi : \Omega(X, x_0) \longrightarrow \Omega(X, x_1)$ définie par $\Phi(\sigma) = \alpha\sigma\alpha^{-1}$ est compatible avec la relation d'homotopie et induit un isomorphisme de groupes $\Phi_* : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_1)$.

2.3. Définition. *On appelle* ***groupe fondamental*** *de l'espace X et on note $\pi_1(X)$ l'un quelconque des groupes $\pi_1(X, *)$ où $*$ est un point base. On dit que X est* ***simplement connexe*** *si $\pi_1(X) = 0$.*

Soient X et Y deux espaces connexes par arcs et $f : X \longrightarrow Y$ une application continue. On a une application $f_* : \Omega(X, x_0) \longrightarrow \Omega(Y, y_0)$ (où $y_0 = f(x_0)$) définie par $f_*(\sigma) = f \circ \sigma$. Elle vérifie

- $(id_X)_* = id_{\Omega(X)}$
- $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ où $f : X \longrightarrow Y$ et $g : Y \longrightarrow Z$ sont des applications continues. Ces propriétés sont en plus compatibles avec la relation d'homotopie des lacets. On a donc un morphisme de groupes $\pi_1(f) : \pi_1(X) \longrightarrow \pi_1(Y)$.

Si f est un homéomorphisme, $\pi_1(f)$ est un isomorphisme. Pour cette raison on dira que $\pi_1(X)$ est un *invariant topologique* de X. Si M est une variété paracompacte, $\pi_1(M)$ est un groupe dénombrable.

3. Revêtemets

Soient X et $\widehat{X}$ deux espaces topologiques séparés, connexes par arcs et localement compacts (un espace topologique est dit *localement compact* si tout point admet un voisinage compact).

3.1. Définition. *On dira qu'une application continue $p : \widehat{X} \longrightarrow X$ est un revêtement si tout point $x \in X$ admet un voisinage ouvert U tel que $p^{-1}(U)$ soit une réunion disjointe d'ouverts $(V_i)_{i \in I}$ de $\widehat{X}$ et, pour tout $i \in I$, la restriction de p à V_i soit un homéomorphisme sur U.*

On dira que p est la *projection* du revêtement et, souvent, c'est l'espace $\widehat{X}$ lui-même qui est dit *revêtement* de X, ce dernier en est la *base*. L'ouvert U est appelé *voisinage distingué* de x et $F_x = p^{-1}(x)$ la *fibre* en x du revêtement ; c'est un sous-espace discret de X qui peut être continu, dénombrable ou fini. Toutes les fibres F_x ont même cardinal.

3.2. Exemples

i) Soit $p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{S}^1$ l'application définie par $p(\theta) = e^{2i\pi\theta}$. Ici le cecle $\mathbb{S}^1$ est vu comme l'ensemble des nombres complexes de module 1. Soient $x \in \mathbb{S}^1$ et U un arc de cercle ouvert centré en x de longueur $4\pi\varepsilon$ avec ε assez petit. Soit $\theta \in \mathbb{R}$, $\theta \in [0, 1[$ tel que $p(\theta) = x$; alors

$$p^{-1}(U) = \coprod_{k \in \mathbb{Z}}]k + \theta - \varepsilon, k + \theta + \varepsilon[$$

et la restriction de $p :]k + \theta - \varepsilon, k + \theta + \varepsilon[\longrightarrow U$ est un homéomorphisme (bien connu). La fibre F_x est constituée par tous les points θ_k de $\mathbb{R}$, transformés de θ par une translation entière.

ii) L'exemple qui précède se généralise au cas où $X = \mathbb{T}^n = \mathbb{S}^1 \times \ldots \times \mathbb{S}^1$ (tore à n dimensions), $\widehat{X} = \mathbb{R}^n$ en posant

$$p(\theta_1, \ldots \theta_n) = (e^{2i\pi\theta_1}, \ldots, e^{2i\pi\theta_1}).$$

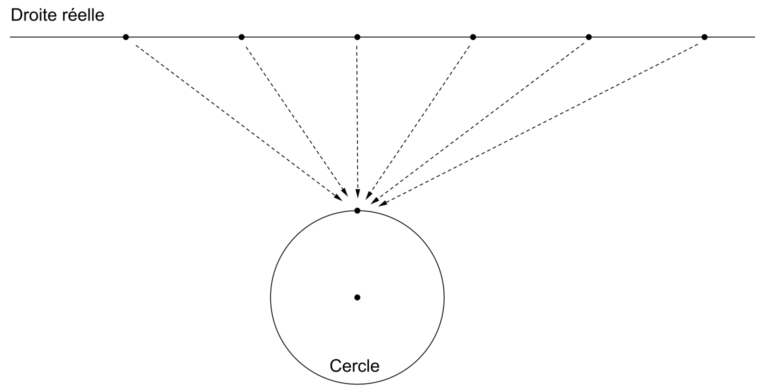
iii) On pose $\widehat{X} = X = \mathbb{S}^1$ et $p(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}^*$. Alors p est un revêtement du cercle (à vérifier). La fibre F_x en un point $x \in \mathbb{S}^1$ est constituée de n points uniformément distribués sur le cercle. On dira que p est un revêtement à n *feuillets* de $\mathbb{S}^1$: le cercle $\mathbb{S}^1$, base de p, est “reproduit n fois” ; dans l'exemple i) il est “reproduit une infinité dénombrable de fois”.

iv) Soient M et N deux variétés différentiables connexes de même dimension et $p : M \longrightarrow N$ une application différentiable surjective. On rappelle que p est de rang maximum au point $y \in M$ si l'application tangente $dp_y : T_yM \longrightarrow T_xN$ (où $x = p(y)$) est surjective (donc un isomorphisme). Alors d'après le théorème des fonctions implicites : *si p est de rang maximum en tout point $y \in M$, p est un revêtement.*

Le point le plus important pour nous dans ce texte est le théorème suivant dont on peut trouver la démonstration dans n'importe quel ouvrage de Topologie algébrique (ou différentielle).

3.3. Théorème. *Soit M une variété connexe séparée de classe C^r ($r \in \mathbb{N} \cap \{\infty, \omega\}$) et de dimension n. Alors il existe une variété $\widetilde{M}$ connexe et simplement connexe, séparée, de classe C^r et de dimension n et une action libre, propre et totalement discontinue de $\Gamma = \pi_1(M)$ telle que $M = \widetilde{M}/\Gamma$ et la projection canonique $p : \widetilde{M} \longrightarrow M$ soit un revêtement de classe C^r. Si M est analytique complexe, $\widetilde{M}$ est aussi analytique complexe et p est holomorphe. Si $p' : \widetilde{M}' \longrightarrow M$ est un autre tel revêtement, il existe un homéomorphisme $H : \widetilde{M} \longrightarrow \widetilde{M}'$ (de classe C^r ou holomorphe suivant que M est de classe C^r ou analytique complexe) tel que $p = p' \circ H$.*

On dira que $\widetilde{M} \xrightarrow{p} M$ est le *revêtement universel* de M. Les *propriétés géométriques locales* de M et $\widetilde{M}$ sont les mêmes.



Le revêtement universel du cercle

Fig. III.1

4. Objets géométriques invariants

Soit Γ un groupe discret (dénombrable) agissant d'une manière propre et discontinue sur une variété $\widetilde{M}$. On notera M la variété quotient $\widetilde{M}/\Gamma$ et $p : \widetilde{M} \longrightarrow M$ la projection canonique qui est un revêtement de classe C^∞. Le but de ce paragraphe est de décrire les conditions d'invariance que doit vérifier un objet géométrique sur $\widetilde{M}$ pour induire un objet de même nature sur M. Tout est considéré être de classe C^∞.

4.1. Fonctions invariantes

Soient $C^\infty(\widetilde{M})$ l'algèbre des fonctions de classe C^∞ sur $\widetilde{M}$ et $C^\infty(M)$ celle de M. On dira que $\widetilde{f} \in C^\infty(\widetilde{M})$ est Γ-*invariante* si, pour tout $x \in \widetilde{M}$ et tout $\gamma \in \Gamma$ on a $\widetilde{f}(\gamma x) = \widetilde{f}(x)$ *i.e.* $\widetilde{f}$ est constante sur toute orbite de l'action de Γ sur la variété $\widetilde{M}$. L'ensemble $C^\infty_\Gamma(\widetilde{M})$ des fonctions Γ-invariantes sur $\widetilde{M}$ est une sous-algèbre de $C^\infty(\widetilde{M})$.

Soit $\varphi : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(\widetilde{M})$ l'application définie par $\varphi(f) = f \circ p$. Alors : *φ est à image dans $C^\infty_\Gamma(\widetilde{M})$ et est un isomorphisme canonique de $C^\infty(M)$ sur $C^\infty_\Gamma(\widetilde{M})$.*

L'exemple le plus folklorique est celui où $\widetilde{M} = \mathbb{R}^n$ et $\Gamma = \mathbb{Z}^n$ agissant par translations ; la variété $M = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ est alors le tore $\mathbb{T}^n$. Il est bien connu que les fonctions sur $\mathbb{T}^n$ sont exactement les fonctions sur $\mathbb{R}^n$ (avec la même propriété de mesurabilité, continuité, différentiabilité, analyticité ou autre) et qui sont $\mathbb{Z}^n$-*périodiques i.e.* vérifient :

$$f(x_1 + q_1, \ldots, x_n + q_n) = f(x_1, \ldots, x_n)$$

pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et tout $(q_1, \ldots, q_n) \in \mathbb{Z}^n$.

4.2. Champs de vecteurs invariants

On rappelle que l'ensemble $C^\infty(T\widetilde{M})$ des champs de vecteurs sur $\widetilde{M}$ est un module sur l'algèbre $C^\infty(\widetilde{M})$. Soient $\gamma \in \Gamma$ et $X \in C^\infty(T\widetilde{M})$; on définit le champ $\gamma_*(X)$ sur $\widetilde{M}$ par

(III.3) $$\gamma_*(X)(\gamma(x)) = (d_x\gamma)(X_x)$$

pour tout point $x \in \widetilde{M}$. On dira que X est γ-*invariant* si $\gamma_*(X) = X$ *i.e.* pour tout $x \in \widetilde{M}$ on a $\gamma_*(X)(x) = X_x$. On dira que X est Γ-*invariant* s'il est γ-invariant pour tout $\gamma \in \Gamma$. L'ensemble $C^\infty_\Gamma(T\widetilde{M})$ des champs Γ-invariants sur $\widetilde{M}$ est un module sur $C^\infty_\Gamma(\widetilde{M})$.

L'action de Γ sur $\widetilde{M}$ définit une action sur le fibré tangent $T\widetilde{M}$ de la façon suivante. Soit $\gamma \in \Gamma$; à tout élément (x, X_x) de $T\widetilde{M}$ on associe l'élément $(\gamma x, (d_x\gamma)(X_x))$. Cette action est propre et discontinue, préserve la section nulle $x \in \widetilde{M} \longrightarrow (x, 0) \in T\widetilde{M}$ et sa restriction à cette section est exactement l'action de Γ sur $\widetilde{M}$. La variété quotient $T\widetilde{M}/\Gamma$ s'identifie au fibré tangent TM de M ; la projection de fibré $\pi : TM \longrightarrow M$ est induite par celle du fibré $T\widetilde{M}$: $\widetilde{\pi} : T\widetilde{M} \longrightarrow \widetilde{M}$. Le $C^\infty_\Gamma(\widetilde{M})$-module $C^\infty_\Gamma(T\widetilde{M})$ est ainsi canoniquement isomorphe au $C^\infty(M)$-module $C^\infty(TM)$.

Soient par exemple $\widetilde{M} = \mathbb{R}$ et $\Gamma = \mathbb{Z}$ agissant par translations $x \longmapsto x + n$ avec $n \in \mathbb{Z}$. Alors la variété quotient $M = \widetilde{M}/\Gamma$ est difféomorphe au cercle $\mathbb{S}^1$. Tout champ de vecteurs sur $\mathbb{R}$ est de la forme $X = f(x)\frac{\partial}{\partial x}$ où $f \in C^\infty(\mathbb{R})$; il est invariant par Γ si, et seulement si, $f(x+1) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ *i.e.* f est une fonction périodique de période 1.

Supposons maintenant que $\mathbb{Z}$ agit par l'homothétie $\gamma : x \longmapsto \lambda x$ (générateur de l'action) sur $\mathbb{R}^*_+$ avec $\lambda \in]0, 1[$; la variété quotient est difféomorphe à $\mathbb{S}^1$. L'action de l'homothétie γ sur le champ $X = f(x)\frac{\partial}{\partial x}$ (où $f \in C^\infty(\mathbb{R}^*_+)$) est

$$\gamma_*(X)(\gamma x) = d_x\gamma(X_x) = \lambda f(x)\frac{\partial}{\partial x}.$$

Donc X est Γ-invariant si, et seulement si, la fonction f vérifie la relation $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*_+$. Par exemple le champ $X_0 = x\frac{\partial}{\partial x}$ est invariant et tout autre champ invariant s'écrit $h(x)X_0$ avec h invariante *i.e.* vérifiant $h(\lambda x) = h(x)$.

En fait les deux actions qu'on vient de considérer sur les variétés respectives $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^*_+$ sont conjugées par le difféomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^*_+$ qui à x associe e^x.

4.3. Formes différentielles invariantes

Soient $\gamma \in \Gamma$ et $\widetilde{\omega}$ une forme différentielle de degré r sur $\widetilde{M}$. On sait que l'image réciproque de $\widetilde{\omega}$ par γ est une forme différentielle $\gamma^*(\widetilde{\omega})$ de degré r sur $\widetilde{M}$ définie par

$$\gamma^*(\widetilde{\omega})(x)(X_1(x), \ldots, X_r(x)) = \widetilde{\omega}(\gamma x)(d_x\gamma(X_1(x)), \ldots, d_x\gamma(X_r(x)))$$

où $x \in \widetilde{M}$ et $X_1(x), \ldots, X_r(x)$ sont des champs tangents à $\widetilde{M}$ au point x. On dira que $\widetilde{\omega}$ est γ-*invariante*, si $\gamma^*(\widetilde{\omega}) = \widetilde{\omega}$; on dira que $\widetilde{\omega}$ est Γ-*invariante* si elle est γ-invariante pour tout $\gamma \in \Gamma$. L'ensemble $\Omega^r_\Gamma(\widetilde{M})$ des r-formes Γ-invariantes sur $\widetilde{M}$ est un $C^\infty_\Gamma(\widetilde{M})$-module.

Rappelons que la projection de revêtement $p : \widetilde{M} \longrightarrow M$ est un difféomorphisme local *i.e.* tout point $x \in \widetilde{M}$ admet un voisinage ouvert U tel que $p : U \longrightarrow p(U)$ soit un difféomorphisme ; en particulier l'application tangente $d_x p : T_x\widetilde{M} \longrightarrow T_{p(x)}M$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Soit $\widetilde{\omega}$ une r-forme sur $\widetilde{M}$ invariante par l'action de Γ ; nous allons lui associer une r-forme ω sur M. Soient y un point de M et $x \in \widetilde{M}$ tel que $p(x) = y$; tout autre point x' tel que $p(x') = y$ est Γ-équivalent à x *i.e.* il existe $\gamma \in \Gamma$ tel que $x' = \gamma x$. Pour tout vecteur $X_y \in T_yM$ on note $\widetilde{X}_x$ le vecteur $(d_xp)^{-1}(X_y)$ de $T_x\widetilde{M}$ et on pose

$$\omega(y)(X_1(y), \dots, X_r(y)) = \widetilde{\omega}(x)(\widetilde{X}_1(x), \dots, \widetilde{X}_r(x)).$$

Il est très facile de vérifier que ceci est indépendant du choix du point x se projetant sur y et que ω est une r-forme bien définie sur M. L'application p_* qui à $\widetilde{\omega} \in \Omega^r(\widetilde{M})$ associe la forme $\omega \in \Omega^r(M)$ ainsi définie est un isomorphisme (de $C^\infty(M)$-modules) de $\Omega^r_\Gamma(\widetilde{M})$ sur $\Omega^r(M)$ dont l'inverse est donné par l'application *image réciproque* $p^* : \Omega^r(M) \longrightarrow \Omega^r_\Gamma(\widetilde{M})$.

4.4. Mesures invariantes

On munit M de sa tribu borélienne $\mathcal{B}_{\mathcal{M}}$ (celle engendrée par tous les ouverts ou tous les fermés). Une mesure μ sur M est dite Γ-*invariante* si, pour tout $\gamma \in \Gamma$ et tout borélien $A \in \mathcal{B}_{\mathcal{M}}$, on a $\mu(\gamma(A)) = \mu(A)$. Une telle mesure en induit une sur la variété quotient $X = M/\Gamma$. Par exemple, la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$ est invariante par toute translation et donc par l'action naturelle de $\mathbb{Z}^n$; elle induit alors une mesure sur le tore $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$. L'assertion suivante est facile à établir.

Soient μ une mesure sur M invariante par Γ et Δ un domaine fondamental de Γ dont le bord $\partial\Delta$ est de μ-mesure nulle. Notons $\overline{\mu}$ la mesure induite sur X. Alors, pour toute fonction $\overline{\mu}$-intégrable $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$, la fonction $\widetilde{f} = f \circ p$ (p étant la projection canonique $M \longrightarrow X$) est μ-intégrable sur Δ et on a

$$\int_X f d\overline{\mu} = \int_\Delta \widetilde{f} d\mu. \tag{III.4}$$

4.5. Exemple

Soit A un élément de $\mathrm{SL}(n-1, \mathbb{Z})$ (groupe des matrices carrées d'ordre $n-1$ à coefficients entiers et de déterminant égal à 1). Alors A agit de façon linéaire sur l'espace $\mathbb{R}^{n-1}$ et préserve le sous-groupe $\mathbb{Z}^{n-1}$. Cela permet de construire un produit semi-direct $\Gamma = \mathbb{Z}^{n-1} \rtimes \mathbb{Z}$; il possède un sous-groupe distingué $\Gamma_0 = \mathbb{Z}^{n-1} \rtimes \{0\} = \mathbb{Z}^{n-1}$. Le groupe Γ est engendré par n éléments $\gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}, \sigma$ qu'on peut représenter comme des difféomorphismes de $\widetilde{M} = \mathbb{R}^n$

$$\gamma_i : (x_1, \dots, x_{n-1}, t) \longmapsto (x_1, \dots, x_i + 1, \dots, x_{n-1}, t)$$

pour $i = 1, \dots, (n-1)$ et

$$\sigma : (x_1, \ldots, x_{n-1}, t) \longmapsto (A(x_1, \ldots, x_{n-1}), t + 1).$$

On définit ainsi une action (analytique) de Γ sur $\mathbb{R}^n$ dont on vérifie facilement qu'elle est propre et discontinue. Le quotient $M = \widetilde{M}/\Gamma$ peut être obtenu de la façon suivante : Γ_0 préserve le facteur $\widetilde{M}_0 = \mathbb{R}^{n-1}$ dans $\widetilde{M} = \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$; le quotient de $\widetilde{M}$ par Γ_0 est donc $\mathbb{T}^{n-1} \times \mathbb{R}$. Comme Γ_0 est distingué dans Γ on a $\widetilde{M}/\Gamma = (\widetilde{M}/\Gamma_0)/\Sigma$ où Σ est le groupe quotient Γ/Γ_0 qui est isomorphe à $\mathbb{Z}$; il est engendré par la classe $\overline{\sigma}$ de σ qui agit sur $\mathbb{T}^{n-1} \times \mathbb{R}$ comme suit

$$\overline{\sigma} : (x_1, \ldots, x_{n-1}, t) \longmapsto (\overline{A}(x_1, \ldots, x_{n-1}), t + 1)$$

où $\overline{A}$ est le difféomorphisme de $\mathbb{T}^{n-1}$ induit par l'application linéaire de $\mathbb{R}^{n-1}$ de matrice A. Cette action de Σ sur $\mathbb{T}^{n-1} \times \mathbb{R}$ possède un domaine fondamental compact $\Delta = \mathbb{T}^{n-1} \times [0, 1]$ et la variété quotient

$$M = (\mathbb{T}^{n-1} \times \mathbb{R})/\Sigma$$

est obtenue à partir de Δ en identifiant les points $(x, 0)$ et $(\overline{A}(x), 1)$; c'est donc une variété compacte (sans bord). Tout point de M possède un voisinage ouvert de la forme $\mathbb{T}^{n-1} \times]a, b[$ où a et b sont des réels tels que $a < b$. La deuxième projection $\mathbb{T}^{n-1} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ commute à l'action de Σ sur $\mathbb{T}^{n-1} \times \mathbb{R}$ et induit une submersion $\tau : M \longrightarrow \mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\Sigma$; l'image réciproque par τ d'un point de $\mathbb{S}^1$ est un tore $\mathbb{T}^{n-1}$. On dira que M est un *fibré* en tores $\mathbb{T}^{n-1}$ au-dessus du cercle $\mathbb{S}^1$ et on écrit

$$\mathbb{T}^{n-1} \hookrightarrow M \xrightarrow{\tau} \mathbb{S}^1.$$

i) Toute fonction sur M est une fonction sur $\mathbb{T}^{n-1} \times \mathbb{R}$ vérifiant la relation d'invariance $f(\overline{A}(x), t + 1) = f(x, t)$ ou encore f est une fonction sur $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ en les variables $(x_1, \ldots, x_{n-1}, t)$ vérifiant les relations

$$f(x_1, \ldots, x_i + 1, \ldots, x_{n-1}, t) = f(x_1, \ldots, x_{n-1}, t) \ \text{ pour } i = 1, \ldots, n - 1$$

et

$$f(A(x_1, \ldots, x_{n-1}), t + 1) = f(x_1, \ldots, x_{n-1}, t).$$

On peut expliciter un peu plus ces conditions d'invariance en usant d'un développement de Fourier. En effet, comme f est périodique en les variables $x_1, \cdots, x_{n-1}$, elle s'écrit sous la forme

$$f(x_1, \cdots, x_{n-1}, t) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^{n-1}} f_{\mathbf{k}}(t) e^{2i\pi \langle x, \mathbf{k} \rangle}$$

où $\langle \ , \ \rangle$ est le produit scalaire usuel dans $\mathbb{R}^{n-1}$ et les $f_{\mathbf{k}}(t)$ sont les coefficients de Fourier qui dépendent du multi-indice $\mathbf{k}$ mais aussi du facteur $t \in \mathbb{R}$; le fait que la fonction f soit de classe C^∞ impose à ces coefficients et à leurs dérivées (comme fonctions de t) d'avoir une *décroissance rapide*, c'est-à-dire, pour tous $r, s \in \mathbb{N}$ et tout $R > 0$, la série suivante est convergente :

$$\sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^{n-1}} |\mathbf{k}|^{2r} ||f^{(s)}||^2$$

où $|\mathbf{k}|^2 = \langle \mathbf{k}, \mathbf{k} \rangle$ et $||f^{(s)}|| = \sup_{|t| \leq R} |f^{(s)}(t)|$. La fonction $f(A(x_1, \ldots, x_{n-1}), t+1)$ a pour développement de Fourier

$$f(A(x_1, \ldots, x_{n-1}), t+1) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^{n-1}} f_{\mathbf{k}}(t+1) e^{2i\pi \langle Ax, \mathbf{k} \rangle}$$

ou encore, en utilisant le fait que $\langle Ax, \mathbf{k} \rangle = \langle x, A'\mathbf{k} \rangle$ avec A' transposée de A, on obtient

$$f(A(x_1, \ldots, x_{n-1}), t+1) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^{n-1}} f_{\mathbf{k}}(t+1) e^{2i\pi \langle x, A'\mathbf{k} \rangle}.$$

Posons $\mathbf{k}' = A'\mathbf{k}$; par unicité du développement de Fourier, la condition d'invariance de la fonction f s'écrit alors

$$f_{\mathbf{k}}(t+1) = f_{\mathbf{k}'}(t) \text{ pour tout } \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^{n-1}.$$

ii) Pour décrire les champs de vecteurs sur M, nous allons exhiber une base de champs invariants par Γ sur $\widetilde{M}$ adaptés à notre situation. Nous supposerons pour simplifier que la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ de valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ toutes positives. Soient $u_1, \ldots, u_{n-1}$ des vecteurs propres associés respectivement aux valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ et $\widetilde{u}_1, \ldots, \widetilde{u}_{n-1}$ les champs de vecteurs linéaires sur $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ (tangents à la fibration au-dessus de $\mathbb{R}$ définie par la deuxième projection $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$) de directions respectives $u_1, \ldots, u_{n-1}$. Il est alors facile de voir que les champs

$$X_i = \lambda_i^t \widetilde{u}_i \text{ pour } i = 1, \ldots, n-1 \text{ et } X_n = \frac{\partial}{\partial t}$$

sont invariants par Γ ; ils définissent donc des champs sur M. En plus, ils forment une base de l'espace tangent T_xM en chaque point $x \in M$. Par suite tout champ de vecteurs X sur M s'écrit

$$X = \sum_{i=1}^{n} f_i X_i$$

où $f_1, \ldots, f_n$ sont des fonctions sur M (ou des fonctions Γ-invariantes sur $\widetilde{M}$). Ainsi le $C^\infty(M)$-module $C^\infty(TM)$ est libre et a pour base $(X_1, \ldots, X_n)$.

iii) Pour déterminer les formes différentielles sur M on prend la base duale $(\theta_1, \ldots, \theta_n)$ de $(X_1, \ldots, X_n)$. La forme θ_n est tout simplement dt. Ainsi $(\theta_1, \ldots, \theta_n)$ est une base du $C^\infty(M)$-module libre $\Omega^1(M)$; toute r-forme ω sur M s'écrit donc

$$\omega = \sum \omega_{i_1 \dots i_r} \theta_{i_1} \wedge \dots \wedge \theta_{i_r},$$

la sommation porte sur les multi-indices $(i_1, \dots, i_r)$ tels que $1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n$ et les $\omega_{i_1 \dots i_r}$ sont des fonctions C^∞ sur M.

Pour finir on peut voir facilement que la n-forme $\theta_1 \wedge \cdots \wedge \theta_n$ est partout non nulle et est donc une forme volume sur la variété M ; en fait elle n'est rien d'autre que la forme induite par $dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{n-1} \wedge dt$ qui est la forme volume usuelle de $\mathbb{R}^n$.

CHAPITRE IV

Homotopie

C'est une notion plus faible que l'homéomorphie, mais elle est aussi importante. C'est l'objet de ce chapitre. Nous commencerons par définir la notion d'applications homotopes ainsi que ses variantes : rétraction, rétraction par déformation, type d'homotopie ou équivalence homotopique *etc.* Ensuite, nous introduirons rapidement le $\pi_0(X)$ d'un espace X (qui "mesure" sa connexité par arcs) et construirons les groupes d'homotopie $\pi_n(X)$ (une ébauche de $\pi_1(X)$ se trouve déjà dans le chapitre III) ; nous montrerons leur caractère fonctoriel, le fait qu'ils sont des invariants du type d'homotopie et la commutativité des $\pi_n(X)$ pour $n \geq 2$. Nous donnerons des exemples de calcul et quelques applications.

Tous les espaces topologiques que nous considérerons dans ce chapitre seront séparés et souvent (sauf mention du contraire) connexes par arcs.

1. Généralités

Cette section est dédiée aux définitions générales : homotopie, homotopie relative, homotopie différentiable *etc.* Nous en donnerons aussi différents exemples.

1.1. Définition. *Soient X et Y deux espaces topologiques et $f_0, f_1 : X \longrightarrow Y$. On dira que f_0 et f_1 sont* ***homotopes****, s'il existe une application continue $F : X \times [0,1] \longrightarrow Y$ telle que $F(x,0) = f_0(x)$ et $F(x,1) = f_1(x)$ pour tout $x \in X$. Soit A une partie de X ; on dira que f_0 et f_1 sont* ***homotopes relativement*** *à A s'il existe une homotopie F entre f_0 et f_1 telle que, pour $s \in [0,1]$ et tout $a \in A$, on ait $F(x,s) = f_0(a) = f_1(a)$.*

L'homotopie est aussi une connexité par arcs. En effet, notons $C(X,Y)$ l'ensemble des fonctions continues de X dans Y qu'on munit de la *topologie compacte ouverte*, c'est-à-dire la topologie engendrée par la famille des parties de la forme

$$\mathcal{O}(K,U) = \{f \in C(X,Y) : f(K) \subset U\}$$

où K décrit les compacts de X et U les ouverts de Y. Il est alors facile de vérifier que les applications $f_0, f_1 : X \longrightarrow Y$ sont homotopes si, et seulement si, elles sont dans la même composante connexe par arcs de l'espace topologique $C(X,Y)$. On vérifie facilement les assertions qui suivent.

– Toute application f est homotope à elle-même : prendre $F(x,s) = f(x)$ comme homotopie.

– f_0 homotope à f_1 via $F(x,s)$ implique que f_1 est homotope à f_0 via l'application $G(x,s) = F(x, 1-s)$.

– Si f_0 est homotope à f_1 via F_1 et f_1 homotope à f_2 via F_2 alors f_0 est homotope à f_2 via l'application

$$G(x,s) = \begin{cases} F_1(x,2s) & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ F_2(x,2s-1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

L'homotopie est donc une relation d'équivalence dans l'espace topologique $C(X,Y)$. Le quotient est noté $[X,Y]$. On a en plus la propriété suivante :

– Soient $X \xrightarrow{f_0} Y \xrightarrow{g_0} Z$ et $X \xrightarrow{f_1} Y \xrightarrow{g_1} Z$ deux suites d'applications continues telles f_0 soit homotope à f_1 et g_0 homotope à g_1. Alors $g_0 \circ f_0$ est homotope à $g_1 \circ f_1$. En effet soient F une homotopie de f_0 à f_1 et G une homotopie de g_0 à g_1 ; alors l'application $H : (x,s) \in X \times I \longmapsto G(F(x,s),s) \in Z$ est une homotopie de $g_0 \circ f_0$ à $g_1 \circ f_0$.

1.2. Définition. *On dira que X et Y ont même* ***type d'homotopie*** *s'il existe des applications continues $f : X \longrightarrow Y$ et $g : Y \longrightarrow X$ telles que $g \circ f$ et $f \circ g$ soient homotopes respectivement à 1_X et 1_Y.*

Bien sûr, si X et Y sont homéomorphes, ils ont même type d'homotopie : si l'application $f : X \longrightarrow Y$ est un homéomorphisme, prendre $g = f^{-1}$. La réciproque est fausse (on en verra des exemples).

Soient X un espace, A un sous-espace et $j : A \hookrightarrow X$ l'inclusion naturelle ; une *rétraction* de X sur A est une application continue $r : X \longrightarrow A$ dont la restriction à A est 1_A ; si en plus $j \circ r$ est homotope à 1_X, on dira que r est une *rétraction par déformation* de X sur A (ou que X se rétracte par déformation sur A). Dans ce cas, X et A ont même type d'homotopie : l'étude de X du point de vue de l'homotopie est ainsi ramenée à celle de A qui en général plus petit et souvent plus simple. On dira que X est *contractile* s'il se rétracte par déformation sur l'un de ses points : c'est un espace qui n'est homotopiquement "rien" !

1.3. Exemples

(1) - Soient X un espace et Y un espace normé ; deux applications continues $f_0, f_1 : X \longrightarrow Y$ sont toujours homotopes : $F(x,s) = (1-s)f_0(x) + sf_1(x)$ est une homotopie de f_0 à f_1.

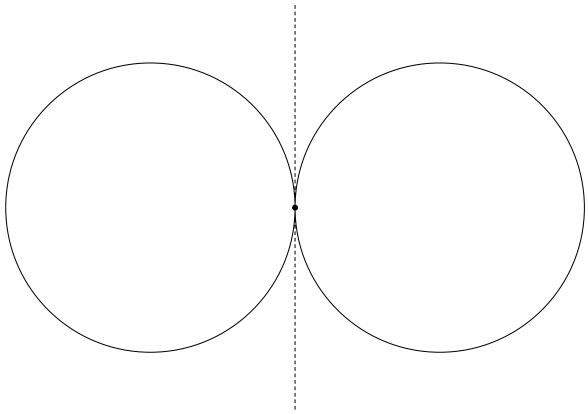
(2) - Si Y est contractile, f_0 et f_1 dans $C(X,Y)$ sont toujours homotopes (laissé en exercice au lecteur).

(3) - Une partie A d'un espace normé Y est dite *étoilée* par rapport au point $a \in A$ si, pour tout $b \in A$, le segment d'extrémités a et b est contenu dans A. Une partie convexe est étoilée par rapport à n'importe quel point $a \in A$. Toute partie étoilée est contractile ; toute partie homéomorphe à une partie étoilée est contractile.

(4) - L'espace $\mathbb{R}^n$ est contractile. Par contre $\mathbb{R}^{n+1}$ (pour $n \geq 1$) ne l'est pas mais il se rétracte par déformation sur sa sphère unité $\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : ||x|| = 1\}$ via l'application $r(x) = \frac{x}{||x||}$, l'homotopie entre r et l'identité de $\mathbb{R}^{n+1}$ est donnée par l'application $H(x,s) = (1-s)x + sr(x)$.

(5) - $Z = \mathbb{C} - \{z_1, \cdots, z_k\}$ se rétracte par déformation sur un *bouquet* de k cercles. Le lecteur pourrait essayer d'écrire explicitement la rétraction dans le cas $Z = \mathbb{C} - \{-1, +1\}$. Il peut prendre le bouquet Γ formé des deux cercles de rayon 1 et de centres respectifs -1 et 1 et l'application continue suivante $r : Z \longrightarrow \Gamma$ donnée explicitement par

$$r(z) = \begin{cases} \frac{z+1}{|z+1|} - 1 & \text{si } \mathcal{R}(z) \leq 0 \text{ et } |z+1| \leq 1 \\ -\frac{z(z+\overline{z})}{|z|^2} & \text{si } \mathcal{R}(z) \leq 0 \text{ et } |z+1| \geq 1 \\ \frac{z-1}{|z-1|} + 1 & \text{si } \mathcal{R}(z) \geq 0 \text{ et } |z-1| \leq 1 \\ \frac{z(z+\overline{z})}{|z|^2} & \text{si } \mathcal{R}(z) \geq 0 \text{ et } |z-1| \geq 1 \end{cases}$$



Bouquet de deux cercles

Fig. IV.1

On a vu que l'homotopie est une relation d'équivalence sur l'ensemble $C(X, Y)$ des applications continues de X dans Y (qui est un espace topologique quand on le munit de la topologie compacte-ouverte). L'ensemble des classes d'équivalence sera noté $[X, Y]$; un élément de cet ensemble est une *classe d'homotopie* d'applications continues de X dans Y.

Lorsque les espaces X et Y possèdent des structures supplémentaires, par exemple une structure différentiable, il semble naturel de demander aux applications (y compris les homotopies) d'avoir une certaine régularité.

1.4. Définition. *Deux applications différentiables $M \overset{f_0, f_1}{\longrightarrow} N$ sont dites* ***différentiablement homotopes****, s'il existe une application différentiable $F : M \times \mathbb{R} \longrightarrow N$ telle que*

$$F(x, s) = \begin{cases} f_0(x) & \text{pour } s \leq 0 \\ f_1(x) & \text{pour } s \geq 1. \end{cases}$$

Deux applications différentiables qui sont différentiablement homotopes sont a fortiori homotopes au sens "ordinaire". L'homotopie différentiable est une relation d'équivalence ; les propriétés de réflexivité et de symétrie sont immédiates ; par contre la transitivité ne l'est pas : il faut faire attention au fait que, contrairement aux applications continues, les applications différentiables ne se recollent pas toujours sur des fermés. Supposons que F_1 et F_2 soient des homotopies différentiables respectivement de f_0 à f_1 et de f_1 à f_2 ; alors

$$F(x,s) = \begin{cases} F_1(x,3s) & \text{pour } s < \frac{2}{3} \\ F_2(x,3s-2) & \text{pour } s > \frac{1}{3} \end{cases}$$

est une homotopie différentiable de f_0 à f_2 : la "transition différentiable" de f_0 à f_2 se fait sur l'ouvert $M \times]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[$.

Sur les variétés C^∞, il est bien entendu très utile d'utiliser la structure différentiable même si les problèmes auxquels on s'intéresse sont purement topologiques (*i.e.* n'utilisent que la notion de continuité). Le théorème qui suit illustre un peu cette situation.

1.5. Théorème. *Soient M et N deux variétés différentiables et $f : M \longrightarrow N$ une application continue. Alors f est homotope à une application différentiable $g : M \longrightarrow N$.*

On peut trouver une démonstration de ce théorème dans [Go] par exemple. Les deux grandes étapes sont :

i) toute application continue $M \longrightarrow \mathbb{R}$ est limite uniforme sur tout compact d'une suite d'applications différentiables $g_n : M \longrightarrow \mathbb{R}$;

ii) on plonge différentiablement N dans un $\mathbb{R}^\ell$ et on approche, en utilisant le point i), les coordonnées du plongement $N \hookrightarrow \mathbb{R}^\ell$.

2. Les groupes d'homotopie

Nous commencerons d'abord par définir le π_0 même si, en général, il n'est pas un groupe. C'est un invariant qui décrit la connexité par arcs.

Soit X un espace *localement connexe par arcs*, c'est-à-dire pour tout point $x \in X$ et tout voisinage V_x, il existe un voisinage ouvert de x connexe par arcs et contenu dans V_x. Sur X on définit la relation d'équivalence : x est équivalent à y si, et seulement si, x et y appartiennent à la même composante connexe par arcs. La classe de x est la composante connexe par arcs contenant x. Le quotient de X par cette relation d'équivalence est un ensemble noté $\pi_0(X)$. Toute application continue $f : X \longrightarrow Y$ induit une application $f_* : \pi_0(X) \longrightarrow \pi_0(Y)$; si f est un homéomorphisme, f_* est une bijection. Ceci permet par exemple de résoudre le problème suivant : $\mathbb{R}$ *est-il homéomorphe à* $\mathbb{R}^2$? Supposons qu'il existe un homéomorphisme $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$; alors sa restriction (qu'on notera encore f) à $\mathbb{R}^*$ est un homéomorphisme sur $\mathbb{R}^2 - \{0\}$, donc $f_* : \pi_0(\mathbb{R}^*) \longrightarrow \pi_0(\mathbb{R}^2 - \{0\})$ est une bijection ; ceci est impossible puisque $\pi_0(\mathbb{R}^2 - \{0\})$ a un seul élément et $\pi_0(\mathbb{R}^*)$ en a deux. Les espaces $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ ne sont donc pas homéomorphes.

Comme on l'a déjà dit, $\pi_0(X)$ n'est pas un groupe. Cependant si X est un groupe de Lie G (*i.e.* G est un groupe qui possède en plus une structure différentiable telle que les appliactions naturelles $(g,g') \in G \times G \longmapsto gg' \in G$ et $g \in G \longmapsto g^{-1} \in G$ soient différentiables), la composante connexe G_0 qui contient l'identité est connexe par arcs et est un sous-groupe distingué de G ; un raisonnement immédiat permet de voir que $\pi_0(G)$ s'identifie à G/G_0 et est donc un groupe.

Désormais X sera un espace séparé connexe par arcs. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous allons introduire le $n^{\text{ème}}$ groupe d'homotopie $\pi_n(X)$; le premier étant le groupe fondamental dont nous avons déjà esquissé la construction.

2.1. Remarque préliminaire

On aura à utiliser dans toute la suite les espaces suivants : I^n, produit cartésien n fois de l'intervalle $I = [0, 1]$, la boule unité fermée $\mathbb{D}^n$ de $\mathbb{R}^n$ pour la norme euclidienne $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$ et la sphère unité de dimension n qu'on note habituellement $\mathbb{S}^n$. On notera (X, x_0) l'espace X dans lequel on a choisi un point x_0 appelé *point base* ; on dira que (X, x_0) est un *espace pointé*. Une application continue entre deux espaces pointés (X, x_0) et (Y, y_0) est dite *pointée*, si elle vérifie $f(x_0) = y_0$.

L'espace I^n est homéomorphe à $\mathbb{D}^n$ via l'application Φ qui à $x \in I^n$ associe $\Phi(x) = \left(\frac{X_1}{\|x\|} \cdots \frac{X_n}{\|X\|}\right)$ où $X = (X_1, \cdots, X_n) = \left(\frac{2x_1-1}{2}, \cdots, \frac{2x_n-1}{2}\right)$; cette application envoie le bord ∂I^n de I^n sur le bord $\mathbb{S}^{n-1}$ de $\mathbb{D}^n$. D'autre part, si on considère sur $\mathbb{D}^n$ la relation d'équivalence dont les classes sont

$$c\ell(x) = \begin{cases} x & \text{si } \|x\| < 1 \\ \partial\mathbb{D}^n & \text{si } \|x\| = 1, \end{cases}$$

l'espcace quotient X est homéomorphe à la sphère $\mathbb{S}^n$. Par exemple, pour $n = 2$ il est induit par l'application $\Psi : \mathbb{D}^2 \longrightarrow \mathbb{S}^2$ donnée par

$$\Psi(x) = \begin{cases} \text{pôle nord} & \text{si } x = 0 \\ \begin{pmatrix} \cos\theta\sin(\pi r) \\ \cos\theta\sin(\pi r) \\ \cos(\pi r) \end{pmatrix} & \text{si } 0 < \|x\| < 1 \\ \text{pôle sud} & \text{si } \|x\| = 1 \end{cases}$$

où (r, θ) sont les coordonnées polaires de x. Ainsi lorsqu'on s'intéressera à une application continue $I^n \longrightarrow X$ qui envoie tout le bord ∂I^n sur un point base x_0, on pourra la considérer comme une application continue $\mathbb{D}^n \longrightarrow X$ qui envoie le bord de $\mathbb{D}^n$ vers x_0 ou comme une application continue $\mathbb{S}^n \longrightarrow X$ qui envoie un point privilgié e sur x_0 ; suivant la situation on prendra l'un ou l'autre de ces points de vue.

Soit x_0 un point base dans X. Une applications continue α de I^n dans X qui envoie le bord ∂I^n sur le point x_0 sera schématisée par

$$\alpha : (I^n, \partial I^n) \longrightarrow (X, x_0).$$

Soient α et β deux telles applications. On définit $\alpha\beta : (I^n, \partial I^n) \longrightarrow (X, x_0)$ par

$$\alpha\beta(t_1, \cdots, t_n) = \begin{cases} \alpha(2t_1, t_2, \cdots, t_n) & \text{si } 0 \leq t_1 \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2t_1 - 1, t_2, \cdots, t_n) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t_1 \leq 1. \end{cases}$$

On a donc une loi de composition interne sur l'ensemble $\Omega(X, x_0))$ des applications continues de I^n qui envoient ∂I^n sur le point base x_0. Pour $\alpha \in \Omega_n(X, x_0)$ on définit $\alpha^{-1} \in \Omega(X, x_0)$ par

$$\alpha^{-1}(t_1, \cdots, t_n) = \alpha(1 - t_1, t_2, \cdots, t_n).$$

On notera α_{x_0} l'application constante $(I^n, \partial I^n) \longrightarrow X$ qui envoie tout sur le point base x_0. La loi de composition interne qu'on vient de définir permet de munir le quotient $\pi_n(X, x_0)$ de $\Omega(X, x_0)$ par la relation d'homotopie d'une structure de groupe : c'est le $n^{\text{ème}}$ *groupe d'homotopie* de X relativement au point base x_0, $\pi_1(X, x_0)$ étant le groupe fondamental qu'on a déjà rencontré.

2.2. Dépendance par rapport au point base

A priori $\pi_n(X, x_0)$ dépend du choix du point base x_0. Nous allons voir que, si on change ce point, le groupe d'homotopie change mais reste algébriquement le même et donc sera défini à ismorphisme près.

Soient x_1 un autre point base et γ un chemin joignant x_0 à x_1 (possible car X est connexe par arcs). On définit une application $\alpha \in \Omega_n(X, x_0) \longrightarrow \gamma^{-1} \cdot \alpha \cdot \gamma \in \Omega_n(X, x_1)$ par

$$\gamma^{-1} \cdot \alpha \cdot \gamma(t_1, \cdots, t_n) = \begin{cases} \gamma(t - 3t_1) & \text{si } 0 \leq t_1 \leq \frac{1}{3} \\ \alpha(3t_1 - 1, t_2, \cdots, t_n) & \text{si } \frac{1}{3} \leq t_1 \leq \frac{2}{3} \\ \gamma(3t_1 - 2, t_2, \cdots, t_n) & \text{si } \frac{2}{3} \leq t_1 \leq 1. \end{cases}$$

Elle induit un isomorphisme $\Phi_\gamma : \pi_n(X, x_0) \longrightarrow \pi_n(X, x_1)$; si $[\alpha] \in \pi_(X, x_0)$ on écrit $\Phi_\gamma([\alpha]) = \gamma^{-1}[\alpha]\gamma$. Si γ' est un autre chemin reliant x_0 à x_1, les morphismes Φ_γ et $\Phi_{\gamma'}$ sont conjugués dans $\pi_n(X, x_1)$. Si alors $\pi_n(X, x_1)$ est abélien, on a $\Phi_\gamma = \Phi_{\gamma'}$. Le $n^{\text{ème}}$ groupe d'homotopie de X sera par définition l'un des groupes $\pi_n(X, x_0)$ où x_0 est un point base quelconque ; il sera noté $\pi_n(X)$.

Soient (X, x_0) et (Y, y_0) deux espaces pointés et $f : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ une application pointée. Alors l'application $\alpha \in \Omega_n(X, x_0) \longrightarrow f \circ \alpha \in \Omega_n(Y, y_0)$ est compatible avec l'équivalence homotopique (découle de la compatibilité de l'homotopie avec la composition des appliactions) et induit un morphisme de groupes

$$f_* : \pi_n(X, x_0) \longrightarrow \pi_n(Y, y_0).$$

On pourra aussi oublier les points base et écrire simplement $f_* : \pi_n(X) \longrightarrow \pi_n(Y)$. Ce morphisme vérifie les propriétés suivantes :

– si $f = 1_X$ alors $f_* = 1_{\pi_n(X)}$;
– $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ pour toute suite d'applications $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$;
– si $f : X \longrightarrow Y$ est un homéomorphisme, alors f_* est un isomorphisme et son inverse $(f_*)^{-1}$ est égal à $(f^{-1})^*$.

Deux espaces homéomorphes ont donc des groupes d'homotopie isomorphes *i.e.* les groupes d'homotopie sont des invariants topologiques ; nous allons voir qu'ils sont plus que cela.

2.3. Proposition. *Soient X et Y deux espaces et $f_0, f_1 : X \longrightarrow Y$ deux applications homotopes via une homotopie F. Soient a un point de X et γ le chemin dans Y joignant $y_0 = f(a)$ à $y_1 = f_1(a)$ défini par $\gamma(t) = F(a,t)$. Alors, pour tout $[\alpha] \in \pi_n(X,a)$ on $(f_1)_*([\alpha]) = \Phi_\gamma((f_0)_*([\alpha]))$ où $\Phi_\gamma([\sigma]) = \gamma^{-1} \cdot [\sigma] \cdot \gamma$ pour tout $[\sigma] \in \pi_n(Y,y_1)$ (cf. 2.2.).*
Démonstarion Soit $\alpha \in \Omega_n(X,a)$; il s'agit de montrer que $\gamma^{-1} \cdot (\alpha \circ f_0) \cdot \gamma \in \Omega_n(Y,y_1)$ est homotope à $f_1 \circ \alpha \in \Omega_n(Y,y_1)$. Soit $H : I^n \times I \longrightarrow Y$ l'application définie par

$$H(t_1, \cdots, t_n, s) = \begin{cases} \gamma^{-1}(2t_1) & \text{si } 0 \leq t_1 \leq \frac{1-s}{2} \\ F\left(\alpha\left(\frac{4t_1+2s-2}{3s+1}\right), t_2, \cdots, t_n, s\right) & \text{si } \frac{1-s}{2} \leq t_1 \leq \frac{s+3}{4} \\ \gamma(4t_1 - 3) & \text{si } \frac{s+3}{4} \leq t_1 \leq 1 \end{cases}$$

On voit facilement que H est l'homotopie cherchée : cela découle du fait qu'elle est continue et qu'elle vérifie les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} H(t_1, \cdots, t_n, 0) &= (\gamma^{-1} \cdot (f_0 \circ \alpha) \cdot \gamma)(t_1, \cdots, t_n) \\ H(t_1, \cdots, t_n, s) &= (f_1 \circ \alpha)(t_1, \cdots, t_n) \\ H(0, t_2, \cdots, t_n, s) &= H(1, t_2, \cdots, t_n, s) = y_1 \end{aligned}$$

De cette proposition on déduit facilement le théorème qui suit (le lecteur est invité à écrire la démonstration).

2.4. Théorème. *Soient X et Y deux espaces et $f : X \longrightarrow Y$ une équivalence d'homotopie. Soit x_0 et posons $y_0 = f(_0)$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le morphisme $\pi_n(X,x_0) \xrightarrow{f_*} \pi_n(Yy_0)$ est un isomorphisme.*

Ce théorème dit que les groupes d'homotopie d'un espace connexe ne dépendent que de son type d'homotopie : ce sont des *invariants homotopiques.*

2.5. Proposition. *Soient X et Y deux espaces. Alors le groupe $\pi_n(X \times Y)$ est le produit direct $\pi_n(X) \times \pi_n(Y)$.*
Démonstration Soient x_0 et y_0 des points bases respectivement de X et Y et choisissons (x_0, y_0) comme point bases dans $X \times Y$. Alors la première et la deuxième projections $p_1 : X \times Y \longrightarrow X$ et $p_2 : X \times Y \longrightarrow Y$ sont des applications pointées. On a donc une application

$$p_* = ((p_1)_*, (p_2)_*) : \pi_n(X \times Y, (x_0, y_0)) \longrightarrow \pi_n(X, x_0) \times \pi_n(Yy_0).$$

Elle est injective ; en effet, si $[\eta]) \in \pi_n(X \times Y, (x_0, y_0))$ est tel que $p_*([\eta]) = 0$, il existe une homotopie G de $\eta \circ p_1$ à α_{x_0} (application onstante $I^n \longrightarrow x_0 \in X$) et une homotopie H de $\eta \circ p_2$ à α_{y_0} (application onstante $I^n \longrightarrow y_0 \in Y$) ; alors $K = (p_1 \circ G, p_2 \circ H)$ est une homotopie de η à homotopie G de $\eta \circ p_1$ à $\alpha_{(x_0,y_0)}$ (application onstante $I^n \longrightarrow (x_0, y_0) \in X \times Y$). La surjectivité est évidente. $\square$

Nous verrons sur des exemples que la structure du groupe fondamental peut-être très compliquée ; à l'inverse les $\pi_n(X)$ pour $n \geq 2$ sont algébriquement "plus simples" comme l'illustre la proposition qui suit.

2.6. Proposition. *L'espace X sera toujours connexe par arcs. Pour tout $n \geq 2$ le groupe d'homotopie $\pi_n(X)$ est abélien.*

Démonstration Soient $\alpha, \beta \in \Omega_n(X, x_0)$. On doit montrer que $\alpha\beta$ est homotope à $\beta\alpha$. Nous l'illustrerons par les dessins qui suivent.

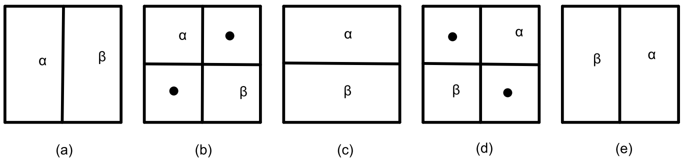


Fig. IV.2

Toutes ces figures ne montrent que la face (t_1, t_2) du cube I^n ; les autres coordonnées $t_3, \cdots, t_n$ "n'interviennent pas" dans le raisonnement.

(a) donne le composé $\Psi_1 = \alpha\beta$ *i.e.*

$$\Psi_1(t_1, \cdots, t_n) = \begin{cases} \alpha(2t_1, t_2, \cdots, t_n) & \text{si } 0 \leq t_1 \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2t_1 - 1, t_2, \cdots, t_n) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t_1 \leq 1 \end{cases}$$

(b) donne l'application $\Psi_2 : (I^n, \partial I^n) \longrightarrow (X, x_0)$ définie par

$$\Psi_2(t_1, \cdots, t_n) = \begin{cases} \alpha(2t_1, 2t_2 - 1, t_3, \cdots, t_n) & \text{si } 0 \leq t_1 \leq \frac{1}{2} \text{ et } \frac{1}{2} \leq t_2 \leq 1 \\ \beta(2t_1 - 1, 2t_2, t_3, \cdots, t_n) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t_1 \leq 1 \text{ et } 0 \leq t_2 \leq \frac{1}{2} \\ x_0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

(c) donne $\Psi_3 : (I^n, \partial I^n) \longrightarrow (X, x_0)$ définie par

$$\Psi_3(t_1, \cdots, t_n) = \begin{cases} \beta(t_1, 2t_2, t_3, \cdots, t_n) & \text{si } 0 \leq t_2 \leq \frac{1}{2} \\ \alpha(t_1, 2t_2 - 1, t_3, \cdots, t_n) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t_2 \leq 0 \end{cases}$$

(d) donne l'application $\Psi_4 : (I^n, \partial I^n) \longrightarrow (X, x_0)$ définie par

$$\Psi_2(t_1, \cdots, t_n) = \begin{cases} \beta(2t_1, 2t_2, t_3, \cdots, t_n) & \text{si } 0 \leq t_1 \leq \frac{1}{2} \text{ et } 0 \leq t_2 \leq \frac{1}{2} \\ \alpha(2t_1 - 1, 2t_2 - 1, t_3, \cdots, t_n) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t_1 \leq 1 \text{ et } \frac{1}{2} \leq t_2 \leq 1 \\ x_0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

(e) donne l'application $\Psi_5 : (I^n, \partial I^n) \longrightarrow (X, x_0)$ qui est le composé $\beta\alpha$ *i.e.*

$$\Psi_5(t_1, \cdots, t_n) = \begin{cases} \beta(2t_1, t_2, \cdots, t_n) & \text{si } 0 \leq t_1 \leq \frac{1}{2} \\ \alpha(2t_1 - 1, t_2, \cdots, t_n) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t_1 \leq 1 \end{cases}$$

On va montrer que :

$$\Psi_1 \ \text{ homotope } \ \Psi_2 \ \text{ homotope } \ \Psi_3 \ \text{ homotope } \ \Psi_4 \ \text{ homotope } \ \Psi_5.$$

Nous ferons seulement le cas Ψ_1 homotope Ψ_2 (le lecteur s'occupera du reste). Soit $H : I^n \times I \longrightarrow X$ l'application définie par

$$H(t_1, \cdots t_n, s) = \begin{cases} \alpha\left(2t_1, \frac{2t_2 - s}{2-s}, t_3, \cdots, t_n\right) & \text{si } 0 \leq t_1 \leq \frac{1}{2} \text{ et } \frac{s}{2} \leq t_2 \leq 1 \\ \beta\left(2t_1 - 1, \frac{2t_2}{2-s}, t_3, \cdots, t_n\right) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t_1 \leq 1 \text{ et } 0 \leq t_2 \leq \frac{2-s}{2} \\ x_0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

On vérifie alors facilement que H est une homotopie entre Ψ_1 et Ψ_2. □

3. Exemples de calculs

De façon générale le calcul des groupes d'homotopie est un problème difficile. Beaucoup de problèmes restent ouverts à ce sujet. Nous allons donner quelques exemples dans des situations très simples.

3.1. Revêtement

Soit $p : \widehat{X} \longrightarrow X$ (X et $\widehat{X}$ étant des espaces connexes par arcs). On choisit un point base $\hat{x}_0 \in \widehat{X}$; on pose $x_0 = p(\hat{x}_0)$ et $F = p^{-1}(x_0)$; F est un espace discret qui est la fibre du revêtement au-dessus du point x_0. On a donc des applications continues $F \hookrightarrow \widehat{X} \xrightarrow{p} X$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a alors une suite de morphismes de groupes

$$\pi_n(F, \hat{x}_0) \longrightarrow \pi_n(\widehat{X}, \hat{x}_0) \xrightarrow{p_*} \pi_n(X, x_0).$$

On peut montrer que cette suite est exacte (*cf.* [DNF] tome II). Comme F est discret on a $\pi_n(F, \hat{x}_0) = 0$ et donc le morphisme $p^* : \pi_n(\widehat{X}, \hat{x}_0) \longrightarrow \pi_n(X, x_0)$ est injectif. En fait, pour tout $n \geq 2$, $p^* : \pi_n(\widehat{X}, \hat{x}_0) \longrightarrow \pi_n(X, x_0)$ est un isomorphisme. En particulier, si X admet un revêtement contractile (c'est le cas du cercle $\mathbb{S}^1$, des tores $\mathbb{T}^n$, des surfaces de genre $g \geq 1$, des variétés $\mathbb{T}^n_A$ introduites au chapitre III et d'autres), ses groupes d'homotopie $\pi_n(X)$ sont triviaux pour $n \geq 2$.

3.2. Certains $\pi_n(\mathbb{S}^m)$

On note toujours $\mathbb{S}^m$ la sphère de dimension $m \geq 2$. Nous allons montrer que, pour tout $n \in \{1, \cdots, m-1\}$, le groupe $\pi_n(\mathbb{S}^m)$ est trivial. Pour cela nous aurons besoin de rappler certains résultats sur les applications différentiables.

Soient N et M deux variétés de dimensions respectives n et m et $N \xrightarrow{f} M$ une application différebntiable. Un point $x \in N$ est dit *point critique* si la différentielle $d_x f : T_x N \longrightarrow T_{fx)} M$ n'est pas surjective. Un point $y \in M$ est dit *valeur critique* de f s'il est l'image par f d'un point critique. Une valeur non critique est dite *régulière* ; si $y \notin f(N)$ alors, par définition même, y est une valeur réglulière. Remarquons que, si $n < m$, l'ensemble des valeurs critiques de f se confond avec $f(M)$. On a alors le

Théorème de Sard. *L'ensemble des valeurs critiques de l'application f est de mesure nulle dans N.*

Ce théorème est essentiel dans le calcul des groupes $\pi_n(\mathbb{S}^m)$ pour $n < m$. En effet, soit $\alpha : \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{S}^m$ une application continue représentant un élément de $\pi_n(\mathbb{S}^m)$. On sait (*cf.* théorème 1.5) que α est homotope à une application différentiable ; on peut donc supposer que α elle-même est différentiable. D'après le théorème de Sard et puisque $n < m$, $\alpha(\mathbb{S}^n)$ est de mesure nulle, donc α ne peut pas être surjective. Il existe donc au moins un point $x_0 \in \mathbb{S}^m$ qui n'est pas dans l'image ; α prend donc ses valeurs dans $\mathbb{S}^m - \{x_0\}$; comme celui-ci est contractile, α est homotope à une application constante. Par suite $\pi_n(\mathbb{S}^m)$ est le groupe trivial pour $n \in \{1, \cdots, m-1\}$. $\square$

Le groupe $\pi_m(\mathbb{S}^m)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$. La démonstration utilise la *théorie du degré* que nous n'avons pas développée ici ; le lecteur intéressé peut consulter [BT]. Pour $n > m$, certains des groupes sont connus mais ont été calculés de façon assez dispersée à la manière dont on résout les différents types d'équations différentielles par exemple !

4. Retour au groupe fondamental

Même s'il est le plus compliqué algébriquement parmi les groupes d'homotopie, il est quand-même celui pour lequel il existe une méthode de calcul par découpage : le *théorème de Van Kampen*. C'est ce que nous allons voir. Mais avant, nous allons calculer le π_1 du "Roi des espaces" c'est-à-dire le cercle. Pour un espace X, ce sont en effet ses cercles "immergés" qu'on ne peut homotoper à un point qui fournissent les générateurs du π_1. Ces générateurs "meurent" quelquefois au bout d'un nombre fini de tours (ce sont les éléments de torsion).

Rappelons que si $\widetilde{M}$ est une variété et Γ un groupe discret qui agit sur $\widetilde{M}$ de façon libre et propre à l'aide d'une application $\Phi : \Gamma \times \widetilde{M} \longrightarrow \widetilde{M}$, le quotient $\widetilde{M}/\Gamma = M$ est une variété et la projection $p : \widetilde{M} \longrightarrow M$ est un revêtement. On peut montrer que (et nous l'avons déjà signalé au chapitre III, si $\widetilde{M}$ est simplement connexe, $\pi_1(M)$ est isomorphe à Γ. Nous alllons le faire dans le faire dans le cas particulier $\widetilde{M} = \mathbb{R}$, $\Gamma = \mathbb{Z}$ agissant par translations entières sur $\mathbb{R}$; dans ce cas le quotient M est le cercle $\mathbb{S}^1$ et la projection $p : t \in \mathbb{R} \longmapsto x \in \mathbb{S}^1$ est $p(t) = x = e^{2i\pi t}$. On choisira $t_0 = 0$ comme point base de $\mathbb{R}$ et $x_0 = 1 = p(0)$ comme point base sur le cercle $\mathbb{S}^1$. On peut remarquer d'abord que, sur $\mathbb{S}^1$, il existe une famille de lacets basés en 1 ayant une allure plus simple en l'occurrence $\sigma_n : t \in [0,1] \longmapsto e^{2i\pi nt} \in \mathbb{S}^1$ où $n \in \mathbb{Z}$. Ceuc là vont en fait donner tous les éléments de $\pi_1(\mathbb{S}^1, 1)$.

4.1. Proposition. *i) Soit $\sigma : I \longrightarrow \mathbb{S}^1$ un lacet de base 1. Il existe un chemin unique $\widetilde{\sigma} : I \longrightarrow \mathbb{R}$ ayant 0 pour origine et se projetant par p sur σ i.e. $p \circ \widetilde{\sigma} = \sigma$.*

ii) Soit $H : I \times I \longrightarrow \mathbb{S}^1$ une application continue telle que $H(0,0) = 1$. Alors il existe une unique application continue $\widetilde{H} : I \times I \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $\widetilde{H}(0,0) = 0$ et $p \circ \widetilde{H} = H$.

Démonstration Comme p est un difféomorphisme local la restriction de p à tout intervalle du type $]a - \frac{1}{2}, a + \frac{1}{2}[$ est un difféomorphisme sur $\mathbb{S}^1 - \{p(a)\}$; il en résulte que si $\widetilde{\sigma}_1$ et $\widetilde{\sigma}_2$ sont deux chemins répondant à la question, ils seront forcément égaux. Prenons $a = 0$ et notons $\tau : \mathbb{S}^1 - \{-1\} \longrightarrow]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ l'homéomorphisme inverse de p. Notons $\| \ \|$ la norme euclidienne sur $\mathbb{C}$ et regardons $\mathbb{S}^1$ comme l'ensemble des nombres complexes de module 1 ; alors σ est une application continue du compact I dans $\mathbb{C}$, elle est donc uniformément continue ; par suite il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$|t - t'| \leq \frac{1}{n} \Longrightarrow \|\sigma(t) - \sigma(t')\| \leq 1.$$

Cela signifie que, pour $|t - t'| \leq \frac{1}{n}$, le nombre complexe $\sigma(t)\overline{\sigma(t')}$ (produit de $\sigma(t)$ par le conjugué de $\sigma(t')$) ne peut jamais être égal à -1. On découpe $[0,1]$ en petits intervalles $I_k = \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$ où $k = 0, 1, \cdots, n-1$; on pose, pour $t \in I_k$

$$\widetilde{\sigma}(t) = \tau(\sigma(t)\overline{\sigma(k/n)} + \sum_{j=1}^{k} \tau\left(\sigma(j/n)\overline{\sigma((j-1))}\right).$$

Ceci nous donne une application continue $I \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant $\widetilde{\sigma}(0) = 0$ et son image dans $\mathbb{R}$ se projette sur σ.

Le point ii) se démontre exactement de la même manière. □

Le chemin $\widetilde{\sigma}$ (resp. l'application $\widetilde{H}$) est appelé *relèvement* de σ (resp. de H). L'extrémité $\widetilde{\sigma}(1)$ de $\widetilde{\sigma}$ est un entier appelé *degré* du lact σ. Une de ses propriétés fondamentales est décrite dans la proposition qui suit.

4.2. Proposition. *Deux lacets σ et σ' sont homotopes si, et seulement si, ils ont même degré.*

Démonstration Supposons σ et σ' homotopes et notons H une homotopie de σ à σ' ; alors, d'après la proposition 4.1, H se relève en une application continue $\widetilde{H} : I \times \mathbb{R}$. Comme, pour tout $s \in I$, $\widetilde{H}(1,s)$ est l'extrémité du chemin $t \in I \longmapsto \widetilde{H}(t,s) \in \mathbb{R}$, $\widetilde{H}(1,s)$ est un entier ; donc l'image de tout $\{1\} \times I$ est un entier. Par suite $\widetilde{\sigma} : t \in I \longmapsto \widetilde{H}(t,0)$ et $\widetilde{\sigma}' : t \in I \longmapsto \widetilde{H}(t,1)$ ont extrémité et σ et σ' ont même degré.

Réciproquement, supposons que σ et σ' ont même degré. Alors $\widetilde{\sigma}$ et $\widetilde{\sigma}'$ ont même origine et m me extrémité ; comme $\mathbb{R}$ est contractile, ils sont homotopes et σ et σ' sont aussi homotopes. □

4.3. Proposition. *Soient σ et σ' deux lacets de $\mathbb{S}^1$ basés en 1. Alors le degré du composé $\gamma = \sigma\sigma'$ est égal à la somme des degrés de σ et σ'.*

D*émonstration* Soient $\widetilde{\sigma}$ et $\widetilde{\sigma}'$ les relèvements respectifs de σ et σ' à $\mathbb{R}$. On définit l'application $\widetilde{\gamma} : I \longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$\widetilde{\gamma}(t) = \begin{cases} \widetilde{\sigma}(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \widetilde{\sigma}'(2t-1) + \widetilde{\sigma}(1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

On vérifie que $\widetilde{\gamma}$ est un relèvement de γ ; ceci montre que $\deg(\sigma\sigma') = \deg(\sigma) + \deg(\sigma')$. $\square$

Rappelons que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, le lacet $\sigma_n : I \longrightarrow \mathbb{S}^1$ est défini par $\sigma_n(t) = e^{2i\pi nt}$. Les propositions 4.1, 4.2 et 4.3 mises bout à bout donne le

4.3. Théorème. *L'application* $[\sigma] \in \pi_1(\mathbb{S}^1) \longmapsto deg(\sigma) \in \mathbb{Z}$ *est un isomorphisme de groupes d'inverse* $n \in \mathbb{Z} \longmapsto [\sigma_n] \in \pi_1(\mathbb{S}^1, 1)$.

CHAPITRE V

Métriques riemanniennes et courbure

Dans ce chapitre nous introduisons la notion de *métrique riemannienne* et nous en donnons quelques exemples. Ensuite nous définissons la *courbure*; nous en donnerons quelques calculs en nous restreignant aux surfaces, cas où elle est plus simple à percevoir.

1. Métriques riemanniennes

Soit M une variété différentiable définie par un atlas $(U_i, \varphi_i)_{i\in I}$. Pour tout $x \in M$, T_xM est un espace vectoriel réel de dimension n. Soit S^2T_xM l'ensemble des formes bilinéaires symétriques sur T_xM i.e les applications $\varphi : T_xM \times T_xM \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que

i) les applications partielles $\varphi(u, \cdot) : v \longrightarrow \varphi(u, v)$ et $\varphi(\cdot, v) : u \longrightarrow \varphi(u, v)$ soient linéaires;

ii) pour tous u, $v \in T_xM$, $\varphi(u, v) = \varphi(v, u)$.

L'ensemble S^2T_xM est un espace vectoriel réel de dimension $N = \frac{n(n+1)}{2}$. Tout endomorphisme $\gamma_x : T_xM \longrightarrow T_xM$ induit un endomorphisme S^2T_xM noté γ_x^* défini par $\gamma_x^*(\varphi)(u, v) = \varphi(\gamma_x(u), \gamma_x(v))$. pour toute $\varphi \in S^2T_xM$ et tous u, $v \in T_xM$. Posons :

$$\mathcal{S}^2 = \bigcup_{x\in M} S^2T_xM$$

L'ensemble $\mathcal{S}^2$ est constitué des couples $(x, g(x))$ où $x \in M$ et $g(x)$ une forme bilinéaire symétrique. Il peut être muni d'une structure de variété différentiable de dimension $n+N$ pour laquelle la projection canonique $\pi_* : (x, g_x) \in \mathcal{S}^2 \longrightarrow x \in M$ est de classe C^∞.

1.1. Définition. *On appelle* ***métrique riemannienne*** *sur M toute section de π_* (i.e. une application C^∞, $g : M \longrightarrow \mathcal{S}^2$ telle que $\pi_* \circ g =$ identité de M) telle que pour tout $x \in M$, $g(x)$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive sur T_xM.*

Cela signifie que, pour tout $x \in M$, $g(x)$ est un produit scalaire sur T_xM et que la famille $(g(x))_{x\in M}$ est C^∞ en x.

1.2. Construction de métriques

Nous allons donner une construction explicite des métriques riemanniennes en utilisant la structure différentiable de M décrite à l'aide d'un atlas $\mathcal{U} = (U_i, \varphi_i)_{i\in I}$; ceci montrera en particulier que de tels objets existent toujours. On supposera que le recouvrement (U_i) est *localement fini* (*i.e.* tout point de M admet un voisinage compact qui ne rencontre qu'un nombre fini d'ouverts U_i).

Soit (U, φ) un élément de $\mathcal{U}$. Pour la structure différentiable usuelle sur $\mathbb{R}^n$, l'homéomorphisme $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow U$ est un difféomorphisme de classe C^∞. Son application tangente

$$\Phi : T\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \longrightarrow TU$$

est un difféomorphisme C^∞ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, l'application $d_x\Phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow T_{\varphi(x)}U$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Soit $\langle\ ,\ \rangle$ le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$; pour tous X_x, $Y_x \in T_{\varphi(x)}U$ on pose :

$$g(x)(X_x, Y_x) = \langle \Phi^{-1}(X_x), \Phi^{-1}(Y_x)\rangle.$$

Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ un système de coordonnées sur U. Alors en chaque point $x \in U$, les champs de vecteurs $\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ forment une base de l'espace tangent T_xU ; soit $(dx_1, \ldots, dx_n)$ sa base duale. Alors g a pour expression :

$$\text{(V.1)} \qquad g(x) = \sum_{k,\ell=1}^{n} g_{k\ell}(x) dx_k \otimes dx_\ell$$

où les $g_{k\ell}$ sont des fonctions C^∞ définies sur U et telles que la matrice $(g_{k\ell})$ appelée *matrice locale* associée à g soit définie positive.

Notons g_i la métrique riemannienne sur U_i que l'on vient de construire. Soit $(\rho_i)_{i\in I}$ une partition de l'unité C^∞ subordonnée au recouvrement $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$. Pour tout $x \in M$ on pose :

$$g(x) = \sum_{i\in I} \rho_i(x) g_i(x).$$

Il est facile de vérifier que g ainsi définie est une métrique riemannienne sur la variété M. Une variété M munie d'une métrique riemannienne g est appelée *variété riemannienne* ; elle sera notée (M, g).

Supposons que M est une variété complexe. Pour chaque point $z \in M$, considérons le *compléxifié* $T_zM \otimes \mathbb{C}$ de l'espace tangent réel à M en z : on peut voir $T_zM \otimes \mathbb{C}$ comme l'espace des applications $\mathbb{R}$-linéaires $T_zM \longrightarrow \mathbb{C}$. En opérant ainsi pour z variant dans M on obtient le *compléxifié* $TM \otimes \mathbb{C}$ du fibré tangent à M auquel on peut associer le fibré $\mathcal{H}^2 \longrightarrow M$ dont la fibre au point $z \in M$ est l'espace $\mathcal{H}(T_zM \otimes \mathbb{C})$ des 2-formes hermitiennes sur $T_zM \otimes \mathbb{C}$.

On appelle *métrique hermitienne* sur M une section $h : M \longrightarrow \mathcal{H}^2$ telle que pour tout $z \in M$, $h(z)$ est une forme hermitienne définie positive. De telles métriques existent toujours. Dans un système de coordonnées locales holomorphes $(z_1, \ldots, z_n)$ une telle métrique s'écrit

$$\text{(V. 2)} \qquad h(z) = \sum_{k,\overline{\ell}=1}^{n} h_{k\overline{\ell}}(z) dz_k \otimes d\overline{z}_\ell$$

où $h_{k\overline{\ell}}$ est une matrice hermitienne définie positive à coefficients des fonctions C^∞ et $dz_k = dx_k + idy_k$, $d\overline{z}_k = dx_k - idy_k$ avec $z_k = x_k + iy_k$, $k = 1, \ldots, n$.

La partie réelle g d'une métrique hermitienne $h(z) = g(z) + i\omega(z)$ est un métrique riemannienne ; c'est la seule qui compte d'ailleurs pour le calcul des longueurs puisque la partie imaginaire ω est une 2-forme alternée. Les formes g et ω sont liées par les relations qui suivent :

$$g(z)(u,v) = -\omega(z)(iu,v) = \omega(z)(u,iv) \quad \text{et} \quad \omega(z)(u,v) = -g(z)(iu,v) = g(z)(u,iv).$$

Soient (M,g) et (N,h) deux variétés riemanniennes et $\varphi : M \longrightarrow N$ une application de classe C^∞.

1.3. Définition. *On dira que :*

(1) φ *est une* ***isométrie locale*** *si pour tout point $x \in M$ et tous vecteurs X_x et Y_x tangents à M en x, on ait :*

$$h(y)(d_x\varphi(X_x), d_x\varphi(Y_x)) = g(x)(X_x, Y_x)$$

où $y = \varphi(x)$. Ceci signifie que l'application linéaire $d_x\varphi : T_xM \longrightarrow T_yN$ est une isométrie. Si en plus φ est un bijective on dira que φ est une ***isométrie*** ;

(2) φ *est* ***conforme*** *s'il existe une fonction $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ telle que, pour tout $x \in M$, on ait :*

$$h(y)(d_x\varphi(X_x), d_x(Y_x)) = e^{f(x)} \cdot g(x)(X_x, Y_x).$$

La fonction e^f est appelée ***facteur de conformité*** *de φ.*

Comme on peut le voir facilement, une isométrie est une application conforme de facteur de conformité 1 et une application conforme préserve les angles. L'ensemble $\mathrm{Isom}(M,g)$ des isométries de la variété riemannienne (M,g) est un groupe appelé *groupe des isométries* de (M,g). L'ensemble $\mathrm{Conf}(M,g)$ des transformations bijectives conformes de M est appelé *groupe conforme* de (M,g). On a bien sûr :

$$\mathrm{Isom}(M) \subset \mathrm{Conf}(M) \subset \mathrm{Diff}(M).$$

2. Exemples de métriques riemanniennes

Nous allons en donner celles dites usuelles car elles sont naturelles et apparaissenr souvent comme en tête des exemples.

2.1. Métriques usuelles sur $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$

Sur $\mathbb{R}^n$ on a une base de champs de vecteurs globaux $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$. On définit une métrique riemannienne sur $\mathbb{R}^n$ à l'aide de sa matrice

$$g_{k\ell} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = l \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{pour } k, \ell = 1, \ldots, n$$

Cette métrique s'écrit en termes de formes différentielles dx_k :

$$g = \sum_{k=1}^{n} dx_k \otimes dx_k.$$

En procédant presque de la même façon, on définit une métrique hermitienne sur la variété complexe $\mathbb{C}^n$:

$$h = \sum_{k=1}^{n} dz_k \otimes d\overline{z}_k.$$

2.2. Graphe d'une fonction

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une application C^∞. Alors son graphe $M = \{(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \in U \times \mathbb{R} \ : \ x_{n+1} = f(x_1, \ldots, x_n)\}$ est une variété différentiable de dimension n plongée dans $\mathbb{R}^{n+1}$ à l'aide de l'application C^∞ :

$$F : (x_1, \ldots, x_n) \in U \longrightarrow (x_1, \ldots, x_n, f(x_1, \ldots, x_n)) \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

Pour tout $x \in U$, les vecteurs $\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ forment une base de l'espace tangent $T_x U$. Leurs images par la différentielle $d_x F$ sont les vecteurs de $T_{F(x)} M \subset \mathbb{R}^{n+1}$:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{\partial}{\partial x_1}(x) \end{pmatrix}, \cdots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \frac{\partial}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

Sur $\mathbb{R}^{n+1}$ on considère le produit scalaire usuel $\langle \ , \ \rangle$; on le restreint à chaque espace tangent $T_{F(x)} M$ et on obtient ainsi une métrique riemannienne g sur M. Pour tout $k = 1, \ldots, n$ posons $p_k = \frac{\partial f}{\partial x_n}$. Alors :

$$\langle e_k, e_\ell \rangle = \begin{cases} 1 + p_k^2 & \text{si } k = \ell \\ p_k p_\ell & \text{sinon} \end{cases}$$

D'où l'expression de la métrique dans le système de coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$:

$$\text{(IV. 3)} \qquad g = \sum_{k=1}^{n} (1 + p_k^2) dx_k \otimes dx_k + \sum_{k \neq l}^{n} p_k p_\ell dx_k \otimes dx_\ell.$$

2.3. La sphère

On note $\mathbb{S}^2$ la sphère unité de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$. Si on ôte le pôle nord$= (0, 0, 1)$ et le pôle sud$=(0, 0, -1)$ l'ouvert M qui reste a pour repésentation paramétrique :

$$\begin{cases} x_1 = \cos\theta \sin\varphi \\ x_2 = \sin\theta \sin\varphi \\ x_3 = \cos\varphi \end{cases}$$

où $\theta \in \mathbb{R}$ et $\varphi \in]0, \pi[$. L'application $F : (\theta, \varphi) \in \mathbb{R} \times]0, \pi[\longrightarrow (x_1, x_2, x_3) \in M$ n'est pas injective mais sa différentielle l'est en tout point (θ, φ). Elle est donnée par la matrice :

$$\begin{pmatrix} -\sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\cos\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi & \sin\theta\cos\varphi \\ 0 & -\sin\varphi \end{pmatrix}$$

L'espace tangent à M au point $F(\theta, \varphi)$ est donc engendré par les vecteurs :

$$e_1 = \begin{pmatrix} -\sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad e_2 = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\cos\varphi \\ -\sin\varphi \end{pmatrix}$$

Les différents produits scalaires $\langle e_k, e_l \rangle$, pris dans $\mathbb{R}^3$, donnent la métrique riemannienne sur M :

$$g = \sin^2\varphi d\theta \otimes d\theta + d\varphi \otimes d\varphi.$$

Le groupe $\mathrm{Isom}(\mathbb{S}^2)$ s'identifie au groupe $\mathrm{O}(3)$ des isométries linéaires de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ ou groupe des matrices orthogonales 3×3. On peut montrer –mais cela demande un peu de travail– que le groupe conforme $\mathrm{Conf}(\mathbb{S}^2)$ est engendré par les rotations de $\mathbb{R}^3$ et les inversions de $\mathbb{R}^3$ ayant pour *sphères invariantes* les sphères orthogonales à $\mathbb{S}^2$.

2.4. Le demi-espace $\mathbb{H}^n$

On note $\mathbb{H}^n$ le demi-espace $\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \;:\; x_n > 0\}$ sur lequel on définit la métrique riemannienne :

$$g = \frac{\sum_{k=1}^n dx_k \otimes dx_k}{x_n^2} \tag{IV.4}$$

Par la suite, nous étudierons en détail les propriétés de cette métrique riemannienne. On peut déjà remarquer que pour $n = 2$, $\mathbb{H}^2$ est le demi-espace $\{z \in \mathbb{C} \;:\; \mathrm{Im} z > 0\}$ sur lequel on peut définir la métrique hermitienne :

$$h = -\frac{4dzd\overline{z}}{(z - \overline{z})^2}. \tag{IV.5}$$

On appelle *courbe différentiable* dans M toute application γ de classe C^r $(r \geq 1)$ d'un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ dans M ; on dira que γ est C^r *par morceaux* s'il existe une partition dénombrable de I en intervalles I_n tels que la restriction de γ à l'intérieur de chacun des I_n soit une courbe de classe C^r. On prendra en général $r = \infty$. On appelle *champ de vecteurs le long d'une courbe* $\gamma : I \longrightarrow M$ toute application différentiable qui à tout $t \in I$ associe un vecteur tangent $X(t) \in T_{\gamma(t)}M$. Par exemple, si γ est différentiable, l'image $d_t\gamma\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)$ du champ canonique $\frac{\partial}{\partial t}$ sur I par la dérivée de γ est un champ de vecteurs le long de γ.

Supposons M munie d'une métrique riemannienne $g = \langle\ ,\ \rangle$ et soit $\gamma : I \longrightarrow M$ une courbe C^1 par morceaux. On appelle *longueur* du segment $\gamma([t_0, t_1])$ le nombre positif

(IV.6)
$$\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\left\langle \frac{d\gamma}{dt}(t), \frac{d\gamma}{dt}(t) \right\rangle} dt$$

où l'intégrale est, bien entendu, calculée en dehors des points de discontinuité de $\frac{d\gamma}{dt}(t)$.

3. Connexions

Soit M une surface de $\mathbb{R}^3$. Un champ de vecteurs sur M le long d'une courbe différentiable $\gamma : I \longrightarrow M$ est une application différentiable

$$X : t \in M \longrightarrow (X_1(t), X_2(t), X_3(t)) \in T_{\gamma(t)}M.$$

On pourrait penser que dériver X (en imposant à la dérivée de rester tangente à M) reviendrait à dériver simplement les composantes ; il n'en est rien : on peut trouver des fonctions X_1, X_2, X_3 telles que le vecteur $(X_1'(t), X_2'(t), X_3'(t))$ ne soit plus tangent à M. On est alors amené à chercher des *lois* permettant de dériver des objets tels que champ de vecteurs, section de fibré *etc.* Cela se fait à l'aide d'une *connexion* (*affine* ou *riemannienne*) qui est une notion fondamentale en géométrie différentielle.

3.1. Connexions affines

Soit M une variété différentiable de dimension n. On note TM son fibré tangent et $C^\infty(M)$ et $C^\infty(TM)$ respectivement l'algèbre des fonctions C^∞ et le $C^\infty(M)$-module des champs de vecteurs sur M. On appelle *connexion affine* sur M toute application :

$$\nabla : (X, Y) \in C^\infty(TM) \times C^\infty(TM) \longrightarrow \nabla_X Y \in C^\infty(TM)$$

$C^\infty(M)$-linéaire par rapport au premier facteur, additive par rapport au second et telle que $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$ pour tous $X, Y \in C^\infty(TM)$ et toute fonction $f \in C^\infty(M)$.

Mettons-nous dans un ouvert de coordonnées locales $(U, x_1, \ldots, x_n)$. Alors on a une base de champs de vecteurs sur U :

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, X_n = \frac{\partial}{\partial x_n}$$

Pour connaître la connexion ∇ il suffit de connaître les différentes quantités $\nabla_{X_i} X_j$; mais celles-ci s'écrivent :

(IV.7)
$$\nabla_{X_i} X_j = \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k X_k$$

où Γ_{ij}^k sont des fonctions C^∞ sur U. La connaissance (localement) de ∇ revient donc à celle des fonctions Γ_{ij}^k, $i, j, k = 1, \ldots n$ appelées *symboles de Christoffel* de la connexion ∇.

On suppose M munie d'une connexion affine ∇. Soient $\gamma : I \longrightarrow M$ une courbe différentiable et X un champ de vecteurs le long de γ. Alors :

Il existe une unique loi qui associe à X un champ de vecteurs le long de γ noté $\frac{DX}{dt}$ appelé ***dérivée covariante*** *de X le long de γ et vérifiant les proporiétés suivantes :*

i) $\frac{D}{dt}(X+Y) = \frac{DX}{dt}dt + \frac{DY}{dt}$,

ii) $\frac{D}{dt}(fX) = f\frac{DX}{dt}dt + \frac{df}{dt}X$,

iii) *si X est la restriction à l'image de γ d'un champ $\widetilde{X}$ sur M alors* $\frac{DX}{dt} = \nabla_{\frac{d\gamma}{dt}}\widetilde{X}$.

Ecriture locale explicite

On suppose que l'ouvert $(U, x_1, \ldots, x_n)$ de coordonnées locales est tel que $U \cap \gamma(I) \neq \emptyset$. On peut écrire :

$$\gamma(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t)), \quad X = \sum_{j=1}^{n} f_j X_j \text{ avec } f_j \in C^\infty(U).$$

Alors en utilisant les propriétés énoncées de la dérivée covariante on établit :

$$\frac{DX}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \frac{df_j}{dt} X_j + \sum_{i,j=1}^{n} \frac{dx_i}{dt} f_j \nabla_{X_i} X_j$$

ou encore :

(IV.8)
$$\frac{DX}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \left\{ \frac{df_k}{dt} + \sum_{i,j=1}^{n} f_j \frac{dx_i}{dt} \Gamma_{ij}^k \right\} X_k.$$

Soit X un champ de vecteurs le long d'une courbe γ. On dira que X est *parallèle* si sa dérivée covariante $\frac{DX}{dt}$ est identiquement nulle.

Soit $\gamma : I \longrightarrow M$ une courbe, $t_0 \in I$ et X_0 un vecteur de $T_{\gamma(t_0)}M$. Alors on peut construire un champ unique X parallèle le long de toute la courbe γ et prenant la valeur X_0 au point t_0. Un tel champ est appelé le *transport parallèle* de X_0 le long de γ. Si on l'écrit sous la forme $X = \sum_{j=1}^{n} f_j X_j$, ses composantes f_j sont les solutions du système différentiel :

$$\frac{DX}{dt} = \frac{df_k}{dt} + \sum_{i,j=1}^{n} f_j \frac{dx_i}{dt} \Gamma_{ij}^k = 0 \quad k = 1, \ldots, n$$

qui sont uniques en raison de la condition initiale $(f_1(t_0), \ldots, f_n(t_0)) = X_0$.

Une connexion affine ∇ sur M est dite *symétrique* si elle vérifie pour tous $X, Y \in C^\infty(TM)$ la relation :

(IV.9)
$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y].$$

Localement pour $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ on a :

$$\nabla_{X_i} X_j - \nabla_{X_j} X_i = [X_i, Y_j] = 0$$

et donc pour tous $i, j, k = 1, \ldots, n$:

$$\Gamma_{ij}^{k} = \Gamma_{ji}^{k}.$$

3.2. Connexions riemanniennes

Soit (M, g) $(g = \langle\ ,\ \rangle)$ une variété riemannienne munie d'une connexion affine ∇. On dira que ∇ est *compatible* avec g si, pour tous $X, Y, Z \in C^{\infty}(TM)$, on a :

$$X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle. \tag{IV.10}$$

En particulier si X, Y sont des champs de vecteurs définis le long d'une courbe γ on a :

$$\frac{d}{dt}\langle X, Y\rangle = \left\langle \frac{DX}{dt}, Y \right\rangle + \left\langle X, \frac{DY}{dt} \right\rangle.$$

On arrive maintenant à un théorème fondamental qui assure l'existence d'une connexion affine symétrique compatible avec une métrique g.

<u>Théorème de Levi-Civita</u>

Soit M une variété munie d'une métrique riemannienne $g = \langle\ ,\ \rangle$. Alors il existe sur M une unique connexion affine ∇ symétrique et compatible avec g.

La connexion ∇ est appelée *connexion de Levi-Civita* de la variété riemannienne (M, g).

Un calcul simple montre que ∇ est définie de façon unique par l'identité :

$$\langle \nabla_Y X, Z\rangle = \frac{1}{2}\big\{X\langle Y, Z\rangle + Y\langle Z, X\rangle - Z\langle X, Y\rangle - \langle [X, Z], Y\rangle - \langle [Y, Z], X\rangle - \langle [X, Y], Z\rangle\big\}$$

Faisant $X = X_j$, $Y = X_i$ et $Z = X_k$ et $\langle X_i, X_j\rangle = g_{ij}$ on obtient :

$$\sum_{l=1}^{n} g_{lk}\Gamma_{ij}^{l} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j}g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k}g_{ij}\right).$$

D'où l'on déduit :

$$\Gamma_{ij}^{l} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} g^{lk}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j}g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k}g_{ij}\right) \tag{IV.11}$$

où (g^{ij}) est l'inverse de la matrice (g_{ij}).

3.3. Géodésiques

Soit $g = \langle\ ,\ \rangle$ une métrique riemannienne sur M. Une courbe $\gamma : I \longrightarrow M$ est dite *géodésique* si $\frac{D}{dt}\left(\frac{d\gamma}{dt}\right) = 0$ identiquement. Cela se traduit par le système d'équations différentielles :

$$\frac{d^2 x_k}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^{n} \Gamma_{ij}^{k}\frac{dx_i}{dt}\frac{dx_j}{dt} = 0 \quad k = 1, \ldots, n \tag{IV.12}$$

où les $x_i(t)$ sont les composantes de γ dans le système de coordonnées $(U, x_1, \ldots, x_n)$.

Si γ est une géodésique, la restriction de γ à tout fermé $[t_0, t_1]$ est appelée *segment de géodésique* de $\gamma(t_0)$ à $\gamma(t_1)$. On a :

$$\frac{d}{dt}\left\langle \frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt} \right\rangle = 2\left\langle \frac{D}{dt}\left(\frac{d\gamma}{dt}\right), \frac{d\gamma}{dt} \right\rangle = 0$$

et donc la norme $\left|\left|\frac{d\gamma}{dt}\right|\right|$ du vecteur $\frac{d\gamma}{dt}$ est constante (égale à α par exemple). On en déduit alors que :

$$s(t) = \text{longueur}([\gamma(t_0), \gamma(t)]) = \int_{t_0}^{t} \left|\left|\frac{d\gamma}{dt}\right|\right| dt = \alpha(t - t_0).$$

Si $\alpha = 1$ la géodésique est dite *normalisée.* En remplaçant t par s on *paramètre* γ *par la longueur de l'arc.* Quand on peut faire cela sur tout l'intervalle $]-\infty, +\infty[$ on dira que γ est *complète.* On dira alors que la variété riemannienne (M, g) est *complète* si toute géodésique est complète.

Les géodésiques sont les courbes qui minimisent localement la distance entre les points de la variété.

4. Courbure

Une *métrique riemannienne* sur une variété permet d'y introduire un invariant fondamental appelé *courbure.* Celle-ci, pour le cas d'une surface par exemple, a pour fonction de distinguer à quel point un morceau de cette surface peut être "loin" d'un disque plan. On peut illustrer cela en constatant qu'il est impossible de coller de *façon isométrique* la pelure d'une orange sur le plan d'une table ! C'est cet invariant que nous nous proposons de définir dans ce paragraphe.

Dans toute la suite M sera une variété munie d'une métrique riemannienne g et de sa connexion de Levi-Civita ∇ associée.

4.1. Tenseur de courbure

On appelle *courbure* de (M, g) l'application qui à tout $(X, Y) \in C^\infty(TM) \times C^\infty(TM)$ associe l'application $R(X, Y) : C^\infty(TM) \longrightarrow C^\infty(TM)$ définie par :

(IV.13) $$R(X, Y)Z = \nabla_{[X,Y]}Z - (\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z).$$

Pour tous $X, Y, Z, T \in C^\infty(TM)$ posons :

(IV.14) $$(X, Y, Z, T) = \langle R(X, Y)Z, T \rangle.$$

La courbure R de (M, g) vérifie les propriétés qui suivent dont la démonstration consiste en de simples calculs.

i) L'application $(X, Y) \longrightarrow R(X, Y)$ est $C^\infty(M)$-bilinéaire.

ii) Pour tous $(X,Y) \in C^\infty(TM) \times C^\infty(TM)$, l'application $Z \longrightarrow R(X,Y)Z$ est $C^\infty(M)$-linéaire.

iii) $R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0$ (*identité de Bianchi*).

iv) $(X,Y,Z,T) = -(Y,X,Z,T)$ et $(X,Y,Z,T) = -(X,Y,T,Z)$.

v) $(X,Y,Z,T) = (Z,T,X,Y)$.

Ecriture locale

Comme toujours on pose $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$. Le champ $R(X_i,X_j)X_k$ s'écrit dans la base $(X_1,\ldots,X_n)$:

(IV.15)
$$R(X_i,X_j)X_k = \sum_{l=1}^{n} R^l_{ijk} X_l$$

où les R^l_{ijk}, $i,j,k,l = 1,\ldots n$ sont des fonctions C^∞ sur l'ouvert de coordonnées locales $(U,x_1,\ldots,x_n)$. Elles s'expriment en fonction des symboles de Christoffell Γ^k_{ij}. Il suffit de voir que :

$$R(X_i,X_j)X_k = \nabla_{X_j}\nabla_{X_i}X_k - \nabla_{X_i}\nabla_{X_j}X_k$$

qui donne :

(IV.16)
$$R^s_{ijk} = \sum_{l=1}^{n} \Gamma^l_{ik}\Gamma^s_{jl} - \sum_{l=1}^{n} \Gamma^l_{jk}\Gamma^s_{il} + \frac{\partial}{\partial x_j}\Gamma^s_{ik} - \frac{\partial}{\partial x_i}\Gamma^s_{jk}.$$

De même :

(IV.17)
$$\langle X_i, X_j, X_k, X_s\rangle = R_{ijks} = \langle R(X_i,X_j)X_k, X_s\rangle = \sum_{l=1}^{n} R^l_{ijk} g_{ls}.$$

Les fonctions R_{ijks} vérifient les relations suivantes découlant immédiatement de celles du "crochet" $\langle\ ,\ ,\ ,\ \rangle$:

(IV.18)
$$\begin{cases} R_{ijks} + R_{jkis} + R_{kijs} = 0 \\ R_{ijks} = -R_{jiks} \\ R_{ijks} = -R_{ijsk} \\ R_{ijks} = R_{ksij} \end{cases}$$

4.2. La courbure sectionnelle

On considère toujours une variété M munie d'une métrique riemannienne $g = \langle\ ,\ \rangle$ et de la connexion de Levi-civita associée.

Lemme. *Soit σ un sous-espace vectoriel de dimension 2 de T_xM et (X,Y) une base de σ. Alors la quantité* :

(IV.19)
$$\kappa(X,Y) = \frac{(X,Y,X,Y)}{||X||^2||Y||^2 - \langle X,Y\rangle^2}$$

ne dépend pas de la base (X,Y) mais uniquement du sous-espace σ.

La démonstration est facile bien qu'elle soit un peu calculatoire. Le nombre $\kappa(X,Y)$ (où (X,Y) est une base quelconque de σ) sera noté $\kappa(\sigma)$ et appelé *courbure sectionnelle* de (M,g) au point x relativement au sous-espace σ.

On voit donc que la courbure n'est pas une fonction sur M mais sur le fibré $\mathcal{G}(\mathcal{M},\in)$ au-dessus de M dont la fibre en x est la *grassmannienne* $G(n,2)$ des sous-espaces de dimension 2 de T_xM. On dira que (M,g) est à *courbure constante* si cette fonction est constante.

5. Exemples de calcul

Dans cette section nous donnons des exemples de calcul de courbure sectionnelle de certaines variétés.

5.1. La variété euclidienne $\mathbb{R}^n$

Les champs $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, $i = 1,\dots,n$ sont définis globalement, commutent et forment une base de l'espace tangent en chaque point $x \in \mathbb{R}^n$. On munit $\mathbb{R}^n$ de la métrique $g = \sum_{i=1}^n dx_i \otimes dx_i$ qui a pour matrice associée la matrice identité *i.e.* :

$$g_{ij} = \langle X_i, X_j\rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On vérifie facilement que $\nabla_{X_i}X_j = 0$ pour tous $i,j = 1,\dots,n$. Comme par définition les symboles de Christoffel sont donnés par

$$\text{(IV.20)} \qquad \Gamma_{ij}^{\ell} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} g^{\ell k}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j}g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k}g_{ij}\right)$$

ils sont identiquement nuls. Par suite la *courbure sectionnelle est identiquement nulle.*

Les géodésiques de $\mathbb{R}^n$ sont les courbes $\gamma(t) = (x_1(t),\dots,x_n(t))$ qui vérifient le système différentiel :

$$\frac{d^2x_k}{dt^2}(t) = 0$$

et sont les droites affines $\gamma(t) = (a_1t + b_1,\dots,a_nt + b_n)$. Elles sont donc complètes.

5.2. La sphère $\mathbb{S}^2$

La sphère $\mathbb{S}^2$ étant plongée dans $\mathbb{R}^3$ elle hérite d'une métrique riemannienne dont l'écriture en coordonnées sphériques est :

$$g = \sin^2\varphi d\theta \otimes d\theta + d\varphi \otimes d\varphi.$$

La matrice de g s'écrit donc :

$$g = (g_{ij}) = \begin{pmatrix} \sin^2\varphi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad g^{-1} = (g^{ij}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sin^2\varphi} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour adapter les calculs aux formules dont on dispose on posera $x_1 = \theta$ et $x_2 = \varphi$. Les champs $\frac{\partial}{\partial x_1}$ et $\frac{\partial}{\partial x_2}$ seront respectivement $\frac{\partial}{\partial \theta}$ et $\frac{\partial}{\partial \varphi}$. On a bien entendu $[X_1, X_2] = 0$. La formule (IV.20) donne :

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 & \Gamma_{12}^1 \\ \Gamma_{21}^1 & \Gamma_{22}^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{11}^2 & \Gamma_{12}^2 \\ \Gamma_{21}^2 & \Gamma_{22}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculons maintenant la quantité $(X_1, X_2, X_1, X_2) = \langle R(X_1, X_2)X_1, X_2 \rangle$. On a :

$$\begin{aligned} \nabla_{X_2}\nabla_{X_1}X_1 =& \nabla_{X_2}(\Gamma_{11}^1 X_1 + \Gamma_{11}^2 X_2) \\ =& \nabla_{X_2}\left(-\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}X_2\right) \\ =& \frac{1}{\sin^2\varphi}X_2 \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} \nabla_{X_1}\nabla_{X_2}X_1 =& \nabla_{X_1}(\Gamma_{21}^1 X_1 + \Gamma_{21}^2 X_2) \\ =& 0 \end{aligned}$$

Finalement :

$$\begin{aligned} R(X_1, X_2)X_1 =& \nabla_{X_2}\nabla_{X_1}X_1 - \nabla_{X_1}\nabla_{X_2}X_1 \\ =& \frac{1}{\sin^2\varphi}X_2 \end{aligned}$$

et donc $(X_1, X_2, X_1, X_2) = \frac{1}{\sin^2\varphi}X_2$. La formule donnant la courbure sectionnelle par rapport au 2-plan $\sigma = (X_1, X_2)$ (mais il n'y en a qu'un ici !) est :

$$\kappa(\sigma) = \frac{(X_1, X_2, X_1, X_2)}{||X_1||^2||X_2||^2 - \langle X_1, X_2\rangle^2}$$

Comme $||X_1||^2 = \sin^2\varphi$, $||X_2|| = 1$ et X_1 et X_2 orthogonaux on obtient $\kappa(\sigma) = 1$.

La sphère $\mathbb{S}^2$ munie de sa métrique standard (celle induite par la métrique euclidienne de $\mathbb{R}^3$) est une *variété riemannienne compacte orientable simplement connexe de courbure sectinnelle constante égale à* 1. C'est le cas de toute sphère $\mathbb{S}^n$ munie de sa métrique standard; c'est les mêmes calculs mais hautement plus lourds à mener.

5.3. Le demi-espace $\mathbb{H}^2$

On rappelle que $\mathbb{H}^2$ est le demi-espace $\{x \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$ muni de la métrique riemannienne :

$$g = \frac{dx \otimes dx + dy \otimes dy}{y^2}$$

dont la matrice associée est :

$$g = (g_{ij}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{y^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{y^2} \end{pmatrix}$$

On calcule les symbloes de Christoffel de la même manière que précédemment et on obtient :

$$(\Gamma^1_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{y} \\ -\frac{1}{y} & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad (\Gamma^2_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 over y & 0 \\ 0 & -\frac{1}{y} \end{pmatrix}$$

Ceci nous donne :

$$\begin{aligned}
\nabla_{X_2}\nabla_{X_1}X_1 =& \nabla_{X_2}(\Gamma^1_{11}X_1 + \Gamma^2_{11}X_2) \\
=& \nabla_{X_2}\left(\frac{1}{y}X_2\right) \\
=& \frac{1}{y}\nabla_{X_2}X_2 - \frac{1}{y^2}X_2 \\
=& \frac{1}{y}\left(\Gamma^1_{22}X_1 + \Gamma^2_{22}X_2\right) - \frac{1}{y^2}X_2 \\
=& -\frac{2}{y^2}X_2
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\nabla_{X_1}\nabla_{X_2}X_1 =& \nabla_{X_1}(\Gamma^1_{21}X_1 + \Gamma^2_{21}X_2) \\
=& \nabla_{X_1}\left(-\frac{1}{y}X_1\right) \\
=& -\frac{1}{y^2}X_2
\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
R(X_1, X_2)X_1 =& \nabla_{X_2}\nabla_{X_1}X_1 - \nabla_{X_1}\nabla_{X_2}X_1 \\
=& \frac{1}{y^2}X_2
\end{aligned}$$

et par suite :

$$\begin{aligned}
(X_1, X_2, X_1, X_2) =& \langle R(X_1, X_2)X_1, X_2\rangle \\
=& \langle -\frac{1}{y^2}X_2, X_2\rangle \\
=& -\frac{1}{y^2}\langle X_2, X_2\rangle \\
=& -\frac{1}{y^4}
\end{aligned}$$

La courbure sectionnelle est finalement :

$$\begin{aligned}
\kappa(\sigma) =& \frac{(X_1, X_2, X_1, X_2)}{||X_1||^2||X_2||^2 - \langle X_1, X_2\rangle^2} \\
=& -1
\end{aligned}$$

car $||X_1||^2||X_2||^2 = \left(\frac{1}{y^2}\right)\left(\frac{1}{y^2}\right)$ et $\langle X_1, X_2\rangle = 0$ (les vecteurs X_1 et X_2 étant orthogonaux).

Le demi-plan $\left(\mathbb{H}^2, \frac{dx^2+dy^2}{y^2}\right)$ est une *variété riemannienne orientable simplement connexe de courbure sectinnelle constante égale à* -1. C'est le cas de tout demi-espace $\mathbb{H}^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$ munie de la métrique riemannienne :

$$\frac{\sum_{k=1}^n dx_k^2}{x_n^2}.$$

Soient (M, g) et (N, h) deux variétés riemanniennes et $\varphi : M \longrightarrow N$ une application C^∞. On dira que φ est une *isométrie* si φ est un difféomorphisme tel que pour tout point $x \in M$ l'application tangente $d_x\varphi : T_xM \longrightarrow T_{\varphi(x)}N$ est une isométrie d'espace vectoriels i.e pour tous $u, v \in T_xM$ on a :

$$h_{\varphi(x)}(d_x\varphi(u), d_x\varphi(v)) = g_x(u, v).$$

On dira que (M, g) et (N, h) sont *isométriques* s'il existe une isométrie entre M et N.

Sauf mention expresse du contraire les variétés $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{S}^n$ et $\mathbb{H}^n$ seront supposées munies respectivement des métriques que l'on vient de considérer.

5.4. Un théorème de classification. *Soit* (M, g) *une variété riemannienne complète simplement connexe de courbure sectionnelle* κ *constante. Alors si* :

(1) - $\kappa = 0$, M *est isométrique à* $\mathbb{R}^n$ *(cas parabolique)* ;
(2) - $\kappa = 1$, M *est isométrique à* $\mathbb{S}^n$ *(cas elliptique)* ;
(3) - $\kappa = -1$, M *est isométrique à* $\mathbb{H}^n$ *(cas hyperbolique).*

CHAPITRE VI

Surfaces de Riemann, SL(2,R) et cusps

1. L'espace homogène $\mathbb{H}$

1.1. Définition (ou rappel !) *On appelle* **demi-plan de Poincaré** *le sous-ensemble de* $\mathbb{C}$ *:* $\mathbb{H} = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : y > 0\}$ *muni de la métrique riemannienne* :

$$g = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2} = -\frac{4dzd\overline{z}}{(z - \overline{z})^2}. \tag{VI.1}$$

C'est une variété riemannienne de courbure constante égale à -1 et dont les géodésiques sont les droites verticales d'équation $x =$ constante et les demi-cercles centrés sur l'axe $y = 0$ i.e d'équation du type $|z - x_0| = R$ ou $(x - x_0)^2 + y^2 = R^2$ avec $x_0 \in \mathbb{R}$ et $R \in \mathbb{R}_+$ (*cf.* Fig. VI.1).

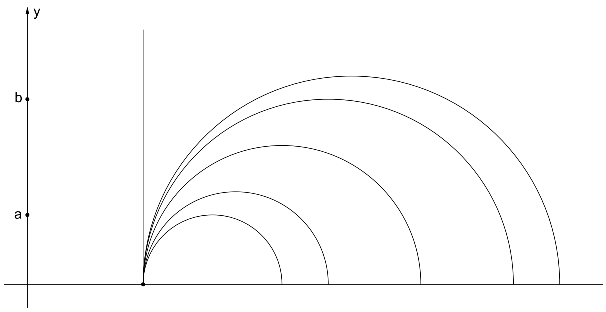


Fig. VI.1

La forme volume associée à la métrique $g = \frac{dx^2+dy^2}{y^2}$ est proportionnelle à la forme volume habituelle définie par la métrique euclidienne $dx^2 + dy^2$:

$$\omega = \frac{dxdy}{y^2}. \tag{VI.2}$$

On appelle *triangle hyperbolique* de sommets A, B, C un triangle ABC dont les côtés AB, BC, CA sont des segments de géodésiques (cf. Fig. VI.2). Notons α, β et σ les mesures des angles opposés respectivement aux côtés BC, CA, et AB ; alors un calcul un peu long mais facile donne l'aire du triangle ABC :

$$\mathcal{A}(ABC) = \pi - \alpha - \beta - \sigma. \tag{VI.3}$$

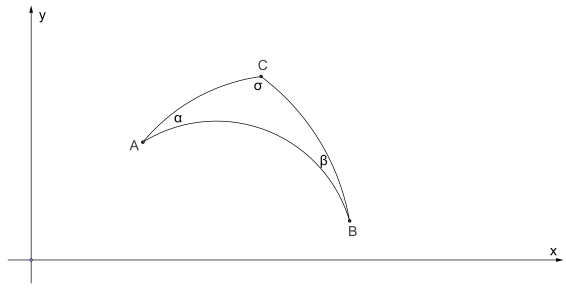


Fig. VI.2

1.2. SL(2,$\mathbb{R}$) comme groupe de Lie

On rappelle que $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ est le groupe des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels et de déterminant égal à 1. C'est une partie de $\mathbb{R}^4$ donnée par l'injection naturelle $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \hookrightarrow (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$; elle hérite donc d'une structure d'espace topologique. Comme l'application $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \longrightarrow ad - bc \in \mathbb{R}$ est continue, $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ est un fermé de $\mathbb{R}^4$, donc localement compact. En plus les applications naturelles

$$(M,N) \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \times \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \longrightarrow MN \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$$

et

$$M \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \longrightarrow M^{-1} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$$

sont différentiables (et même analytiques réelles). On dira que $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ est un *groupe de Lie*. De façon générale un ensemble G est appelé *groupe de Lie* s'il possède une structure de variété différentiable et une structure de groupe telles que la multiplication naturelle $(g,g') \in G \times G \longrightarrow gg' \in G$ et le passage à l'inverse $g \in G \longrightarrow g^{-1} \in G$ soient différentiables. Tous les groupes classiques modelés sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$: $\mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$, $\mathrm{Aff}(n,\mathbb{K})$, $\mathrm{SL}(n,\mathbb{K})$, $\mathrm{O}(n)$, $\mathrm{SO}(n)$, $\mathrm{U}(n)$, $\mathrm{SU}(n)$, $\mathrm{Sp}(n,\mathbb{R})$ *etc.* que nous avons introduits au chapitre I sont des groupes de Lie.

i) Soit GA le *groupe affine* de toutes les transformations $x \in \mathbb{R} \longrightarrow \alpha x + \beta \in \mathbb{R}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et $\beta \in \mathbb{R}$. Alors l'application $j : \mathrm{GA} \longrightarrow \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ qui à toute transformation affine de $\mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R} \longrightarrow \alpha x + \beta$ associe la matrice $\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est un homomorphisme injectif (qui permet donc de voir GA comme un sous-groupe de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$). En effet si A et A' sont deux transformations affines de $\mathbb{R}$ définies respectivement par (α,β) et (α',β'); alors $A \circ A'$ est définie par $(\alpha\alpha', \alpha\beta' + \beta)$. D'autre part

$$j(A)j(A') = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{\alpha'}} \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{\alpha\alpha'}} \begin{pmatrix} \alpha\alpha' & \alpha\beta' + \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

L'application j est donc un homomorphisme. L'injectivité de j est immédiate. □

ii) Toute matrice S de $SO(2) \subset SL(2, \mathbb{R})$ s'écrit sous la forme

$$S = \begin{pmatrix} \theta & \gamma \\ -\gamma & \theta \end{pmatrix} \qquad \text{avec } \theta, \gamma \in \mathbb{R} \text{ vérifiant : } \theta^2 + \gamma^2 = 1$$

En effet soit $S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SO(2)$. Alors $SS^* = I$. Ceci donne les relations au niveau des coefficients de S :

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 1 & (1) \\ c^2 + d^2 = 1 & (2) \\ ac = -bd & (3) \end{cases}$$

En plus $ad - bc = 1$. Un calcul facile montre que $a = d = \theta$ et $b = -c = \gamma$ avec $\theta^2 + \gamma^2 = 1$. La matrice S a donc bien la forme cherchée i.e

$$S = \begin{pmatrix} \theta & \gamma \\ -\gamma & \theta \end{pmatrix} \qquad \text{avec } \theta, \gamma \in \mathbb{R} \text{ vérifiant : } \theta^2 + \gamma^2 = 1.$$

iii) Toute matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de $SL(2, \mathbb{R})$ s'écrit de manière unique sous la forme $A = SB$ avec $S \in SO(2)$ et $B \in GA$. Supposons $a = 0$; alors

$$A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & b \end{pmatrix}.$$

On prend alors

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & b \end{pmatrix}.$$

Si $c = 0$ on a $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$. On prend alors $S = I$ et $B = A$. Le cas $a \neq 0$ et $c \neq 0$ demande un peu de calcul. On cherche $S = \begin{pmatrix} \theta & \gamma \\ -\gamma & \theta \end{pmatrix}$ avec $\theta^2 + \gamma^2 = 1$ et $B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix}$ telles que $A = SB$. Cette relation se traduit par le système

$$\begin{cases} \theta\alpha = a & (1) \\ \gamma\alpha = -c & (2) \\ \theta\beta + \frac{\gamma}{\alpha} = b & (3) \\ -\gamma\beta + \frac{\theta}{\gamma} = d & (4) \end{cases}$$

dont la résolution donne

$$\begin{cases} \alpha = \sqrt{a^2 + c^2} \\ \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+c^2}} \\ \gamma = -\frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}} \\ \beta = \frac{ab+cd}{\sqrt{a^2+c^2}} \end{cases}$$

Les matrices

$$S = \begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2+c^2}} & -\frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}} \\ \frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}} & \frac{a}{\sqrt{a^2+c^2}} \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} \sqrt{a^2+c^2} & \frac{ab+cd}{\sqrt{a^2+c^2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{a^2+c^2}} \end{pmatrix}$$

sont donc uniques et répondent à la question. $\square$

iv) L'application $(S,B) \in \mathrm{SO}(2) \times \mathrm{GA} \longrightarrow SB \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ est un homéomorphisme.

Dans iii) ce qui précède on a montré que pour toute matrice $A \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ il existe des matrices uniques $S \in \mathrm{SO}(2)$ et $B \in \mathrm{GA}$ telles que $A = SB$. Ceci montre clairement que l'application $\Phi : \mathrm{SO}(2) \times \mathrm{GA} \longrightarrow \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$:

$$\left(\begin{pmatrix} \theta & \gamma \\ -\gamma & \theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix} \right) \longrightarrow \begin{pmatrix} \theta\alpha & \theta\beta + \gamma\alpha^{-1} \\ \gamma\alpha & -\gamma\beta + \theta\alpha^{-1} \end{pmatrix}$$

est bijective. Les coefficients de la matrice produit montrent que Φ est continue. Comme a et c ne peuvent jamais s'annuler en même temps (car $ad - bc = 1$) l'inverse de Φ, qui à $A \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ associe les matrices $S \in \mathrm{SO}(2)$ et $B \in \mathrm{GA}$ données dans la question qui précède, est aussi continue. L'appication Φ est donc un homéomorphisme. $\square$

1.3. Action de SL(2,$\mathbb{R}$) sur $\mathbb{H}$

On appelle *transformation homographique* de $\mathbb{C}$ toute application $\gamma : z \in C \longrightarrow \frac{az+b}{cz+d}$ où $a,b,c,d \in \mathbb{C}$ tels que $ad - bc \neq 0$; elle est définie bien entendu pour $z \neq -\frac{d}{c}$. Une telle transformation est donc associée à la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Un calcul facile montre que si a,b,c,d sont réels on a :

$$\mathrm{Im}(\gamma(z)) = \frac{\mathrm{Im} z}{|cz+d|^2}$$

et donc γ préserve $\mathbb{H}$ et est définie partout sur $\mathbb{H}$. On vérifie qu'au produit de deux matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ correspond la composition $\gamma\gamma'$. Comme les matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix}$ définissent la même transformation, la condition $ad - bc \neq 0$ (qui assure la bijectivité de γ) peut être remplacée par $ad - bc = 1$. Ainsi le groupe $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) = \{M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : \det M = 1\}$ agit sur $\mathbb{H}$. Cette action est *holomorphe* et *isométrique* *i.e.* la transformation γ associée à une matrice de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ est biholomorphe et est une isométrie. Notons $\mathrm{Aut}(\mathbb{H})$ le groupe des transformations biholomorphes de $\mathbb{H}$. On a donc un morphisme de groupes :

$$\rho : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \longrightarrow \gamma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{H})$$

où γ est la transformation $z \longrightarrow \frac{az+b}{cz+d}$. Le noyau de ρ est constitué des matrices I et $-I$ et induit donc un homomorphisme injectif :

$$\rho : \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) = \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\{I, -I\} \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathbb{H}).$$

Nous travaillerons toujours sur $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ que nous confondrons (modulo le sous-groupe $\{I,-I\}$) avec $\mathrm{Aut}(\mathbb{H})$ et dont on notera un élément indifféremment γ ou $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

L'action de $SL(2,\mathbb{R})$ *sur* $\mathbb{H}$ *est transitive i.e. pour tous* $z, z' \in \mathbb{H}$ *il existe un élément* $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ *tel que* $z = \gamma z'$. *En d'autres termes cette action n'a qu'une seule orbite.* Pour le voir il suffit de démontrer l'existence de γ en prenant $z' = i$. Soit $z = x + iy \in \mathbb{H}$. Alors on vérifie facilement que :

$$\gamma = \begin{pmatrix} \sqrt{y} & \frac{x}{\sqrt{y}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{y}} \end{pmatrix}$$

répond à la question. $\square$

1.4. Stabilisateur du point i

Soit $\gamma \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$; il stabilise le point i si et seulement $\gamma i = i$ *i.e.* $\frac{ai+b}{ci+d} = i$; ce qui est équivalent aux conditions $a = d$ et $b = -c$. Comme le déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est 1 on a, en notant $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}'$ la transposée de $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}' = I$$

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SO}(2)$. Le stabilisateur de i est donc le sous-groupe compact $\mathrm{SO}(2)$ de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$.

On définit l'application $p : \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{H}$ par $p(\gamma) = \gamma i$. Elle est continue ; et comme l'action de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ sur $\mathbb{H}$ est transitive, p est surjective : elle admet l'application :

$$s : x + iy \in \mathbb{H} \longrightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{y} & \frac{x}{\sqrt{y}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{y}} \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$$

comme section (*i.e.* $ps = id_{\mathbb{H}}$). Elle induit donc une application continue bijective

$$\overline{p} : \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\mathrm{SO}(2) \longrightarrow \mathbb{H}$$

qui à chaque classe $\gamma\mathrm{SO}(2)$ associe $p(\gamma)$. Elle est ouverte ; c'est donc un homéomorphisme de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\mathrm{SO}(2)$ sur $\mathbb{H}$.

1.5. Proposition *L'application* $p : \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{H}$ *est propre i.e. la préimage par* p *d'un compact de* $\mathbb{H}$ *est un compact de* $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$.

Démonstration Comme $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ est localement compact tout point $x \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ admet un voisinage compact U_x ; sa projection $p(U_x)$ est un compact de $\mathbb{H}$. Tout compact K de $\mathbb{H}$

peut donc être recouvert par un nombre fini d'ensembles $p(U_{x_1}), \cdots, p(U_{x_n})$. La réunion $\widetilde{K} = U_{x_1} \cup \ldots \cup U_{x_n}$ est un compact de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ et par construction même on a $K \subset p(\widetilde{K})$; donc $p^{-1}(K)$ est contenu dans $\widetilde{K} \cdot \mathrm{SO}(2)$ qui est un compact de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ car il est l'image du compact $\widetilde{K} \times \mathrm{SO}(2)$ par l'application naturelle continue (multiplication dans le groupe $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$) : $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \times \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$. □

2. Sous-groupes discrets de SL(2,R)

2.1. Définition *Un sous-groupe discret de* $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ *est une partie* Γ *de* $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ *qui est à la fois discrète pour la topologie induite (son intersection avec tout compact est finie) et un sous-groupe.*

On rappelle qu'on dit qu'un groupe discret Γ agit *proprement discontinûment* sur un espace topologique séparé X si pour tous compacts K_1, K_2 de X l'ensemble $\{\gamma \in \Gamma : \gamma K_1 \cap K_2 \neq \emptyset\}$ est fini.

2.2. Proposition *Un sous-groupe* Γ *de* $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ *est discret si et seulement si il agit proprement discontinûment sur* $\mathbb{H}$.

Démonstration i) Supposons Γ discret, soient K_1, K_2 deux compacts de $\mathbb{H}$ et K leur réunion. On a :

$$\{\gamma \in \Gamma : \gamma K_1 \cap K_2 \neq \emptyset\} \subset \{\gamma \in \Gamma : \gamma K \cap K \neq \emptyset\}.$$

Il suffit donc de montrer que l'ensemble $\{\gamma \in \Gamma : \gamma K \cap K \neq \emptyset\}$ est fini. Soit $\widetilde{K} = p^{-1}(K)$; $\widetilde{K}$ est un compact de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ (p est propre) et si $\gamma \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ est tel que $\gamma i \in K$ alors $\gamma \in \widetilde{K}$. Soit $\gamma \in \Gamma$ tel que $\gamma K \cap K \neq \emptyset$. Soit w un point de $\gamma K \cap K$; alors on a à la fois $w = \gamma\sigma i$ et $w = \sigma' i$ avec σ, $\sigma' \in \widetilde{K}$. Les éléments $\gamma\sigma$ et σ' appartiennent donc à la même classe d'équivalence modulo le sous-groupe $\mathrm{SO}(2)$ i.e $\gamma\sigma \in \sigma' \cdot \mathrm{SO}(2)$; d'où $\gamma \in \sigma' \cdot \mathrm{SO}(2) \cdot \sigma \subset \widetilde{K}\mathrm{SO}(2)\widetilde{K}^{-1}$. Comme le sous-ensemble $K' = \widetilde{K}\mathrm{SO}(2)\widetilde{K}^{-1}$ est compact et Γ discret (par hypothèse), $\Gamma \cap K'$ est fini. Le groupe Γ agit donc proprement discontinûment.

ii) Supposons maintenant que Γ agit proprement discontinûment sur $\mathbb{H}$. Soient $K_1 = \{i\}$, K un compact de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ et $K_2 = p(K)$. Les ensembles K_1 et K_2 sont des compacts de $\mathbb{H}$ et par hypothèse $\{\gamma \in \Gamma : \gamma K_1 \cap K_2 \neq \emptyset\}$ est fini i.e $\{\gamma \in \Gamma : \gamma i \in p(K)\}$ est fini ou encore $\Gamma \cap p^{-1}(p(K))$ est fini. Donc $\Gamma \cap K$ est fini puisque $K \subset p^{-1}(p(K))$. □

Nous allons nous intéresser maintenant aux points fixes des éléments de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ agissant sur $\mathbb{H}$. Nous préciserons leur nature et la structure topologique de l'ensemble de tels points pour un sous-groupe discret $\Gamma \subset \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$.

Soit $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$. Un point fixe $z \in \mathbb{H}$ de γ vérifie l'équation :

$$\frac{az+b}{cz+d} = z$$

qui est équivalente à
$$cz^2 - (a-d)z - b = 0.$$
Si $c = 0$ et $a \neq d$, γ a un point fixe dans $\mathbb{H}$ qui est $z_0 = \frac{b}{d-a}$. Si $c = 0$ et $a = d$ alors forcément γ est du type :
$$\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} -1 & b \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$
i.e. γ est une translation par le réel b et qui ne fixe aucun point de $\mathbb{H}$ mais le point ∞.

Mettons-nous dans la situation générale où $c \neq 0$. Alors dans ce cas les points fixes sont donnés par :
$$z_1 = \frac{(a-d) + \sqrt{(a+d)^2 - 4}}{2c} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{(a-d) - \sqrt{(a+d)^2 - 4}}{2c}.$$
Ainsi γ a un point fixe dans $\mathbb{H}$ si et seulement si

i) $M = I$ ou $M = -I$;

ii) $M \neq I$ et $-I$ et $|\mathrm{tr}(\gamma)| < 2$ où $\mathrm{tr}(\gamma) = a + d =$ trace de γ.

Une matrice $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ telle que $|\mathrm{tr}(\gamma)| < 2$ est dite *elliptique*. D'après le calcul qui précède ceci est encore équivalent à dire que γ a un seul point fixe dans $\mathbb{H}$.

On dira que γ est *parabolique* si tr $|\mathrm{tr}(\gamma)| = 2$; dans ce cas γ est forcément du type :
$$\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} -1 & b \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
i.e. γ est la translation $z \longrightarrow z + b$ (ou $z \longrightarrow z - b$). On dira alors que γ est une *matrice de translation.*

Si $|\mathrm{tr}\ (\gamma)| > 2$ on dira que γ est *hyperbolique*; dans ce cas les points fixes de γ sont sur l'axe réel d'équation $y = 0$ (sur lequel γ est définie sauf en $-\frac{c}{d}$).

On dira que $z \in \mathbb{H}$ est un *point elliptique* d'un sous-groupe $\Gamma \subset \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ si le stabilisateur :
$$\Gamma_z = \{\gamma \in \Gamma : \gamma z = z\}$$
contient un élément elliptique différent de I et de $-I$.

2.3. Remarque *L'ensemble des points fixes elliptique d'un sous-groupe discret* $\Gamma \subset \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ *est un sous-ensemble discret de* $\mathbb{H}$.

En effet pour $z \in \mathbb{H}$ soit U_z un voisinage compact de z (qui existe car $\mathbb{H}$ est localement compact). Comme Γ est discret il agit proprement discontinûment ; donc l'ensemble :
$$\{\gamma \in \Gamma : \gamma U_z \cap U_z \neq \emptyset\}$$
est fini ; il n'y a donc dans U_z qu'un nombre fini de points fixes elliptiques. □

Soit $\gamma \in \Gamma$ où Γ est un sous-groupe discret de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$. L'équivalence des assertions suivantes est facile à établir.

i) *γ est elliptique ou égal à I ou $-I$;*

ii) *γ est d'ordre fini i.e il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\gamma^k = I$;*

iii) *γ a un point fixe dans $\mathbb{H}$.*

Précisons un peu la nature du sous-groupe d'isotropie (ou stabilisateur) Γ_w d'un point fixe $w \in H$ de $\gamma \in \Gamma$. Ce groupe est évidemment fini puisque Γ agit proprement discontinûment. Notons $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ le disque unité ouvert de $\mathbb{C}$. Alors il est facile de voir que l'application $\varphi : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{D}$ définie par :

$$\varphi(z) = \frac{z - w}{z - \overline{w}}$$

est un biholomorphisme qui envoie le point w sur 0. Le groupe $\Gamma' = \varphi\Gamma\varphi^{-1}$ est un sous-groupe discret de $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$; tout élément γ_0' du stabilisateur Γ_0' de 0 est un automorphisme de $\mathbb{D}$ qui fixe 0, c'est donc une rotation *i.e.* il existe $\xi \in \mathbb{C}$ de module 1 tel que $\gamma_0'(z) = \xi z$. Le groupe Γ_0' est donc fini cyclique. L'image de Γ_w dans $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ est donc un groupe fini cyclique. □

3. Les quotients $\mathbb{H}/\Gamma$ et leurs cusps

Soit Γ un sous-groupe discret de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$. On note M l'espace quotient de $\mathbb{H}$ par l'action de Γ muni de sa topologie usuelle (les ouverts de M sont les images des ouverts de $\mathbb{H}$ par la projection canonique $\pi : \mathbb{H} \longrightarrow M$). Le lemme qui suit est facile à établir.

3.1. Lemme *i) Soit $w \in \mathbb{H}$. Alors il existe un voisinage U_w de w tel que deux points de U_w sont Γ-équivalents si et seulement si ils sont Γ_w-équivalents (Γ_w étant le sous-groupe d'isotropie de w.*

ii) Soient w et w' deux points de $\mathbb{H}$ non Γ-équivalements. Alors il existe des voisinages U_w et $U_{w'}$ respectivement de w et w' tels qu'aucun point de U_w ne soit équivalent à un point de $U_{w'}$.

De ce lemme on déduit que l'espace topologique quotient $\mathbb{H}/\Gamma$ est séparé. En fait $M = \mathbb{H}/\Gamma$ a une structure de surface topologique. Notons $\mathbb{H}_0$ le sous-ensemble de $\mathbb{H}$ obtenu en enlevant les points fixes elliptiques de Γ; alors l'action de Γ sur $\mathbb{H}_0$ est libre propre et discontinue par biholomorphismes, donc le quotient $M_0 = \mathbb{H}_0/\Gamma$ est une variété analytique complexe de dimension 1 (on dit *surface de Riemann*). Que se passe-t-il au voisinage de $\pi(w)$ où w est un point fixe elliptique de Γ ? En transportant la situation à $\mathbb{D}$ à l'aide du biholomorphisme $\varphi : z\mathbb{H} \longrightarrow \frac{z-w}{z-\overline{w}} \in \mathbb{D}$ on montre facilement que $\pi(w)$ a un voisinage homéomorphe au quotient d'un disque (euclidien) par un groupe fini cyclique d'isométries qui est encore homéomorphe à un disque. Par conséquent on a la

3.2. Proposition *Le quotient $M_0 = \mathbb{H}_0/\Gamma$ est une surface de Riemann. Le quotient $M = \mathbb{H}/\Gamma$ est une surface topologique homéomorphe à une variété analytique complexe de dimension 1.*

Jusqu'à présent nous nous sommes intéressés à l'action de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ et de ses sous-groupes discrets sur $\mathbb{H}$; maintenant nous allons voir ce qui se passe lorsqu'on étend cette action à toute la sphère de Riemann vue comme la réunion $\overline{\overline{\mathbb{H}}} = \mathbb{H} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ où $\mathbb{R}$ est vu comme le bord de $\mathbb{H}$ dans $\mathbb{C}$ i.e la droite d'équation $y = 0$.

Soit $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$; alors l'application $z \in \mathbb{H} \longrightarrow \frac{az+b}{cz+d} \in \mathbb{H}$ s'étend clairement à $\overline{\overline{\mathbb{H}}}$ en posant $\gamma\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty$ et $\gamma(\infty) = \frac{a}{c}$.

Soient κ un point du bord de $\mathbb{H}$ et Γ_κ son stabilisateur; alors il existe toujours une matrice $A \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ telle que $M\kappa = \infty$. Il suffit de prendre par exemple :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \kappa \end{pmatrix}.$$

La conjugaison par M dans le groupe $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ donne des isomorphismes $\Gamma \longrightarrow M\Gamma M^{-1}$ et $\Gamma_\kappa \longrightarrow (M\Gamma M^{-1})_\infty$. Nous nous intéresserons spécialement au cas où γ est une matrice de translation i.e γ est du type :

$$\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} -1 & b \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

De tels éléments ont ∞ comme point fixe unique.

3.3. Définition *On dira que Γ a ∞ pour cusp si Γ contient une matrice de translation différente de $\pm I$.*

On peut montrer facilement que : *si un sous-groupe discret $\Gamma \subset SL(2,\mathbb{R})$ a ∞ comme cusp alors tous les éléments de Γ_∞ (stabilisateur du point ∞) sont des translations et que l'image de Γ_∞ par la projection canonique $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ est un groupe cyclique infini.* Pour le voir il suffit de poser :

$$\Lambda = \{\lambda \in \mathbb{R} : (z \longrightarrow z + \lambda) \text{ est un élément de } \Gamma\}$$

et de montrer que tout élément $\gamma_\infty \in \Gamma_\infty$ (*i.e.* du type $\gamma_\infty = \begin{pmatrix} \varepsilon & b \\ 0 & \frac{1}{\varepsilon} \end{pmatrix}$) est une translation (*i.e.* tel que $\varepsilon = \pm 1$). La conjugaison de Λ par γ_∞ :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon & b \\ 0 & \frac{1}{\varepsilon} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon & b \\ 0 & \frac{1}{\varepsilon} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon^2\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est un automorphisme de Λ ; donc $\varepsilon^2 = 1$ qui montre bien que γ_∞ est une translation. $\square$

3.4. Définition *On dira qu'un point $\kappa \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ est un cusp de Γ s'il existe $M \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ tel que $M\Gamma M^{-1}$ a ∞ comme cusp ou encore de façon équivalente si le stabilisateur Γ_κ contient un élément parabolique i.e. une translation non triviale.*

On pose $\mathbb{H}^* = \mathbb{H} \cup \{\text{cusps de } \Gamma\}$. Si ∞ est un cusp de Γ, son stabilisateur Γ_∞ ne contient que des translations (réelles) ; il agit donc sur l'ouvert :

$$U_C = \{z \in \mathbb{H} : \text{Im } z > C\}$$

où C est une constante réelle > 0. L'injection $U_C \hookrightarrow \mathbb{H}$ induit un plongement ouvert :

$$U_C/\Gamma_\infty \longrightarrow \mathbb{H}/\Gamma.$$

On peut préciser la structure topologique de U_C/Γ_∞ : Γ opérant sur U_C admet un domaine fondamental :

$$\Delta_{\Gamma_\infty} = \{z \in \mathbb{H} : |\text{Re } z| \leq \frac{1}{2} \text{ et } \text{Im } z > C\}.$$

Le quotient U_C/Γ_∞ est obtenu à partir de Δ_{Γ_∞} en identifiant les points du bord $z_- = -\frac{1}{2} + iy$ et $z_+ = \frac{1}{2} + iy$ (avec $y > C$). On obtient donc un cylindre $\mathcal{C}$.

Sur $\mathbb{H}^*$ il existe une unique topologie $\mathcal{T}$ telle que

i) la restriction de $\mathcal{T}$ à $\mathbb{H}$ est la topologie usuelle de $\mathbb{H}$;

ii) $\mathbb{H}$ est ouvert et dense dans $\mathbb{H}^*$;

iii) si κ est un cusp de Γ et A une matrice de $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ telle que $A\kappa = \infty$ alors les ensembles :

$$V_{C,\kappa} = A^{-1}(U_C) \cup \{\kappa\}$$

forment une base de voisinages de κ ;

iv) l'espace topologique $(\mathbb{H}^*, \mathcal{T})$ est séparé.

On a alors le théorème suivant dont on peut trouver la démonstration dans [Fr].

3.5. Théorème *Le sous-groupe Γ agit sur $\mathbb{H}^*$ par homéomorphismes. L'espace quotient $M_\Gamma = \mathbb{H}/\Gamma$ est une surface connexe. Les classes de cusps forment un ensemble discret de M_Γ et l'inclusion canonique $\mathbb{H}/\Gamma \hookrightarrow M_\Gamma$ est un plongement ouvert.*

Si M_Γ est compact, il n'existe qu'un nombre fini de classes de cusps (conséquence immédiate du théorème).

Si Γ_0 est un sous-groupe d'indice fini de Γ, alors les sous-groupes Γ et Γ_0 ont mêmes cusps et l'application naturelle $M_\Gamma \longrightarrow M_{\Gamma_0}$ est propre ; donc M_Γ est compact si et seulement M_{Γ_0} l'est. $\square$

Références

[Be] BEARDON, A. F. *The Geometry of Discrete Groups.* GTM 91, Springer-Verlag, (1983).

[BT] BOTT, R. & TU, L. *Differential Forms in Algebraic Topology.* GTM 82, Springer-Verlag, (1982).

[Ca] DO CARMO, M. *Geometria riemanniena.* Projeto Euclides, Rio de Janeiro, (1988).

[Ch] CHABAT, B. *Introduction à l'Analyse complexe.* Editions MIR, Tomes I et II.

[DNF] DOUBROVINE, B., NOVIKOV, S. & FOMENKO, A. *Géométrie contemporaine.* Tomes I, II et III Editions MIR, (1979).

[Fo] FOMENKO, A. *Visual Geometry and Topology.* Springer-Verlag, (1994).

[Fr] FREITAG, E. *Hilbert Modular Forms.* Springer-Verlag, (1990).

[Go] GODBILLON, C. *Eléments de Topologie algébrique.* Collection Méthodes, Hermann, (1971).

[Gr] GRAUERT, H. On the Levi's problem and the imbedding of real-analytic manifolds. Ann. of Math. 68, (1958), 460-472.

[Ha] HATCHER, A. *Algebraic Topology*, Cambridge University Press (2002). Disponible : http://www.math.purdue.edu/ wilker/Math598F01/Hatcher-AT2001.pdf

[Hö] HÖRMANDER, L. *An Introduction to Complex Analysis in severable Variables.* North-Holland, (1990).

[JS] JONES, G. & SINGERMAN, D. *Complex Functions. An algebraic and geometric viewpoint.* Cambridge University Press, (1987).

[La1] LANG, S. Faire des Maths : grands problèmes de géométrie et de l'espace. Revue du Palais de la découverte 12, 114, (1984), 21-72.

[La2] LANG, S. SL$(2,\mathbb{R})$. GTM 105, Springer-Verlag, (1985).

[Ma] MAASS, H. *Lectures on Modular Functions of one Complex Variable.* Tata Institute of Fundamental Research, (1964).

[Mi] MIYAKE, T. *Modular Forms.* Springer-Verlag, (1989).

[Po] POSTNIKOV, M. *Leçons de géométrie. Variétés différentiables.* Editions MIR, (1990).

[Rh] DE RHAM, G. *Variétés différentiables.* Actualités Scientifiques et Industrielles, Hermann, (1960).

[Wl] WALL, C.T.C. *A geometric Introduction to Topology.* Dover Publications, (1993).

[Wa] WARNER, F.W. *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups.* GTM 94, Springer-Verlag, (1983).

[We] WEIL, A. *Variétés kählériennes.* Actualités Scientifiques et Industrielles, Hermann, (1971).

[Wh] WHITEHEAD, G.W. *Elements of Homotopy Theory.* GTM 61, Springer-Verlag, (1978).