UNIVERSITÉ DE VALENCIENNES

Master 1 - MEÉF

Mathématiques

Mathématiques pour l'enseignement

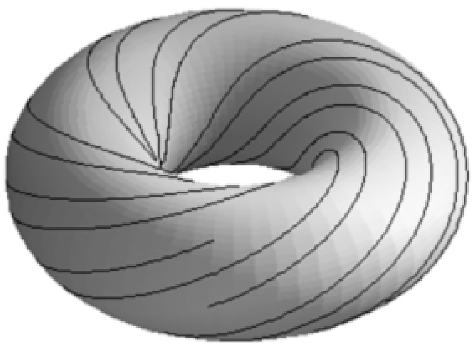
Corrigés de devoirs surveillés

---

par

Aziz EL KACIMI ALAOUI

LE TORE



Mars 2018

MEÉF 1 Second degré - Mathématiques
DS3 - 22 novembre 2013 - Problème II et Exercice

Dans tout ce problème on se place dans le plan affine euclidien $\mathcal{P}$. Les droites parallèles entre elles sont supposées orientées par des axes de même sens.

A. Birapport de quatre nombres

1. On appelle *birapport* de quatre nombres réels distincts a, b, c, d, pris dans cet ordre, le nombre :

$$(a,b,c,d) = \frac{a-c}{a-d} : \frac{b-c}{b-d} = \frac{a-c}{a-d} \times \frac{b-d}{b-c}.$$

a) Posons $\lambda = (a,b,c,d)$. Montrer que $(a,b,d,c) = \frac{1}{\lambda}$ et que $(a,c,b,d) = 1-\lambda$.

b) On peut vérifier facilement que le birapport ne change pas quand on permute deux des quatre nombres pourvu qu'on permute également les deux autres. (Ce travail n'est pas demandé).

Calculer, en fonction de λ, les birapports : (a,c,d,b), (a,d,b,c) et (a,d,c,b).

2.

a) Montrer que le birapport (x_1, x_2, x_3, x_4) de quatre nombres x_1, x_2, x_3, x_4 est invariant par toute transformation affine $\sigma : x \longmapsto \alpha x + \beta$ (ici $\alpha \neq 0$).

b) On suppose qu'aucun des quatre nombres x_1, x_2, x_3, x_4 n'est nul. Montrer que le birapport (x_1, x_2, x_3, x_4) est invariant par la tranformation $x \in \mathbb{R}^* \longmapsto \frac{1}{x} \in \mathbb{R}^*$.

c) En déduire que, sous réserve de possibilité des opérations à faire, le birapport est invariant par toute transformation homographique :

$$\varphi : x \longmapsto \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} \qquad \text{avec} \qquad \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0.$$

3. On cherche les transformations f laissant invariant le birapport. Soient a, b, c trois nombres distincts fixés et a', b', c' leurs images par f. Soient x un nombre réel disctinct de a, b et c et x' son image par f qu'on suppose vérifier : $(a', b', c', x') = (a, b, c, x)$. Montrer que a', b', c' et x' sont distincts (deux à deux) et que f ne peut être qu'une homographie.

B. Birapport de quatre points, de quatre droites

1. On considère une droite (Δ) sur laquelle on a choisi une origine O et un vecteur unitaire $\overrightarrow{u}$. On appelle *birapport* de quatre points M_1, M_2, M_3, M_4 de cette droite, pris dans cet ordre, le birapport de leurs abscisses dans le repère $(O, \overrightarrow{u})$. Il sera noté (M_1, M_2, M_3, M_4).

Montrer que $(M_1, M_2, M_3, M_4) = \frac{\overline{M_1M_3}}{\overline{M_1M_4}} : \frac{\overline{M_2M_3}}{\overline{M_2M_4}}$.

Montrer que le birapport (M_1, M_2, M_3, M_4) est indépendant du choix de O et de $\overrightarrow{u}$.

2. Soient (D_1), (D_2), (D_3) et (D_4) quatre droites concourantes en O et (Δ) une droite ne passant pas par O et coupant ces quatre droites respectivement en M_1, M_2, M_3 et M_4. Par M_2 on mène la parallèle (D_1') à (D_1) ; celle-ci coupe (D_3) en N_3 et (D_4) en N_4. Chaque droite est munie d'un repère.

a) Montrer que $\frac{\overline{M_1M_3}}{\overline{M_2M_3}} = \frac{\overline{M_1O}}{\overline{M_2N_3}}$ et $\frac{\overline{M_1M_4}}{\overline{M_2M_4}} = \frac{\overline{M_1O}}{\overline{M_2N_4}}$.

En déduire que $(M_1, M_2, M_3, M_4) = \frac{\overline{M_2N_4}}{\overline{M_2N_3}}$.

b) Soit (Δ') une autre droite ne passant pas par O et coupant (D_1), (D_2), (D_3) et (D_4) respectivement en M_1', M_2', M_3' et M_4'.

Montrer que $(M_1, M_2, M_3, M_4) = (M_1', M_2', M_3', M_4')$.

Le nombre (M_1, M_2, M_3, M_4) ne dépend donc pas de la sécante (Δ) ; on l'appelle *birapport* des quatre droites (D_1), (D_2), (D_3) et (D_4), prises dans cet ordre et on le note $((D_1), (D_2), (D_3), (D_4))$.

3. Étendre la définition du birapport au cas où les droites (D_1), (D_2), (D_3) et (D_4) sont parallèles.

4. On applique à un faisceau de quatre droites concourantes ou parallèles une isométrie. Que devient leur birapport ?

5. *Birapport de quatre points sur un cercle.*

Soient (C) un cercle orienté, M_1, M_2, M_3 et M_4 quatre points distincts dessus et A un point quelconque de (C).

Montrer que le birapport des quatre droites (AM_1), (AM_2), (AM_3) et (AM_4) est indépendant de la position de A sur (C). (Si A est l'un des points M_i, la droite (AM_i) est remplacée par la tangente à (C) en M_i.)

Par définition, le birapport des quatre points M_1, M_2, M_3 et M_4, pris dans cet ordre sur le cercle (C), est le birapport $((AM_1), (AM_2), (AM_3), (AM_4))$; il est noté (M_1, M_2, M_3, M_4).

C. Division harmonique

On dit que quatre points alignés distincts A, B, C et D, pris dans cet ordre, forment une *division harmonique*, si leur birapport (A, B, C, D) vaut -1. On dira que D est *conjugué harmonique* de C par rapport à A et B.

1.

a) Montrer que si (A, B, C, D) est une division harmonique, il en est de même pour (B, A, C, D).

b) Soient (A, B, C, D) une division harmonique, ω le milieu de AB et a, b, c et d les abscisses respectives des points A, B, C et D dans un repère de la droite qui les porte. Montrer que :

i) $2(ab + cd) = (a + b)(c + d)$.

ii) $\frac{2}{\overline{AB}} = \frac{1}{\overline{AC}} + \frac{1}{\overline{AD}}$.

iii) $\omega A^2 = \omega B^2 = \overline{\omega C} \cdot \overline{\omega D}$.

(Bien choisir l'origine du repère pour résoudre les points ii) et iii).)

c) Énoncer la réciproque de iii). La démonstration faite à la question pécédente de la propriété directe est-elle aussi une démonstration de la réciproque (avec quelques précautions de langage) ? Pourquoi ?

d) En déduire que, si A et B sont deux points de milieu ω, tout point de la droite (AB) distinct de A, B et ω admet un conjugué harmonique unique par rapport à A et B.

2. On appelle *faisceau harmonique* un ensemble ordonné de quatre droites concourantes ou parallèlles de birapport -1.

a) Montrer, dans le cas où les droites sont concourantes, qu'une parallèle à l'un des rayons coupe les trois autres en trois points dont l'un est le milieu des deux autres.

b) Énoncer et démontrer la réciproque de la proposition précédente. (Pour démontrer cette propriété caractéristique du faisceau harmonique concourant, on aura intérêt à reprendre dans ce cas particulier la figure de la question B.2.)

3. *Pôle et polaire par rapport à deux droites*

a) Soient (D_1) et (D_2) deux droites du plan se coupant en O et A un point n'appartenant ni à (D_1) ni à (D_2). Une droite quelconque (Δ) passant par A coupe (D_1) en M_1 et (D_2) en M_2. On note N le conjugué harmonique de A par rapport à M_1 et M_2. Montrer que, lorsque (Δ) pivote autour de A, le point N varie sur une droite (D) qu'on appelle *polaire* de A par rapport à (D_1) et (D_2). On dira aussi que A est le *pôle* de (D) par rapport à (D_1) et (D_2).

b) Étudier le même problème lorsque les droites (D_1) et (D_2) sont parallèles et A un point qui n'est sur aucune de ces deux droites.

4. *Construction du conjugué harmonique*

Soient A, B et C trois points alignés distincts et I un point non situé sur la droite portant A, B et C. Une droite passant par C, distincte de la précédente, coupe (IA) en M et (IB) en N. Les droites (MB) et (NA) sont concourantes en J (ou parallèles).

Montrer que le conjugué harmonique D de C par rapport à A et B se trouve sur la droite (IJ) (ou sur la parallèle issue de I aux droites (MB) et (NA)). (On considérera la polaire de C par rapport aux droites (IA) et (IB) et celle de C par rapport aux droites (JA) et (JB).)

Exercice

Une *racine* $n^{\text{ème}}$ (avec $n \geq 1$) de l'unité est un nombre complexe ξ tel que $\xi^n = 1$; il y en a exactement n : $\xi_0 = 1$, $\xi_1 = e^{\frac{2i\pi}{n}}, \cdots, \xi_{n-1} = e^{\frac{2i\pi(n-1)}{n}}$.

1. Montrer que, pour tout $\xi \in \{\xi_1, \cdots, \xi_{n-1}\}$, on a : $1 + \xi + \xi^2 + \cdots + \xi^{n-1} = 0$.

Dans toute la suite, on prendra $n = 3$ et on posera $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Soient a, b, c trois nombres complexes représentant respectivement trois points du plan complexe A, B, C.

2. Montrer que le triangle ABC est équilatéral si, et seulement si, on a :

$$a + jb + j^2c = 0 \quad \text{ou} \quad a + jc + j^2b = 0.$$

3. Quel type de raisonnement peut-on utiliser pour résoudre de “façon aisée et claire” ce genre de questions : algébrique ? géométrique ? ou les deux ? Justifier et commenter.

CORRIGÉ

A. Birapport de quatre nombres

1. a) On a : $(a,b,d,c) = \frac{a-d}{a-c} : \frac{b-d}{b-c} = \frac{1}{(a,b,c,d)} = \frac{1}{\lambda}$. Le calcul de (a,c,b,d) est presque aussi immédiat :

$$\begin{aligned}
(a,c,b,d) &= \frac{(a-b)(c-d)}{(a-d)(c-b)} \\
&= \frac{ac-ad-bc+bd}{(a-d)(c-b)} \\
&= \frac{ac-ad-bc+bd+ab-ab+cd-cd}{(a-d)(c-b)} \\
&= \frac{(a-d)(c-b)-(a-c)(b-d)}{(a-d)(c-b)} \\
&= 1-\frac{(a-c)(b-d)}{(a-d)(b-c)} \\
&= 1-\frac{a-c}{a-d} : \frac{b-c}{b-d} \\
&= 1-\lambda.
\end{aligned}$$

b) D'abord, il est facile de vérifier que $\lambda = 1$ implique forcément $c = d$, ce qui a été exclu par hypothèse ; donc $\lambda \neq 1$. On a :

$$(a,c,d,b) = \frac{1}{(a,c,b,d)} = \frac{1}{1-\lambda}.$$

De même :

$$(a,d,b,c) = 1-\frac{1}{(a,b,d,c)} = 1-\frac{1}{\lambda} = \frac{\lambda-1}{\lambda}$$

et :

$$(a,d,c,b) = 1-\frac{1}{(a,c,d,b)} = 1-\frac{1}{1-\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda-1}.$$

2. a) On a :

$$\begin{aligned}
(\sigma(x_1),\sigma(x_2),\sigma(x_3),\sigma(x_4)) &= \frac{\sigma(x_1)-\sigma(x_3)}{\sigma(x_1)-\sigma(x_4)} : \frac{\sigma(x_2)-\sigma(x_3)}{\sigma(x_2)-\sigma(x_4)} \\
&= \frac{(\alpha x_1+\beta)-(\alpha x_3+\beta)}{(\alpha x_1+\beta)-(\alpha x_4+\beta)} : \frac{(\alpha x_2+\beta)-(\alpha x_3+\beta)}{(\alpha x_2+\beta)-(\alpha x_4+\beta)} \\
&= \frac{\alpha(x_1-x_3)}{\alpha(x_1-x_4)} : \frac{\alpha(x_2-x_3)}{\alpha(x_2-x_4)} \text{ (on simplifie par } \alpha) \\
&= \frac{x_1-x_3}{x_1-x_4} : \frac{x_2-x_3}{x_2-x_4} \\
&= (x_1,x_2,x_3,x_4).
\end{aligned}$$

b) On a :

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \frac{1}{x_3}, \frac{1}{x_4}\right) &= \frac{\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_3}}{\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_4}} \cdot \frac{\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_4}}{\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_3}} \\
&= \frac{x_1 - x_3}{x_1 - x_4} : \frac{x_2 - x_3}{x_2 - x_4} \cdot \frac{\frac{1}{x_1 x_3}}{\frac{1}{x_1 x_4}} \cdot \frac{\frac{1}{x_2 x_4}}{\frac{1}{x_2 x_3}} \\
&= \frac{x_1 - x_3}{x_1 - x_4} : \frac{x_2 - x_3}{x_2 - x_4} \\
&= (x_1, x_2, x_3, x_4).
\end{aligned}$$

c) On vérifie facilement que φ se met sous la forme $\varphi(x) = b + \frac{a}{\gamma x + \delta}$ où $b = \frac{\alpha}{\gamma}$ et $a = \frac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\gamma}$. Alors $\varphi = \sigma_2 \circ J \circ \sigma_1$ où σ_1 est la similitude $\sigma_1(x) = \gamma x + \delta$, J la transformation $x \in \mathbb{R}^* \longmapsto \frac{1}{x} \in \mathbb{R}^*$ et σ_2 la similitude $\sigma_2(x) = ax + b$. Comme on vient de le voir, toutes ces transformations préservent le birapport donc φ le préserve aussi, c'est-à-dire on a :

$$(\varphi(x_1), \varphi(x_2), \varphi(x_3), \varphi(x_4)) = (x_1, x_2, x_3, x_4).$$

3. En explicitant le birapport (a, b, c, x), on voit qu'il s'écrit $\varphi(x) = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$ avec $\alpha = c - a$, $\beta = b(a - c)$, $\gamma = c - b$ et $\delta = a(b - c)$. Par suite $\alpha\delta - \gamma\beta = (a - c)(b - c)(b - a)$ qui est donc non nul puisque $a \neq b$, $b \neq c$ et $c \neq a$; par suite φ est une homographie (non constante) qui réalise une bijection de $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{c-a}{c-b}\right\}$.

De la même façon on a $(a', b', c', x') = \psi(x) = \frac{\alpha' x' + \beta'}{\gamma' x' + \delta'}$ avec $\alpha' = c' - a'$, $\beta = b'(a' - c')$, $\gamma = c' - b'$ et $\delta = a'(b' - c')$.

De l'égalité $(a, b, c, x) = (a', b', c', x')$ on déduit $a' \neq c'$, $b' \neq x'$, $a' \neq x'$ et $b' \neq c'$; et de $(a, c, b, x) = (a', c', b', x')$ les inégalités $a' \neq b'$ et $c' \neq x'$. Finalement les quatre nombres a', b', c', x' sont distincts deux à deux. D'où $\alpha'\delta' - \gamma'\beta' = (a' - c')(b' - c')(b' - a') \neq 0$ et donc ψ est une homographie (non constante) qui réalise une bijection de $\mathbb{R} \setminus \{a'\}$ sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{c'-a'}{c'-b'}\right\}$.

L'égalité $(a, b, c, x) = (a', b', c', x')$ signifie $\varphi(x) = \psi(f(x))$; donc $f = \psi^{-1} \circ \varphi$, ce qui montre que f est une homographie.

B. Birapport de quatre points, de quatre droites

1. Soient x_1, x_2, x_3 et x_4 les abscisses respectives des points M_1, M_2, M_3 et M_4 dans le repère $(O, \overrightarrow{u})$. Alors :

$$\begin{aligned}
(M_1, M_2, M_3, M_4) &= (x_1, x_2, x_3, x_4) \\
&= \frac{x_1 - x_3}{x_1 - x_4} : \frac{x_2 - x_3}{x_2 - x_4} \\
&= \frac{x_3 - x_1}{x_4 - x_1} : \frac{x_3 - x_2}{x_4 - x_2} \\
&= \frac{\overline{M_1 M_3}}{\overline{M_1 M_4}} : \frac{\overline{M_2 M_3}}{\overline{M_2 M_4}}.
\end{aligned}$$

Soit $(O', \overrightarrow{u'})$ un autre repère de la droite (Δ). Pour un point M de cette droite, x sera son abscisse dans le repère $(O, \overrightarrow{u})$ et x' celle dans $(O', \overrightarrow{u'})$. Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ étant colinéaires, il existe $\alpha \in \mathbb{R}^*$ tel que $\overrightarrow{u'} = \alpha\overrightarrow{u}$; notons β l'abscisse de O' dans le repère $(O, \overrightarrow{u})$. On a $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{O'M} = x'\overrightarrow{u'}$. De l'égalité $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$ on tire (calcul immédiat) $x = \alpha x' + \beta$. Comme le birapport est invariant par toute transformation affine (question A.2.a)) on a :

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x'_1, x'_2, x'_3, x'_4)$$

qui montre bien que (M_1, M_2, M_3, M_4) est bien indépendant du choix du repère pour le calculer.

2. a) Les triangles OM_1M_3 et $N_3M_2M_3$ étant homothétiques, on a $\frac{\overline{M_3M_1}}{\overline{M_3M_2}} = \frac{\overline{M_1O}}{\overline{M_2N_3}}$. De même les deux triangles OM_1M_4 et $N_4M_2M_4$ étant homothétiques, on a $\frac{\overline{M_4M_1}}{\overline{M_4M_2}} = \frac{\overline{M_1O}}{\overline{M_2N_4}}$.

En divisant membre à membre les deux égalités qu'on vient d'établir, on obtient exactement ce qu'on cherche à établir :

$$(M_1, M_2, M_3, M_4) = \frac{\overline{M_1M_3}}{\overline{M_1M_4}} : \frac{\overline{M_2M_3}}{\overline{M_2M_4}} = \frac{\overline{M_3M_1}}{\overline{M_3M_2}} : \frac{\overline{M_4M_1}}{\overline{M_4M_2}} = \frac{\overline{M_2N_4}}{\overline{M_2N_3}}.$$

b) Soit (Σ) la parallèle à $\mathcal{D}_1$ passant par le point M'_2 et coupant les droites (D_3) et (D_4) respectivement en N'_3 et N'_4. Comme précédemment on montre que :

$$(M'_1, M'_2, M'_3, M'_4) = \frac{\overline{M'_2N'_4}}{\overline{M'_2N'_3}}.$$

Mais, par le théorème de Thalès appliqué aux triangles OM_2N_3 et OM_2N_4 homothétiques respectivement aux triangles $OM'_2N'_3$ et $OM'_2N'_4$, on a les égalités :

$$\frac{\overline{M_2N_4}}{\overline{M'_2N'_4}} = \frac{\overline{OM_2}}{\overline{OM'_2}} = \frac{\overline{M_2N_3}}{\overline{M'_2N'_3}}.$$

D'où l'on déduit l'égalité :

$$\frac{\overline{M_2N_4}}{\overline{M_2N_3}} = \frac{\overline{M'_2N'_4}}{\overline{M'_2N'_3}}$$

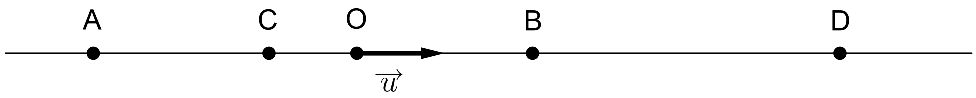
qui donne finalement, en vertu de ce qu'on a établi :

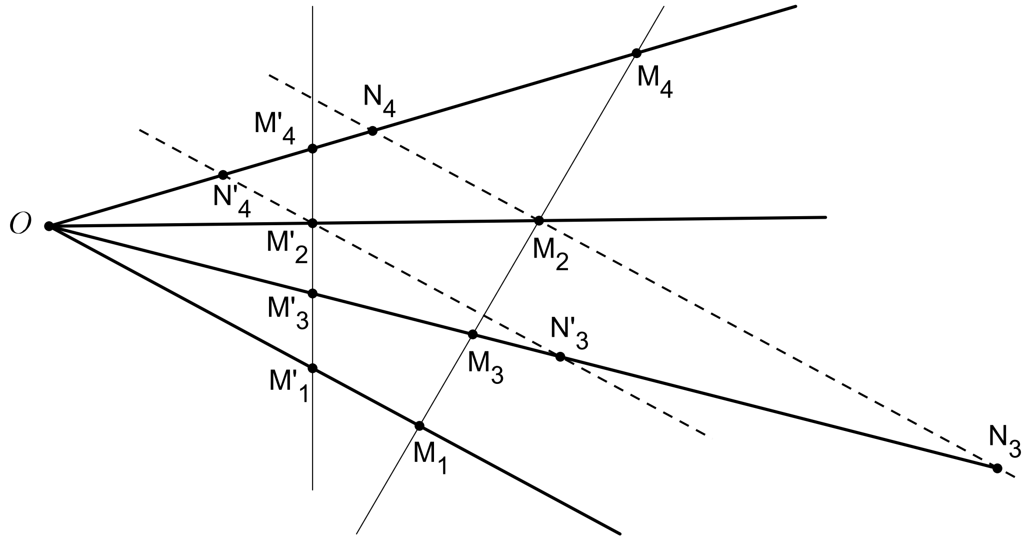
$$(M_1, M_2, M_3, M_4) = (M'_1, M'_2, M'_3, M'_4)$$

et qui montre bien que le birapport (M_1, M_2, M_3, M_4) ne dépend pas de la sécante (Δ). Ce qui justifie la définition :

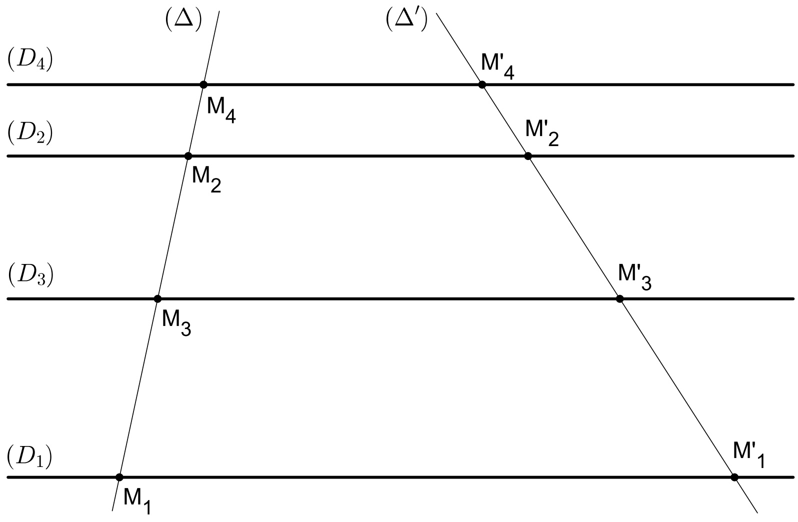
$$(D)_1, (D)_2, (D)_3, (D)_4) = (M_1, M_2, M_3, M_4)$$

où les points M_1, M_2, M_3, M_4 sont obtenus à partir d'une sécante quelconque (Δ).





3. Soient (D_1), (D_2), (D_3) et (D_4) quatre droites parallèlles distinctes deux à deux. Une sécante (Δ) les coupe respectivement en M_1, M_2, M_3 et M_4 ; de même une autre sécante (Δ') les coupe respectivement en M_1', M_2', M_3' et M_4'.



Par le théorème de Thalès, on a :

$$\frac{\overline{M_1M_3}}{\overline{M_1M_4}} = \frac{\overline{M_1'M_3'}}{\overline{M_1'M_4'}} \qquad \text{et} \qquad \frac{\overline{M_2M_3}}{\overline{M_2M_4}} = \frac{\overline{M_2'M_3'}}{\overline{M_2'M_4'}}.$$

Par suite :

$$(M_1, M_2, M_3, M_4) = \frac{\overline{M_1M_3}}{\overline{M_1M_4}} : \frac{\overline{M_2M_3}}{\overline{M_2M_4}} = \frac{\overline{M_1'M_3'}}{\overline{M_1'M_4'}} : \frac{\overline{M_2'M_3'}}{\overline{M_2'M_4'}} = (M_1', M_2', M_3', M_4').$$

On peut donc définir le birapport de quatre droites parallèles $(D_1), (D_2), (D_3), (D_4)$, prises dans cet ordre, par $((D_1), (D_2), (D_3), (D_4)) = (M_1, M_2, M_3, M_4)$ où M_1, M_2, M_3 et M_4 sont obtenus à l'aide d'une sécante (Δ) quelconque.

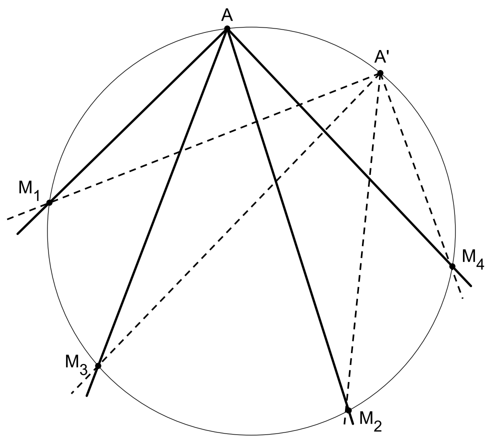
4. Soient (D_1), (D_2), (D_3) et (D_4) quatre droites parallèles ou concourantes en un point O, (Δ) une sécante respectivement en M_1, M_2, M_3 et M_4 et f une isométrie. Alors f transforme (D_1), (D_2), (D_3) et (D_4) respectivement en (D'_1), (D'_2), (D'_3) et (D'_4) et (Δ) en (Δ') coupant (D'_1), (D'_2), (D'_3) et (D'_4) respectivement en M'_1, M'_2, M'_3 et M'_4 de telle sorte que $M_1M_3 = M'_1M'_3$, $M_1M_4 = M'_1M'_4$, $M_2M_3 = M'_2M'_3$ et $M_2M_4 = M'_1M'_4$. De façon évidente, on a :

$$((D'_1), (D'_2), (D'_3), (D'_4)) = \frac{\overline{M'_1M'_3}}{\overline{M'_1M'_4}} : \frac{\overline{M'_2M'_3}}{\overline{M'_2M'_4}} = \frac{\overline{M_1M_3}}{\overline{M_1M_4}} : \frac{\overline{M_2M_3}}{\overline{M_2M_4}} = ((D_1), (D_2), (D_3), (D_4)).$$

5. Soient A et A' deux points de $(\mathcal{C})$. Les angles $(\overrightarrow{AM_1}, \overrightarrow{AM_2})$ et $(\overrightarrow{A'M_1}, \overrightarrow{A'M_2})$ interceptent le même arc (d'origine M_1 et d'extrémité M_2) ; ils sont donc congrus modulo π. Il existe alors une isométrie f qui envoie le point A sur le point A', la droite (AM_1) sur $(A'M_1)$ et la droite (AM_2) sur $(A'M_2)$. Il est aussi clair que f envoie (AM_3) sur $(A'M_3)$ et (AM_4) sur $(A'M_4)$. L'isométrie f envoie donc le faisceau $\{(AM_1), (AM_2), (AM_3), (AM_4)\}$ sur le faisceau $\{(A'M_1), (A'M_2), (A'M_3), (A'M_4)\}$; d'après la question B.4 :

$$((AM_1), (AM_2), (AM_3), (AM_4)) = ((A'M_1), (A'M_2), (A'M_3), (A'M_4)).$$

On peut donc définir le birapport (M_1, M_2, M_3, M_4) comme étant le birapport (au sens défini précédemment) du faisceau $\{(AM_1), (AM_2), (AM_3), (AM_4)\}$ où A est un point tout à fait quelconque du cercle $(\mathcal{C})$.



C. Division harmonique

1. a) Supposons que (A, B, C, D) est une division harmonique *i.e.* $(A, B, C, D) = -1$. On a : $(B, A, C, D) = \frac{1}{(A,B,C,D)} = \frac{1}{-1} = -1$. Donc (B, A, C, D) est aussi une division harmonique.

b)

i) Résulte, après un simple calcul, de $\frac{a-c}{a-d} : \frac{b-c}{b-d} = -1$.

ii) On choisit A comme origine. La formule $\frac{2}{\overline{AB}} = \frac{1}{\overline{AC}} + \frac{1}{\overline{AD}}$ résulte, après un simple calcul, de $\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} : \frac{\overline{BC}}{\overline{BD}} = -1$.

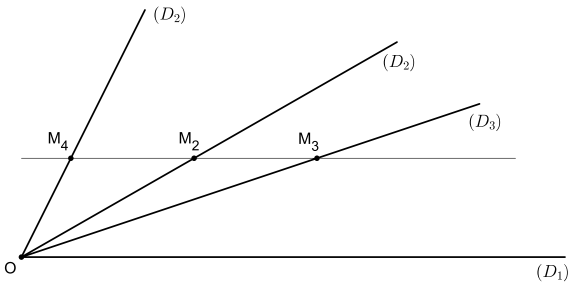
iii) On choisit ω comme origine. La double égalité $\omega A^2 = \omega B^2 = \overline{\omega C} \cdot \overline{\omega D}$ résulte aussi, après un simple calcul, de $\frac{\overline{\omega C}-\overline{\omega A}}{\overline{\omega D}-\overline{\omega A}} : \frac{\overline{\omega C}-\overline{\omega B}}{\overline{\omega D}-\overline{\omega B}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} : \frac{\overline{BC}}{\overline{BD}} = -1$ et du fait que ω est le milieu de $[AB]$.

c) La réciproque de iii) est la suivante. On se donne des points alignés A, B, C, D et ω distincts deux à deux et tels que : $\omega A^2 = \omega B^2 = \overline{\omega C} \cdot \overline{\omega D}$. Alors ω est le milieu du segment $[AB]$ (ce qui est immédiat) et la division (A, B, C, D) est harmonique. Si le lecteur détaille le calcul du point C.1.b).iii) il verra que la démonstration a été constamment "menée par équivalence".

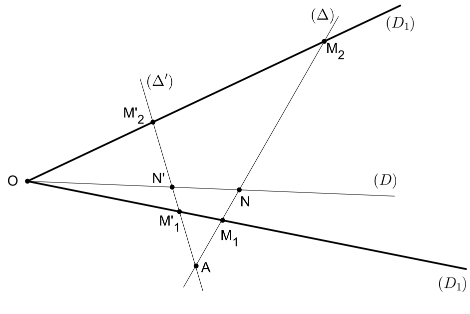
d) On se donne deux points A et B, leur milieu ω et un point C distinct de A, B et ω. Évidemment, l'égalité iii) donne un point unique D conjugué harmonique de C par rapport à A et B.

2. Doit $\{(D_1), (D_2), (D_3), (D_4)\}$ un faisceau concourant en O. Par un point M_2 de (D_2) on trace la parallèlle à (D_1) ; celle-ci coupe (D_3) et (D_4) respectivement en deux points N_3 et N_4 tels que : $(D_1), (D_2), (D_3), (D_4)) = \frac{\overline{M_2 N_4}}{\overline{M_2 N_3}}$.

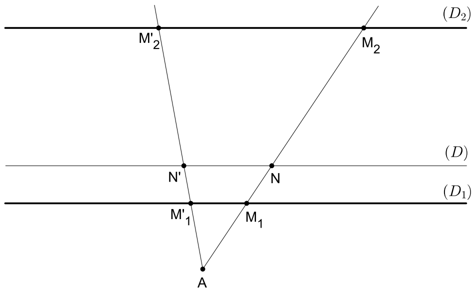
a) et b). Par les questions B.2.a) et B.2.b), le faisceau $\{(D_1), (D_2), (D_3), (D_4)\}$ est harmonique si, et seulement si, le point M_2 est le milieu du segment $[N_3 N_4]$. Le même raisonnement fonctionne si, par un point $M_i \in (D_i)$, on a mené la parallèle à une autre droite parmi les trois qui restent.



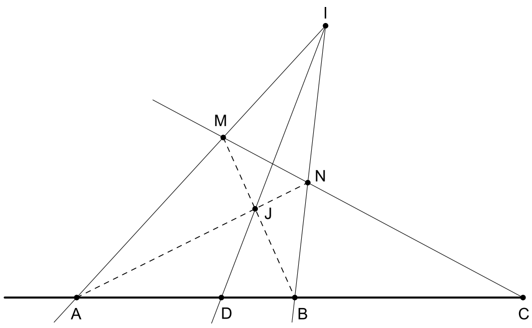
3. a) On note (D) la droite (ON). Soit N' un point de (D) distinct de N et notons (Δ') la droite (AN'). Alors (Δ') coupe (D_1) et (D_2) respectivement en M_1' et M_2'. Par suite $(M_1', M_2', A, N') = (M_1, M_2, A, N) = -1$; N' est donc un conjugué harmonique de A par rapport à (D_1) et $(D)_2$. Inversement, il est facile de voir que tout conjugué harmonique N'' de A par rapport à (D_1) et (D_2) est sur la droite (D) (en raison de son unicité sur la droite (AN'')). Conclusion : la droite (D) est exactement l'ensemble des conjugués harmoniques de A para rapport aux droites (D_1) et (D_2).



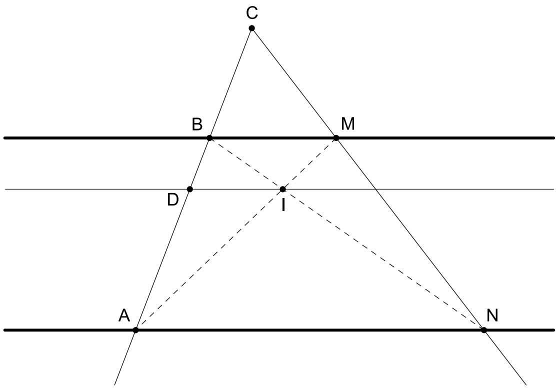
b) On suppose maintenant que (D_1) et (D_2) sont parallèles et A n'est situé ni sur (D_1) ni sur (D_2). Une droite (Δ) passant par A coupe (D_1) et (D_2) respectivement en M_1 et M_2. On note N le conjugué harmonique de A par rapport à M_1 et M_2 et (D) la parallèle à (D_1) (et (D_2)) passant par N. On montre alors (par un raisonnement du "même type") que (D) est exactement l'ensemble des conjugués harmoniques de A par rapport aux deux droites (D_1) et (D_2).



4. Regardons bien la figure ci-dessous. Le point D est le conjugué harmonique de C par rapport aux points A et B. Les faisceaux de quatre droites $\{(IA), (IB), (IC), (ID)\}$ et $\{(JA), (JB), (JC), (JD)\}$ sont donc harmoniques. Si les droites (ID) et (JD) étaient distinctes, elles couperaient la droite (MN) en deux points distincts tous deux conjugués harmoniques de C (sur la droite portant M, N et C) par rapport à M et N, ce qui n'est pas le cas en raison de "l'unicité du conjugué harmonique". Conclusion : les points I, J et D sont alignés.



Le lecteur pourra regarder lui-même le cas des droites parallèles en méditant sur le dessin ci-dessous (qui dit pratiquement tout).



Exercice

1. On a choisi $\xi \neq 1$. On a alors $1+\xi+\xi^2+\cdots+\xi^{n-1} = \frac{\xi^n-1}{\xi-1} = 0$ car $\xi^n = 1$ puisque ξ est racine $n^{\text{ème}}$ de 1.

2. Remarquons tout d'abord que, pour toute similitude σ (qui s'écrit $\sigma(z) = \alpha z + \beta$ si elle est directe et $\sigma(z) = \alpha\overline{z} + \beta$ sinon), le triangle abc est équilatéral si, et seulement si, $\sigma(a)\sigma(b)\sigma(c)$ l'est. D'autre part, comme $1+j+j^2 = 0$, un calcul simple montre :

$$a + jb + j^2c = 0 \Longleftrightarrow \sigma(a) + j\sigma(b) + j^2\sigma(c) = 0 \qquad \text{si } \sigma \text{ est directe}$$

et

$$a + jb + j^2c = 0 \Longleftrightarrow \sigma(a) + j^2\sigma(b) + j\sigma(c) = 0 \qquad \text{si } \sigma \text{ est indirecte.}$$

– Si $a = b = c$, les relations $a+jb+j^2c = 0$ et $a+j^2b+jc = 0$ sont évidentes puisque $1+j+j^2 = 0$. Réciproquement, si on a à la fois $a+jb+j^2c = 0$ et $a+j^2b+jc = 0$, un calcul simple amène alors à $a = b = c$ et le triangle abc est donc trivialement équilatéral.

– Désormais, abc sera non réduit à un point.

• Supposons abc équilatéral et notons ω le centre de son cercle circonscrit. Alors la similitude $\sigma(z) = \frac{z-\omega}{a-\omega}$ envoie a sur $a' = 1$ et b et c respectivement sur $b' = j$ et $c' = j^2$ ou $b' = j^2$ et $c' = j$ (car le triangle $a'b'c'$ doit être équilatéral).

Si $b' = j$ et $c' = j^2$, on a :

$$a' + jb' + j^2c' = 1 + j^2 + j = 0$$

et donc $a + jb + j^2c = 0$; si $b' = j^2$ et $c' = j$, on a :

$$a' + j^2b' + jc' = 1 + j + j^2 = 0$$

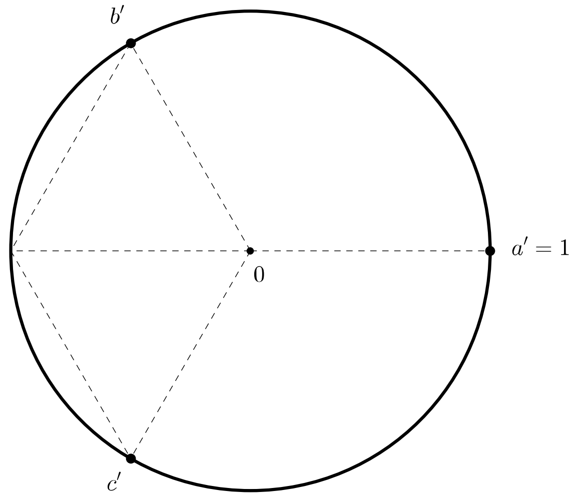
et donc $a + j^2b + jc = 0$. Ceci démontre l'implication directe.

• On suppose $a+jb+j^2c = 0$ et $a+j^2b+jc \neq 0$. (Le problème se traite de la même façon en partant de l'hypothèse $a+j^2b+jc = 0$ et $a+jb+j^2c \neq 0$. Le cas $a+jb+j^2c = 0$ <u>et</u> $a+j^2b+jc = 0$ a déjà été considéré.) Il est alors clair que $b \neq c$. Et tout cela interdit à a d'être le milieu $\frac{b+c}{2}$ de b et c car sinon les deux égalités $a = -(jb+j^2c)$ et $2a = b+c$ entraineraient $b = c$, ce qui n'est pas le cas comme on vient de le voir ! On en déduit que le centre ω du cercle circonscrit à abc est distinct de a.

On va montrer que le triangle abc est équilatéral. À cet effet on utilise la similitude $\sigma(z) = \frac{z-\omega}{a-\omega}$; elle envoie a sur $a' = 1$ et b et c respectivement sur b' et c', tous les deux sur le cercle unité. On aura alors $1 + jb' + j^2c' = 0$. Un examen attentif du dessin ci-dessous montre que cette dernière relation n'a lieu que si :

$$b' = e^{\frac{2i\pi}{3}} = j \qquad \text{et} \qquad c' = e^{\frac{4i\pi}{3}} = j^2$$

i.e. le triangle $a'b'c'$ est équilatéral, donc abc l'est aussi.



3. Certes, on peut se passer de l'utilisation des similitudes et faire le calcul directement, mais on perd la géométrie (qu'on vient de voir) liée à la régularité de la répartition des nombres 1, j et j^2 sur le cercle unité. Il semble donc qu'une démonstration claire et concise soit celle qui mélange les méthodes algébriques aux méthodes géométriques (comme celle proposée ci-dessus).

Quelques commentaires

La première remarque est fondamentale : en majorité, les étudiants n'ont traité que les questions calculatoires ne demandant aucune réflexion. Par exemple :

• A.1. où il n'est question que de permutations dans la formule qui définit le birapport. La question A.2.b) est du même type.

• Beaucoup n'ont pas réussi à traiter A.2.a) alors que ça devait être presque immédiat. Quelques-uns n'ont pas compris ce que veut dire"...*invariant par transformation affine* $\sigma(x) = \alpha x + \beta$..." et ont cherché à démontrer l'égalité $\sigma((x_1, x_2, x_3, x_4)) = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ plutôt que $(\sigma(x_1), \sigma(x_2), \sigma(x_3), \sigma(x_4)) = (x_1, x_2, x_3, x_4)$!

Le reste a posé beaucoup de problèmes. Les candidats ne prennent pas le temps de réfléchir : ils cherchent désespérément des recettes à suivre.

• Pour la question A.2.c) voici ce qu'on peut voir (juste deux exemples) sur certaines copies qui montre qu'aucune attention n'a été prêtée ou qu'on ignore totalement comment est "fabriquée" l'expression $\varphi(x) = \frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}$:

– Le birapport est invariant par φ parce que φ est une composée de $x_1 : x \longmapsto \sigma(x)+\beta$, $x_2 : x \longmapsto \frac{1}{x}$ (jusque là c'est bon) et $x \longmapsto x_1 \cdot x_2$, donc $\varphi : x \longmapsto x_3 \circ x_2 \circ x_1$! (Je ne sais d'ailleurs pas ce que signifie cette dernière écriture).

– Certains se contentent de dire que le birapport est invariant par $\sigma(x) = \alpha x + \beta$ et $J : x \longmapsto \frac{1}{x}$ et donc il l'est par toute transformation homographique $\varphi = \frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}$. Pourquoi cela devrait-il être vrai ? φ n'est pas $J \circ \sigma$!

• La question A.3 a été mal traitée : j'ai vu du n'importe quoi et beaucoup de conclusions tirées à la hâte. Presque personne n'en a compris l'objet.

• Malgré que la question B.1 soit facile, beaucoup n'ont pas su la traiter correctement. Et presque personne n'a vu que ce n'était rien d'autre que l'invariance du birapport par une transformation affine.

• Point positif quand même : dans B.2.a) et B.2.b) le théorème de Thalès a été correctement appliqué. Mais la rédaction de la réponse n'a pas été assez claire.

• Rares sont ceux qui se sont aventurés à aborder la question B.3.

• Personne n'a donné une réponse satisfaisante à la question B.4.

• B.5. permet de tester pas mal de connaissances chez les étudiants de MEEF1. Ce sont des choses qui ont été traitées en Licence 3 (c'est de là qu'ils viennent tous) !

• Presque tous ont traité C.1.a) et C.1.b) : recettes de calcul !

Les questions qui ont suivi sont les plus intéressantes du point de vue géométrique et pour lesquelles les étudiants disposent de suffisamment de matériel pour les aborder convenablement. Mais hélas, rien ! Il y a un blocage dès qu'il s'agit de résoudre un problème auquel on ne peut appliquer un mécanisme préalablement acquis !

"*Ne pouvant me fier à mon raisonnement, j'ai appris par cœur tous les résultats possibles de toutes les multiplications possibles.*" (Eugène Ionesco, *La leçon*)

Personne n'a su résoudre l'exercice proposé à la fin du DS. Certains ont tenté d'en aborder quelques fragments mais rien de safisfaisant.

AZIZ EL KACIMI

MEÉF 1 Second degré - Mathématiques
DS5 - 31 janvier 2014 - Problème II

Le plan affine $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. On peut le voir comme $\mathbb{R}^2$ en confondant un point M avec ses coordonnées (x, y) mais aussi comme le plan complexe $\mathbb{C}$ à l'aide de l'identification $M = (x, y) \longmapsto z = x + iy$; on dira que z est l'*affixe* de M. La norme d'un vecteur $\overrightarrow{u}$ sera notée $||\overrightarrow{u}||$.

Ce problème sera constitué de trois parties complètement différentes ; chacune peut être traitée indépendamment des deux autres.

Partie I

On se donne un nombre réel strictement positif a, le point $A \in \mathcal{P}$ de coordonnées $(a, 0)$, (D) la droite d'équation $x = a$ et $f : t \in]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[\longrightarrow f(t) \in \mathbb{R}_+^*$ une fonction. Dans toute la suite $t \in]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$ jouera le rôle de paramètre. Un point M de $\mathcal{P}$ sera repéré par ses coordonnées (x, y) relativement à $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ ou par son affixe $z = x + iy$.

Pour chaque t on note s_t la transformation de $\mathcal{P}$ qui à tout point M d'affixe z fait correspondre le point $M_t = s_t(M)$ d'affixe :

$$z_t = f(t)(\cos t + i \sin t)z.$$

1. Quelle est la nature de l'application s_t ? Donner les éléments géométriques qui la caractérisent. (**1 point**)

2. Donner les équations qui la définissent dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ ainsi que pour son inverse s_t^{-1}. (**1 point**)

Dans toute la suite de cette première partie f sera la fonction $f(t) = \frac{1}{\cos t}$.

3. Montrer que, pour tout point M distinct de O et tout t, le triangle OMM_t est rectangle en M. (**1 point**)

4. Le point M étant fixe, quel est l'ensemble $J(M)$ décrit par M_t lorsque t varie ? (**2 points**)

5. Montrer que l'image de (D) par s_t est une droite (D_t) dont on donnera une équation cartésienne dépendant seulement des paramètres a et $\theta = \tan t$. (**1 point**)

6. Montrer que la parabole $\mathcal{B}$ de foyer O, dont la tangente au sommet est (D), a pour équation :

$$y^2 = 4a(a - x).$$

7. Montrer que pour tout t, l'intersection de (D_t) et de $\mathcal{B}$ est formée d'un point unique K_t et que (D_t) est tangente à $\mathcal{B}$ en ce point. (**2 points**)

8. Montrer que lorsque t décrit $]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$, K_t décrit toute la parabole $\mathcal{B}$. (**2 points**)

On note (C) un cercle de centre A dont le rayon R est strictement positif et différent de a. On note (Γ) la conique d'équation :

$$\frac{(x - a)^2}{R^2} + \frac{y^2}{R^2 - a^2} = 1.$$

9. Indiquer suivant les valeurs de R la nature de la conique (Γ). Déterminer son centre et ses foyers. (**2 points**)

10. Déterminer le centre et le rayon du cercle (C_t) image de (C) par s_t. (**1 point**)

11. Montrer que (C_t) est définie par l'équation : $(x-a)^2 + (y-a\theta)^2 = R^2(1+\theta^2 t)$. (**2 points**)

12. Montrer que lorsque (C_t) et (Γ) se coupent, leur intersection est formée de deux points N_t et N_t' symétriques par rapport à (D) et dont on calculera l'ordonnée. (**2 points**)

Partie II

Sur le plan épointé $\mathcal{P}^* = \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, on considère la transformation T qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par :

$$z' = T(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right).$$

1. Construire géométriquement le point M' à partir du point M. (**3 points**)

2. Donner les coordonnées (x', y') du point M' en fonction du module r de z et de son argument θ. (**1 point**)

3. Quel est le lieu géométrique du point M' lorsque M varie sur le cercle de centre O et de rayon $\rho > 0$? (**3 points**)

4. Quel est le lieu géométrique du point M' lorsque M varie de telle sorte que θ (argument de z) reste constant ? (On se limitera au cas $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.) (**3 points**)

Partie III

Soient $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\theta \neq k\pi$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. On définit une suite de points $(M_n)_{n\geq 0}$ avec $M_0 = 0$, $M_1 = 1$ et vérifiant les conditions qui suivent pour $n \geq 1$:

$$||\overrightarrow{M_nM_{n+1}}|| = r||\overrightarrow{M_{n-1}M_n}|| \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{M_{n-1}M_n}, \overrightarrow{M_nM_{n+1}}) = \theta.$$

On note z_n l'affixe du point M_n et, pour $n \geq 1$, on pose $v_n = z_n - z_{n-1}$ qui est la coordonnée complexe du vecteur $\overrightarrow{M_{n-1}M_n}$.

1.

a) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, on a $v_n = re^{i\theta}v_{n-1}$. (**1 point**)

b) Pour tout n, exprimer v_n en fonction de n, r et θ. (**1 point**)

c) Représenter M_n dans le plan complexe lorsque $0 \leq n \leq 4$, $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\theta = \frac{\pi}{4}$. (**1 point**)

2. Dans toute la suite on suppose $0 < r < 1$.

a) Donner l'expression de z_n en fonction de n, r et θ. (**2 points**)

b) Soit Ω le point d'affixe $\omega = \frac{1}{1-re^{i\theta}}$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} |z_n - \omega| = 0$. (**2 points**)

c) Montrer qu'il existe une similitude directe f de centre Ω (et dont précisera aussi l'angle et le rapport) telle que $f(M_{n-1}) = M_n$, pour tout $n \geq 1$. (**3 points**)

d) On suppose $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\theta = \frac{\pi}{4}$. Placer le point Ω et indiquer une construction géométrique de M_n à partir de M_{n-1}. Représenter les points M_n pour $0 \leq n \leq 8$. (**3 points**)

CORRIGÉ

Partie I

1 - On a $z_t = f(t)e^{it}z$. L'application s_t est donc la composée de la rotation r de centre l'origine O et d'angle t et de l'homothétie h de centre l'origine et de rapport $f(t)$; par suite s_t est la similitude de centre O, de rapport $f(t)$ et d'angle t.

2 - Notons (x_t, y_t) les coordonnées cartésiennes du point M_t. Alors :

$$\begin{cases} x_t = f(t)((\cos t)x - (\sin t)y) \\ \\ y_t = f(t)((\sin t)x + (\cos t)y). \end{cases}$$

Il n'est pas difficile de voir que l'application inverse s_t^{-1} associe au point de coordonnées (x, y) le point :

$$\frac{1}{f(t)}\big((\cos t)x + (\sin t)y, -(\sin t)x + (\cos t)y\big).$$

3 - Comme $f(t) = \frac{1}{\cos t}$, $x_t = x - \theta y$ et $y_t = \theta x + y$ où $\theta = \mathrm{tg}(t)$. Le triangle OMM_t est rectangle en M si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{MM_t}$ sont orthogonaux. Les coordonnées de ces derniers sont :

$$\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{MM_t} = \begin{pmatrix} -\theta y \\ \theta x \end{pmatrix}$$

Le calcul immédiat de leur produit scalaire $\langle \overrightarrow{OM}, \overrightarrow{MM_t} \rangle$ montre qu'il est nul.

4 - Comme les points O et M sont fixes, la droite (OM) l'est aussi. Donc, le point M_t varie (lorsque t varie dans $]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$) de telle sorte que le vecteur $\overrightarrow{MM_t}$ reste orthogonal à (OM), donc sur la droite passant par M et orhogonale à (OM). Comme d'autre part t décrit tout l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$, M_t décrit toute cette perpendiculaire. Finalement $J(M)$ est la droite passant par M et perpendiculaire à la droite (OM).

5 - Des relations $x_t = x - \theta y$ et $y_t = \theta x + y$ on tire $x = \frac{1}{1+\theta^2}(x_t + \theta y_t)$ et $y = \frac{1}{1+\theta^2}(-\theta x_t + y_t)$. L'équation $x = a$ de la droite $\mathcal{D}$ donne automatiquement celle de sa transformée $\mathcal{D}_t$ par la similitude s_t :

$$x_t + \theta y_t = a(1 + \theta^2).$$

6 - Comme $\mathcal{B}$ est tangente à la droite $\mathcal{D}$ d'équation $x = a$ et qu'elle a pour foyer le point O, sa directrice Δ est parallèle à $\mathcal{D}$ et a pour équation $x = 2a$. Comme tout point $M = (x, y)$ de $\mathcal{B}$ vérifie distance(M, O) = distance(M, Δ) on a $OM^2 = MM_0^2$ où M_0 est la projection orthogonale de M sur Δ. En faisant intervenir les coordonnées des divers points on obtient la relation $x^2 + y^2 = (x - 2a)^2$; ce qui nous donne l'équation cherchée :

$$y^2 = 4a(a - x).$$

7 - Les points d'intersection K_t de la droite $\mathcal{D}_t$ et de la parabole $\mathcal{B}$ ont leurs coordonnées (x, y) solutions du système :

$$\begin{cases} y^2 = 4a(a - x) \\ x + \theta y = a(1 + \theta^2). \end{cases}$$

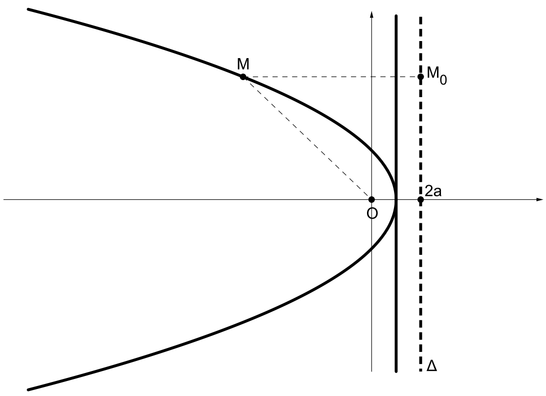
Pour résoudre ce système, on reporte dans la première équation la valeur de x prise dans la seconde. On obtient l'équation du second degré en y :

$$y^2 - 4a\theta y + 4a^2\theta^2 = 0$$

qui admet comme seule solution $y = 2a\theta$; par suite $x = a(1-\theta^2)$. Il n'y a donc qu'un seul point d'intersection entre la parabole $\mathcal{B}$ et la droite $\mathcal{D}_t$; comme cette dernière n'est jamais (pour tout t) parallèle à l'axe de $\mathcal{B}$, elle lui est forcément tangente. Le point de tangence est $K_t = (a(1-\theta^2), 2a\theta)$. (Pour se rafraîchir la mémoire, le lecteur peut faire l'exercice qui consiste à étudier la position relative d'une droite par rapport à une parabole.)

8 - D'après la question 7, les coordonnées du point K_t (qui est sur la parabole $\mathcal{B}$) sont données en fonction de t (on se rappelle que $\theta = \operatorname{tg}(t)$) par :

$$\begin{cases} x = a(1-\theta^2) \\ y = 2a\theta. \end{cases}$$



Quand t tend vers $-\frac{\pi}{2}$, θ tend vers $-\infty$ et donc x et y tendent vers $-\infty$; pour $t = 0$, K_t est au point de coordonnées $(a, 0)$; le point mobile K_t décrit donc toute la partie de $\mathcal{B}$ en dessous de l'axe des x lorsque $t \in]-\frac{\pi}{2}]$. De la même manière on montre que K_t décrit toute la partie de $\mathcal{B}$ au-dessus de l'axe des x lorsque $t \in [0, \frac{\pi}{2}[$.

9 - On pose $\beta = \sqrt{|R^2 - a^2|}$. La conique Γ est une ellipse si $R > a$ et une hyperbole si $R < a$.

• $\underline{R > a}$. Alors Γ est l'ellipse d'équation :

$$\frac{(x-a)^2}{R^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1.$$

Le centre de cette ellipse est le point $\omega = (a, 0)$. Pour $y = 0$, on a deux sommets dont les abscisses respectives sont $a + R$ et $a - R$, donc le grand axe est égal à $2R$. De même, pour $x = a$, on a deux sommets d'ordonnées respectives β et $-\beta$, donc le petit axe est égal 2β. Par suite les foyers (qui sont sur l'axe des x) ont pour abscisses respectives $a + c$ et $a - c$ avec $c = \sqrt{R^2 - \beta^2} = a$. Donc $F = (2a, 0)$ et $F' = (0, 0)$.

• $\underline{R < a}$. Alors Γ est l'hyperbole d'équation :

$$\frac{(x-a)^2}{\rho^2} - \frac{x^2}{\beta^2} = 1.$$

Là aussi, le centre de la conique est le point $\omega = (a, 0)$; de façon presque similaire que précédemment, on montre que les foyers F et F' ont pour abscisses respectives $a + c$ et $a - c$ avec $c = \sqrt{R^2 + (a^2 - \rho^2)} = a$. Donc $F = (2a, 0)$ et $F' = (0, 0)$.

10 - Comme s_t est une similitude, le centre O_t du cercle $\mathcal{C}_t$ est le transformé de A c'est-à-dire le point O_t de coordonnées $(a, \theta a)$; quant à son rayon R_t il est égal au produit du rayon de $\mathcal{C}$ et du rapport de similitude, c'est-à-dire $R_t = \frac{R}{\cos t}$.

11 - Comme on vient de le voir, le cercle $\mathcal{C}_t$ a pour centre le point $O_t = (a, a\theta)$ et pour rayon $R_t = \frac{R}{\cos t}$. Il a donc pour équation :

$$(x - a)^2 + (y - a\theta)^2 = R_t^2$$

c'est-à-dire :

$$(x - a)^2 + (y - a\theta)^2 = R^2(1 + \theta^2).$$

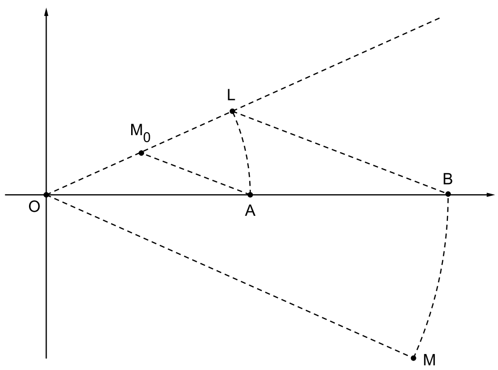
12 - Comme les centres de $\mathcal{C}_t$ et Γ sont tous les deux sur la droite $\mathcal{D}$ (qui est un axe de symétrie commun à $\mathcal{C}_t$ et Γ), leurs points d'intersection sont forcément symétriques par rapport à $\mathcal{D}$. Les coordonnées (x, y) de ces points sont les solutions du système :

$$\begin{cases} (x - a)^2 + (y - a\theta)^2 = R^2(1 + \theta^2) \\ \frac{(x-a)^2}{R^2} + \frac{y^2}{R^2 - a^2} = 1. \end{cases}$$

Sa résolution donne $y = \frac{\theta(a^2 - R^2)}{a}$. En reportant dans la deuxième équation on trouve $(x - a)^2 = R^2\left(1 - \frac{\theta^2}{a^2}(R^2 - a^2)\right)$; comme $R > a$, la quantité $\tau = R^2\left(1 - \frac{\theta^2}{a^2}(R^2 - a^2)\right)$ n'est pas toujours positive ; elle l'est pour $|\theta| \leq \frac{a}{\sqrt{R^2 - a^2}}$. Les points L_t et N_t ont alors pour abscisses respectives $a - \tau$ et $a + \tau$.

Partie II

1 - Soit M_0 le point d'affixe $z_0 = \frac{1}{z}$; alors M' est le milieu du segment $[MM_0]$ et tout le monde sait comment il se construit ! Reste seulement à contruire le point M_0. Comme argument$(z_0) = -$argument(z), le point M_0 est sur la demi-droite Δ_+ symétrique par rapport à l'axe des abscisses de la demi-droite passant par O et par M. Il suffit donc de construire sur Δ_+ le point dont la distance au point O est $\frac{1}{|z|}$. Sur l'axe des abscisses, on note A et B les points d'abscisses respectives 1 et $|z|$ et sur Δ_+, L sera le point dont la distance à O est égal à 1. Par A on mène la parallèle à (BL). Celle-ci coupe Δ_+ en un point dont on peut vérifier facilement (à l'aide du théorème de Thalès) que ce n'est rien d'autre que le point M_0 cherché !



2 - Si $z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ (avec $r = |z|$ et θ =argument de z) , on a $z' = x' + iy' = \frac{1}{2}\left((r + \frac{1}{r})\cos\theta + i(r - \frac{1}{r})\sin\theta\right)$. Donc :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}(r + \frac{1}{r})\cos\theta \\ \\ y' = \frac{1}{2}(r - \frac{1}{r})\sin\theta \end{cases}$$

3 - Dans ce cas le module r est constant égal à ρ. Si $\rho = 1$, $y' = 0$ et $x' = \cos\theta$ et décrit l'intervalle $[-1, 1]$. Donc l'image du cercle unité par T est l'ensemble :

$$\{x' + iy' : y' = 0 \text{ et } -1 \leq x' \leq 1\}.$$

Supposons $\rho \neq 1$. On pose $a = \frac{1}{2}(\rho + \frac{1}{\rho})$ et $b = \frac{1}{2}(\rho - \frac{1}{\rho})$; a et b sont des constantes réelles non nulles et :

$$\begin{cases} \frac{x'}{a} = \cos\theta \\ \frac{y'}{b} = \sin\theta \end{cases}$$

ce qui donne $\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$ et qui montre que l'image du cercle de centre O et de rayon ρ par l'application T est une ellipse de grand axe $2a = \rho + \frac{1}{\rho}$ et de petit axe $2b = |\rho - \frac{1}{\rho}|$ et de foyers les points $F = (c, 0)$ et $F' = (-c, 0)$ avec $c = \sqrt{a^2 - b^2} = 1$.

4 - Cette fois-ci θ reste constant dans $]0, \frac{\pi}{2}[$; on pose $a = \cos\theta$ et $b = \sin\theta$; a et b sont des constantes réelles strictement positives et :

$$\begin{cases} \frac{x'}{a} = \frac{1}{2}(r + \frac{1}{r}) \\ \frac{y'}{b} = \frac{1}{2}(r - \frac{1}{r}), \end{cases}$$

ce qui donne :

$$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1$$

et qui montre que l'image de la droite en question est une hyperbole ayant O comme centre de symétrie, comme foyers les points $F = (c, 0)$ et $F' = (-c, 0)$ avec $c = \sqrt{a^2 + b^2} = 1$ et comme asymptotes les droites d'équations $y = (\mathrm{tg}\theta)x$ et $y = -(\mathrm{tg}\theta)x$.

Partie III

1.

a) Comme par construction des points M_n :

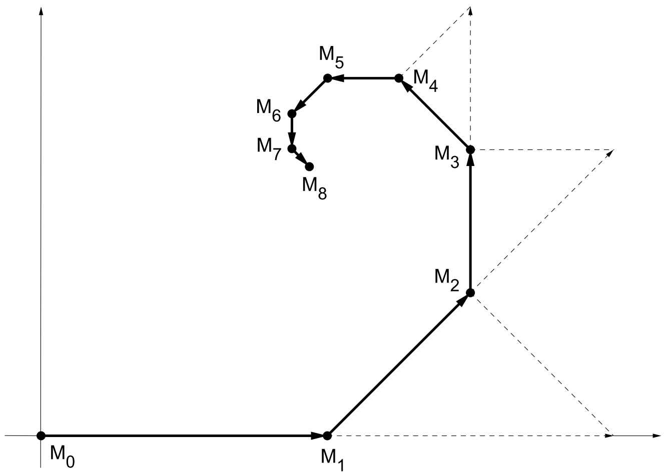
$$||\overrightarrow{M_n M_{n+1}}|| = r||\overrightarrow{M_{n-1} M_n}|| \quad \text{ et } \quad (\overrightarrow{M_{n-1} M_n}, \overrightarrow{M_n M_{n+1}}) = \theta,$$

on a $v_n = z_n - z_{n-1} = re^{i\theta}(z_{n-1} - z_{n-2}) = re^{i\theta}v_{n-1}$ pour tout $n \geq 2$.

b) De ce qui précède, et tenant compte du fait que $v_1 = 1$, on en déduit :

$$v_n = r^{n-1}e^{i(n-1)\theta}v_1 = r^{n-1}e^{i(n-1)\theta}.$$

c) Voir figure qui suit. Il faut bien regarder le dessin pour comprendre comment les points M_2, M_3 et M_4 ont été construits à partir des données M_0 et M_1. (Cette figure répondra aussi à la dernière partie de la question 2.d).)



2.

a) Comme $v_n = z_n - z_{n-1}$, on a $z_n - z_0 = (z_n - z_{n-1}) + \cdots + (z_1 - z_0) = v_n + \cdots + v_1$. Mais $z_0 = 0$; d'où :

$$z_n = r^{n-1}e^{i(n-1)\theta} + \cdots + re^{i\theta} + 1 = \frac{1 - r^n e^{in\theta}}{1 - re^{i\theta}}.$$

b) Comme $0 < r < 1$, $r^n e^{in\theta}$ tend vers 0, par suite z_n converge vers $\frac{1}{1-re^{i\theta}}$ et donc la suite (M_n) converge vers le point Ω. D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} |z_n - \omega| = 0$.

c) La similitude f de centre Ω, de rapport r et d'angle θ convient. En effet, le vecteur $\overrightarrow{\Omega M_n}$ a pour coordonnée :

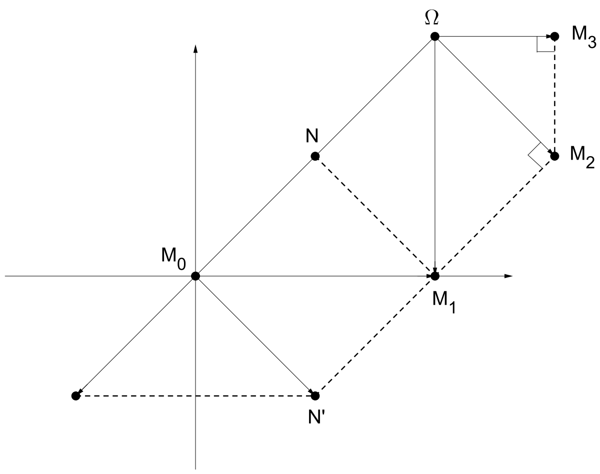
$$\frac{1}{1 - re^{i\theta}} - (r^{n-1}e^{i(n-1)\theta} + \cdots + re^{i\theta} + 1) = \sum_{k=n}^{\infty} r^k e^{ik\theta} = re^{i\theta}\left(\sum_{k=n-1}^{\infty} r^k e^{ik\theta}\right).$$

Or $\sum\limits_{k=n-1}^{\infty} r^k e^{ik\theta}$ est la coordonnée du vecteur $\overrightarrow{\Omega M_{n-1}}$. Donc $\overrightarrow{\Omega M_n} = re^{i\theta}\overrightarrow{\Omega M_{n-1}}$ et par suite $f(M_{n-1}) = M_n$ pour tout $n \geq 1$.

d) Soit N le point d'affixe $u = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{4}}$; alors $u' = 1 - u = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ est l'affixe du point N' symétrique de N par rapport à l'axe réel (facile à voir) et $\omega = \frac{1}{1-re^{i\theta}}$ est simplement $2\overline{u'} = 2u = 1 + i$ (affixe de Ω).

Le point M_n s'obtient à partir de M_{n-1} en construisant le triangle $\Omega M_{n-1} M_n$ isocèle de base ΩM_{n-1} et rectangle en M_n de telle sorte que la base $(\overrightarrow{\Omega M_{n-1}}, \overrightarrow{\Omega M_n})$ soit directe. (Voir sur le dessin qui suit comment on construit M_2 à partir de M_1 et M_3 à partir de M_2 en passant à chaque fois par le point Ω.)

Pour le placement des points M_n avec $0 \leq n \leq 8$ voir la question 1.c) ainsi que la figure qu'on a dessinée à cet effet.



Ω
M_3
N
M_2
M_0
M_1
N'

Commentaires

Il y en a pas mal à faire mais je vais me contenter de signaler quelques petites perles. Les auteurs se reconnaîtront et j'espère qu'ils feront le nécessaire pour éviter cela dans l'avenir.

• Question 1.a) de la partie III. Voici ce que j'ai vu dans pas mal de copies.

On arrive à $v_n = z_n - z_{n-1} = r^{n-1}e^{i(n-1)\theta}$ *; ce qui implique* $z_n = 1 + nr^{n-1}e^{i(n-1)\theta}$.

Aucun temps de réflexion n'est pris par les candidats, ils écrivent simplement ce qui leur passe par la tête. Et pourtant, le calcul est vraiment élémentaire !

• Question 2.b) de la partie III. Une autre erreur, d'un type un peu différent mais tout aussi surprenante ! Après un détour dans les calculs, on arrive à :

$$\cdots = \lim_{n\to+\infty} \left| C + n\left(re^{i\theta}\right)^{n-1} \right| = 0$$

où le nombre C est censé être une constante. Certes, le résultat est vrai si $0 \leq r < 1$ et $C = 0$ mais cette dernière condition n'est pas mentionnée et rien n'indique qu'elle puisse être remplie. On ne sait d'ailleurs pas comment on aboutit à ce calcul !

• Question 1 de la partie I.

– *La transformation* s_t *est une rotation de centre* O*, de rayon* $f(t)$ *et d'angle* t*.*

– *La transformation* s_t *est une similitude de rapport nul, donc c'est une rotation.*

Qu'est-ce que le "rayon d'une rotation" ? une "similitude de rapport nul"...?

• Question 6 de la partie I. Sur une copie : *La parabole de foyer* O *a pour équation* :

$$\left(\frac{y}{2a}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{x}}{2a}\right)^2 = 1.$$

D'abord, aucune précaution : l'écriture $\sqrt{x}$ n'a de sens que si $x \geq 0$. Ensuite, la forme de l'équation d'une parable est totalement ignorée.

• Question 9 de la partie I. Sur une copie : *Si* $R < a$*, l'équation "s'écrive"* (revoir la conjugaison des verbes) *sous la forme* $X^2 - Y^2 = 1$ *et donc* Γ *est une ellipse. Si* $R > a$*, l'équation "s'écrive"* (revoir la conjugaison des verbes) *sous la forme* $X^2 + Y^2 = 1$ *et donc* Γ *est une hyperbole.*

Manifestement l'auteur mélange tout : équation d'un cercle, celle d'une ellipse, celle d'une hyperbole...

• Question 1 de la partie II. Sur quelques copies :

$$\arg\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\arg(z) + \arg\left(\frac{1}{z}\right)\right).$$

Si ceci était vrai, le nombre $\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ aurait un argument nul et serait donc un réel strictement positif pour tout $z \in \mathbb{C}^*$ (mais pour $z = 2i$ on a $\frac{1}{2}\left(2i + \frac{1}{2i}\right) = \frac{3}{4}i$) !

J'ai aussi relevé beaucoup de fautes de grammaire, d'orthographe... dans presque toutes les copies. Faut-il tolérer qu'un enseignant en mathématiques en fasse (comme le pensent certains) ? Pour moi, c'est mille fois non !

A. El Kacimi

MEÉF 1 Second degré - Mathématiques
DS8 - 18 mars 2014 - Problème II

On munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ de sa structure affine canonique (un élément (x, y) peut être vu comme *point* ou comme *vecteur*) et de son produit scalaire usuel ; $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ avec $O = (0, 0)$, $\overrightarrow{i} = (1, 0)$ et $\overrightarrow{j} = (0, 1)$ est le repère orthonormé habituel. La norme d'un vecteur $\overrightarrow{u}$ sera notée $||\overrightarrow{u}||$ et la distance entre deux points M et N simplement MN au lieu de $||\overrightarrow{MN}||$; A et B seront les points de coordonnées respectives $(1, 0)$ et $(0, 1)$.

Ce problème sera constitué de deux parties différentes ; chacune peut être traitée indépendamment de l'autre.

Partie I

L'objet de cette partie est d'étudier certains sous-groupes du groupe des transformations affines du plan $\mathbb{R}^2$. On se donne une application $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$.

1. Quand dit-on que f est affine ? Qu'est-ce que sa direction qu'on note $\overrightarrow{f}$? Montrer que si f est affine alors, pour tous $M, N \in \mathbb{R}^2$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$(*) \qquad f((1-\lambda)M + \lambda N) = (1-\lambda)f(M) + \lambda f(N).$$

2. Montrer que la connaissance de $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{i})$ et $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{j})$ détermine complètement $\overrightarrow{f}$.

3. Montrer que la connaissance de $f(O)$, $f(A)$ et $f(B)$ détermine complètement f.

4. En déduire qu'il existe des réels $a, b, c, d, \alpha, \beta$ tels que si M a pour coordonnées (x, y), son image $M' = f(M)$ a pour coordonnées $(x', y') = (ax + by + \alpha, cx + dy + \beta)$.

5. Quelles conditions doivent satisfaire les réels $a, b, c, d, \alpha, \beta$ pour que f soit bijective ?

Lorsque f est bijective et affine, on dira que f un *automorphisme affine* de $\mathbb{R}^2$. Les automorphismes affines de $\mathbb{R}^2$ forment un groupe qu'on notera $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^2)$.

6. Montrer qu'une translation $\tau_{\overrightarrow{u}}$ associée à un vecteur $\overrightarrow{u}$ est un élément de $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^2)$.

7. Montrer que l'ensemble $\mathcal{T}$ des translations muni de la loi de composition habituelle est un sous-groupe de $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^2)$ et qu'il est isomorphe au groupe additif $(\mathbb{R}^2, +)$.

On note $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^2)$ le groupe des *automorphismes linéaires* (bijections linéaires) de $\mathbb{R}^2$ et $\pi : \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^2) \longrightarrow \mathrm{GL}(\mathbb{R}^2)$ l'application qui à f associe sa direction $\overrightarrow{f}$; π est homomorphisme de groupes.

8. Montrer que le noyau de π est exactement le sous-groupe $\mathcal{T}$ des translations de $\mathbb{R}^2$.

Soit $\mathcal{C}$ une partie non vide de $\mathbb{R}^2$. On dira que $\mathcal{C}$ est *invariante* par $f \in \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^2)$ si $f(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$.

9. Montrer que l'ensemble $\mathrm{Aff}_{\mathcal{C}}(\mathbb{R}^2)$ des automorphismes affines qui laissent $\mathcal{C}$ invariante est un sous-groupe de $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^2)$.

On rappelle qu'un *repère affine* de $\mathbb{R}^2$ est un triplet (C_0, C_1, C_2) de points distincts non alignés. Tout point $M \in \mathbb{R}^2$ s'écrit $M = \lambda_0 C_0 + \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2$ où $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ sont des réels vérifiant $\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 1$.

10. Montrer qu'une application affine est un automorphisme affine si, et seulement si, elle transforme un repère affine en un repère affine.

On prend pour partie $\mathcal{C}$ l'ensemble $\{C_0, C_1, C_2\}$ avec (C_0, C_1, C_2) un repère affine. On note $\mathfrak{S}_3$ le groupe symétrique des permutations de l'ensemble $\{0, 1, 2\}$. Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_3$, on note f_σ la permutation de l'ensemble $\mathcal{C} = \{C_0, C_1, C_2\}$ qui à C_i associe $C_{\sigma(i)}$.

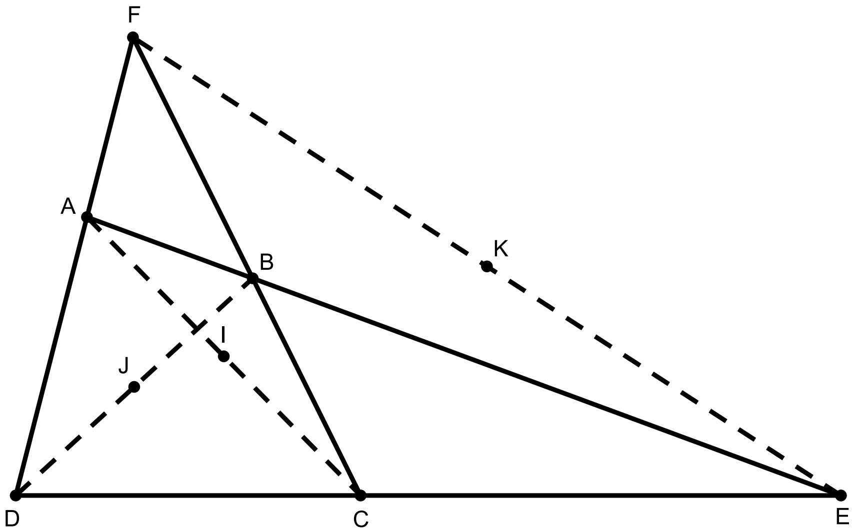
11. Montrer que f_σ se prolonge en un élément de $\mathrm{Aff}_\mathcal{C}(\mathbb{R}^2)$ qu'on notera encore f_σ.

12. Montrer que l'application $\phi : \sigma \in \mathfrak{S}_3 \longmapsto f_\sigma \in \mathrm{Aff}_\mathcal{C}(\mathbb{R}^2)$ (où f_σ est l'automorphisme affine précédent) est un isomorphisme de groupes.

13. On suppose le triangle $C_0C_1C_2$ équilatéral. Montrer que tout élément de $\mathrm{Aff}_\mathcal{C}(\mathbb{R}^2)$ est une isométrie. Donner explicitement tous les éléments de ce groupe.

Partie II

Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe (toujours dans notre plan) tel que les droites (AB) et (CD) se coupent en E et (AD) et (BC) se coupent en F (*cf.* figure ci-dessous). (On dira que $ABCD$ est un *quadrilatère complet.*) On note I, J et K les milieux respectifs des segments $[AC]$, $[BD]$ et $[EF]$. L'objet de l'exercice est de démontrer le Théorème de Newton : *les trois points I, J et K sont alignés.*



Soient G et H les points du plan tels que les quadrilatères $FDGB$ et $FAHC$ soient des parallélogrammes. Soient h l'homothétie de centre E qui envoie le point D sur C, h' l'homothétie de même centre qui envoie B sur A et $\phi = h \circ h'$.

1. Montrer que ϕ transforme la droite (BG) en la droite (HC).

2. Quelle est l'image de la droite (DG) par ϕ ? En déduire le point $\phi(G)$.

3. Montrer que les points E, G et H sont alignés.

4. Soit f l'homothétie de centre F et de rapport $\frac{1}{2}$. Quelles sont les images respectives des points G et H par f ? En déduire le résultat (c'est-à-dire la conclusion du théorème de Newton).
(**3 points**)

CORRIGÉ

Partie I

1 - On dit que f est affine s'il existe un point $\omega \in \mathbb{R}^2$ tel que l'application ϕ de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ dans lui-même qui à $\overrightarrow{\omega M}$ associe $\phi(\overrightarrow{\omega M}) = \overrightarrow{f(\omega)f(M)}$ est linéaire.

On démontre que si la propriété qu'on vient d'énoncer est vraie pour un point ω, elle le sera pour tout autre point ω' (cours de L3) ; ϕ est donc définie par $\phi(\overrightarrow{MN}) = \overrightarrow{f(M)f(N)}$ où M et N sont des points quelconques de l'espace affine $\mathbb{R}^2$. Cette application sera notée $\overrightarrow{f}$ et appelée *direction* de f.

Montrer que $f((1-\lambda)M + \lambda N) = (1-\lambda)f(M) + \lambda f(N)$ revient à montrer que l'image du barycentre G des points massiques $(M, 1-\lambda)$ et (N, λ) est le barycentre G' des points massiques $(f(M), 1-\lambda)$ et $(f(N), \lambda)$. Le point G est caractérisé par la relation : $(1-\lambda)\overrightarrow{GM} + \lambda\overrightarrow{GN} = \overrightarrow{0}$. D'où :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{0} &= \overrightarrow{f}((1-\lambda)\overrightarrow{GM} + \lambda\overrightarrow{GN}) \\
&= (1-\lambda)\overrightarrow{f}(\overrightarrow{GM}) + \lambda\overrightarrow{f}(\overrightarrow{GN}) \\
&= (1-\lambda)\overrightarrow{f(G)f(M)} + \lambda\overrightarrow{f(G)f(N)} \\
&= (1-\lambda)\overrightarrow{G'f(M)} + \lambda\overrightarrow{G'f(N)}
\end{aligned}$$

qui montre que G' est le barycentre des points massiques $(f(M), 1-\lambda)$ et $(f(N), \lambda)$. ◇

2 - Supposons les vecteurs $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{i})$ et $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{j})$ connus. Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur quelconque. Comme $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ est une base de $\mathbb{R}^2$, il existe $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$. D'où :

$$\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{f}(x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}) = x\overrightarrow{f}(\overrightarrow{i}) + y\overrightarrow{f}(\overrightarrow{j}). \tag{1}$$

Donc l'application $\overrightarrow{f}$ est connue sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ tout entier. ◇

3 - Supposons les points $f(O)$, $f(A)$ et $f(B)$ connus et soit M un point de $\mathbb{R}^2$. Alors il existe $x, y \in \mathbb{R}^2$ tels que $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$. D'où :

$$\overrightarrow{f}(\overrightarrow{OM}) = x\overrightarrow{f}(\overrightarrow{i}) + y\overrightarrow{f}(\overrightarrow{j}) = x\overrightarrow{f}(\overrightarrow{OA}) + y\overrightarrow{f}(\overrightarrow{OB}).$$

Mais :

$$\begin{cases}
\overrightarrow{f}(\overrightarrow{OM}) = f(M) - f(0) \\
\overrightarrow{f}(\overrightarrow{OA}) = f(A) - f(O) \\
\overrightarrow{f}(\overrightarrow{OB}) = f(B) - f(O).
\end{cases}$$

Cela nous donne avec la relation qui précède :

$$f(M) = xf(A) + yf(B) + (1-x-y)f(O). \tag{2}$$

Donc l'application f est connue sur l'espace affine $\mathbb{R}^2$ tout entier. ◇

4 - Posons $f(O) = (\alpha, \beta)$, $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{i}) = (a, c)$ et $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{j}) = (b, d)$. La formuule (1) nous donne les coordonnées (x', y') du point $M' = f(M)$:

$$(x', y') = f(M) = x(a, c) + y(b, c) + f(O) = (ax + by + \alpha, cx + dy + \beta)$$

ce qui exactement ce qu'on cherche. $\diamondsuit$

5 - L'application affine a pour direction l'application linéaire $\overrightarrow{f}$; cette dernière a pour matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. On sait que f est bijective si, et seulement si, $\overrightarrow{f}$ l'est ; c'est le cas si le déterminat de A est non nul *i.e.* $ad - bc \neq 0$. $\diamondsuit$

6 - La translation $\tau_{\overrightarrow{u}}$ de vecteur $\overrightarrow{u}$ est définie par $\tau_{\overrightarrow{u}}(M) = M'$ de telle sorte que $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{u}$. Donc, pour tous points M et N, l'application ϕ qui au vecteur $\overrightarrow{MN}$ associe le vecteur $\overrightarrow{M'N'}$ est linéaire puisque $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$! $\diamondsuit$

7 - Soient $\tau_{\overrightarrow{u}}$ et $\tau_{\overrightarrow{v}}$ deux translations, M un point, M' son translaté par $\tau_{\overrightarrow{u}}$ et M'' le translaté de dernier par $\tau_{\overrightarrow{v}}$. On a alors $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{M'M''} = \overrightarrow{v}$. D'où :

$$\overrightarrow{MM''} = \overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'M''} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}. \tag{3}$$

Le point M'' est donc le translaté de M par le vecteur $w = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$. La translation $\tau_{\overrightarrow{0}}$ est l'élément neutre et l'inverse de $\tau_{\overrightarrow{u}}$ est $\tau_{-\overrightarrow{u}}$ L'ensemble $\mathcal{T}$ des translations est donc un groupe commutatif pour la composition $\circ$ des applications.

La relation (3) montre que l'application $\overrightarrow{u} \longmapsto \tau_{\overrightarrow{u}}$ est morphisme du groupe additif $(\mathbb{R}^2, +)$ dans le groupe $(\mathcal{T}, \circ)$. Il est surjectif puisque toute translation est associée à un vecteur par définition même. Comme en plus $\tau_{\overrightarrow{u}} =$ identité implique $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$, ce morphisme est injectif. On obtient donc le résultat cherché, à savoir que les deux groupes $(\mathbb{R}^2, +)$ et $(\mathcal{T}, \circ)$ sont isomorphes. $\diamondsuit$

8 - On sait que la direction $\pi(f) = \overrightarrow{f}$ de f est définie par :

$$\overrightarrow{f}(\overrightarrow{MN}) = \overrightarrow{f(M)f(N)} = \overrightarrow{M'N'}.$$

Il est alors clair que $\pi(f)$ est l'identité si, et seulement si, f est une translation ; son vecteur est alors $\overrightarrow{MM'}$ pour un point M arbitraire. $\diamondsuit$

9 - Soient $f, g \in \mathrm{Aff}_{\mathcal{C}}(\mathbb{R}^2)$. Alors $g \circ f(\mathcal{C}) = g(f(\mathcal{C})) = g(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$ Donc $g \circ f \in \mathrm{Aff}_{\mathcal{C}}(\mathbb{R}^2)$. Il est évident que l'identité est un élément de $\mathrm{Aff}_{\mathcal{C}}(\mathbb{R}^2)$. Soit $f \in \mathrm{Aff}_{\mathcal{C}}(\mathbb{R}^2)$; alors :

$$f^{-1}(\mathcal{C}) = f^{-1}(f\mathcal{C}) = f^{-1} \circ f(\mathcal{C}) = \mathcal{C}.$$

Donc $f^{-1} \in \mathrm{Aff}_{\mathcal{C}}(\mathbb{R}^2)$. On a donc montré que $\mathrm{Aff}_{\mathcal{C}}(\mathbb{R}^2)$ est un sous-groupe de $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^2)$. $\diamondsuit$

10 - Soit f une application affine de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même. Donnons-nous un repère affine (C_0, C_1, C_2) et posons $C_0' = f(C_0)$, $C_1' = f(C_1)$ et $C_2' = f(C_2)$.

Supposons que f est un automorphisme. Comme les vecteur $\overrightarrow{C_0C_1}$ et $\overrightarrow{C_0C_2}$ forment une base et que $\overrightarrow{f}$ est un automorphisme linéaire, les vecteurs $\overrightarrow{C_0'C_1'}$ et $\overrightarrow{C_0'C_2'}$ forment aussi une base ; par suite le triplet (C_0', C_1', C_2') est un repère affine.

Supposons maintenant que (C_0', C_1', C_2') est un repère affine. Alors $(\overrightarrow{C_0'C_1'}, \overrightarrow{C_0'C_2'})$ est une base, donc la direction $\overrightarrow{f}$ de f est injective, par suite elle est bijective ; f l'est alors aussi *i.e.* f est un automorphisme affine. $\diamondsuit$

11 - Soit M un point quelconque de $\mathbb{R}^2$. Alors il existe un unique triplet de réels $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$ vérifiant $\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 1$ tels que $M = \lambda_0 C_0 + \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2$. On pose alors :

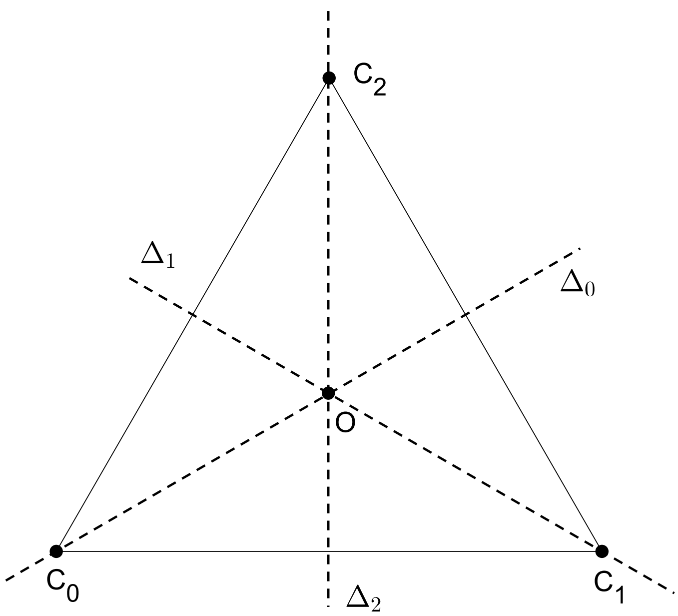
$$f_\sigma(M) = \lambda_0 C_{\sigma(0)} + \lambda_1 C_{\sigma(1)} + \lambda_2 C_{\sigma(2)}.$$

Par définition même cette application est affine et préserve la partie $\{C_0, C_1, C_2\}$. Comme elle envoie le repère (C_0, C_1, C_2) bijectivement sur lui-même, c'est un automorphisme affine en vertu de la question qui précède. $\diamondsuit$

12 - À tout $\sigma \in \mathfrak{S}_3$ on associe $f \in \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^2)$ défini par $f_\sigma(C_i) = C_{\sigma(i)}$ pour $i \in \{0, 1, 2\}$. Il est clair que $f_\sigma \in \mathrm{Aff}_{\mathcal{C}}(\mathbb{R}^2)$; on a donc une application $\varphi : \sigma \in \mathfrak{S}_3 \longmapsto f_\sigma \in \mathrm{Aff}_{\mathcal{C}}(\mathbb{R}^2)$ dont il est facile de voir que c'est un morphisme de groupes ; nous allons montrer qu'en fait φ est un isomorphisme.

Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_3$ tel que f_σ soit l'identité ; il est clair que $f_\sigma(C_i) = C_i$ pour tout $i \in \{0, 1, 2\}$ donc $\sigma(i) = i$ pour tout i et par suite σ est la permutation identité donc φ est injectif. Montrons maintenant qu'il est surjectif. Soit $f \in \mathrm{Aff}_{\mathcal{C}}(\mathbb{R}^2)$. Comme f stabilise $\mathcal{C}$, il ne fait que permuter les points C_0, C_1 et C_2 c'est-à-dire il existe $\sigma \in \mathfrak{S}_3$ tel que $f(C_i) = C_{\sigma(i)}$; ceci montre que $f = f_\sigma$, donc φ est surjectif et par suite c'est un isomorphisme du groupe $\mathfrak{S}_3$ sur le groupe $\mathrm{Aff}_{\mathcal{C}}(\mathbb{R}^2)$. $\diamondsuit$

13. Soit $f_\sigma \in \mathrm{Aff}_{\mathcal{C}}(\mathbb{R}^2)$. Comme $C_iC_j = C_{\sigma(i)}C_{\sigma(j)}$ pour tous $i, j \in \{0, 1, 2\}$, que f_σ est affine et que (C_0, C_1, C_2) es un repère affine, f_σ est forcément une isométrie. Le groupe $\mathrm{Aff}_{\mathcal{C}}(\mathbb{R}^2)$ est donc constitué de l'identité, la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$, la rotation de centre O et d'angle $\frac{4\pi}{3}$ et les trois réflexions d'axes respectifs Δ_0, Δ_1 et Δ_2.



Partie II

1 - L'homothétie h' envoie la droite (BG) sur une droite qui lui est parallèle et passant par le point $A = h'(B)$; c'est donc la droite (AD). Celle-ci se transforme par h en une droite qui lui est parallèle et qui passe par $C = h(D)$; c'est donc la droite (HC). En résumé on a $\phi((BG)) = (HC)$. $\diamondsuit$

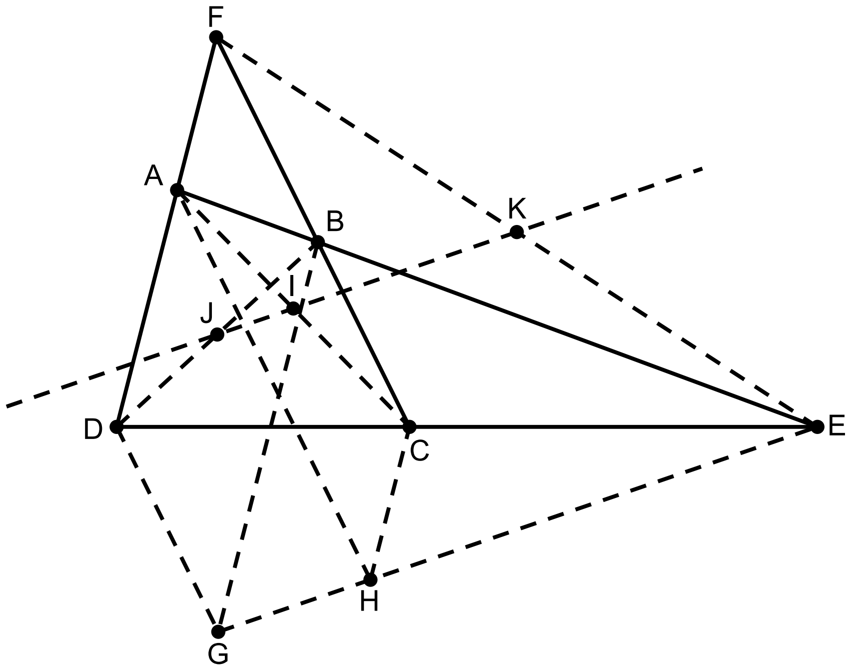
2 - Comme h et h' ont même centre (le point E), elles commutent ; on a donc aussi $\phi = h' \circ h$. L'homothétie h envoie la droite (DG) sur une droite qui lui est parallèle et passant par le point $C = h(D)$; c'est donc la droite (BC). Celle-ci se transforme par h' en une droite qui lui est parallèle et qui passe par $A = h'(B)$; c'est donc la droite (AH). En résumé on a $\phi((DG)) = (AH)$.

Comme on vient de le voir $\phi((BG)) = (HC)$ et $\phi((DG)) = (AH)$. On a donc :

$$\phi(G) = \phi((BG) \cap (DG)) = (HC) \cap (AH) = H.$$

3 - L'homothétie ϕ est centrée en E et envoie le point G sur le point H ; les trois points E, H et G sont donc alignés. $\diamondsuit$

4 - Le quadrilatère $FDGB$ est un parallélogramme, donc ses diagonales $[DB]$ et $[FG]$ se coupent en leurs milieux qui n'est rien d'autre que le point J (milieu de $[DB]$ par hypothèse). Donc $f(G) = J$. De la même manière on montre que $f(H) = I$. Comme K est le milieu de $[FE]$ on a $f(E) = K$. L'homothétie f transforme donc les trois points alignés H, G et E respectivement en I, J et K. Il en résulte que les points I, J et K sont alignés, ce qui démontre le théorème de Newton. $\diamondsuit$



MEÉF 1 Second degré - Mathématiques
DS2 - 13 octobre 2014
Analyse et probabilités

Exercice 1

Soient (E, d) un espace métrique et $f : E \longrightarrow E$ une application contractante *i.e.* il existe une constante réelle $k \in]0, 1[$ telle que $d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y)$ pour tous $x, y \in E$.

1 - Montrer que f est continue.

On suppose dans toute la suite que l'espace métrique (E, d) est complet. On s'intéresse à l'existence de points fixes de f, c'est-à-dire des $x \in E$ qui vérifient l'équation $f(x) = x$. Soit $a \in E$ et définissons la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $x_0 = a$ et $x_n = f(x_{n-1})$ pour $n \geq 1$.

2 - Soient n et p des entiers naturels tels que $n \geq p$. Montrer que :

$$d(x_n, x_p) \leq \frac{k^p}{1-k} d(x_1, x_0).$$

3 - Montrer que (x_n) est une suite de Cauchy, donc convergente. Soit x sa limite.

4 - Montrer que x est un point fixe de f et qu'il est le seul.

Exercice 2 (Exemple d'application)

On aimerait résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\phi(x) = 0$ où $\phi(x) = x^5 - x - 1$ (dite *algébrique*). Simplement on ne dispose d'aucune méthode pour le faire contrairement à ce qui se passe par exemple en degré 2 ou 3. À défaut de cela, on pourrait se contenter d'une solution approchée (c'est ce qu'on fait habituellent dans la vie courante) avec une précision imposée à l'avance. Le théorème du point fixe nous permet de faire cela.

1 - Dire pourquoi l'équation $x^5 - x - 1 = 0$ admet une solution dans l'intervalle $[1, 2]$.

Pour $x \geq 0$, on pose $f(x) = (x + 1)^{\frac{1}{5}}$; f est définie sur $\mathbb{R}_+$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

2 - Montrer que $x \in [1, 2]$ est solution de l'équation $\phi(x) = 0$ si, et seulement si, x est un point fixe de f.

3 - Montrer que l'image de $[1, 2]$ par f est contenue dans $[1, 2]$. Ainsi la restriction de f à $[1, 2]$ définit une application qu'on notera encore $f : [1, 2] \longrightarrow [1, 2]$.

4 - On munit $E = [1, 2]$ de la métrique $d(x, y) = |x - y|$. Dire pourquoi elle en fait un espace complet.

5 - Montrer qu'il existe une constante $k \in]0, 1[$ (qu'on peut donner explicitement) telle que $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$ pour tous $x, y \in [1, 2]$. En déduire que f admet un point fixe unique $x \in]1, 2[$.

6 - Soit $a \in [1, 2]$ et définissons la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $x_0 = a$ et $x_n = f(x_{n-1})$ pour $n \geq 1$. Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a $|x - x_n| \leq k^n$.

7 - Donner une valeur approchée à 10^{-3} près de x.

Exercice 3

Soit $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$ un ensemble dénombrable ($x_n = x_p$ si, et seulement si, $n = p$). Pour tous $x_p, x_q \in X$, on pose :

$$d(x_p, x_q) = \begin{cases} 0 & \text{si } p = q \\ 1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} & \text{sinon.} \end{cases}$$

1 - Montrer que d est une distance sur X.

2 - Montrer que l'espace métrique (X, d) est complet.

Soit $f : X \longrightarrow X$ l'application définie par $f(x_n) = x_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3 - Montrer que f vérifie :

$$d(f(x), f(y)) < d(x, y)$$

pour tous $x, y \in X$ avec $x \neq y$.

4 - Montrer que f n'a pas de point fixe.

5 - La réponse à la question 4 contredit-elle l'énoncé du *théorème du point fixe* pour une application contractante dans un espace métrique complet ?

Exercice 4

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = x + e^{-nx}$ et $\mathcal{C}_n$ son graphe (qui est une partie de $\mathbb{R}^2$).

1 - Dessiner $\mathcal{C}_0$, $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ et $\mathcal{C}_4$. Montrer que, pour $n \geq 1$, tous les graphes $\mathcal{C}_n$ passent par un même point A qu'on déterminera.

2 - Interpréter géométriquement l'intégrale :

$$I_n = \int_0^1 f_n(x)dx$$

et faire une conjecture sur la variation de la suite numérique (I_n) et sa limite éventuelle.

3 - Calculer $I_{n+1} - I_n$ et en déduire que la suite (I_n) est convergente. Soit ℓ sa limite.

4 - Calculer I_n en fonction de n et donner la valeur numérique de ℓ.

(Bac S, Juin 2014)

Exercice 5

1 - On considère la fonction d'une variable réelle $f(x) = \ln(1 - x)$. Développer en série entière au voisinage de 0 la fonction f. Préciser les valeurs de x pour lesquelles ce développement est valable.

Considérons la série entière $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ où x est réel et $a_n = \frac{1}{(n+1)(n+3)}$.

2 - Calculer le rayon de convergence R de la série S.

3 - On pose $g(x) = x^3 S(x)$. Donner le développement en série entière au voisinage de 0 de la fonction $\frac{g'(x)}{x}$ (g' désigne la dérivée de g).

4 - En déduire l'expression explicite (en termes de fonctions élémentaires bien connues) de la somme de la série S.

Exercice 6

On considère l'équation différentielle suivante dans laquelle y représente une fonction réelle de la variable x :

$$xy'' + 3y' - 4x^3 y = 0.$$

1 - Montrer qu'il existe une solution unique y de cette équation différentielle donnée sous forme d'une série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ et vérifiant la condition $y(0) = 1$.

2 - Calculer explicitement le rayon de convergence R de cette série.

3 - Donner l'expression de y en termes de fonctions élémentaires bien connues.

Exercice 7

Deux amis A et B se donnent rendez-vous à la sortie de leur travail entre 18h et 19h. On appelle X la fraction d'heure qui s'écoule entre 18 h et l'arrivée de A et Y celle qui s'écoule entre 18 h et l'arrivée de B. On définit ainsi deux variables aléatoires X et Y à valeurs dans $[0, 1]$. On suppose qu'elles sont indépendantes et uniformes.

On note T le temps d'attente entre le premier ami arrivé et le second.

1 - Calculer T en fonction de X et Y.

2 - Calculer la fonction de répartion F de T et en déduire sa densité de probabilité qu'on notera f.

3 - Calculer l'espérance mathématique (qu'on note habituellement $E(T)$) de T et son moment centré d'ordre 2.

4 - Les deux amis A et B ont convenu que le premier arrivé attendrait au plus 30 minutes. Quelle est la probabilité pour que le rendez-vous ait lieu ?

CORRIGÉ

Exercice 1

1 - Soit $\varepsilon > 0$. Alors pour $d(x,y) < \eta$ (avec $\eta = \frac{\varepsilon}{k}$), on a $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Ceci montre que l'application f est uniformément continue, donc continue. $\diamondsuit$

2 - Soit n un entier naturel tel que $n \geq 1$. On a :

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, x_n) &\leq k d(x_n, x_{n-1}) \\ &\leq k^2 d(x_{n-1}, x_{n-2}) \\ &\leq \cdots \\ &\leq k^n d(x_1, x_0) \end{aligned}$$

Si n et p sont des entiers naturels tels que $n \geq p \geq 1$ on a :

$$\begin{aligned} d(x_n, x_p) &\leq d(x_n, x_{n-1}) + d(x_{n-1}, x_{n-2}) + \cdots + d(x_{p+1}, x_p) \\ &\leq (k^{n-1} + \cdots + k^p) d(x_1, x_0) \\ &\leq \frac{k^p}{1-k} d(x_1, x_0). \end{aligned}$$

$\diamondsuit$

3 - Comme $0 < k < 1$, $k^p \to 0$ quand $p \to +\infty$; la suite (x_n) est donc de Cauchy dans E qui est complet ; par suite elle y converge vers un point x. $\diamondsuit$

4 - On a $x = \lim\limits_{n \to +\infty} x_n = \lim\limits_{n \to \infty} f(x_{n-1}) = f\left(\lim\limits_{n \to \infty} x_{n-1}\right) = f(x)$ qui montre que x est un point fixe de f. Si f avait un autre point fixe y (distinct de x bien sûr), on aurait $d(x,y) = d(f(x), f(y)) \leq k d(x,y)$ qui implique $k \geq 1$. Mais ceci contredit $0 < k < 1$; f n'a donc qu'un seul point fixe. $\diamondsuit$

Exercice 2

1 - La fonction $x \in \mathbb{R} \longmapsto (x^5 - x - 1) \in \mathbb{R}$ est continue, elle vaut -1 pour $x = 1$ et 29 pour $x = 2$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, elle prend donc nécessairement la valeur 0 pour au moins une certaine valeur $x \in]1, 2[$. $\diamondsuit$

2 - Pour $x \geq 0$, la quantité $x + 1$ est strictement positive. L'équivalence "$x \in [1,2]$ est solution de l'équation $x^5 - x - 1 = 0$ si, et seulement si, x est un point fixe de f" est immédiate. $\diamondsuit$

3 - La dérivée $f'(x) = \frac{1}{5}(x+1)^{-\frac{4}{5}}$ est strictement positive ; par suite f est strictement croissante. Comme $f(1) = 2^{\frac{1}{5}} > 1$ et $f(2) = 3^{\frac{1}{5}} < 2$, on a $f([1,2]) \subset [1,2]$. La restriction de f à $[1,2]$ définit donc une application $f : [1,2] \longrightarrow [1,2]$. $\diamondsuit$

4 - L'intervalle $[1,2]$ est une partie fermée de l'espace métrique complet $(\mathbb{R}, d)$. Donc l'espace métrique $([1,2], d)$ est complet. $\diamondsuit$

5 - L'application f est de classe C^1 (dérivable et à dérivée continue) sur $[1,2]$ comme on peut le voir sur sa dérivée $f'(t) = \frac{1}{5(x+1)^{\frac{4}{5}}}$. Soient $x, y \in [1,2]$; en appliquant à f le théorème des accroissements finis sur l'intervalle $[x,y]$, on obtient : $|f(x) - f(y)| \leq$

$\sup_{t\in[1,2]} |f'(t)|\cdot|x-y|$. On voit que $f'(t) = \frac{1}{5(x+1)^{\frac{4}{5}}}$ admet un maximum égal à $k = \frac{1}{5(2^{\frac{4}{5}})} < 1$ en 1. Donc $|f(x) - f(y)| \le k|x-y|$, qui montre que f est contractante. ♢

6 - Si x_0 est un point quelconque de $[1,2]$, la suite (x_n) telle que $x_n = f(x_{n-1})$ pour $n \ge 1$ converge vers x et est telle que :

$$|x - x_n| = |f(x) - f(x_{n-1})| \le k|x - x_{n-1}| \le \cdots \le k^n|x - x_0| \le k^n.$$

7 - Si on veut une valeur approchée de la racine en question de notre équation algébrique $x^5 - x - 1 = 0$ à 10^{-3} près, il suffit de prendre x_n pour n tel que $k^n \le 10^{-3}$. Nous laissons au lecteur le soin de faire lui-même les calculs numériques !

Exercice 3

1 - Soient $x_p, x_q \in E$. Par définition si $x_p = x_q$, on a $d(x_p, x_q) = 0$. Supposons $x_p \ne x_q$; alors $d(x_p, x_q) = 1 + 1/p + 1/q$ qui est non nul. Donc d vérifie la propriété de séparation. La symétrie de d est immédiate. Montrons que l'inégalité du triangle est vérifiée. Soient x_p, x_q et x_r trois éléments de E ; on les supposera deux à deux distincts (autrement la vérification est immédiate). On a :

$$d(x_p, x_q) = 1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \le \left(1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{r}\right) + \left(1 + \frac{1}{r} + \frac{1}{q}\right) = d(x_p, x_r) + d(x_r, x_q).$$

♢

2 - Une suite dans E est en fait une sous-suite $(x_{n_k})_{k\ge1}$ de la suite (x_n). On va la noter $(z_k)_{k\ge1}$ *i.e.*, pour tout $k \ge 1$, $z_k = x_{n_k}$. Supposons que (z_k) est de Cauchy. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $K \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$k, \ell \ge K \Longrightarrow d(z_k, z_\ell) = d(x_{n_k}, x_{n_\ell}) < \varepsilon.$$

Si on prend $\varepsilon < 1$, l'inégalité $d(x_{n_k}, x_{n_\ell}) < \varepsilon$ n'est vérifiée que si $d(x_{n_k}, x_{n_\ell}) = 0$ *i.e.* $z_k = z_\ell = z_K$; la suite (z_k) n'est donc de Cauchy que si elle est stationnaire. Dans ce cas, elle est convergente. En résumé : toute suite de Cauchy dans E est stationnaire, donc convergente. L'espace métrique (E, d) est donc complet. ♢

3 - Soient x_p et x_q deux éléments distincts de E. On a :

$$d(f(x_p), f(x_q)) = d(x_{p+1}, x_{q+1}) = 1 + \frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} < 1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = d(x_p, x_q).$$

Ce qui est exactement la propriété qu'on cherche. ♢

4 - Comme $x_p = x_q$ si, et seulement $p = q$, on a $f(x_n) = x_{n+1} \ne x_n$ pour tout $n \ge 1$. Donc f ne fixe aucun point de E. ♢

5 - La réponse à la question 4 ne contredit nullement le *théorème du point fixe* pour une application contractante dans un espace métrique complet ! En effet (E, d) est complet, f vérifie l'inégalité $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ pour $x \ne y$ mais il n'existe aucun $k \in]0, 1[$ tel que $d(f(x), f(y)) \le kd(x, y)$ car :

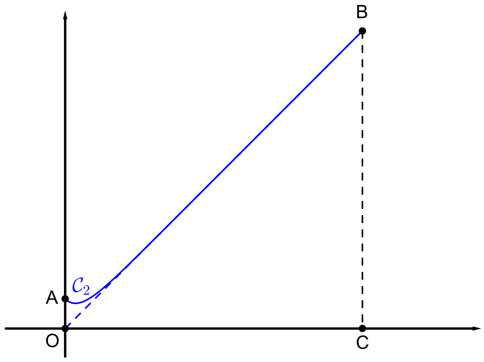
$$\lim_{n\to\infty} \frac{d(f(x_n), f(x_{n+1}))}{d(x_n, x_{n+1})} = 1$$

i.e. f n'est pas une contraction de (E, d). Nous ne sommes donc pas dans les hypothèses d'application du théorème du point fixe ! ♢

Exercice 4

1 - En $x = 0$ la fonction f_n prend la valeur 1 pour tout $n \geq 1$. Donc le graphe $\mathcal{C}_n$ passe par le point A de oordonnées $(0, 1)$. $\diamondsuit$

2 - Le nombre I_n (avec $n \geq 1$) est la mesure de l'aire comprise entre la courbe $\mathcal{C}_n$, les segments OA, OC et BC.



Conjecture : *La suite (I_n) est décroissante. Elle est minorée par l'aire du triangle OBC et tend vers celle-ci.* $\diamondsuit$

3 - On a $I_{n+1} - I_n = \int_0^1 e^{-nx}\left(e^{-x} - 1\right) dx \leq 0$. On en déduit que la suite (I_n) est décroissante ; comme elle est positive (donc minorée par 0) elle est convergente. Soit ℓ sa limite. $\diamondsuit$

4 - On a $I_n = \int_0^1 \left(x + e^{-nx}\right) dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{1}{n}e^{-nx}\right]_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{1-e^{-n}}{n}$. Cette quantité tend vers $\frac{1}{2}$. Donc $\ell = \frac{1}{2}$. $\diamondsuit$

Exercice 5

1 - La fonction $-f$ est la primitive qui s'annule en 0 de $g(x) = \frac{1}{1-x}$; celle-ci admet le développement en série entière :

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$ avec $|x| < 1$; f aura donc un développement en série entière donné comme suit:

$$f(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}.$$

Le rayon de convergence est le même *i.e.* égal à 1. $\diamondsuit$

2 - On calcule la limite du rapport $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ quand n tend vers l'infini qui est précisément le rayon de convergence R de la série $S(x)$. On a :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)(n+4)}{(n+1)(n+3)} = 1.$$

$\diamondsuit$

3 - On a :

$$g(x) = x^3 S(x) = x^3 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+3}}{(n+1)(n+3)}$$

et donc $g'(x) = \frac{x^2}{1} + \frac{x^3}{2} + \cdots + \frac{x^{n+2}}{n+1} + \cdots$. Par suite :

$$\frac{g'(x)}{x} = \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots = -\ln(1-x).$$

D'où :

$$x^3 S(x) = -\int_0^x t\ \ln(1-t)dt.$$

Pour calculer cette intégrale, on procède par intégration par parties en posant $du = t$ et $v = -\ln(1-t)$. Ce qui donne :

$$x^3 S(x) = -\int_0^x t\ \ln(1-t)dt = \left[-\frac{t^2}{2}\ln(1-t) + \frac{1}{2}\ln(1-t) + \frac{t}{2}\left(1+\frac{t}{2}\right)\right]_0^x.$$

On obtient finalement :

$$S(x) = \frac{1}{2x^3}\left((1-x^2)\ln(1-x) + x + \frac{x^2}{2}\right).$$

$\diamondsuit$

Exercice 6

1 - Si une telle solution existe, elle s'écrit $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ où $x \in]-R, +R[$ avec $R > 0$, rayon de convergence de cette série entière. Pour tout réel ρ tel que $0 < \rho < R$, la série converge uniformément sur l'intervalle compact $[-\rho, +\rho]$; on peut donc dériver sous le signe somme. On aura alors :

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \qquad \text{et} \qquad y''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}.$$

Ce qui donne :

$$xy''(x) + 3y'(x) - 4x^3 y(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} 3n a_n x^{n-1} - \sum_{n=4}^{\infty} 4a_{n-4} x^{n-1}$$

c'est-à-dire :

$$xy''(x) + 3y'(x) - 4x^3 y(x) = 3a_1 + 8a_2 x + 15a_3 x^2 + \sum_{n=4}^{\infty} \left(n(n+2)a_n - 4a_{n-4}\right) x^{n-1}.$$

Comme $xy''(x) + 3y'(x) - 4x^3 y(x) = 0$ pour tout $x \in]-R, +R[$, on doit avoir :

$$a_1 = a_2 = a_3 = 0$$

et

$$n(n+2)a_n - 4a_{n-4} = 0 \ \text{ pour } \ n \geq 4.$$

D'autre part, la condition initiale $y(0) = 1$ donne $a_0 = 1$. Finalement, les seuls coefficients non nuls de la série sont ceux du type a_{4k} avec $k \in \mathbb{N}$; ceux-là vérifient la relation :

$$a_{4k} = \frac{4a_{4(k-1)}}{4k(4k+2)} = \frac{a_{4(k-1)}}{2k(2k+1)} \text{ pour } k \geq 1.$$

Après calcul et simplification, on obtient :

$$a_{4k} = \frac{a_0}{(2k+1)!} = \frac{1}{(2k+1)!}.$$

D'où :

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{4k}}{(2k+1)!}.$$

Calculons d'abord le rayon de convergence R_0 de la série $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{(2k+1)!}$:

$$R_0 = \lim_{k\to\infty} = \lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{a_{k+1}} = \frac{(2k+3)!}{(2k+1)!} = \lim_{k\to\infty} (2k+2)(2k+3) = +\infty.$$

On en déduit que le rayon de convergence de la série $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{4k}}{(2k+1)!}$ est aussi infini. Il y a donc une seule solution y de l'équation différentielle étudiée qui se développe en série entière et qui vérifie $y(0) = 1$. ♢

2 - On a :

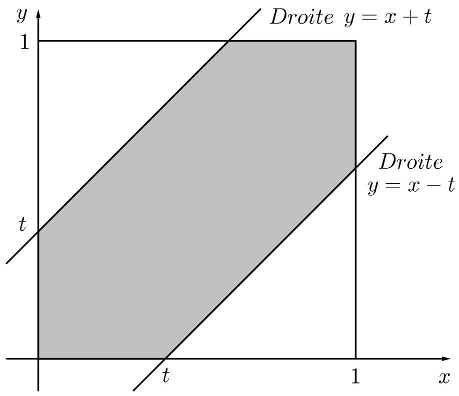
$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{4k}}{(2k+1)!} = \frac{1}{x^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x^2)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{\text{sh } x^2}{x^2}.$$

♢

Exercice 7

1 - La variable aléatoire T désigne le temps d'attente du premier ami arrivé. Comme elle est positive, elle s'écrit $T = |X - Y|$ ♢

2 - Les variables aléatoires X et Y prennent leurs valeurs dans l'intervalle $[0, 1]$. Un événement élémentaire est représenté par un point du plan de coordonnées (x, y) où $x, y \in [0, 1]$. L'événement $A = \{T < t\}$ est donc l'ensemble des points du plan dont les coordonnées vérifient simultanément : $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $x - y < t$ et $y - x < t$ (*cf.* dessin ci-dessous).



Comme les variables X et Y suivent des lois unifomes, la probabilité de l'événement A est l'aire de la partie grisée sur le dessin ci-dessus, c'est-à-dire :

$$p(A) = 1 - (1-t)^2 = t(2-t) \qquad \text{pour} \qquad t \in [0,1].$$

La fonction de répartition de la variable aléatoire T est donnée par $F(t) = p(T \leq t)$. Pour $t < 0$, l'ensemble A est vide et donc $F(t) = 0$. Pour $t > 1$, l'ensemble A est l'espace fondamental tout entier, donc $F(t) = 1$. En définitive :

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ t(2-t) & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ 1 & \text{si } t > 0. \end{cases}$$

La fonction F est continue ; elle est dérivable sauf en 0. On peut donc prendre comme densité de probabilité la fonction :

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 2(1-t) & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{si } t > 0. \end{cases}$$

<u>Remarque</u> : La densité de probabilité n'est pas unique. Choisir comme dérivée en 0 la dérivée à gauche 0 ou la dérivée à droite 2 ne change en rien la fonction de répartition F.
$\diamondsuit$

3 - L'espérance mathématique de T est donnée par l'intégrale :

$$E(T) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt = \int_0^1 2t(1-t) dt = \left[t^2 - \frac{2}{3} t^3 \right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Le moment d'ordre 2 de T n'est rien d'autre que la variance $\mathrm{Var}(T)$ qui est égale à :

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(T) &= E\left(\{T - E(T)\}^2\right) \\ &= \int_0^1 2\left(t - \frac{1}{3}\right)^2 (1-t) dt \\ &= \frac{2}{9} \int_0^1 (3t-1)^2 (1-t) dt \\ &= \frac{2}{9} \left[-\frac{9}{4} t^4 + \frac{15}{3} t^3 - \frac{7}{2} t^2 + t \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{18}. \end{aligned}$$

$\diamondsuit$

4 - La probabilité pour que le rendez-vous ait lieu est celle de l'événement $\left\{T < \frac{1}{2}\right\}$. Elle est égale à :

$$F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(2 - \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}.$$

$\diamondsuit$

MEÉF 1 Second degré - Mathématiques
DS3 - 19 novembre 2014
Analyse et probabilités

Exercice 1

Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 sur I. On suppose que la dérivée première f' et la dérivée seconde f'' sont strictement positives sur un intervalle compact $[a, b] \subset I$ (avec $a < b$) et $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$.

1 - Montrer que l'équation $f(x) = 0$ a une solution unique α dans l'intervalle ouvert $]a, b[$.

2 - En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que, pour tout $x \in [a, b]$, on a :

$$|\alpha - x| \leq \frac{|f(x)|}{f'(a)}. \tag{1}$$

Soient (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, x, y) et Δ_0 la tangente à (C) au point d'abscisse $x_0 = b$. On note M_1 le point d'intersection de l'axe Ox avec Δ_0.

3 - Déterminer l'équation cartésienne de Δ_0 ainsi que l'abscisse x_1 du point M_1.

On construit une suite de réels $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et une suite de droites $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :

- $x_0 = b$;
- pour $n \in \mathbb{N}$, Δ_n est la tangente à (C) au point d'abscisse x_n ;
- pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, x_n est l'abscisse du point M_n, intersection de l'axe Ox avec Δ_{n-1}.

4 - Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \tag{2}$$

5 - Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

6 - Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. On notera θ sa limite.

7 - Montrer que θ est égale à la solution $\alpha \in]a, b[$ de l'équation $f(x) = 0$ (question 1).

Application

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = x^3 + x - 1$.

8 - Étudier et représenter graphiquement cette fonction.

9 - Calculer $f\left(\frac{1}{2}\right)$ et $f(1)$, montrer que f' et f'' sont strictement positives sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ et que l'équation $f(x) = 0$ a une solution unique $\alpha \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

10 - Utiliser la première partie (et surtout l'inégalité (1)) pour donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

Exercice 2

Un nombre réel θ est dit *algébrique* s'il existe un polynôme à coefficients entiers P tel que $P(\theta) = 0$. Parmi de tels polynômes, il en existe un, unique, de degré minimal n et dont les coefficients sont premiers entre eux ; on l'appelle *polynôme minimal primitif* de θ ; il est forcément irréductible. L'entier n est appelé *degré* de θ. Un réel non algébrique est dit *transcendant.*

1 - Pourquoi un rationnel est-il algébrique ? Montrer que $\theta = \sqrt{1 + 2\sqrt{5 + \sqrt{3}}}$ est algébrique.

L'objet de cet exercice est de montrer si θ est un irrationnel algébrique de degré n alors il existe une constante $M > 0$ telle que :

$$(*) \qquad \left|\theta - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{M}{q^n} \qquad \text{pour tout } p \in \mathbb{Z} \text{ et tout } q \in \mathbb{N}^*.$$

On note P le polynôme minimal primitif, n son degré et J_θ l'intervalle $[\theta - 1, \theta + 1]$. On pose $M' = \sup_{x \in J_\theta} |P'(x)|$ et $M = \inf\left\{1, \frac{1}{M'}\right\}$.

2 - Montrer que pour $\frac{p}{q} \notin J_\theta$ l'inégalité $(*)$ est safisfaite.

À chaque fois qu'on sonsidérera le rationnel $\frac{p}{q}$ il sera tel que $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$. Dans toute la suite, on supposera $\frac{p}{q} \in J_\theta$ *i.e.* $|\theta - \frac{p}{q}| < 1$.

3 - En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que :

$$\left|P\left(\frac{p}{q}\right)\right| \leq M' \left|\theta - \frac{p}{q}\right|.$$

4 - Dire pourquoi on a $P\left(\frac{p}{q}\right) \neq 0$. Montrer qu'en fait $\left|P\left(\frac{p}{q}\right)\right| = \frac{m}{q^n}$ où m est un entier strictement positif.

5 - Déduire de ce qui précède l'inégalité cherchée, c'est-à-dire : $\left|\theta - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{M}{q^n}$.

Pour la culture : Les nombres irrationnels θ vérifiant $(*)$ sont dits *diophantiens.* Ce sont des nombres "très mal approchés" par les rationnels.

Exercice 3

Alors que monsieur Hasard s'habillait pour aller à une réception une panne d'électricité se produit. Sa chambre étant dans une obscurité totale, il se dirige vers le tiroir où étaient jetés dans le désordre ses chaussettes (10 noires et 10 vertes) et ses gants (2 paires de noirs et 4 paires de verts) ; il y prit 2 chaussettes et 2 gants.

1 - Expliciter l'événement A="Monsieur Hasard est correctement habillé" et calculer ensuite sa probabilité. (Voir la définition de *correctement habillé* en fin d'énoncé.)

2 - Quelle est la probabilité pour que les chaussettes et les gants pris par monsieur Hasard soient de la même couleur ?

3 - Sachant qu'il porte des chaussettes et des gants de la même couleur, quelle est la probabilité pour que cette couleur soit noire ?

Définition. *Monsieur Hasard est correctement habillé s'il porte 2 gants de la même couleur dont l'un est droit, l'autre est gauche et 2 chaussettes de la même couleur.*

CORRIGÉ

Exercice 1

1 - La fonction $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue et vérifie $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$; comme $[a,b]$ est connexe, elle prend nécessairement la valeur 0 *i.e.* il existe $\alpha \in]a,b[$ tel que $f(\alpha) = 0$. Comme f est en plus strictement croissante, ce α est unique.

2 - La fonction $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^1 ; d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]a,b[$ tel que $f(x) - f(\alpha) = f'(c)(x-\alpha)$ *i.e.* (tenant compte de $f(\alpha) = 0$) $f(x) = f'(c)(x-\alpha)$. Comme $f'' > 0$, f' est strictement croissante sur $[a,b]$; en plus f' est strictement positive sur $[a,b]$; d'où $f'(c) > f'(a) > 0$. Ce qui nous donne l'inégalité cherchée :

$$|\alpha - x| \leq \frac{|f(x)|}{f'(a)}. \tag{1}$$

3 - On cherche l'abscisse x_1 du point M_1. La droite Δ_0 a une pente égale à $f'(x_0) = f'(b)$ et passe par le point de coordonnées $(x_0, f(x_0))$. Elle a donc pour équation $Y = (X - x_0)f'(x_0) + f(x_0)$. L'abscisse x_1 de l'intersection de Δ_0 avec l'axe Ox est obtenue en faisant $Y = 0$; ce qui donne $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$.

4 - Pour déterminer x_{n+1} à partir de x_n, on raisonne exactement de la même manière en remplaçant x_0 par x_n, la droite Δ_0 par Δ_n et le point M_1 par M_{n+1}. La droite Δ_n a ainsi pour équation $Y = (X - x_n)f'(x_n) + f(x_n)$. Par conséquent le point M_{n+1} a pour abscisse :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \tag{2}$$

5 - Sur l'intervalle $[a,b]$, $f'' > 0$ et donc f y est strictement convexe (*i.e.* vérifie l'inégalité $f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$ pour tous $x, y \in [a,b]$ et tout $\lambda \in [0,1]$). Par suite, la pente de la droite passant par les points $(\alpha, 0)$ et $(b, f(b))$ est strictement plus petite que $f'(b)$ qui est celle de la tangente Δ_0 à la courbe au point $(b, f(b))$. Donc $x_1 > \alpha$. Le même argument permet de montrer que $x_n > \alpha$ pour tout $n \geq 0$. On a donc $f(x_n) > 0$ pour tout n ; comme en plus $f'(x_n) > 0$, on en déduit $x_{n+1} - x_n = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} < 0$ *i.e.* la suite (x_n) est décroissante.

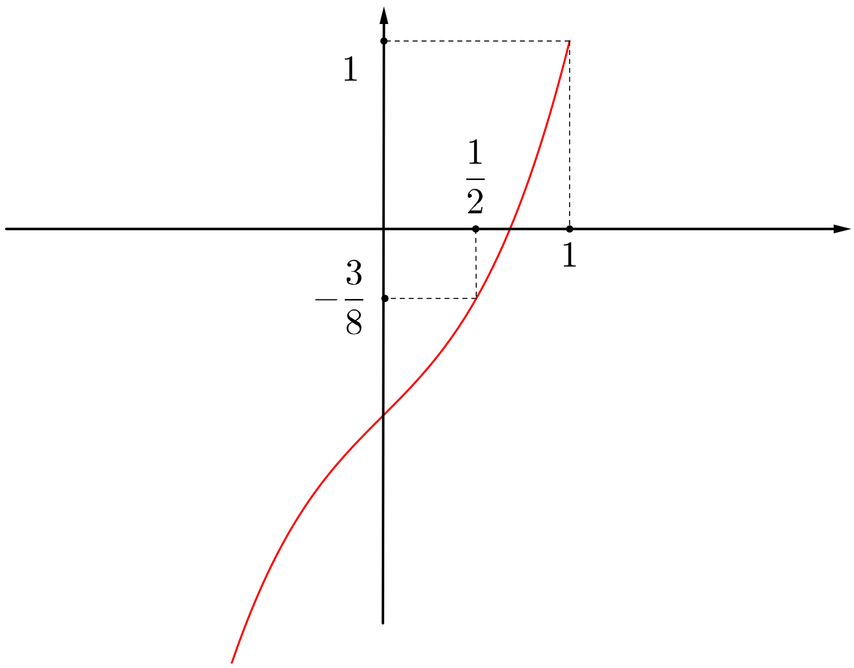
6 - La suite $(x_n)_{n\geq 0}$ étant minorée par α et décroissante, elle converge vers un $\theta \in [\alpha, b]$.

7 - La suite $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers θ et f et f' sont continues avec f' constamment non nulle sur $[a,b]$; on a donc :

$$\frac{f(\theta)}{f'(\theta)} = \frac{f\left(\lim\limits_{n\to+\infty} x_n\right)}{f'\left(\lim\limits_{n\to+\infty} x_n\right)} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right) = \lim_{n\to+\infty}(x_n - x_{n+1}) = 0.$$

Ceci montre que $f(\theta) = 0$ et donc $\theta = \alpha$ puisque α est l'unique solution de l'équation $f(x) = 0$ sur l'intervalle $[a, b]$.

8 - La fonction f est une fonction polynôme, donc définie sur $\mathbb{R}$; elle y est de classe C^∞. Sa dérivée première $f'(x) = 3x^2 + 1$ est strictement positive, donc f est strictement croissante. Elle tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers $-\infty$ et vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$. Le graphe de f est ci-dessous.



9 - On sait déjà que $f'(x) = 3x^2 + 1$ est strictement positive sur tout $\mathbb{R}$. On a $f''(x) = 6x$ qui est positive sur $\mathbb{R}_+$ et donc strictement positive sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Comme $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{8}$ et $f(1) = 1$, f s'annule une seule fois en un point $\alpha \in [1/2, 1]$.

10 - Il s'agit de déterminer x_n tel que $|\alpha - x_n| \leq 10^{-2}$. D'après l'inégalité (1), il suffit d'avoir $\frac{|f(x_n)|}{f'(a)} \leq \frac{1}{100}$, c'est-à-dire $f(x_n) \leq \frac{7}{400}$. On initie la suite (x_n) en prenant par exemple $x_0 = \frac{2}{3}$ (c'est le plus proche de α d'après le dessin) et on calcule les termes x_n qui suivent à l'aide de la relation (2) jusqu'au rang n qui convient. Le reste (les calculs nmériques) est laissé au lecteur.

Exercice 2

1 - Si θ est rationnel, on peut l'écrire $\theta = \frac{p}{q}$ avec p et q premiers entre eux. Il est alors clair que $P(X) = qX - p$ est un polynôme à coefficients entiers dont θ est racine ; θ est donc algébrique de degré 1.

Comme $\theta = \sqrt{1 + 2\sqrt{5 + \sqrt{3}}}$, on a $\theta^2 - 1 = 2\sqrt{5 + \sqrt{3}}$; d'où $(\theta^2 - 1)^2 - 20 = 4\sqrt{3}$ et finalement $((\theta^2 - 1)^2 - 20)^2 - 48 = 0$. Le nombre θ est donc racine du polynôme à coefficients entiers $((X^2 - 1)^2 - 20)^2 - 48$; par suite il est algébrique.

2 - $\frac{p}{q} \notin J_\theta$ signifie $\left|\theta - \frac{p}{q}\right| \geq 1$. Comme $M = \inf\{1, \frac{1}{M'}\}$, on a $\left|\theta - \frac{p}{q}\right| \geq M$ et donc a fortiori $\left|\theta - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{M}{q^n}$ puisque $q \geq 1$.

3 - On applique à P le théorème des accroissements finis sur l'intervalle $[\theta, \frac{p}{q}]$ (ou $[\frac{p}{q}, \theta]$) : il existe $c \in [\theta, \frac{p}{q}]$ tel que $\left|P(\theta) - P\left(\frac{p}{q}\right)\right| = |P'(c)| \cdot \left|\theta - \frac{p}{q}\right|$. Mais comme $P(\theta) = 0$ et que $|P'(c)| \leq M'$, l'égalité devient :

$$\left|P\left(\frac{p}{q}\right)\right| \leq M' \left|\theta - \frac{p}{q}\right|.$$

4 - Si $P\left(\frac{p}{q}\right)$ était égal à 0, le polynôme P serait réductible sur $\mathbb{Q}$, donc sur $\mathbb{Z}$, ce qui n'est pas le cas. Écrivons :

$$P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} \cdots + a_1 X + a_0$$

avec $a_0, a_1, \cdots, a_n$ des entiers premiers entre eux et $a_n \neq 0$. Alors :

$$P\left(\frac{p}{q}\right) = a_n \left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1} \left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \cdots + a_1 \left(\frac{p}{q}\right) + a_0.$$

En réduisant au même dénominateur q^n, on obtient :

$$P\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \cdots + p q^{n-1} + a_0 q^n}{q^n}.$$

Comme $P\left(\frac{p}{q}\right) \neq 0$, l'entier $a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \cdots + p q^{n-1} + a_0 q^n$ est non nul ; donc sa valeur absolue m ne l'est pas non plus *i.e.* $m \geq 1$. L'inégalité de la question 3 nous donne alors :

$$\left|\theta - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{1}{M'} \cdot \frac{m}{q^n} \geq \frac{M}{q^n}$$

qui est l'inégalité qu'on cherche à établir.

Exercice 3

Pour le résultat d'un tirage suivant le cas on adoptera les notations suivantes : $D = \{\text{gant droit}\}$, $G = \{\text{gant gauche}\}$, $V = \{\text{couleur verte}\}$ et $N = \{\text{couleur noire}\}$. On notera $k = 1$ ou 2 l'ordre du tirage.

1 - L'événement $A = \{\text{monsieur Hasard est correctement habillé}\}$ signifie qu'il a pris deux gants de la même couleur dont l'un est droit et l'autre est gauche et deux chaussettes de la même couleur ; A s'écrit :

$$A = \{A_1 \cup A_2\} \bigcap \{A'_1 \cup A'_2 \cup A''_1 \cup A''_2\}$$

où :

$$A_1 = CN_1 \cap CN_2, \qquad A_2 = CV_1 \cap CV_2 \qquad A'_1 = DN_1 \cap GN_2$$
$$A'_2 = DV_1 \cap GV_2 \qquad A''_1 = GN_1 \cap DN_2 \qquad A''_2 = GV_1 \cap DV_2.$$

Explicitons :

$A_1 = CN_1 \cap CN_2 = \{\text{chaussette noire au premier tirage et chaussette noire au deuxième}\}$

$A_2 = CV_1 \cap CV_2 = \{$chaussette verte au premier tirage et chaussette verte au deuxième$\}$

$A'_1 = DN_1 \cap GN_2 = \{$gant droit noir au premier tirage et gant gauche noir au deuxième$\}$

$A'_2 = DV_1 \cap GV_2 = \{$gant droit vert au premier tirage et gant gauche vert au deuxième$\}$

$A''_1 = GN_1 \cap DN_2 = \{$gant gauche noir au premier tirage et gant droit noir au deuxième$\}$

$A''_2 = GV_1 \cap DV_2 = \{$gant gauche vert au premier tirage et gant droit vert au deuxième$\}$.

Toutes ces 2-intersections qui composent l'événement A sont des événements incompatibles et indépendants. On a donc :

$$P(A) = \{P(A_1) + P(A_2)\} \cdot \{P(A'_1) + P(A'_2) + P(A''_1) + P(A''_2)\}\,.$$

Expliquons par exemple comment on calcule $P(A'_2)$. On a 4 possibilités sur 12 pour choisir un gant droit vert. Il restera donc 11 gants parmi lesquels il y a 4 gants gauches verts. Ce qui donne $P(A'_2) = \frac{4}{12} \cdot \frac{4}{11}$.

Un raisonnement analogue permet de calculer les probabilités des autres événements qui composent A. On obtient finalement :

$$\begin{aligned} P(A) &= \left(\frac{10}{20} \cdot \frac{9}{19} + \frac{10}{20} \cdot \frac{9}{19}\right) \cdot \left(\frac{2}{12} \cdot \frac{2}{11} + \frac{4}{12} \cdot \frac{4}{11} + \frac{2}{12} \cdot \frac{2}{11} + \frac{4}{12} \cdot \frac{4}{11}\right) \\ &= \frac{30}{209} \\ &= 0,1435. \end{aligned}$$

2 - Notons B l'événement $\{$les chaussettes et les gants sont de la même couleur$\}$. Il s'écrit :

$$B = \{A_1 \cap (A'_1 \cup A''_1)\} \bigcup \{A_2 \cap (A'_2 \cup A''_2)\}\,.$$

Donc :

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A_1) \cdot \{P(A'_1) + P(A''_1)\} + P(A_2) \cdot \{P(A'_2) + P(A''_2)\} \\ &= \left(\frac{10}{20} \cdot \frac{9}{19}\right) \cdot \left(\frac{2}{12} \cdot \frac{2}{11} + \frac{2}{12} \cdot \frac{2}{11}\right) + \left(\frac{10}{20} \cdot \frac{9}{19}\right) \cdot \left(\frac{4}{12} \cdot \frac{4}{11} + \frac{4}{12} \cdot \frac{4}{11}\right) \\ &= \frac{15}{209} \\ &= 0,0717. \end{aligned}$$

3 - Soit N l'événement $\{$monsieur Hasard porte des gants et des chaussettes noirs$\}$. On a $P(N/B) = \frac{P(N \cap B)}{P(B)}$. Mais :

$$N \cap B = A_1 \cap \{A'_1 \cup A''_1\}\,.$$

D'où :

$$\begin{aligned}
P(N/B) &= \frac{P(A_1)\cdot(\{P(A_1')+P(A_1'')\}}{P(B)} \\
&= \frac{\left\{\frac{10}{20}\cdot\frac{9}{19}\right\}\cdot\left\{\frac{2}{12}\cdot\frac{2}{11}+\frac{2}{12}\cdot\frac{2}{11}\right\}}{\frac{15}{209}} \\
&= \frac{\frac{3}{209}}{\frac{15}{209}} \\
&= \frac{3}{15} \\
&= 0,2.
\end{aligned}$$

MEÉF 1 Second degré - Mathématiques
DS4 - 5 janvier 2015
Analyse et probabilités

On munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ de son produit scalaire usuel $\langle (x,y),(x',y')\rangle = xx' + yy'$ pour lequel le repère canonique $(O; e_1, e_2)$ ($O = (0,0)$, $e_1 = (1,0)$ et $e_2 = (0,1)$) est orthonormé. La norme $||\overrightarrow{MN}||$ d'un vecteur $\overrightarrow{MN}$ (ou la distance entre les points M et N) sera notée simplement MN.

Exercice 1

Pour un point M de $\mathbb{R}^2$ de coordonnées (x,y), on note M' le point de coordonnées (x',y') données comme suit :

$$(*) \qquad \begin{cases} x' = \frac{-x}{1-x} \\ \\ y' = \frac{y}{1-x} \end{cases}$$

1 - Montrer que les formules $(*)$ définissent une bijection f d'un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ (qu'on déterminera) sur lui-même et donner l'expression explicite de f^{-1}.

2 - Quels sont les points invariants de f ?

<u>Convention</u>. Dans toute la suite de l'exercice, on entendra par droite, cercle, conique... de Ω, la trace d'une droite, d'un cercle, d'une conique... de $\mathbb{R}^2$ sur l'ouvert Ω. (Ce sera donc un morceau de droite, d'un cercle, d'une conique...)

3 - La figure Δ' transformée par f d'une droite Δ est-elle une droite ? Lorsque elle l'est, peut-elle avoir la même direction que Δ ?

4 - Quelle est l'équation de la figure Γ' transformée par f du cercle Γ de centre l'origine O et de rayon $\rho = 1$? Quelle est la nature géométrique de Γ' ?

5 - Soit $\mathcal{C}$ la courbe d'équation $x^2 + ky^2 - 2\alpha x - \beta^2 = 0$ où k, α, β sont des nombres réels. Quelles relations doivent satisfaire k, α et β pour que la courbe $\mathcal{C}$ soit globalement invariante par f ?

Pour tout $k \in \mathbb{R}$, on note $\mathcal{C}_k$ la courbe (conique ou ensemble de deux droites) de Ω ayant pour équation $x^2 + ky^2 + 4x - 4 = 0$. C'est la courbe $\mathcal{C}$ en prenant $\alpha = -2$ et $\beta = 2$.

6 - Montrer que toutes les courbes $\mathcal{C}_k$ ont deux axes de symétrie en commun Σ_1 et Σ_2 et un même centre de symétrie ω.

7 - Tracer les courbes $\mathcal{C}_0$, $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_{-1}$, $\mathcal{C}_4$ et préciser leurs natures respectives.

8 - Tracer la courbe γ d'équation $y = \sqrt{-x^2 + 6x + 7}$ (là où elle est définie bien sûr). Quelle est sa transformée γ' par f ?

Exercice 2

Soient $\mathcal{Q}$ l'ensemble de tous les quadrilatères $q = A_1A_2A_3A_4$ du plan et $\mathcal{Q}_0(L)$ celui des quadrilatères de périmètre égal à L. On note $\mathcal{A} : \mathcal{Q} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ la fonction qui à q associe son aire $\mathcal{A}(q)$. L'objet de l'exercice est de décrire les quadrilatères $q \in \mathcal{Q}_0(L)$ dont l'aire $\mathcal{A}(q)$ est maximale. Pour les besoins des constructions, un segment de longueur $L > 0$ est donné. Quitte à appliquer une isométrie au quadrilatère $q = A_1A_2A_3A_4$, on peut supposer que $A_1 = O$ et que A_2 est sur l'axe des abscisses.

Partie I

1 - Montrer que l'ensemble $\mathcal{Q}_0(L)$ n'est pas vide en donnant des exemples explicites de quadrilatères ayant un périmètre égal à L. Montrer que, pour tout $q \in \mathcal{Q}_0(L)$, il existe $q' \in \mathcal{Q}_0(L)$ convexe tel que $\mathcal{A}(q') \geq \mathcal{A}(q)$.

On peut donc se restreindre à la partie $\mathcal{Q}(L)$ de $\mathcal{Q}_0(L)$ des quadrilatères convexes.

2 - Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que l'ensemble $\mathcal{Q}(L)$ puisse être considéré comme une partie fermée de l'espace euclidien $\mathbb{R}^N$.

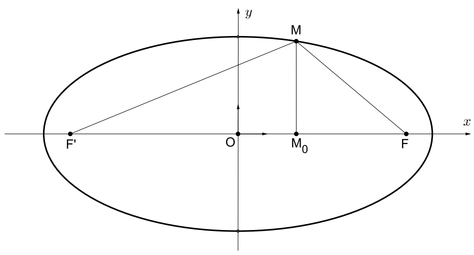
3 - Montrer que l'ensemble $\mathcal{Q}(L)$ est un compact de l'espace euclidien $\mathbb{R}^N$. Montrer que la fonction $\mathcal{A} : \mathcal{Q}(L) \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est continue et en déduire qu'il existe $q_0 \in \mathcal{Q}(L)$ tel que : $\sup\limits_{q \in \mathcal{Q}(L)} \mathcal{A}(q) = \mathcal{A}(q_0)$.

Dans l'ensemble des quadrilatères à prérimètre prescrit, il en existe donc au moins un dont l'aire est maximale. Nous allons voir quelle tête il peut avoir !

Partie II

Soient a et c deux réels strictement positifs tels que $a > c$; on pose $b = \sqrt{a^2 - c^2}$. On note F et F' les deux points du plan de coordonnées respectives $(c, 0)$ et $(-c, 0)$. On appelle *ellipse* de *foyers* F et F' et de *grand axe* $2a$ l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M tels que $MF + MF' = 2a$.

4 - Montrer que l'ensemble $\mathcal{E}$ est non vide et donner un procédé de construction de ses points. Les axes de coordonnés sont des axes de symétrie. (La droite (FF') est l'*axe focal* de $\mathcal{E}$.)



5 - Donner l'équation cartésienne de l'ensemble $\mathcal{E}$ et montrer que c'est une courbe qui admet une tangente en chacun de ses points.

6 - Pour quels points M sur l'ellipse $\mathcal{E}$ l'aire du triangle MFF' est-elle maximale ?

Partie III

7 - Soit ABC un triangle dont le périmètre $p > 0$ et la base $BC = \alpha > 0$ sont prescrits. Comment choisir ce triangle de façon à ce que son aire soit maximale ?

8 - Soit ABC un triangle dont le périmètre $p > 0$ est prescrit. Comment choisir ce triangle de façon à ce que son aire soit maximale ?

9 - Soit $q = A_1A_2A_3A_4$ un quadrilatère dont le périmètre $L > 0$ est prescrit. Comment choisir ce quadrilatère de façon à ce que son aire $\mathcal{A}(q)$ soit maximale ?

Exercice 3

Soit X une variable aléatoire continue dont la loi de probabilité est donnée par la densité f sur l'intervalle $J = [a, b]$ (où a et b sont des réels tels que $a < b$) :

$$f(x) = \begin{cases} k & \text{si } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

k étant une constante réelle strictement positive. On dit que X suit une *loi uniforme* sur l'intervalle J.

1 - Calculer la valeur de k.

2 - Calculer l'espérance mathématique $\mu = E(X)$ de X ainsi que son écart-type $\sigma(X)$.

3 - Déterminer la fonction de répartition F de X.

Exercice 4

On note $\mathbb{K}$ le corps à 5 éléments $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}\}$. On pose $\Omega = \mathbb{K} \times \mathbb{K}$ qu'on munit de la tribu $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ et de la probabilité $p(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$ pour tout $A \in \mathcal{A}$ (la notation $|U|$ désigne le cardinal de $U \in \mathcal{A}$). Soient E, F les parties de Ω, ensembles des solutions $(x, y) \in \Omega$ respectivement des systèmes linéaires :

$$\begin{cases} \overline{2}x + \overline{1}y = \overline{0} \\ \overline{1}x + \overline{3}y = \overline{0} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} \overline{1}x + \overline{1}y = \overline{0} \\ \overline{1}x + \overline{2}y = \overline{0}. \end{cases}$$

Calculer les probabilités $p(E)$ et $p(F)$ des événements E et F.

CORRIGÉ

Exercice 1

1 - L'application f est définie sur l'ouvert $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 1\}$. Soient $(x', y') \in \mathbb{R}^2$ et cherchons (x, y) dans $\mathbb{R}^2$ tel que $x' = \frac{-x}{1-x}$ et $y' = \frac{y}{1-x}$. La première égalité nous donne $(1 - x')x = -x$, ce qui exige $x' \neq 1$; et dans ce cas $x = \frac{-x'}{1-x'}$. Cette quantité injectée dans la deuxième équation donne $y = \frac{y'}{1-x'}$. Finalement, l'ouvert cherché est $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 1\}$ et f en est une involution, c'est-à-dire $f^{-1} = f$.

2 - Un point invariant (x, y) de f vérifie $x = \frac{-x}{1-x}$ et $y = \frac{y}{1-x}$; ce qui nous donne $x(x - 2) = 0$ et $xy = 0$. Les solutions sont donc $(2, 0)$ ou $(0, y)$ avec y arbitraire dans $\mathbb{R}$.

3 - Une droite Δ de Ω est définie par $ax + by + c = 0$ avec $x \neq 1$ et l'un au des nombres a, b est non nul ; et comme $x \neq 1$, on ne peut pas avoir à la fois $b = 0$ et $a = -c$. Sa transformée par f est définie par l'équation :

$$a\left(\frac{-x'}{1-x'}\right) + b\left(\frac{y'}{1-x'}\right) + c = 0 \quad \text{et} \quad x' \neq 1.$$

Comme $x' \neq 1$, on peut multiplier les deux membres de la première relation par $1 - x'$; on obtient $-(a + c)x' + by' + c = 0$. La transformée de Δ par f est donc une droite Δ' (car on ne peut pas avoir à la fois $b = 0$ et $a = -c$). Les deux droites Δ et Δ' auront donc la même dirction si, et seulement si, $-a - c = a$, c'est-à-dire $c = 2a$.

4 - Le cercle Γ de centre l'origine et de rayon 1 dans Ω a pour équation $x^2 + y^2 = 1$ avec $x \neq 1$. Sa transformée Γ' par f a pour équation :

$$\left(\frac{-x'}{1-x'}\right)^2 + \left(\frac{y'}{1-x'}\right)^2 = 1 \quad \text{et} \quad x' \neq 1.$$

Cette relation se réduit à $x' = -\frac{y'^2}{2} + \frac{1}{2}$ avec $x' \neq 1$; Γ' est donc la parabole de sommet $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ et d'axe la droite d'équation $y' = 0$.

5 - Pour que la courbe $\mathcal{C}$ soit globalement invariante par la transformation f il faut, et il suffit, que pour tout point $(x, y) \in \mathcal{C}$, son transformé (x', y') par f vérifie l'équation l'équation $x'^2 + ky'^2 - 2\alpha x' - \beta^2 = 0$. Mais :

$$\left(\frac{-x'}{1-x'}\right)^2 + k\left(\frac{y'}{1-x'}\right)^2 - 2\alpha\left(\frac{-x'}{1-x'}\right) - \beta^2 = 0$$

c'est-à-dire, après multiplication par $(1-x')^2$, $(1-2\alpha-\beta^2)x'^2 + ky'^2 + 2(\alpha+\beta^2)x' - \beta^2 = 0$. Comme le coefficient de y'^2 est le même, pour que (x', y') appartienne lui aussi à $\mathcal{C}$ on doit avoir $(1 - 2\alpha - \beta^2) = 1$ et $2(\alpha + \beta^2) = -2\alpha$; ça se réduit finalement à $2\alpha + \beta^2 = 0$.

6 - L'expression x^2+ky^2+4x-4 s'écrit aussi $(x+2)^2+ky^2-8$. Elle est invariante par les transformations $\sigma_1 : (x,y) \longmapsto (x,-y)$ et $\sigma_:(x,y) \longmapsto (-x-4,y)$ qui sont des réflexions d'axes respectifs l'axe des abscisses Δ_1 et la droite Δ_2 d'équation $x=-2$. Les droites Δ_1 et Δ_2 sont donc des axes de symétrie pour toute courbe $\mathcal{C}_k$ et comme elles sont perpendiculaires, leur point d'intersection $(-2,0)$ est un centre de symétrie de toute courbe $\mathcal{C}_k$.

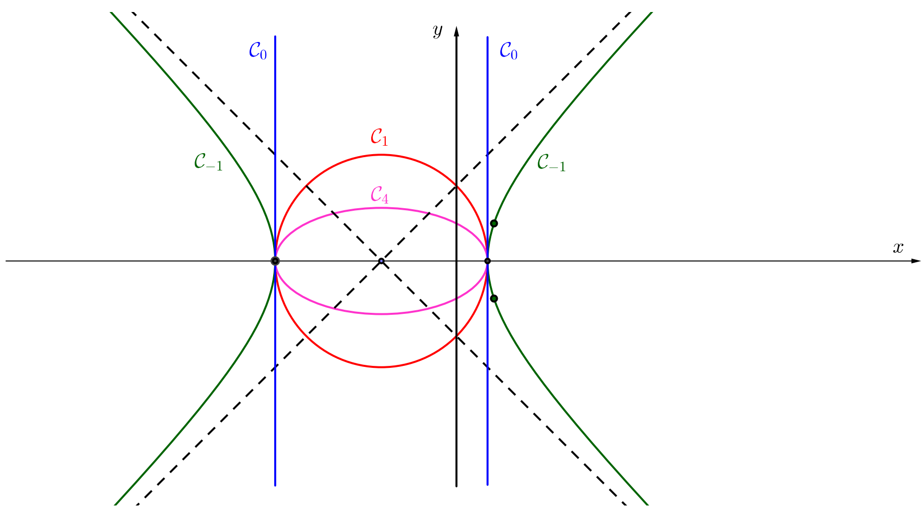
7 - Les courbes $\mathcal{C}_0$, $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_{-1}$ et $\mathcal{C}_4$.

(i) $\mathcal{C}_0$ a pour équation $(x+2)^2-8=0$; c'est donc la réunion des deux droites d'équations respectives $x=-2(\sqrt{2}+1)$ et $x=2(\sqrt{2}-1)$.

(ii) $\mathcal{C}_1$ a pour équation $(x+2)^2+y^2-8=0$; c'est donc le cercle de centre $(-2,0)$ et de rayon $\rho=2\sqrt{2}$.

(iii) $\mathcal{C}_{-1}$ a pour équation $\frac{(x+2)^2}{8}-\frac{y^2}{8}=1$; c'est donc l'hyperbole équilatère de centre $(-2,0)$ mais privée des points $(1,1)$ et $(1,-1)$ pour rester dans l'ouvert Ω.

(iv) $\mathcal{C}_4$ a pour équation $\frac{(x+2)^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$; c'est donc l'ellipse de centre $(-2,0)$ et de grand axe $2a=4\sqrt{2}$.

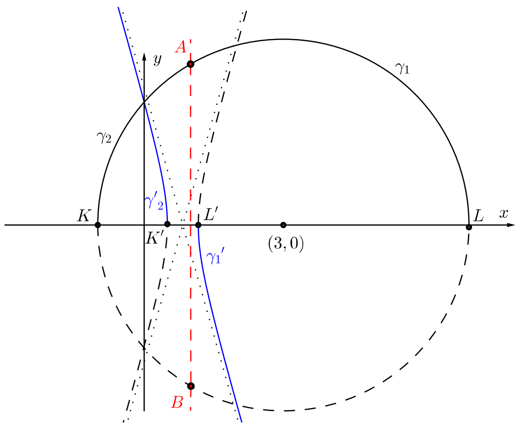


8 - On se réfère à la figure ci-dessous. La courbe γ est le demi-cercle d'équation $(x-3)^2+y^2=16$ avec $y \geq 0$; ses extrémités sont les points K et L. Pour lui appliquer f il faut le priver du point A ; il nous reste donc l'arc LA privé du point A qu'on notera γ_1 et l'arc KA privé du point A qu'on notera γ_2.

(i) Quand $M=(x,y)$ est sur γ_1 et tend vers $A=(1,2\sqrt{3})$, son image (par f) $M'=(x'y')$ tend vers $(+\infty,-\infty)$.

(ii) Quand $M=(x,y)$ est sur γ_2 et tend vers $A=(1,2\sqrt{3})$, son image (par f) $M'=(x'y')$ tend vers $(-\infty,+\infty)$.

(iii) Les images respectives de $L=(7,0)$ et $K=(-1,0)$ sont $L'=\left(\frac{7}{6},0\right)$ et $K'=\left(\frac{1}{2},0\right)$. La transformée par f de $\gamma_1 \cup \gamma_2$ a pour équation $\left(\frac{-x'}{1-x'}\right)^2+\left(\frac{y'}{1-x'}\right)^2-6\left(\frac{-x'}{1-x'}\right)-7=0$, c'est-à-dire $12x'^2-y'^2-20x'+7=0$. Ce sont les deux morceaux γ_1' et γ_2' (qu'on voit en bleu sur le dessin) de l'hyperbole d'équation : $12x'^2-y'^2-20x'+7=0$.

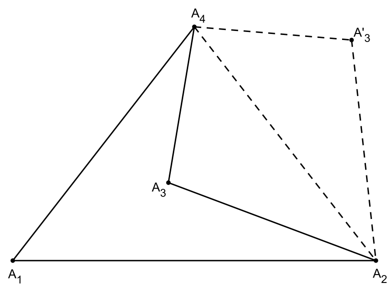


Exercice 2

Partie I

1 - Le carré (ou de façon générale un losange) de côté $\frac{L}{4}$ est un quadrilatère de périmètre L. L'ensemble $\mathcal{Q}_0(L)$ n'est donc pas vide.

Soit $A_1A_2A_3A_4 = q \in \mathcal{Q}_0(L)$ non convexe (voir dessin ci-dessous). Supposons que $\widehat{A_3}$ en soit l'angle de mesure strictement supérieure à π. Notons A_3' le symétrique de A_3 par rapport à la droite (A_2A_4) ; alors le quadrilatère $q' = A_1A_2A_3'A_4$ a pour périmère L et une aire supérieure à celle de q.



2 - La donnée d'un quadrilatère q dans le plan $\mathbb{R}^2$ est la donnée de quatre points A_1, A_2, A_3 et A_4 et donc de quatre couples de nombres (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) et (x_4, y_4). On peut donc identifier q au 8-uplet $(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, x_4, y_4) \in \mathbb{R}^8$; inversement tout $(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, x_4, y_4) \in \mathbb{R}^8$ définit un quadrilatère $q = A_1A_2A_3A_4$ dans le plan. Comme on ne s'intéresse qu'à la forme du quadrilatère, on les prendra tous ayant un sommet commun. Plus même, quite à effectuer une translation suivie d'une rotation, on peut toujours supposer $A_1 = (0, 0)$ et $y_2 = 0$. Pour ce qui nous concerne, se donner un quadrilatère, c'est se donner 5 réels x_2, x_3, y_3, x_4, y_4, c'est-à-dire un point de $\mathbb{R}^5$. On notera $\mathcal{Q}'$ l'ensemble de tels quadrilatères ; $\mathcal{Q}(L)$ en est une partie. Par suite l'ensemble $\mathcal{Q}(L)$ peut être considéré comme une partie de l'espace euclidien $\mathbb{R}^5$. Nous allons montrer qu'elle y est fermée.

Soit $A_1A_2A_3A_4 = q \in \mathcal{Q}'$. Alors le périmètre $\mathcal{L}(q)$ de q est donné par :

$$\mathcal{L}(q) = |x_2| + \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + y_3^2} + \sqrt{(x_4 - x_3)^2 + (y_4 - y_3)^2} + \sqrt{x_4^2 + y_4^2}.$$

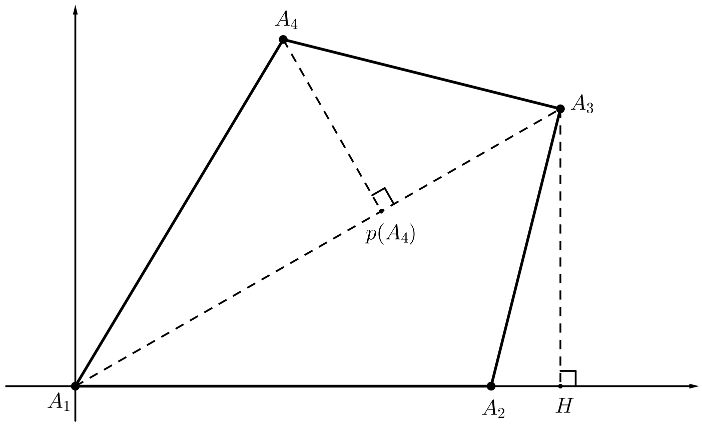
On voit donc bien que la fonction $\mathcal{L} : \mathcal{Q}' \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est continue. L'ensemble $\mathcal{Q}(L)$ est l'image réciproque par $\mathcal{L}$ du fermé $\{L\}$, donc c'est un fermé de $\mathcal{Q}'$ (qui est lui-même fermé dans $\mathbb{R}^5$) donc un fermé de $\mathbb{R}^5$.

3 - Comme chaque $A_1A_2A_3A_4 = q \in \mathcal{Q}(L)$ a L pour périmètre, les 5 nombres x_2, x_3, y_3, x_4, y_4 sont tous dans l'intervalle $[-L, L]$; donc $\mathcal{Q}(L)$ est un borné de $\mathbb{R}^5$; comme en plus il est fermé, il y est compact.

Soit $A_1A_2A_3A_4 = q \in \mathcal{Q}'$. Alors l'aire de q est la somme des aires des deux triangles $A_1A_2A_3$ et $A_1A_3A_4$. Notons p la projection orthogonale de $\mathbb{R}^2$ sur la droite (A_1A_3) ; c'est une application affine, donc continue ; par suite, la norme $||\overrightarrow{A_4p(A_4)}||$, qui n'est rien d'autre que la longuer $A_4p(A_4)$, est continue (en tant que fonction de A_4 vu dans $\mathbb{R}^5$ comme le 5-uplet $(0,0,0,x_4,x_5)$). Par suite, la fonction aire $\mathcal{A} : \mathcal{Q}' \longrightarrow \mathbb{R}_+$ donnée par :

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(q) &= \frac{1}{2}\left(A_3H \cdot A_1A_2 + A_4p(A_4) \cdot A_1A_3\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(y_3x_2 + ||\overrightarrow{A_4p(A_4)}||\sqrt{x_3^2 + y_3^2}\right)\end{aligned}$$

est continue, et donc sa restriction à $\mathcal{Q}(L)$ l'est aussi. Par suite il existe $q_0 \in \mathcal{Q}(L)$ tel que $\sup\limits_{q \in \mathcal{Q}(L)} \mathcal{A}(q) = \mathcal{A}(q_0)$.



Partie II

4 - Le point $M = (a, 0)$ est tel que $MF + MF' = \overline{F'M} + \overline{FM} = a - (-c) + a - c = 2a$ est bien sur $\mathcal{E}$; donc l'ensemble $\mathcal{E}$ est non vide.

Soit R un réel tel que $a - c \leq R \leq a + c$; on pose $R' = 2a - R$. Alors les cercles centrés respectivement en F et F' et de rayons respectifs R et R' s'intersectent en au moins un point (sinon deux) M vérifiant $MF + MF' = 2a$, donc un point de $\mathcal{E}$. En faisant varier R entre $a - c$ et $a + c$, on obtient tous les points de $\mathcal{E}$.

5 - Dans le repère $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, les points F et F' ont pour coordonnées respectives $(c, 0)$ et $(-c, 0)$. Soit $M = (x, y)$; sa projection orthogonale M_0 sur la droite (FF') a pour coordonnées $(x, 0)$. Par le théorème de Pythagore, on a :

$$MF^2 = MM_0^2 + M_0F^2 \quad \text{et} \quad MF'^2 = MM_0^2 + M_0F'^2.$$

En faisant la différence membre à membre, on obtient :

$$MF^2 - MF'^2 = \overline{M_0F}^2 - \overline{M_0F'}^2 = (\overline{M_0F} + \overline{M_0F'}) \cdot (\overline{M_0F} - \overline{M_0F'}) = -4cx$$

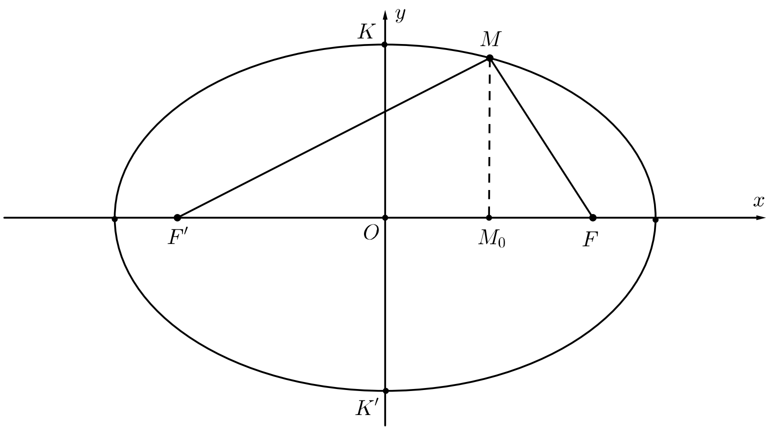
qui donne $(MF - MF') \cdot (MF + MF') = -4cx$. On a $MF + MF' = 2a$ si en plus $M \in \mathcal{E}$. On déduit alors de ce qui précède que $MF - MF' = -2\frac{c}{a}x$. Les deux égalités $MF + MF' = 2a$ et $MF - MF' = -2\frac{c}{a}x$ nous donnent $MF = a - \frac{c}{a}x$. On a donc :

$$MF^2 = \left(a - \frac{c}{a}x\right)^2 = (x-c)^2 + y^2$$

et, en tenant compte du fait que $a^2 = b^2 + c^2$, on obtient l'équation :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Cette équation montre que l'ellipse $\mathcal{E}$ a pour représentation paramétrique $x(t) = a\cos t$ et $y(t) = b\sin t$ avec $t \in \mathbb{R}$; c'est donc une courbe de classe C^∞ qui admet en tout point comme vecteur tangent celui ayant pour composantes $x'(t) = -a\sin t$ et $y'(t) = b\cos t$; il est donc partout non nul et par suite $\mathcal{E}$ a une tangente en tout point.



6 - L'aire du triangle MFF' est égale à $\frac{1}{2}FF' \cdot MM_0$. Elle est donc maximale lorsque la longueur MM_0 l'est, c'est-à-dire lorsque le point M est en B ou B' (voir dessin ci-dessus).

Partie III

7 - Posons $2a = p - \alpha$; comme p et α sont des constantes, $2a$ l'est aussi. Le point A varie mais de façon à ce que $AB + BC = 2a$, donc sur l'ellipse de foyers B et C et de grand axe $2a$. Par la question 6, l'aire du triangle ABC est maximale lorsque celui-ci est isocèle de base BC.

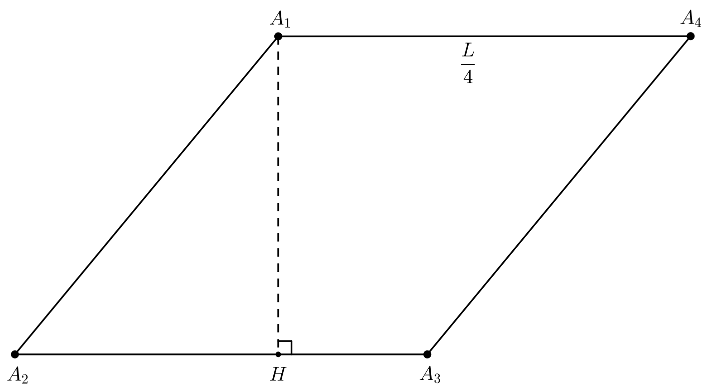
8 - Supposons ABC non équilatéral. Alors il a au moins deux côtés non égaux, disons par exemple $AB \neq AC$. D'après ce qui précède, le triangle isocèle $A'BC$ de base BC et de périmètre p (il existe) a une aire strictement supérieure à celle de ABC. Donc, à périmètre prescrit, un triangle non équilatéral ne peut pas maximiser l'aire ! Conclusion : à périmètre prescrit, l'aire est maximale lorsque ABC est équilatéral.

9 - Soit $A_1A_2A_3A_4 = q \in \mathcal{Q}(L)$. (Le quadrilatère q est convexe de périmètre L.) Supposons que q ne soit pas un losange. Alors deux au moins de ses côtés ne sont pas égaux ; disons $A_2A_1 \neq A_2A_3$ pour fixer les idées.

(i) Soit A_2' le point tel que le triangle $A_2'A_1A_3$ soit isocèle de base A_1A_3 et vérifiant la relation $A_2'A_1 + A_2'A_3 = A_2A_1 + A_2A_3$ (un tel point existe par la question 7). Alors l'aire de $A_2'A_1A_3$ est strictement supérieure à celle de $A_1A_2A_3$; donc l'aire du quadrilatère $A_1A_2'A_3A_4$ (qui a aussi L pour périmètre) est strictement supérieure à celle de $A_1A_2A_3A_4$.

(ii) D'après ce qui précède, un quadrilatère de périmètre L d'aire maximale est forcément un losange ; son côté mesure donc $\frac{L}{4}$. Mais il existe une infinité de tels losanges !

(iii) On peut donc supposer que q est un losange de côté $\frac{L}{4}$. Son aire est $A_1H \cdot \frac{L}{4}$ où H est la projection orthogonale de A_1 sur la droite (A_2A_3). Elle sera donc maximale lorsque la hauteur A_1H se confond avec l'hypothénuse A_1A_2, ce qui est le cas lorsque l'angle $\widehat{A_2A_1A_4}$ est droit. En d'autres termes, lorsque le quadrilatère q est un carré. L'aire maximale est alors $\frac{L^2}{16}$.



Exercice 3

1 - Comme la fonction f est une densité de probabilité on doit avoir :

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = \int_a^b kdx = (b-a)k = 1.$$

D'où $k = \frac{1}{b-a}$.

2 - On a :

$$E(X) = \int_{\mathbb{R}} xf(x)dx = \int_a^b xkdx = k\left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}.$$

La variance de X est donnée par :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \int_{\mathbb{R}} x^2 f(x)dx - E(X)^2 = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{(a-b)^2}{12}.$$

D'où $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$.

3 - La fonction de répartion de X est par définition la fonction $F : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$ donnée par $F(x) = P(X \leq x)$. Dans notre cas, on a :

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{si } x \geq b. \end{cases}$$

Exercice 4

Le cardinal de Ω est $|\Omega| = |\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}| \cdot |\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}| = 5 \cdot 5 = 25$. Pour calculer les probabilités $p(E)$ et $p(F)$, il suffit de déterminer explicitement les ensembles E et F.

(i) Considérons le système $\begin{cases} \overline{2}x + \overline{1}y = \overline{0} \\ \overline{1}x + \overline{3}y = \overline{0} \end{cases}$ Comme $\overline{1} = \overline{6}$, la deuxième équation s'écrit $\overline{6}x + \overline{3}y = \overline{0}$ qui est équivalente à $\overline{2}x + \overline{y} = \overline{0}$; donc le système se réduit à celle-ci dont les solutions sont :

$$E = \{(\overline{0},\overline{0}), (\overline{1},\overline{3}), (\overline{2},\overline{1}), (\overline{3},\overline{4}), (\overline{4},\overline{2})\}.$$

Par suite $p(E) = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$.

(ii) Pour le système $\begin{cases} \overline{1}x + \overline{1}y = \overline{0} \\ \overline{1}x + \overline{2}y = \overline{0} \end{cases}$ on retranche (membre à membre) la première de la deuxième et on obtient $\overline{1}y = 0$; ce qui donne $y = \overline{0}$, donc $x = \overline{0}$. L'ensemble F se réduit à l'élément $(\overline{0},\overline{0})$. D'où $p(F) = \frac{1}{25}$.

QUELQUES COMMENTAIRES

Quelques petites perles à découvrir dans les copies, souvent portant sur des notions très élémentaires ! Aucun recul : on ne prend pas le temps de réfléchir, de vérifier, de bien regarder ce qu'on écrit... toutes ces qualités que doit avoir un enseignant pour communiquer du savoir à ses élèves.

Exercice 1

• Si l'ouvert $\Omega = (\mathbb{R} \setminus \{1\}) \times \mathbb{R}$ a été exhibé presque par tout le monde, beaucoup n'ont pas su montrer de manière aisée que $f : \Omega \longrightarrow \Omega$ est une bijection ! Certains ont même fait le faux pas de traiter la question comme si f était linéaire (ils ont cherché son noyau) ! Où en sommes-nous ?

• Un point $M = (x, y)$ est invariant par f si son transformé $M' = (x', y')$ est tel que $x' = y'$! Des choses sont à revoir avant d'aller devant les élèves.

• L'équation générale d'une droite dans le plan est $ax+by+c = 0$; si on écrit $y = ax+c$ on exclut les droites verticales ! Même pour cette forme particulière, très peu de candidats ont su résoudre la question ! Ceux qui sont arrivés à montrer que la transformée Δ' d'une droite Δ est une droite n'ont toutefois pas su dire dans quelle situation Δ' et Δ sont parallèles !

• Très peu d'étudiants ont donné des réponses satisfaisantes aux questions 4 et 5.

• $\mathcal{C}_0$ a pour équation $x^2 + 4x - 4 = 0$, donc $\mathcal{C}_0$ est une parabole ! On peut éviter de tomber dans la confusion quand on se donne le temps de réfléchir !

Exercice 2

• On dirait que la deuxième partie de la question 1 donne du fil à retordre ! Et pourtant...il suffit de bien regarder le quadrilatère non convexe !

• La détermination de l'équation réduite d'une ellipse a fait l'objet d'une séance de cours. Très peu s'en souviennent !

Exercice 3

• Dans beaucoup de copies j'ai vu la variance d'une variable aléatoire X donnée par $V(X) = E(X^2)$! Les définitions de base sont ignorées !

Exercice 4

• La plus belle : Le cardinal de $\Omega = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{2}, \overline{4}\}^2$ (produit cartésien de $\{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{2}, \overline{4}\}$ par lui-même) est $\Omega = 10 = 2 \times 5$!

Aziz El Kacimi

MEÉF 1 - Mathématiques
DS2 - 5 octobre 2015
Analyse - Géométrie

Exercice 1

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ($\mathbb{K}$ étant le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Deux normes N_1 et N_2 sur E sont dites *équivalentes* s'il existe deux réels $\alpha, \beta > 0$ tels que : $\alpha N_1(x) \leq N_2(x) \leq \beta N_1(x)$ pour tout $x \in E$.

1 - Soient N_1 et N_2 deux normes équivalentes sur E. Montrer qu'on a les deux assertions qui suivent :

a) Toute partie de E bornée pour N_1 est bornée pour N_2 et inversement.

b) Toute suite (x_n) qui converge vers x pour la norme N_1 converge vers x pour la norme N_2 et inversement.

Dans un espace vectoriel de dimension finie toutes les normes sont équivalentes. L'objet de cet exercice est de montrer que ce n'est pas toujours le cas en dimension infinie.

On note E l'espace vectoriel des fonctions réelles continues sur l'intervalle $[0, 1]$.

2 - Montrer que E est de dimension infinie en y exhibant explicitement une famille infinie (dénombrable par exemple) libre.

On admet l'inégalité $\int_0^1 |\varphi(x)\psi(x)|dx \leq \left(\int_0^1 |\varphi(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 |\psi(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$ vraie pour tous éléments φ, ψ de E. (On pourrait l'utiliser pour répondre aux questions 3 et 4.) Pour toute fonction $f \in E$, on pose :

$$||f||_1 = \int_0^1 |f(x)|dx, \qquad ||f||_2 = \left(\int_0^1 |f(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{et} \qquad ||f||_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|.$$

3 - Montrer que $||\ \ ||_1$, $||\ \ ||_2$ et $||\ \ ||_\infty$ sont des normes sur E.

4 - Montrer qu'on a $||f||_1 \leq ||f||_2 \leq ||f||_\infty$ pour toute fonction $f \in E$.

On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ définies par :

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x \in [1/n, 1] \\ \sqrt{n}(1 - nx) & \text{pour } x \in [0, 1/n] \end{cases}$$

5 - Dans un repère orthonormé, dessiner les graphes respectifs de f_1, f_2, f_3 et f_4.

6 - Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n \in E$.

7 - Calculer $||f_n||_1$, $||f_n||_2$ et $||f_n||_\infty$.

8 - Montrer que deux quelconques de ces normes ne sont pas équivalentes.

Exercice 2

La fonction *logarithme* est définie habituellement comme la primitive qui s'annule en 1 de la fonction $\frac{1}{x}$ (la formule "Primitive$(x^n) = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$" n'est pas valide pour $n = -1$). Ou alors comme la réciproque de la fonction *exponentielle*. Mais pour introduire cette dernière, on fait admettre aux élèves l'existence de l'unique solution valant 1 en 0 de l'équation différentielle $y' = y$. Ces deux façons de procéder n'amènent pas de manière naturelle le *logarithme*. Une bonne motivation devrait passer par la propriété essentielle : *transformer la multiplication en l'addition.*

Cet exercice a pour but de présenter une méthode élémentaire pour introduire le *logarithme* ne demandant d'admettre aucun théorème aussi fort que celui de l'existence et l'unicité des solutions des équations différentielles même les plus simples. Et en plus, elle motive et impose, sans autre choix, la formule $\ell n(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}$.

La fonction logarithme

Il s'agit de trouver une bijection $\varphi : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ "transformant la multiplication en l'addition" c'est-à-dire, pour tous $x, y \in \mathbb{R}_+^*$, on a la relation fondamentale :

$$\varphi(xy) = \varphi(x) + \varphi(y). \tag{1}$$

1 - Montrer que si une telle bijection existe elle vérifie la condition $\varphi(1) = 0$.

Tant qu'à faire, exigeons un peu plus : que la fonction φ soit dérivable et à dérivée continue strictement positive.

2 - Avec l'existence de la bijection φ et des propriétés indiquées de sa dérivée qu'on notera f, montrer que la bijection inverse $\psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ est dérivable et vérifie la relation :

$$\psi(x+y) = \psi(x)\psi(y). \tag{2}$$

3 - Dans la relation (1), on garde x constant et on dérive par rapport à y. Quelle relation (qu'on numérotera (3)) obtient-on au niveau de la fonction f ? (Cette relation fait intervenir deux variables x et y.)

4 - Montrer que la relation (3) détermine complètement la forme de la fonction f.

Reste donc à trouver la fonction (ou les fonctions) φ à partir de sa dérivée f.

5 - Montrer que $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ est de la forme $f(x) = \frac{\kappa}{x}$ où κ est une constante réelle strictement positive.

6 - Expliquer pourquoi la bijection φ vérifiant la relation (1) et la condition $\varphi(1) = 0$ doit avoir comme forme générale :

$$\varphi_\kappa(x) = \int_1^x \frac{\kappa dt}{t}. \tag{4}$$

Nous avons donc une famille (paramétrée par κ, réel strictement positif) de fonctions répondant à la question.

On appelle *logarithme népérien* la fonction $\ell n : x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto \ell n(x) \in \mathbb{R}$ définie par :

$$\ell n(x) = \varphi_1(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}. \tag{5}$$

Nous allons faire une étude complète de la fonction ℓn, comme en classe de Terminale : domaine de définition, continuité, dérivabilité, tableau de variation, les différentes limites *etc.*

La fonction ℓn est définie sur $\mathbb{R}_+^*$; elle y est continue, dérivable et a pour dérivée la fonction $f : x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto \frac{1}{x} \in \mathbb{R}_+^*$. Elle est donc indéfiniment dérivable et strictement croissante.

7 - Montrer que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\ell n\left(\frac{x}{y}\right) = \ell n(x) - \ell n(y)$.

8 - Montrer que $\ell n(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque $x \to +\infty$ et vers $-\infty$ lorsque $x \to 0^+$.

9 - Montrer qu'il existe un nombre $e > 1$ tel que $\ell n(e) = 1$. Ce nombre s'appelle *base* du logarithme népérien.

10 - Montrer qu'on a $\ell n(x) \leq x - 1$ pour tout $x > 0$ et en déduire l'inégalité :

$$\ell n(x) \leq 2\sqrt{x}.$$

11 - Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ell n(x)}{x} = 0$.

12 - Tracer le graphe de la fonction ℓn.

Exercice 3

Une parcelle de terrain rectangulaire a pour longueur $L = 150m$ et pour largeur $\ell = 132m$. On désire la clôturer en plaçant à égale distance les uns des autres un nombre minimum de piquets mais un dans chaque coin. La distance d entre deux piquets voisins doit être un entier de mètres.

1 - Calculer la distance d.

2 - Calculer le nombre de piquets nécessaires.

3 - Même question pour des valeurs entières générales de L et ℓ.

Le contenu des exercices dans ce texte est délibérément plus léger en volume que les épreuves habituelles du CAPES. Les étudiants ont donc le temps de mener un raisonnement clair et soigner la rédaction, deux qualités essentielles d'un enseignant.

CORRIGÉ

Exercice 1

1 - a) Soit B une partie bornée pour N_1. Alors il existe $\eta > 0$ tel que $N_1(x) \leq \eta$ pour tout $x \in B$. Donc $N_2(x) \leq \beta\eta$ pour tout $x \in B$, c'est-à-dire B est bornée pour N_2. De la même façon on montre que si B est bornée pour N_2, elle l'est aussi pour N_1.

1 - b) Soit (x_n) une suite convergeant vers x pour la norme N_1. Comme on a l'inégalité $N_2(x_n - x) \leq \beta N_1(x_n - x)$, la suite $N_2(x_n - x)$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$, c'est-à-dire (x_n) tend vers x pour N_2. De la même façon on montre que si (x_n) tend vers x pour N_2, elle tend aussi vers x pour N_1.

2 - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n(x) = x^n$ est un élément de E et la famille $1, x, \cdots, x^n$ est libre. Donc la famille infinie $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ dans E est libre. Par suite l'espace vectoriel E est de dimension infinie.

3 - Il est évident que si $f = 0$ alors $||f||_1 = 0$, $||f||_2 = 0$ et $||f||_\infty = 0$. Maintenant si f est non identiquement nulle, il existe $x_0 \in [0,1]$ tel que $f(x_0) \neq 0$; on a tout de suite $||f||_\infty \neq 0$. Comme f est continue, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $|f|$ est strictement positive sur $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$; par suite $||f||_1 > 0$ et $||f||_2 > 0$. Si $\lambda \in \mathbb{R}$, on a de façon immédiate :

$$||\lambda f||_1 = |\lambda| \cdot ||f||_1, \quad ||\lambda f||_2 = |\lambda| \cdot ||f||_2 \quad \text{et} \quad ||\lambda f||_\infty = |\lambda| \cdot ||f||_\infty.$$

Reste à établir l'inégalité du triangle. Soient $f, g \in E$. On a :

$$||f + g||_1 = \int_0^1 |f(x) + g(x)|dx \leq \int_0^1 (|f(x)| + |g(x)|)dx = ||f||_1 + ||f||_1.$$

De même :

$$\begin{aligned}
||f + g||_\infty &= \sup_{x \in [0,1]} |f(x) + g(x)| \\
&\leq \sup_{x \in [0,1]} \{|f(x)| + |g(x)|\} \\
&\leq \sup_{x \in [0,1]} |f(x)| + \sup_{x \in [0,1]} |g(x)| \\
&\leq ||f||_\infty + ||g||_\infty.
\end{aligned}$$

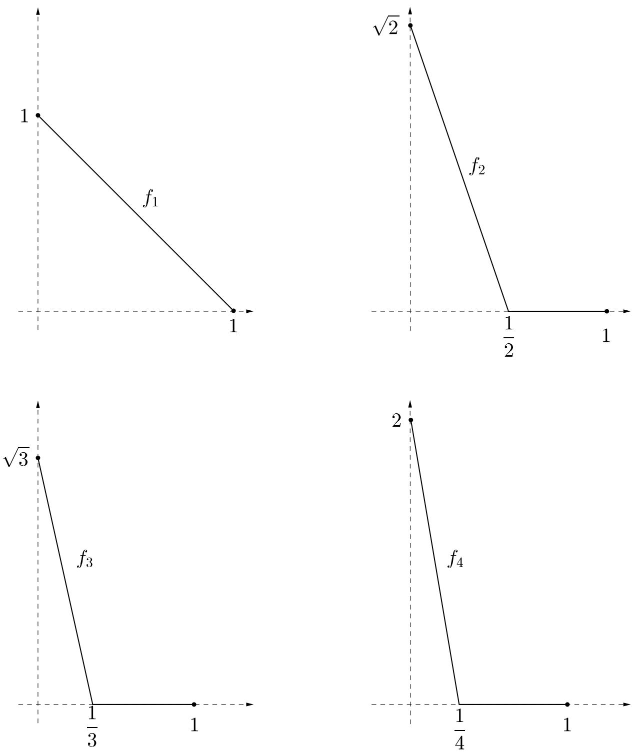
Pour terminer, l'inégalité $||f + g||_2 \leq ||f||_2 + ||g||_2$ est immédiate si $f + g = 0$. Supposons donc $f + g \neq 0$. On a :

$$\begin{aligned}
||f + g||_2^2 &= \int_0^1 |f(x) + g(x)|^2 dx \\
&= \int_0^1 |f(x) + g(x)| \cdot |f(x) + g(x)|dx \\
&\leq \int_0^1 |f(x)| \cdot |f(x) + g(x)|dx + \int_0^1 |g(x)| \cdot |f(x) + g(x)|dx \\
&\leq ||f||_2 \cdot ||f + g||_2 + ||g||_2 \cdot ||f + g||_2 \\
&\leq ||f + g||_2 \{||f||_2 + ||g||_2\}.
\end{aligned}$$

Le passage de la troisième ligne à la quatrième utilise l'inégalité qu'on a admise qui s'écrit $||\varphi\psi||_1 \leq ||\varphi||_2 \cdot ||\psi||_2$. On a donc $||f+g||_2^2 \leq ||f+g||_2\{||f||_2 + ||g||_2\}$. En simplifiant par $||f+g||_2$ (supposé non nul), on obtient $||f+g||_2 \leq ||f||_2 + ||g||_2$ qui est l'inégalité cherchée.

4 - Soit $f \in E$. On a $||f||_2 = \left(\int_0^1 |f(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_0^1 ||f||_\infty^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} = ||f||_\infty$. D'autre part, l'inégalité $||\varphi\psi||_1 \leq ||\varphi||_2 \cdot ||\psi||_2$ appliquée à $\varphi = f$ et $\psi = 1$ donne immédiatement $||f||_1 \leq ||f||_2$. On a donc $||f||_1 \leq ||f||_2 \leq ||f||_\infty$.

5 - Graphes des fonctions f_1, f_2, f_3 et f_4 :



5 - Calculons les différentes normes en question de la fonction f_n :

$$||f||_1 = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{2\sqrt{n}}, \quad ||f||_2 = \left(\int_0^{\frac{1}{n}} n(1-nx)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} \text{ et } ||f||_\infty = \sqrt{n}.$$

6 - La fonction f_n est continue sur chacun des intervalles $[0, 1/n[$ et $]1/n, 1]$. Au point $t = 1/n$ la limite à gauche vaut 0 et la limite à droite vaut 0 aussi. Par suite, elle est continue sur tout l'intervalle $[0, 1]$, donc c'est un élément de E.

7 - La suite f_n tend vers la fonction nulle pour la norme $||\ ||_1$ mais pas pour $||\ ||_2$ puisque $||f_n||_2 = 1/3$ et pas pour $||\ ||_\infty$ non plus puisque $||f_n||_\infty$ tend vers $+\infty$. Donc $||\ ||_1$ n'est équivalente ni à $||\ ||_2$ ni à $||\ ||_\infty$. De même, la suite f_n est bornée pour $||\ ||_2$ mais pas pour $||\ ||_\infty$; donc les normes $||\ ||_2$ et $||\ ||_\infty$ ne sont pas équivalentes.

Exercice 2

1 - On a $\varphi(1) = \varphi(1 \times 1) = \varphi(1) + \varphi(1) = 2\varphi(1)$. D'où l'on déduit $\varphi(1) = 0$.

2 - Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Comme $\varphi : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ est supposée bijective, il existe $x', y' \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\varphi(x') = x$ et $\varphi(y') = y$. Mais $\varphi(x'y') = \varphi(x') + \varphi(y')$ *i.e.* $x + y = \varphi(x'y')$. On applique ψ aux deux membres : $\psi(x+y) = x'y' = \psi(x)\psi(y)$.

3 - On dérive les deux membres de la relation $\varphi(xy) = \varphi(x) + \varphi(y)$ par rapport à y et on obtient $x\varphi'(xy) = \varphi'(y)$, relation qui s'écrit :

$$xf(xy) = f(y). \tag{3}$$

4 - Si on connaît la valeur de f en 1, on la connaît partout puisque $xf(x) = f(1)$. La forme de f est donc complètement déterminée par la relation (3).

5 - Si on note κ la valeur de f en 1, on a alors $f(x) = \frac{\kappa}{x}$ pour tout x réel strictement positif.

6 - La fonction φ qu'on cherche est une primitive de f. Comme on doit avoir $\varphi(1) = 0$, c'est la primitive de f qui s'annule au point 1. C'est donc forcément :

$$\varphi_\kappa(x) = \int_1^x \frac{\kappa}{t} dt. \tag{4}$$

7 - On a $0 = \ell n(1) = \ell n\left(x \cdot \frac{1}{x}\right) = \ell n(x) + \ell n\left(\frac{1}{x}\right)$. D'où $\ell n\left(\frac{1}{x}\right) = -\ell n(x)$. Ceci nous donne $\ell n\left(\frac{x}{y}\right) = \ell n(x) + \ell n\left(\frac{1}{y}\right) = \ell n(x) - \ell n(y)$.

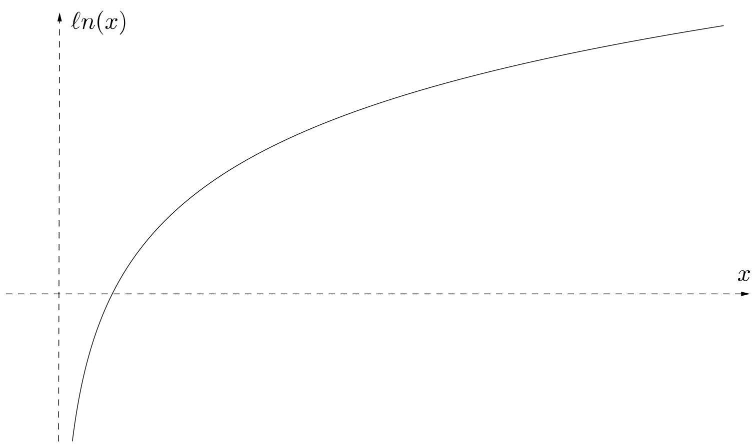
8 - Soit $a > 1$; alors $\ell n(a) > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\ell n(a^n) = n \cdot \ell n(a)$. Quand n tend vers $+\infty$, a^n tend vers $+\infty$ et $n \cdot \ell n(a)$ tend vers $+\infty$. Conclusion : $\lim\limits_{x\to+\infty} \ell n(x) = +\infty$. On en déduit $\lim\limits_{x\to 0^+} \ell n(x) = -\lim\limits_{x\to 0^+} \ell n\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\infty$.

9 - Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \ell n(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+} \ell n(x) = -\infty$ et ℓn continue, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $e \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\ell n(e) = 1$.

10 - Pour $x \geq 1$, on a $\frac{1}{x} \leq 1$; donc $\ell n(x) = \int_1^x \frac{dt}{t} \leq \int_1^x dt = x - 1$. Si $x < 1$, $\frac{1}{x} > 1$. D'où $-\ell n(x) = \int_x^1 \frac{dt}{t} > \int_x^1 dt = 1 - x$, c'est-à-dire $\ell n(x) < x - 1$. Dans tous les cas on a $\ell n(x) \leq x - 1$ pour tout $x > 0$. On en déduit $\ell n(x) = 2\ell n(\sqrt{x}) \leq 2\sqrt{x} - 2 \leq 2\sqrt{x}$.

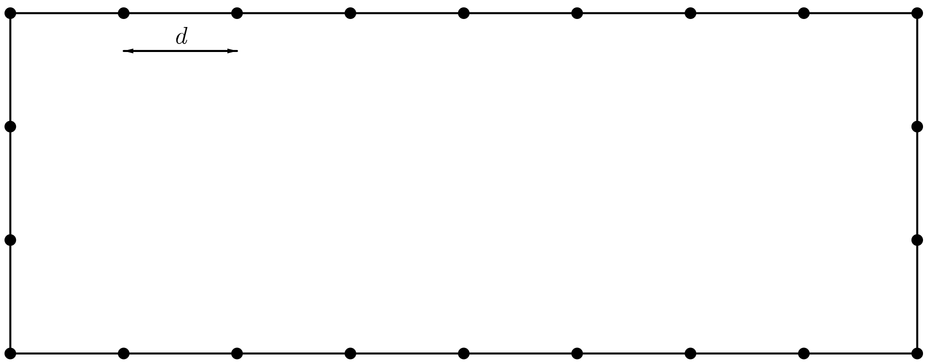
11 - Comme on vient de le voir $\ell n(x) \leq 2\sqrt{x}$ pour $x > 0$. Donc $\frac{\ell n(x)}{x} \leq \frac{2}{\sqrt{x}}$. Par suite $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ell n(x)}{x} = 0$.

12 - Graphe de la fonction ℓn.



Exercice 3

1 - Faisons d'abord un dessin :



Le nombre d étant un entier de mètres, il doit diviser à la fois $L = 150$ et $\ell = 132$. Et comme on veut un nombre minimum de piquets, il doit être le plus grand possible, c'est-à-dire le PGCD de 150 et 132. Un calcul immédiat donne $d = 6$.

2 - Comme la clôture est une "courbe fermée", il y a autant de segments que de piquets. C'est donc le périmètre divisé par d, c'est-à-dire $N = 2(L + \ell) = 2(150 + 132)/6 = 94$ piquets.

3 - De façon générale, d est le PGCD de L et ℓ. Donc $N = 2(L + \ell)/d$.

MEÉF 1 - Mathématiques
DS3 - 4 novembre 2015
Analyse - Géométrie

Exercice 1

Pour une série réelle de terme général strictement positif x_n (avec $n \in \mathbb{N}$), deux critères sont souvent utilisés pour étudier sa convergence :

• ***Critère de d'Alembert.*** On suppose que le rapport $\frac{x_{n+1}}{x_n}$ a une limite ℓ. Alors la série converge si $\ell < 1$ et diverge si $\ell > 1$. Dans le cas où cette limite n'existe pas, on examine $\frac{x_{n+1}}{x_n}$ pour n assez grand : si $\frac{x_{n+1}}{x_n} \geq 1$ la série diverge ; s'il existe $\alpha \in]0,1[$ tel que $\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq \alpha$, la série converge.

• ***Critère de Cauchy.*** On suppose que la suite $\left(x_n^{\frac{1}{n}}\right)$ a une limite σ. Alors la série converge si $\sigma < 1$ et diverge si $\sigma > 1$. Dans le cas où cette limite n'existe pas, on examine $x_n^{\frac{1}{n}}$ pour n assez grand : si $x_n^{\frac{1}{n}} \geq 1$ la série diverge ; s'il existe $\beta \in]0,1[$ tel que $x_n^{\frac{1}{n}} \leq \beta$, la série converge.

Question naturelle. *Ces deux critères sont-ils équivalents* ? (*Ce qu'on peut faire avec l'un, peut-on le faire aussi avec l'autre* ?) L'objet de cet exercice est de répondre à cette question.

Partie I

On suppose que la suite $\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)$ converge vers un réel ℓ. On va montrer que la suite $\left(x_n^{\frac{1}{n}}\right)$ converge vers la même limite ℓ. Soit $\varepsilon > 0$.

1 - Montrer qu'il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n \geq r$, on ait :

$$\ell - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{x_{n+1}}{x_n} < \ell + \frac{\varepsilon}{2}.$$

2 - Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$x_r \left(\ell - \frac{\varepsilon}{2}\right)^p < x_{r+p} < x_r \left(\ell + \frac{\varepsilon}{2}\right)^p.$$

Indication : Remarquer que $\frac{x_{r+p}}{x_r} = \left(\frac{x_{r+p}}{x_{r+p-1}}\right) \cdot \left(\frac{x_{r+p-1}}{x_{r+p-2}}\right) \cdots \left(\frac{x_{r+2}}{x_{r+1}}\right) \cdot \left(\frac{x_{r+1}}{x_r}\right)$

3 - Calculer les limites : $\lim\limits_{p \to +\infty} \left(x_r^{\frac{1}{r+p}}\right)$, $\lim\limits_{p \to +\infty} \left(\ell - \frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{p}{r+p}}$ et $\lim\limits_{p \to +\infty} \left(\ell + \frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{p}{r+p}}$.

4 - En utilisant la question 3, montrer qu'il existe un entier s tel que, pour $p \geq s$, on ait :

$$x_r^{\frac{1}{r+p}} \left(\ell - \frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{p}{r+p}} > \ell - \varepsilon \quad \text{et} \quad x_r^{\frac{1}{r+p}} \left(\ell + \frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{p}{r+p}} < \ell + \varepsilon.$$

5 - En déduire que, pour $n \geq r + s$, on a : $\ell - \varepsilon < x_n^{\frac{1}{n}} < \ell + \varepsilon$. Conclusion ?

Partie II

Soient x et y deux nombres réels strictement positifs. On se propose d'étudier les conditions de convergence de la série de terme général :

$$z_n = \begin{cases} x^p y^{p-1} & \text{si } n = 2p-1 \\ x^p y^p & \text{si } n = 2p. \end{cases}$$

6 - La suite $\left(\frac{z_{n+1}}{z_n}\right)$ converge-t-elle ? Peut-on dire des choses, même partielles, sur la convergence de la série z_n ?

7 - Montrer que la suite $\left(z_n^{\frac{1}{n}}\right)$ converge. Donner sa limite σ.

8 - Discuter les conditions de convergence de la série (z_n) en fonction du couple $(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.

9 - Dans l'ouvert $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ du plan euclidien $\mathbb{R}^2$, dessiner la partie $\mathcal{C}$ formée des couples (x, y) pour lesquels la série z_n converge et la partie $\mathcal{D}$ des (x, y) pour lesquels elle diverge.

10 - Faire un commentaire sur toute la situation. (***Un peu d'initiative les amis !***)

Exercice 2

Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on note Σ_p l'ensemble des racines $p^{\text{èmes}}$ de l'unité, c'est-à-dire les solutions complexes de l'équation $z^p = 1$.

1 - Déterminer explicitement les éléments $\xi_0, \cdots, \xi_{p-1}$ de l'ensemble Σ_p.

2 - Dessiner (séparément) les ensembles Σ_1, Σ_2, Σ_3 et Σ_6.

3 - Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} \xi_k = 0$.

Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on note f_p la série entière $f_p(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{np}}{n}$ où z est un nombre complexe.

4 - Montrer que le rayon de convergence de la série f_1 vaut 1 et en déduire que c'est aussi celui de la série f_p.

5 - Quels sont les points du cercle unité U en lesquels la série f_1 converge et ceux (toujours de U) en lesquels elle diverge ?

Indication : Penser à utiliser le Lemme d'Abel.

6 - Mêmes questions que précédemment pour la série f_p avec $p \geq 2$.

Exercice 3

On considère la suite de fonctions $f_n : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ (pour $n \geq 1$) définies par :

$$f_n(x) = \frac{ne^{-x} + x^2}{n + x}.$$

1 - Montrer que la suite (f_n) converge simplement vers une fonction $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ que l'on déterminera.

2 - Montrer qu'en fait la suite (f_n) converge uniformément vers f.

3 - En déduire que la suite numérique (I_n), définie ci-dessous, converge et calculer sa limite :

$$I_n = \int_0^1 \frac{ne^{-x} + x^2}{n + x} dx.$$

Exercice 4

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n^2 + 1}.$$

1 - Sur quelle partie $\Sigma \subset \mathbb{R}$ cette quantité existe-t-elle ? (Autrement dit, pour quelles valeurs de x la série converge-t-elle ?)

2 - Montrer que la fonction $f : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}$ ainsi définie est continue.

CORRIGÉ

Exercice 1

1 - Comme la suite $\frac{x_{n+1}}{x_n}$ tend vers ℓ, $\varepsilon > 0$ étant donné, il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que $\left|\frac{x_{n+1}}{x_n} - \ell\right| < \frac{\varepsilon}{2}$ pour $n \geq r$. Ce qu'on peut écrire aussi :

$$\ell - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{x_{n+1}}{x_n} < \ell + \frac{\varepsilon}{2}.$$

2 - Pour $p \geq 1$, on a : $\frac{x_{r+p}}{x_r} = \left(\frac{x_{r+p}}{x_{r+p-1}}\right) \cdot \left(\frac{x_{r+p-1}}{x_{r+p-2}}\right) \cdots \left(\frac{x_{r+2}}{x_{r+1}}\right) \cdot \left(\frac{x_{r+1}}{x_r}\right)$. Et comme chacun des facteurs dans ce produit est à la fois supérieur à $\ell - \frac{\varepsilon}{2}$ et inférieur à $\ell + \frac{\varepsilon}{2}$, le rapport $\frac{x_{r+p}}{x_r}$ (qui est leur produit) est supérieur à $\left(\ell - \frac{\varepsilon}{2}\right)^p$ et inférieur $\left(\ell + \frac{\varepsilon}{2}\right)^p$ et donc, x_r étant > 0 :

$$x_r \left(\ell - \frac{\varepsilon}{2}\right)^p < x_{r+p} < x_r \left(\ell + \frac{\varepsilon}{2}\right)^p.$$

3 - Comme x_r est strictement positif, on a $x_r^{\frac{1}{r+p}} = e^{\frac{\ell n(x_r)}{r+p}}$. Quand $p \to +\infty$, $\frac{\ell n(x_r)}{r+p}$ tend vers 0 et donc $x_r^{\frac{1}{r+p}}$ tend vers 1.

Le nombre $\frac{p}{r+p}$ tend vers 1 quand $p \to +\infty$; par suite $\lim\limits_{p \to +\infty} \left(\ell - \frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{p}{r+p}} = \ell - \frac{\varepsilon}{2}$. De même $\lim\limits_{p \to +\infty} \left(\ell + \frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{p}{r+p}} = \ell + \frac{\varepsilon}{2}$.

4 - Il existe donc un rang s tel que, pour $p \geq s$, on ait :

$$x_r^{\frac{1}{r+p}} \left(\ell - \frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{p}{r+p}} > \left(\ell - \frac{\varepsilon}{2}\right) - \frac{\varepsilon}{2} = \ell - \varepsilon \text{ et } x_r^{\frac{1}{r+p}} \left(\ell + \frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{p}{r+p}} < \left(\ell + \frac{\varepsilon}{2}\right) + \frac{\varepsilon}{2} = \ell + \varepsilon.$$

5 - En fait, on vient de montrer que, pour $n \geq r + s$, on a $\ell - \varepsilon < x_n^{\frac{1}{n}} < \ell + \varepsilon$. Il en résulte que la suite $x_n^{\frac{1}{n}}$ a pour limite ℓ.

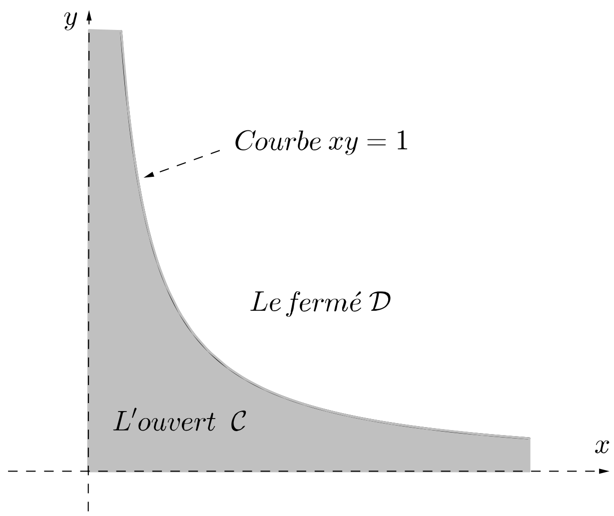
6 - Si $x = y$, la série z_n est la série géométrique de terme général x. Elle converge donc si $x < 1$ et diverge si $x \geq 1$. Pour la suite, nous supposerons $x \neq y$.

On a $\frac{z_{n+1}}{z_n} = x$ si n est pair et $\frac{z_{n+1}}{z_n} = y$ si n est impair. Donc la suite $\frac{z_{n+1}}{z_n}$ n'a pas de limite. Mais au moins on peut dire que cette série converge si x et y sont tous les deux strictement inférieurs à 1 et diverge si tous les deux sont supérieurs ou égaux à 1.

7 - Prenons n pair $n = 2p$. Alors $z_n^{\frac{1}{n}} = \sqrt{xy}$; la suite $z_n^{\frac{1}{n}}$ a donc sa sous-suite paire z_{2p} constante égale à $\sqrt{xy}$. Sa sous-suite impaire z_{2p-1} a pour terme général $x^{\frac{p}{2p-1}} y^{\frac{p-1}{2p-1}}$ et converge vers $\sqrt{xy}$. Donc la suite $z_n^{\frac{1}{n}}$ converge et a pour limite $\sigma = \sqrt{xy}$.

8 - La série z_n converge pour $\sigma < 1$, c'est-à-dire $xy < 1$. Les couples (x, y) vérifiant cette inégalité forment un ouvert $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* : xy < 1\}$. Les couples (x, y) pour lesquels la série z_n diverge forment un fermé $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* : xy \geq 1\}$.

9 - On a dessiné ci-dessous l'ouvert $\mathcal{C}$ et le fermé $\mathcal{D}$, respectivement domaines de convergence et de divergence de la série z_n.



10 - <u>Commentaire</u> : Si la suite $\frac{x_{n+1}}{x_n}$ tend vers ℓ, la suite $x_n^{\frac{1}{n}}$ tend aussi vers ℓ. Autrement dit, le critère de d'Alembert implique le critère de Cauchy. Nous avons vu que la réciproque n'est pas vraie : l'existence de la limite de la suite $x_n^{\frac{1}{n}}$ n'implique pas celle de la suite $\frac{x_{n+1}}{x_n}$.

On peut étudier la convergence de la série (z_n) sans utiliser ni le critère de d'Alembert ni celui de Cauchy. En effet, la série étant à termes positifs, sa convergence est équivalente à la convergence simultanée des deux séries (dont elle est la somme) :

$$\sum_{p=1}^{\infty} z_{2p-1} = x \sum_{p=1}^{\infty} (xy)^{p-1} \quad \text{et} \quad \sum_{p=1}^{\infty} z_{2p} = \sum_{p=1}^{\infty} (xy)^p.$$

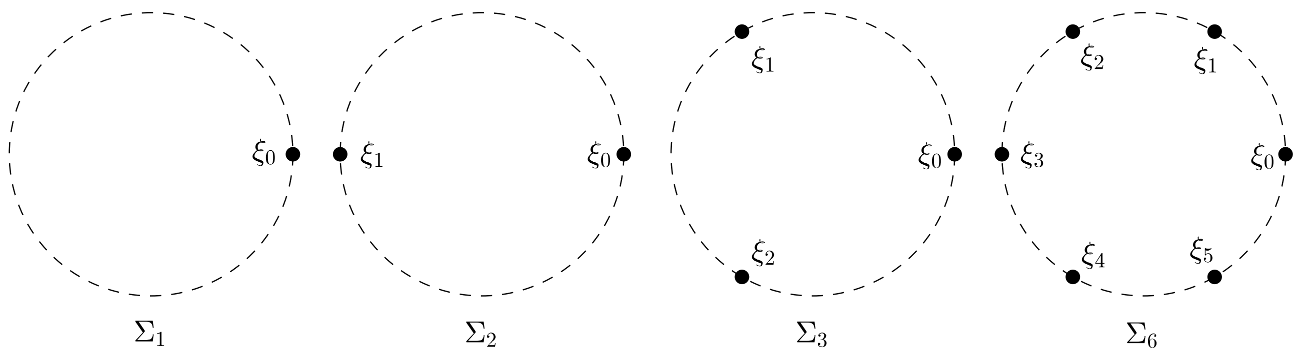
Nous sommes donc amenés à étudier la convergence de la série géométrique de raison $a = xy$. On sait alors qu'elle converge pour $xy < 1$ et diverge pour $xy \geq 1$.

Exercice 2

1 - La relation $z^p = 1$ implique $|z| = 1$. On peut donc écrire $z = e^{i\theta}$ avec $\theta \in [0, 2\pi[$. L'équation devient alors $e^{ip\theta} = 1$; ses solutions sont $\xi_k = e^{\frac{2ik\pi}{p}}$ pour $k = 0, 1, \cdots, p-1$.

2 - Ci-dessous les dessins des ensembles Σ_1, Σ_2, Σ_3 et Σ_6.

Ces ensembles ont une structure de groupe abélien.



3 - Remarquons d'abord que $\xi_k = \xi_1^k$ pour tout $k = 0, 1, \cdots, p-1$. On a alors :

$$\sum_{k=0}^{p-1} \xi_k = 1 + \xi_1 + \xi_1^2 + \cdots + \xi_1^{p-1} = \frac{\xi_1^p - 1}{\xi_1 - 1} = 0.$$

4 - Le rapport $\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}$ a pour limite 1. Donc la série f_1 a pour rayon de convergence 1. La série f_p s'écrit :

$$f_p(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z^p)^n}{n}.$$

Elle converge donc pour $|z^p| < 1$ et diverge pour $|z^p| > 1$. Comme $|z^p| < 1 \Longleftrightarrow |z| < 1$ et $|z^p| > 1 \Longleftrightarrow |z| > 1$, le rayon de convergence de f_p est donc aussi 1.

5 - Il est clair que la série f_1 diverge pour $z = 1$. Soit $z \in U \setminus \{1\}$. Pour tout $n \geq 1$, on pose $a_n = \frac{1}{n}$ et $x_n = z^n$. Alors a_n tend en décroissant vers 0. D'autre part :

$$|x_1 + \cdots + x_n| = |z + \cdots + z^n| = |z(1 + \cdots + z^{n-1})| = \left| \frac{z^n - 1}{z - 1} \right| \leq \frac{2}{|z-1|}.$$

Pour tout n, les sommes $x_1 + \cdots + x_n$ sont donc bornées indépendamment de n. D'après le Lemme d'Abel, la série f_1 converge en z.

6 - On a vu que le rayon de convergence de la série f_p est 1. Voyons ce qui se passe sur le cercle U. En vertu de ce qui précède, f_p converge pour $z \in U$ si, et seulement si, $z^p \neq 1$ *i.e.* si z n'est pas un élément de Σ_p.

Exercice 3

1 - Quand n tend vers $+\infty$, la quantité $\frac{ne^{-x}+x^2}{n+x}$ tend vers e^{-x}. La suite f_n tend donc simplement vers la fonction $f(x) = e^{-x}$.

2 - Caculons la différence $f_n - f = \frac{ne^{-x}+x^2}{n+x} - e^{-x} = \frac{x^2 - xe^{-x}}{n+x}$. On voit que $|f_n - f| \leq \frac{1}{n}$. La quantité $|f_n - f|$ est majorée indépendamment de x par une suite qui tend vers 0, donc f_n tend uniformément vers f.

3 - Chacune des fonctions f_n est continue sur le compact $[0, 1]$ et la suite f_n tend uniformément vers $f(x) = e^{-x}$. Donc la suite des intégrales $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx$ tend vers l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 e^{-x}dx = \frac{e-1}{e}$.

Exercice 4

1 - Pour $x < 0$, la suite $\left|(-1)^n \frac{e^{-nx}}{n^2+1}\right|$ tend vers $+\infty$; la série f diverge grossièrement. Pour $x \geq 0$, le terme $\left|(-1)^n \frac{e^{-nx}}{n^2+1}\right|$ est majoré (indépendamment de x) par $\frac{1}{n^2+1}$ qui est celui d'une série convergente. Donc la série converge.

2 - D'après ce qui précède, la série f converge normalement, donc uniformément. Comme son terme général est une fonction continue, sa somme f est une fonction continue.

MEÉF 1 - Mathématiques
DS4 - 14 Décembre 2015
Analyse - Géométrie

Exercice 1

On se propose de résoudre l'équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants (la variable étant désignée par t) :

(E) $$x''(t) - 2x'(t) + x(t) = e^t.$$

1 - Résoudre complètement l'équation homogène (EH) associée à l'équation (E). On notera $x_0(t)$ la solution générale.

2 - Déterminer une solution particulière $x_1(t)$ de l'équation (E).

3 - Donner la solution générale $x(t)$ de l'équation (E).

4 - Donner la solution x au problème de Cauchy $x''(t) - 2x'(t) + x(t) = e^t$ avec les conditions initiales $x(0) = 0$ et $x'(0) = 1$.

5 - Étudier les variations de la fonction x ainsi obtenue et en donner une représentation graphique dans un repère orthonormé.

Exercice 2

De la même façon que précédemment, on se propose de résoudre l'équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants :

(E) $$x''(t) + x(t) = 2\cos t.$$

1 - Résoudre l'équation homogène (EH) associée à l'équation (E). On notera $x_0(t)$ la solution générale.

2 - Déterminer une solution particulière $x_1(t)$ de l'équation (E).

3 - Donner la solution générale $x(t)$ de l'équation (E).

4 - Donner la solution x au problème de Cauchy $x''(t)+x(t) = 2\cos t$ avec les conditions initiales $x(0) = 0$ et $x'(0) = 1$.

Exercice 3

Une boîte contient 5 jetons de forme identique numérotés de 1 à 5. L'expérience consiste à extraire un jeton de la boîte, à noter son numéro X ; puis, après l'avoir remis dans la boîte, à extraire à nouveau un jeton et à noter son numéro Y. Le couple (X, Y) est ainsi le résultat de l'expérience. À chaque extraction de jeton on suppose évidemment l'équiprobabilité. On définit la variable aléatoire Z par :

$$Z = \begin{cases} -1 & \text{si } X > Y \\ 0 & \text{si } X < Y \\ 2 & \text{si } X = Y. \end{cases}$$

1 - Donner la loi de probabilité de Z.

2 - Calculer l'espérance mathématique $E(Z)$ de Z ainsi que son écart-type $\sigma(Z)$.

Exercice 4

Soit (X, Y) un vecteur aléatoire dont la distribution de probabilité est donnée par le tableau qui suit :

$X \backslash Y$	1	-1
-1	$\frac{p}{2}$	$\frac{1-p}{2}$
1	$\frac{1-p}{2}$	$\frac{p}{2}$

où p est un nombre réel strictement compris entre 0 et 1 et différent de $\frac{1}{2}$. On pose $Z = XY$.

1 - Calculer la distribution de probabilité de Z et son espérance mathématique.

2 - Calculer l'espérance mathématique de X et celle de Y.

3 - Montrer que X et Y ne sont pas indépendantes.

Exercice 5

Un essai pouvant conduire à un succès ou à un échec, on effectue n essais indépendants. On note p_i la probabilité d'un succès au $i^{\text{ème}}$ essai et on pose :

$$\overline{p} = \frac{1}{n}(p_1 + \cdots + p_n).$$

Soit X le nombre de succès au cours de ces n essais.

1 - Calculer l'espérance mathématique de X et sa variance.

2 - Démontrer l'inégalité $P\left(\left|\frac{X}{n} - \overline{p}\right| \geq c\right) \leq \frac{1}{4nc^2}$.

Exercice 6

1 - On considère le polynôme $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx$. Déterminer a, b et c de telle sorte que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on ait $P(x+1) - P(x) = x^2$. (On donnera $P(x+1)$ sous forme factorisée.) En déduire la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$ pour tou $n \in \mathbb{N}^*$.

Soient Ω l'ensemble $\{1, \cdots, n\}$, $a \in]1, +\infty[$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ et $P : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie comme suit :

$$P(A) = \sum_{k \in A} \ell n(a^k).$$

2 - Déterminer la valeur de a pour que P soit une probabilité sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A})$.

3 - Soit $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ la variable aléatoire définie par $X(k) = k$ (a étant la valeur trouvée précédemment). Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ de X.

CORRIGÉ

Exercice 1

1 - L'équation caractéristique de l'équation homogène est $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$. Elle a une racine double $\lambda = 1$. Donc la solution générale est :

$$x_0(t) = (C_1 + C_2 t)e^t \quad \text{où } C_1 \text{ et } C_2 \text{ sont des constantes réelles.}$$

2 - Comme le second membre de l'équation (E) est e^t et que 1 est racine double de l'équation caractéristique, nous allons chercher la solution particulière $x_1(t)$ sous la forme $\alpha t^2 e^t$. En reportant dans (E), on obtient l'égalité $2\alpha e^t = e^t$. D'où $\alpha = \frac{1}{2}$.

3 - La solution générale de l'équation (E) est la somme de la solution particulière $x_1(t)$ et de la solution générale $x_0(t)$ de l'équation (EH), c'est-à-dire :

$$x(t) = \left(C_1 + C_2 t + \frac{t^2}{2}\right) e^t \quad \text{où } C_1 \text{ et } C_2 \text{ sont des constantes réelles.}$$

4 - Comme on vient de le voir, la solution générale est $x(t) = \left(C_1 + C_2 t + \frac{t^2}{2}\right) e^t$. La condition initiale $x(0) = 0$ donne $C_1 = 0$. La condition $x'(0) = 1$ donne $C_1 + C_2 = 1$ et donc $C_2 = 1$. Finalement la solution au problème de Cauchy posé est :

$$x(t) = \left(t + \frac{t^2}{2}\right) e^t.$$

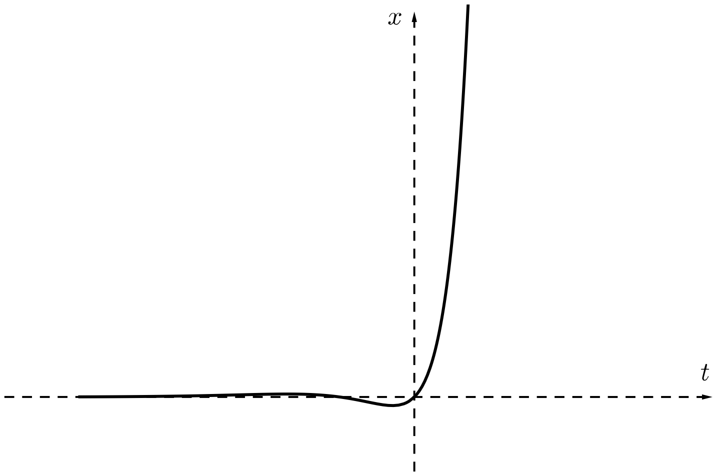
5 - La fonction $x(t) = \left(t + \frac{t^2}{2}\right) e^t$ est définie sur $\mathbb{R}$ et y est indéfiniment dérivable. Sa dérivée est :

$$x'(t) = \frac{1}{2}\left(t^2 + 4t + 2\right) e^t.$$

Elle s'annule en $t_1 = -2 - \sqrt{2}$ et $t_2 = -2 + \sqrt{2}$, valeurs toutes les deux négatives. On pose $\theta_1 = x(t_1) = (1 + \sqrt{2})e^{-(2+\sqrt{2})} > 0$ et $\theta_2 = x(t_2) = (1 - \sqrt{2})e^{-(2-\sqrt{2})} < 0$. Ci-dessous le tableau de variation de x :

t	$-\infty$		t_1		t_2		$+\infty$
x'			0		0		
x	0^+	$\nearrow$	θ_1	$\searrow$	θ_2	$\nearrow$	$+\infty$

et son graphe (qui admet l'axe des t comme asymptote horizontale au voisinage de $-\infty$) :



Exercice 2

1 - L'équation caractéristique de l'équation homogène est $\lambda^2 + 1 = 0$. Elle a deux racines complexes $\lambda = i$ et $\overline{\lambda} = -i$. Donc la solution générale est :

$$x_0(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t \quad \text{où } C_1 \text{ et } C_2 \text{ sont des constantes réelles.}$$

2 - Comme le second membre de l'équation (E) est $2 \cos t$ et que 1 est la partie imaginaire de la racine simple $\lambda = i$ de l'équation caractéristique, nous allons chercher la solution $x_1(t)$ sous la forme $t(d_1 \cos t + d_2 \sin t)$. En reportant dans (E), on obtient $d_2 \cos t - d_1 \sin t = \cos t$, ce qui donne $d_1 = 0$ et $d_2 = 1$. La solution particulière $x_1(t)$ est donc $x_1(t) = t \sin t$.

3 - La solution générale de l'équation (E) est la somme de la solution particulière $x_1(t)$ et de la solution générale $x_0(t)$ de l'équation (EH), c'est-à-dire :

$$x(t) = C_1 \cos t + (C_2 + t) \sin t \quad \text{où } C_1 \text{ et } C_2 \text{ sont des constantes réelles.}$$

4 - Comme on vient de le voir, la solution générale est $x(t) = C_1 \cos t + (C_2 + t) \sin t$. La condition initiale $x(0) = 0$ donne $C_1 = 0$. La condition $x'(0) = 1$ donne $C_2 = 1$. Finalement la solution au problème de Cauchy posé est :

$$x(t) = (1 + t) \sin t.$$

Exercice 3

1 - L'ensemble des valeurs de la variable aléatoire Z est $\{-1, 0, 2\}$. Les événements $\{Z = -1\}$, $\{Z = 0\}$ et $\{Z = 2\}$ sont donnés explicitement :

$$\{Z = -1\} = \{(2,1), (3,1), (3,2), (4,1), (4,2), (4,3), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4)\}$$

$$\{Z = 0\} = \{(1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (2,3), (2,4), (2,5), (3,4), (3,5), (4,5)\}$$
$$\{Z = 2\} = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5)\}$$

et ont respectivement pour cardinaux 10, 10 et 5. Voici donc la distribution de probabilité de la variable aléatoire Z.

Z	-1	0	2
$P(Z=k)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$

2 - On sait que pour une variable aléatoire finie Z qui prend les valeurs $z_1, \cdots, z_n$ avec les probabilités respectives $p_1, \cdots, p_n$, la moyenne se calcule par la formule $E(Z) = \sum_{k=1}^{n} z_k p_k$. Dans notre cas :

$$E(Z) = (-1) \times \frac{2}{5} + 0 \times \frac{2}{5} + 2 \times \frac{1}{5} = 0.$$

Comme $\text{Var}(Z) = E(Z^2) - E(Z)^2 = E(Z^2)$, on a $\text{Var}(Z) = (-1)^2 \times \frac{2}{5} + 0^2 \times \frac{1}{5} + 2^2 \times \frac{1}{5} = \frac{6}{5}$.

Exercice 4

1 - la variable aléatoire Z prend deux valeurs : -1 et 1. Sa distribution de probabilité est donnée comme suit :

$$\begin{aligned} P(Z=-1) &= P(\{X=-1 \text{ et } Y=1\} \text{ ou } \{X=1 \text{ et } Y=-1\}) \\ &= P(\{X=-1 \text{ et } Y=1\}) + P(\{X=1 \text{ et } Y=-1\}) \\ &= \frac{p}{2} + \frac{p}{2} \\ &= p \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} P(Z=1) &= P(\{X=-1 \text{ et } Y=-1\} \text{ ou } \{X=1 \text{ et } Y=1\}) \\ &= P(\{X=-1 \text{ et } Y=-1\}) + P(\{X=1 \text{ et } Y=1\}) \\ &= \frac{1-p}{2} + \frac{1-p}{2} \\ &= 1-p. \end{aligned}$$

Son espérance mathématique est $E(Z) = (-1)p + 1 \cdot (1-p) = 1 - 2p$. Elle est non nulle car $p \neq \frac{1}{2}$.

2 - Les lois de X et Y sont les lois marginales du couple aléatoire (X, Y). Les voici :

$$\begin{aligned}
P(X=-1) &= P(\{X=-1 \text{ et } Y=-1\} \text{ ou } \{X=-1 \text{ et } Y=1\}) \\
&= P(\{X=-1 \text{ et } Y=-1\}) + P(\{X=-1 \text{ et } Y=1\}) \\
&= \frac{1-p}{2} + \frac{p}{2} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
P(X=1) &= P(\{X=1 \text{ et } Y=-1\} \text{ ou } \{X=1 \text{ et } Y=1\}) \\
&= P(\{X=1 \text{ et } Y=-1\}) + P(\{X=1 \text{ et } Y=1\}) \\
&= \frac{p}{2} + \frac{1-p}{2} \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

La variable marginale Y a la même loi que X. Un calcul immédiat donne :

$$E(X) = E(Y) = (-1) \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = 0.$$

3 - On sait que lorsque deux variables aléatoires sont indépendantes, la moyenne de leur produit est le produit de leurs moyennes. Mais ici $E(XY) = 1 - 2p$ est non nul alors que le produit $E(X)E(Y)$ est nul. Les variables X et Y ne sont donc pas indépendantes.

Exercice 5

Pour $i \in \{1, \cdots, n\}$, soit X_i la variable aléatoire définie par $X_i = 1$ si le $i^{\text{ème}}$ essai est un succès et 0 sinon. Les essais étant indépendants, les variables $X_1, \cdots, X_n$ sont aussi indépendantes et on a clairement $X = X_1 + \cdots + X_n$.

1 - On a $E(X) = E(X_1) + \cdots + E(X_n)$ et $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}(X_1) + \cdots + \mathrm{Var}(X_n)$. Comme X_i suit une loi de Bernouilli de pramètre p_i, on a $E(X_i) = p_i$ et $\mathrm{Var}(X_i) = p_i(1-p_i)$. D'où :

$$E(X) = p_1 + \cdots + p_n = n\overline{p} \quad \text{ et } \quad \mathrm{Var}(X) = p_1(1-p_1) + \cdots + p_n(1-p_n).$$

2 - L'inégalité $\left|\frac{X}{n} - \overline{p}\right| \geq c$ est équivalente à $|X - n\overline{p}| \geq nc$ *i.e.* $|X - E(X)| \geq nc$. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a :

$$P(|X - E(X)| \geq nc) \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{n^2c^2}$$

c'est-à-dire :

$$P\left(\left|\frac{X}{n} - \overline{p}\right| \geq c\right) \leq \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i(1-p_i)}{n^2c^2}.$$

Un calcul immédiat (utilisant éventuellement une dérivée) montre que chaque terme $p_i(1-p_i)$ a pour maximum $\frac{1}{4}$ atteint pour $p_i = \frac{1}{2}$. Le maximum de $\text{Var}(X)$ est donc $\frac{n}{4}$; ce qui implique que le maximum de $\frac{\text{Var}(X)}{n^2c^2}$ est $\frac{1}{4nc^2}$. Finalement on a l'inégalité :

$$P\left(\left|\frac{X}{n} - \overline{p}\right| \geq c\right) \leq \frac{1}{4nc^2}.$$

Exercice 6

1 - La condition $P(x+1)-P(x) = a((x+1)^3-x^3)+b((x+1)^2-x^2)+c((x+1)-x) = x^2$ nous donne le système linéaire en a, b et c :

$$\begin{cases} 3a = 1 \\ 3a + 2b = 0 \\ a + b + c = 0 \end{cases}$$

dont les solutions sont $a = \frac{1}{3}$, $b = -\frac{1}{2}$ et $c = \frac{1}{6}$. On a finalement $P(x) = \frac{1}{6}(2x^3 - 3x^2 + x)$ et

$$P(x+1) = \frac{x(x+1)(2x+1)}{6}.$$

On a :

$$\begin{aligned} P(1) - P(0) &= 0^2 \\ P(2) - P(1) &= 1^2 \\ P(3) - P(2) &= 2^2 \\ \cdots &= \cdots \\ P(n) - P(n-1) &= (n-1)^2 \\ P(n+1) - P(n) &= n^2. \end{aligned}$$

On fait la somme membre à membre de ces n égalités ; on obtient $0^2 + 1^2 + \cdots + n^2 = P(n+1) - P(0)$, c'est-à-dire

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

2 - Soient $A, B \in \mathcal{A}$ tels que $A \cap B = \emptyset$. Alors :

$$P(A \cup B) = \sum_{k \in A \cup B} \ell n(a^k) = \sum_{k \in A} \ell n(a^k) + \sum_{k \in B} \ell n(a^k) = P(A) + P(B).$$

(L'ensemble Ω étant fini, la σ-additivité n'a pas lieu d'être vérifiée.)

Reste la condition $P(\Omega) = 1$, c'est-à-dire $\ell n(a) \sum_{k=1}^{n} k = 1$. Mais $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$, donc $a = e^{\frac{2}{n(n+1)}}$.

3 - X prend les valeurs $1, \cdots, n$ avec les probabilités $\ell n(a), 2\ell n(a), \cdots, n\ell n(a)$. Son espérance mathématique est alors (en tenant compte de $\ell n(a) = \frac{2}{n(n+1)}$) :

$$E(X) = \sum_{k=1}^{n} k(k\ell n(a)) = \ell n(a) \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \ell n(a) = \frac{2n+1}{3}.$$

MEÉF 1 Second degré - Mathématiques
DS de rattrapage - 25 février 2016
Analyse et probabilités

Exercice 1

Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction continue décroissante de graphe noté Γ. Pour tout entier $n \geq 1$, on considère la subdivision :

$$0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = 1$$

de l'intervalle $[0,1]$ en n segments $[x_{i-1}, x_i]$ (avec $i = 1, \cdots, n$) tous de même longueur. On note σ_n la somme des aires des rectangles grisés de la Figure 1, Σ_n celle des aires des rectangles grisés de la Figure 2 et J la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$. (Les figures 1 et 2 sont données pour $n = 4$ à titre d'exemple. Il est évident que le calcul doit se faire pour n quelconque.)

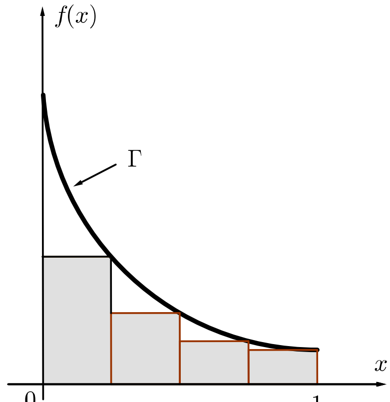


Figure 1

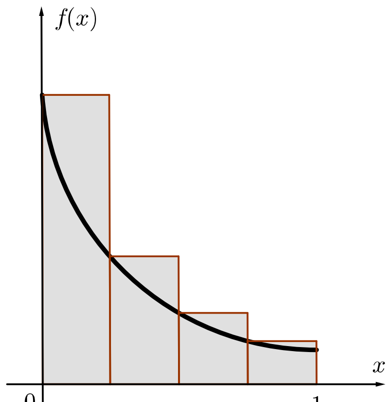


Figure 2

1 - Donner les expressions respectives des sommes σ_n et Σ_n en fonction des valeurs de la fonction f aux points x_i, $i = 0, 1, \cdots, n$.

2 - Comparer les quantités J, σ_n et Σ_n et calculer la différence $\Sigma_n - \sigma_n$.

3 - Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \Sigma_n = \lim_{n\to+\infty} \sigma_n = J.$$

4 - Donner une majoration pour chacune des expressions $\Sigma_n - J$ et $J - \sigma_n$ en fonction de l'entier n.

5 - Appliquer ce qui précède pour calculer l'intégrale qui suit à $\frac{1}{10}$ près :

$$J = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}.$$

6 - Cette fois-ci f est la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{1+x}$. Calculer la somme Σ_n et en déduire que :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} \right) = \text{Log } 2.$$

Exercice 2

L'épreuve aléatoire consiste à tirer à l'arc sur un disque de centre ω et de rayon $R > 0$ de bord un cercle Γ. On suppose que quel que soit le tir, le disque est atteint en un point M. Ainsi, l'ensemble Ω des événements élémentaires peut être représenté par le disque en question. La probabilité d'atteindre une partie U (dont on sait mesurer l'aire, en particulier un ouvert) de Ω est $P(U) = \frac{\text{aire}(U)}{\text{aire}(\Omega)}$. On note X la variable aléatoire sur Ω mesurant la distance de M à ω.

1 - Déterminer la fonction de répartition F de X ainsi que sa densité f.

2 - Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ de X ainsi que son écart-type $\sigma(X)$.

3 - Calculer la probabilité de l'événement $\{X \leq \frac{R}{4}\}$.

4 - Calculer la probabilité de l'événement :

$$E = \{\text{la cible est atteinte à l'intérieur d'un carré ayant ses sommets sur le cercle } \Gamma\}.$$

CORRIGÉ

Exercice 1

1 - Les rectangles de la Figure 1 ont pour largeur commune $\frac{1}{n}$; la hauteur du $i^{\text{ème}}$ rectangle (avec $i = 1, \cdots, n$) est égale à la valeur de la fonction f au point $x_i = \frac{i}{n}$. D'où :

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot f(x_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right).$$

De la même manière, les rectangles de la Figure 2 ont pour largeur commune $\frac{1}{n}$; la hauteur du $i^{\text{ème}}$ rectangle (avec $i = 1, \cdots, n$) est égale à la valeur de la fonction f au point $x_{i-1} = \frac{i-1}{n}$. D'où $\Sigma_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot f(x_{i-1}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i-1}{n}\right)$.

2 - On a :

$$J = \int_0^1 f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \geq \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \int_{x_{i-1}}^{x_i} dx = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) = \sigma_n.$$

De même :

$$J = \int_0^1 f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \leq \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1}) \int_{x_{i-1}}^{x_i} dx = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1}) = \Sigma_n.$$

Ce qui nous donne la double inégalité $\sigma_n \leq J \leq \Sigma_n$. De façon évidente, on a l'égalité :

$$\Sigma_n - \sigma_n = \frac{1}{n}(f(0) - f(1)).$$

3 - On a $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} (\Sigma_n - \sigma_n) = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{n}(f(0) - f(1))\right) = 0$. Et comme en plus $\sigma_n \leq J \leq \Sigma_n$, on en déduit $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \Sigma_n = \lim_{n \to +\infty} \sigma_n = J$.

4 - De façon immédiate on voit que :

$$\Sigma_n - J \leq \Sigma_n - \sigma_n = \left(\frac{1}{n}(f(0) - f(1))\right)$$

et :

$$J - \sigma_n \leq \Sigma_n - \sigma_n = \left(\frac{1}{n}(f(0) - f(1))\right).$$

5 - Le nombre n de rectangles nécessaires pour donner une valeur approximative à l'intégrale en question à $\frac{1}{10}$ près est tel que $\Sigma_n - \sigma_n \leq \frac{1}{10}$, c'est-à-dire $\frac{1}{n}(f(0) - f(1)) \leq \frac{1}{10}$ ou encore : $n \geq 10(f(0) - f(1)) = 10(1 - 0,5) = 5$. On doit donc découper l'intervalle $[0, 1]$ en 5 intervalles de longueur $\frac{1}{5}$. On a alors une valeur approchée par défaut de l'intégrale :

$$J = \int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2} = \frac{1}{5} \left\{ f\left(\frac{1}{5}\right) + f\left(\frac{2}{5}\right) + f\left(\frac{3}{5}\right) + f\left(\frac{4}{5}\right) + f\left(\frac{5}{5}\right) \right\} \simeq 0,73.$$

6 - On a :

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n}\right) &= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right)\\ &= \lim_{n\to+\infty}\sigma_n\\ &= \int_0^1\frac{dx}{1+x}\\ &= \ell n(2).\end{aligned}$$

Exercice 2

1 - Par définition $F(x) = P(X \leq x)$ pour $x \in \mathbb{R}$. Ce qui nous donne pour $x \in [0, R]$, $F(x) = \frac{\pi x^2}{\pi R^2} = \left(\frac{x}{R}\right)^2$. En définitive :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \left(\frac{x}{R}\right)^2 & \text{si } 0 \leq x \leq R \\ 1 & \text{si } x \geq R. \end{cases}$$

La fonction F est continue partout et dérivable en tout point $x \in \mathbb{R} \setminus \{R\}$; en $x = R$, elle a une dérivée à gauche qui vaut $\frac{2}{R}$ et une dérivée à droite qui vaut 0. La densité de probabilité f de la variable X est donc (en dehors du point $x = R$) :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{2x}{R^2} & \text{si } 0 \leq x < R \\ 0 & \text{si } x > R. \end{cases}$$

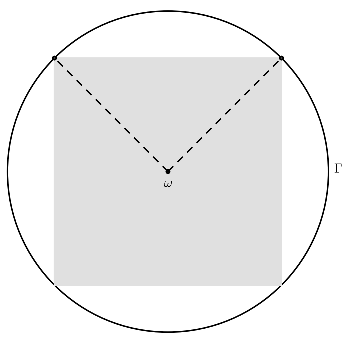
2 - On a $E(X) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^R \frac{2x^2}{R^2}dx = \left[\frac{2x^3}{3R^2}\right]_0^R = \frac{2R}{3}$. De même, on calcule l'espérance de X^2 :

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \int_0^R \frac{2x^3}{R^2}dx = \left[\frac{x^4}{2R^2}\right]_0^R = \frac{R^2}{2}.$$

Par suite $\text{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{R^2}{2} - \left(\frac{2R}{3}\right)^2 = \frac{R^2}{18}$ et donc $\sigma(X) = \frac{R}{3\sqrt{2}}$.

3 - De façon immédiate $P\left(X \leq \frac{R}{4}\right) = F\left(\frac{R}{4}\right) = \frac{1}{16}$.

4 - À rotation près, il n'y a qu'un seul carré inscrit dans le cercle Γ. Son côté vaut $R\sqrt{2}$ et donc son aire est $2R^2$. Par suite la probabilité de l'événement E est $P(E) = \frac{2R^2}{\pi R^2} = \frac{2}{\pi}$.



MEÉF 1 - Mathématiques
Devoir surveillé - 24 mars 2016
Partie I : Analyse & Probabilités

Exercice 1

Pour tout entier $n \geq 0$, on note I_n l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\text{tg } x)^n dx$.

1 - Trouver une relation de récurrence entre I_{n+2} et I_n. (Indication : *Calculer* $I_{n+2}+I_n$ *et se rappeler ce qu'est la dérivée de la fonction* tg.) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

2 - Justifier la convergence de la série :

$$S = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + (-1)^{k-1}\frac{1}{2k-1} + \cdots$$

et calculer sa somme en passant par les quantités I_{2k}.

Exercice 2

Soient J un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dira que f est *analytique* si, pour tout $x_0 \in J$, il existe $\varepsilon > 0$ avec $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\subset J$ et une suite de réels $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tels que, pour tout $x \in]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$, la série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ soit convergente de somme $f(x)$. On admet que la suite (a_n) est unique.

1 - Montrer que si f est analytique, alors elle est de classe C^∞. Montrer qu'en tout point x_0 de J et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$. (La fonction $f^{(n)}$ est la dérivée $n^{\text{ème}}$ de f.)

On définit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

2 - Montrer que f est de classe C^∞.

3 - Montrer que f n'est pas analytique.

Exercice 3

On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme euclidienne $||(x,y)|| = \sqrt{x^2+y^2}$. Soient $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x)\}$ son graphe. On pose :

$$U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\} \quad \text{et} \quad \Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma.$$

1 - Montrer que U et Ω sont des ouverts de $\mathbb{R}^2$ et que U n'est pas connexe.

2 - Montrer que la restriction à U de l'application $\phi : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto (x, y+f(x)) \in \mathbb{R}^2$ induit un homéomorphisme de U sur Ω.

3 - Montrer que Ω n'est pas connexe.

4 - On note F la partie de $\mathbb{R}^2$ constituée des points (x,y) qui vérifient les conditions :

$$\begin{cases} x^2+y^2 \geq 1 \\ x - y \leq 0 \\ x + y \leq 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} y = 0 \\ x \geq -1. \end{cases}$$

Dessiner la partie F. Montrer qu'elle est fermée et connexe par arcs. Quel est son intérieur $\overset{\circ}{F}$?

Exercice 4

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on note Γ l'intersection du cercle de centre l'origine et de rayon $\rho > 0$ avec le demi-plan fermé supérieur (*i.e.* d'inéquation $y \geq 0$). Sur $\mathbb{R}$ on considère la variable aléatoire réelle X ne prenant ses valeurs que dans l'intervalle $[-\rho, \rho]$ et ayant une densité continue f dont le graphe sur $[-\rho, \rho]$ est Γ.

1 - Calculer ρ pour que f soit effectivement une densité de probabilité.

2 - Donner l'expression exacte de f.

3 - Déterminer la fonction de répartition de X.

4 - Calculer l'espérance mathématique de X.

CORRIGÉ

Exercice 1

1 - Rappelons que $f'(x) = 1 + (\text{tg})^2$. On a :

$$I_{n+2} + I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} ((\text{tg } x)^2 + 1)(\text{tg } x)^n dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f'(x)(f(x))^n dx = \left[\frac{(\text{tg } x)^{n+1}}{n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{n+1}.$$

Comme $I_{n+2} > 0$ et $I_n > 0$, on a $0 < I_n < \frac{1}{n+1}$. Par suite $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

2 - $S = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + (-1)^{k-1}\frac{1}{2k-1} + \cdots$ est une série alternée dont la valeur absolue du terme général tend vers 0 en décroissant ; elle converge donc. D'autre part, d'après ce qui précède :

$$\begin{aligned}
I_2 + I_0 &= 1 \\
-(I_4 + I_2) &= -\frac{1}{3} \\
I_6 + I_4 &= \frac{1}{5} \\
-(I_8 + I_6) &= -\frac{1}{7} \\
\cdots\cdots &= \cdots \\
(-)^{k-2}(I_{2k-2} + I_{2k-4}) &= (-1)^{k-2}\frac{1}{2k-3} \\
(-1)^{k-1}(I_{2k} + I_{2k-2}) &= (-1)^{k-1}\frac{1}{2k-1}.
\end{aligned}$$

D'où, en faisant la somme membre à membre :

$$S_k = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + (-1)^{k-1}\frac{1}{2k-1} = I_0 + (-1)^{k-1} I_{2k}.$$

Par suite :

$$S = \lim_{k\to+\infty} S_k = I_0 + \lim_{k\to+\infty} I_{2k} = I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} dx = \frac{\pi}{4}.$$

Exercice 2

1 - Soit $x_0 \in J$. Comme f est analytique, il existe $\varepsilon > 0$ et une suite (a_n) le tout tel que $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\subset J$ et $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$. Soit $\rho \in [0, \varepsilon[$. Alors la série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ converge uniformément vers $f(x)$ sur $[x_0 - \rho, x_0 + \rho]$. La fonction f est donc de classe C^∞ en vertu des théorèmes démontrés en cours sur les séries entières.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors f est dérivable jusqu'à l'ordre n sur $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$ de dérivée $n^{\text{ème}}$ donnée par $f^{(n)}(x) = n!a_n + (x - x_0)g(x)$ où g est une fonction de classe C^∞ sur

$]x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon[\subset J$. Si on fait $x=x_0$, on obtient $f^{(n)}(x_0)=n!a_n$, qui nous donne l'égalité $a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$ qu'on cherche.

2 - Il est clair que f est de classe C^∞ sur l'ouvert $\mathbb{R}^*$ de $\mathbb{R}$. Regardons ce qui se passe en 0. Lorsque x tend vers 0, tout en étant différent de 0, x^2 tend vers 0^+ donc $-\frac{1}{x^2}$ tend vers $-\infty$ et par suite $e^{-\frac{1}{x^2}}$ tend vers 0. La fonction f est donc continue. Soit n un entier strictement positif. Alors un calcul facile montre que la dérivée d'ordre n pour $x\neq 0$ est de la forme : $f^{(s)}(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}e^{-\frac{1}{x^2}}$ où P et Q sont des polynômes en x. On sait alors que lorsque x tend vers 0 le produit de $e^{-\frac{1}{x^2}}$ et de la fraction rationnelle $\frac{P(x)}{Q(x)}$ tend vers 0. La fonction f admet donc une dérivée en 0 égale à 0. On a donc :

$$f^{(n)}(0)=0 \qquad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}.$$

3 - D'après ce qui précède, la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x_0)x^n$ est nulle pour tout x dans $\mathbb{R}$, en particulier sur tout intervalle ouvert $]-\varepsilon,\varepsilon[$ où ε est un réel strictement positif. Si f était analytique cette somme devrait représenter la fonction sur un intervalle du type $]-\varepsilon,\varepsilon[$, donc serait identiquement nulle, ce qui n'est pas le cas. Toutefois, f reste analytique sur $\mathbb{R}^*$.

Exercice 3

1 - La projection $(x,y)\in\mathbb{R}^2 \overset{p_2}{\longmapsto} y\in\mathbb{R}$ est continue ; par suite $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y=0\}=p_2^{-1}(\{0\})$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$, donc son complémentaire U est un ouvert. De même, $g:(x,y)\in\mathbb{R}^2\longmapsto (y-f(x))\in\mathbb{R}$ est continue, par suite la partie $\Gamma=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y=f(x)\}=g^{-1}(\{0\})$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$, donc son complémentaire Ω est un ouvert.

L'ouvert U n'est pas connexe car il est la réunion des deux ouverts disjoints tous les deux non vides :

$$U_+=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y>0\}=p_2^{-1}(]0,+\infty[)$$

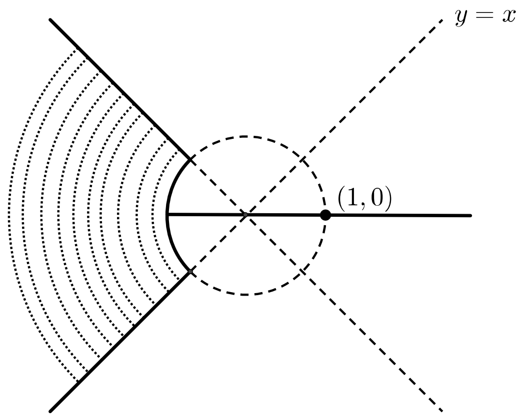
et

$$U_-=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y<0\}=p_2^{-1}(]-\infty,0[).$$

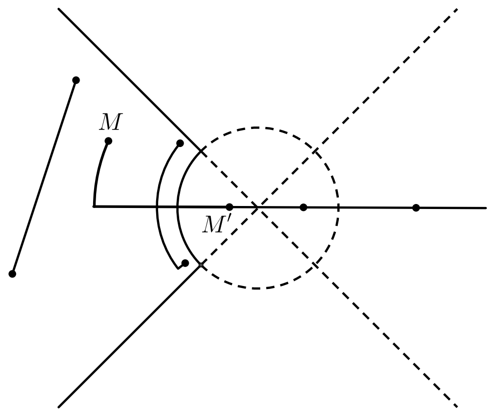
2 - L'application ϕ est clairement continue ; en plus, elle est bijective car elle admet comme inverse l'application $\phi^{-1}:(X,Y)\longrightarrow(X,Y-f(X))$ qui est aussi continue. Donc ϕ est un homéomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur lui-même ; il envoie tout point $(x,0)$ sur le point $(x,f(x))$ et réalise ainsi une bijection de $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y=0\}$ sur Γ. Donc la restriction de ϕ à l'ouvert U est un homéomorphisme sur l'ouvert Ω.

3 - Les deux ouverts U et Ω sont homéomorphes (par l'application ϕ). Comme U n'est pas connexe, Ω ne l'est pas non plus.

4 - On pose $F_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\geq 1\}$, $F_2=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x-y\leq 0\}$, $F_3=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x+y\leq 0\}$ et $F_4=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y=0 \text{ et } x\geq -1\}$; F_1, F_2, F_3 et F_4 sont fermés et $F=(F_1\cap F_2\cap F_3)\cup F_4$. Donc F est un fermé.

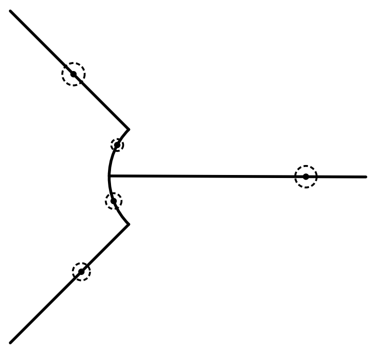


Pour montrer que F est connexe par arcs, nous nous contenterons de faire des dessins. Soient M et M' deux points de F ; nous distinguons trois cas : i) $M, M' \in F_1 \cap F_2 \cap F_3$; ii) $M \in F_1 \cap F_2 \cap F_3$ et $M' \in F_4$; iii) $M, M' \in F_4$.



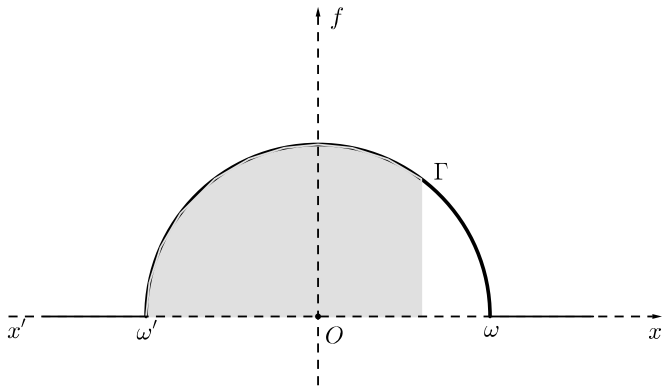
Les chemins menant de M à M' sont indiqués par différentes couleurs.
Le lecteur pourra trouver lui-même leurs paramétrages respectifs.

Par définition l'intérieur de F est le plus grand ouvert $\overset{\circ}{F}$ contenu dans F. La partie V définie par les inégalités $\begin{cases} x^2 + y^2 > 1 \\ x - y < 0 \\ x + y < 0 \end{cases}$ est un ouvert contenu dans F. Soit M un point de F qui n'est pas dans V ; alors M est forcément sur la partie en rouge de la figure ci-dessous : réunion d'un arc de cercle et de trois demi-droites. On peut montrer facilement (et on le voit clairement sur le dessin) que toute boule ouverte centrée en M touche le complémentaire de F et donc M n'est pas intérieur à F ; par suite $\overset{\circ}{F} = V$.



Exercice 4

Dessinons d'abord le demi-cercle Γ. Il nous servira pour les calculs que nous ferons dans toute la suite : pour la fonction de répartition F, la densité...



1 - La variable X ne prend ses valeurs qu'entre $-\rho$ et ρ. Cela signifie que la probabilité pour qu'elle prenne des valeurs en dehors de l'intervalle $[-\rho, \rho]$ est nulle. Comme sa densité f est supposée continue, son graphe est constitué de la demi-droite Ox', du demi-cercle Γ et de la demi-droite Ox (*cf.* dessin ci-dessus). Et pour que f soit effectivement une densité de probabilité il faut que l'aire du demi-disque grisé soit égale à 1. Ce qui nous donne $\rho = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$.

2 - La densité f a pour expression exacte $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| > \sqrt{\frac{2}{\pi}} \\ \sqrt{\frac{2}{\pi} - x^2} & \text{si } x \in \left[-\sqrt{\frac{2}{\pi}}, \sqrt{\frac{2}{\pi}}\right]. \end{cases}$

3 - On se rappelle que $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(x)dx$. En effectuant des calculs sans difficulté, directs mais assez lourds, on trouve :

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \\ \frac{1}{\pi}\left[\sin\left(2\text{Arcsin}\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}x\right)\right) + \text{Arcsin}\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}x\right) + \frac{\pi}{2}\right] \quad \text{si } x \in \left[-\sqrt{\frac{2}{\pi}}, \sqrt{\frac{2}{\pi}}\right] \\ 1 \text{ si } x > \sqrt{\frac{2}{\pi}}. \end{cases}$$

4 - On a $E(X) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{-\rho}^{\rho} x\sqrt{\rho^2 - x^2}dx = 0$ car la fonction $x\sqrt{\rho^2 - x^2}$ est impaire et l'intervalle d'intégration $[-\rho, \rho]$ a 0 comme centre de symétrie.

MEÉF 1 Second degré - Mathématiques
DS2 - 3 octobre 2016 - Mathématiques fondamentales

Exercice 1

Partie I

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par $f_n(x) = \frac{x^n}{n!}e^{1-x}$.

1 - Calculer la limite de $\ell n\left(\frac{x^n}{e^x}\right)$ pour x tendant vers $+\infty$. En déduire la limite de $\frac{x^n}{e^x}$ pour x tendant vers $+\infty$. (Ici ℓn désigne le logarithme népérien.)

2 - Donner le tableau de variation de la fonction f_n en distinguant le cas n pair du cas n impair.

3 - Tracer dans un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ les courbes représentatives Γ_2 et Γ_3 respectivement des fonctions f_2 et f_3.

4 - Montrer que, pour $0 \leq x \leq 1$, on a $0 \leq f_n(x) \leq \frac{1}{n!}$.

Partie II

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $I_n(x) = \int_0^x \frac{t^n}{n!}e^{1-t}dt$.

5 - En usant d'une intégration par parties, calculer la valeur de l'intégrale $I_1(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

6 - De même, en usant d'une intégration par parties, établir la relation de récurrence qui suit :

$$I_n(x) - I_{n-1}(x) = -\frac{x^n}{n!}e^{1-x}.$$

7 - Démontrer que, pour tout x et tout n, on a $I_n(x) = e - e^{1-x}\left[1 + \frac{x}{1!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right]$.

8 - Pour n fixé, quelle est la limite de $I_n(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

Partie III

On pose $J_n = I_n(1) = \int_0^1 \frac{t^n}{n!}e^{1-t}dt$.

9 - Établir la double-inégalité : $0 \leq J_n \leq \frac{1}{n!}$. En déduire, en prenant en compte ce que vaut $I_n(x)$, que :

$$0 \leq e - \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!} \quad \text{et} \quad \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!} \leq e \leq \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!} + \frac{1}{n!}.$$

10 - Quelle est la limite, quand n tend vers $+\infty$, de la quantité $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!}$?

11 - En calculant $\displaystyle\sum_{p=0}^{7} \frac{1}{p!}$, donner un encadrement du nombre e.

Exercice 2

On munit le plan euclidien $\mathcal{P}$ d'un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Un point M de $\mathcal{P}$ sera repéré par ses coordonnées cartésiennes (x, y) ou par son affixe $z = x + iy$ si on identifie $\mathcal{P}$ au plan complexe $\mathbb{C}$.

On note Γ le cercle de centre O et de rayon 1. Soit f l'application de $\mathcal{P}^* = \mathcal{P} \setminus \{O\}$ qui, au point M d'affixe z, associe le point $M' = f(M)$ d'affixe $z' = z + i - \frac{1}{z}$.

Soient A et B les points d'affixes respectives $a = i$ et $b = e^{i\frac{\pi}{6}}$. Les affixes de leurs images A' et B' par l'applications f seront notées respectivement a' et b'.

1 - Calculer a' et b'.

2 - Placer les points A, A', B et B' dans le plan $\mathcal{P}$.

3 - Quelle est la nature du triangle OBB' ?

On s'intéresse à l'ensemble $\mathcal{E}$ de $\mathcal{P}^*$ dont l'image par f est le point O.

4 - Pour tout nombre complexe z, déterminer les deux complexes α et β tels que :

$$z^2 + iz - 1 = (z - \alpha)(z - \beta).$$

En déduire l'affixe de chacun des points de $\mathcal{E}$.

5 - Démontrer que $\mathcal{E}$ est contenu dans Γ.

6 - Déterminer z' lorsque $z = e^{i\theta}$.

7 - En déduire que si M appartient au cercle Γ alors $M' = f(M)$ appartient au segment $[A'C]$ où C est le point d'affixe $c = -i$.

Exercice 3

Soient $p \geq 2$ un nombre premier et E l'ensemble des entiers x tels que $1 \leq x \leq p - 1$.

1 - Montrer que, pour tout $x \in E$, il existe $y \in E$, unique, tel que l'entier xy soit congru à 1 modulo p.

2 - On note $\varphi : E \longrightarrow E$ l'application qui à x associe le y donné par la question 1. Est-elle bijective ? Si oui, quelle est son application réciproque φ^{-1} ?

3 - Quels sont les entiers $x \in E$ tels que $\varphi(x) = x$?

On rappelle le *Théorème de Bézout* : soient $a, b \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux. Alors il existe $m, n \in \mathbb{Z}$ tels que $ma + nb = 1$.

Exercice 4

Des études statistiques ont permis de modéliser le temps hebdomadaire (en heures) de connexion à Internet des jeunes en France âgés de 16 à 24 ans par une variable aléatoire T suivant une loi normale de moyenne $\mu = 13,9$ et d'écart type $\sigma = 4,1$.

On choisit un jeune au hasard.

1 - Quelle est la probabilité pour que son temps de connexion à Internet soit compris entre 5 heures 48 minutes et 22 heures ?

2 - Quelle est la probabilité pour qu'il soit connecté à Internet plus de 18 heures ?

Il sera tenu compte (4 points de la note) de la rédaction et de la présentation de la copie.

CORRIGÉ

Exercice 1

Partie I

1 - On a $\ell n\left(\frac{x^n}{e^x}\right) = \ell n(x^n) - \ell n(e^x) = n\ell n(x) - x = x\left(n\frac{\ell n(x)}{x} - 1\right)$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ell n(x)}{x}\right) = 0$, la limite de $\ell n\left(\frac{x^n}{e^x}\right)$ sera donc $-\infty$ lorsque $x \to -\infty$. Par suite $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^n}{e^x}\right) = 0$.

2 - La fonction f_n est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ tout entier ; sa dérivée est la fonction $f_n'(x) = \frac{e^{1-x}}{n!}x^{n-1}(n-x)$. Donnons le tableau de variation de f_n selon la parité de n.

x	$-\infty$		0		n		$+\infty$
$f_n{}'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f_n(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$f_n(n)$	↘	0

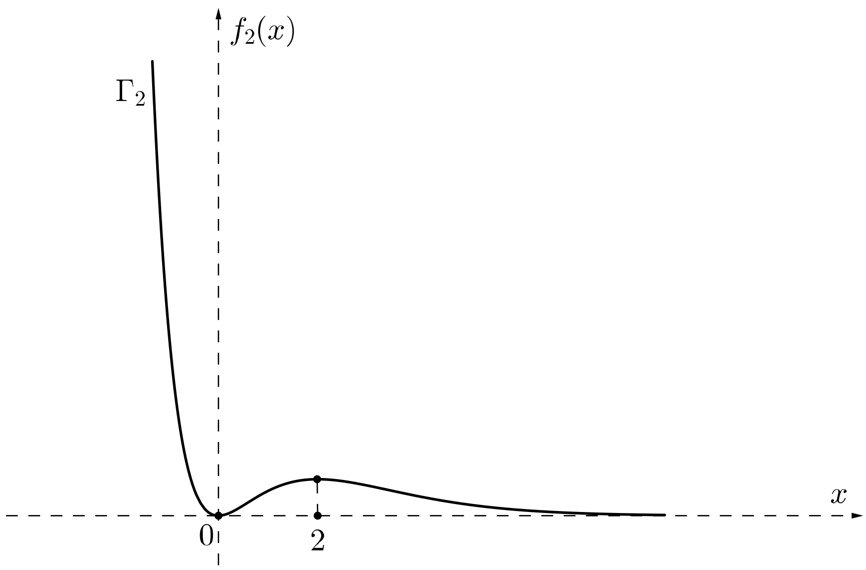
n pair

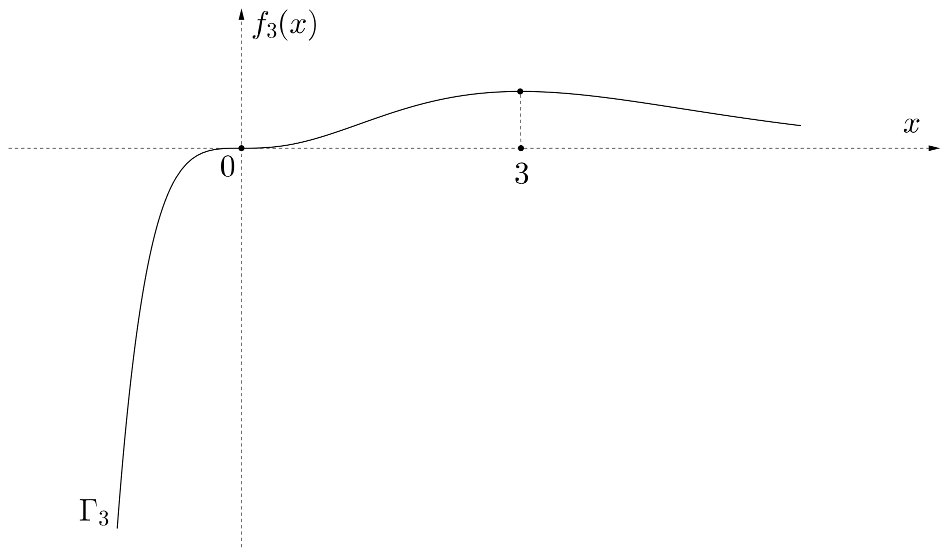
x	$-\infty$		0		n		$+\infty$
$f_n{}'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	
$f_n(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	$f_n(n)$	↘	0

n impair ≥ 3

Lorsque $n = 1$, la dérivée f_1' de f_1 vaut $f_1'(x) = e^{1-x}(1-x)$. Le tableau de variation de f_1 est le même que pour le cas impair $n \geq 3$ mais la dérivée f_1' ne s'annule cette fois-ci qu'au point $x = 1$.

3 - Voici les graphes Γ_2 et Γ_3 respectivement des fonctions f_2 et f_3.





4 - On voit sur les deux tableaux de variation que la fonction f_n (pour tout $n \geq 1$) est croissante sur l'intervalle $[0, 1]$. Comme elle vaut 0 pour $x = 0$ et $\frac{1}{n!}$ pour $x = 1$ on a $0 \leq f_n(x) \leq \frac{1}{n!}$ pour tout $x \in [0, 1]$.

Partie II

5 - On a :

$$\begin{aligned} I_1(x) &= \int_0^x te^{1-t}dt \\ &= \left[-te^{1-t}\right]_0^x + \int_0^x e^{1-t}dt \\ &= -xe^{1-x} + \left[-e^{1-t}\right]_0^x \\ &= e - e^{1-x}(1 + x). \end{aligned}$$

6 - On a :

$$\begin{aligned} I_n(x) &= \int_0^x \frac{t^n}{n!}e^{1-t}dt \\ &= \left[-\frac{t^n}{n!}e^{1-t}\right]_0^x + \int_0^x \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{1-t}dt \\ &= -\frac{x^n}{n!}e^{1-x} + I_{n-1}(x). \end{aligned}$$

Ceci n'est rien d'autre que la relation cherchée $I_n(x) - I_{n-1}(x) = -\frac{x^n}{n!}e^{1-x}$.

7 - On a $I_n(x) - I_1(x) = \displaystyle\sum_{p=2}^{n}(I_p(x) - I_{p-1}(x)) = -\left(\frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right) e^{1-x}$. Et comme $I_1(x) = e - e^{1-x}(1 + x)$, on obtient finalement :

$$I_n(x) = e - \left[1 + \frac{x}{1!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right] e^{1-x}.$$

8 - On peut écrire $I_n(x) = e\left(1 - \left[\frac{1}{e^x} + \frac{x}{e^x} + \frac{x^2}{2!e^x} + \cdots + \frac{x^n}{n!e^x}\right]\right)$. L'entier n étant fixé, la quantité $\frac{1}{e^x} + \frac{x}{e^x} + \frac{x^2}{2!e^x} + \cdots + \frac{x^n}{n!e^x}$ tend vers 0 d'après la question 1. Donc $I_n(x)$ a pour limite e lorsque x tend vers $+\infty$.

Partie III

9 - Par la question 4, on sait déjà que $0 \leq f_n(x) \leq \frac{1}{n!}$ pour $0 \leq x \leq 1$. Par suite $0 \leq J_n = \int_0^1 f_n(t)dt \leq \frac{1}{n!}$.

10 - On se rappelle que $J_n = I_n(1) = e - \left[1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right]$ par la question 7. Une application immédiate de la double-inégalité obtenue en 9 donne ce qu'on cherche, c'est-à-dire :

$$0 \leq e - \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!} \quad \text{et} \quad \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!} \leq e \leq \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!} + \frac{1}{n!}.$$

11 - On écrit $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!} \leq e \leq \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!} + \frac{1}{n!}$ pour $n = 7$:

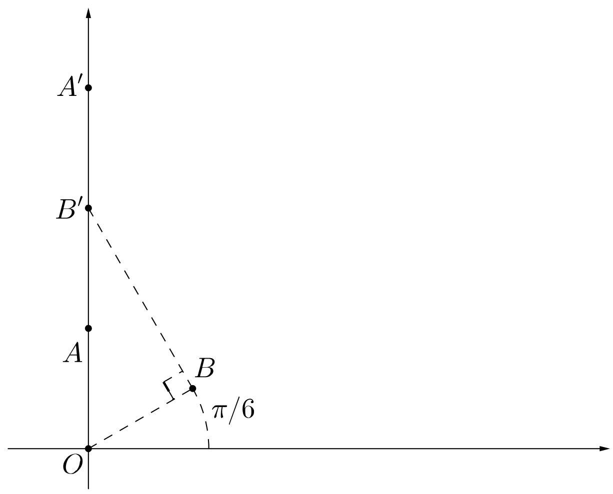
$$\sum_{p=0}^{7} \frac{1}{p!} \leq e \leq \sum_{p=0}^{7} \frac{1}{p!} + \frac{1}{7!}.$$

On obient alors l'encadrement $2,7182 < e < 2,7185$.

Exercice 2

1 - On a $a' = i + i - \frac{1}{i} = 3i$ et $b' = e^{i\frac{\pi}{6}} + i - e^{-i\frac{\pi}{6}} = i + 2i\sin(\frac{\pi}{6}) = 2i$.

2 - Les points A, A', B et B' sont placés sur la figure ci-dessous.



3 - On a $b' - b = 2i - e^{i\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2}(1 + \sqrt{3}i)$. D'où $OB^2 + BB'^2 = OB'^2$; le triangle OBB' est donc rectangle en B.

4 - On a :

$$\begin{aligned} z^2 + iz - 1 &= \left(z^2 + iz - \frac{1}{4}\right) - \frac{3}{4} \\ &= \left(z + \frac{i}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \\ &= \left(z + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)\left(z - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right). \end{aligned}$$

Ce qui nous donne $\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$ et $\beta = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$.

5 - Les points de l'ensemble $\mathcal{E}$ sont ceux dont les affixes annulent $z^2 + iz - 1$; ils ne sont que deux $\alpha = -e^{i\frac{\pi}{6}}$ et $\beta = e^{-i\frac{\pi}{6}}$. Ils sont de module 1, donc sur le cercle Γ *i.e.* $\mathcal{E} \subset \Gamma$.

6 - L'affixe z du point M vaut $e^{i\theta}$ où θ est un réel. L'affixe de $M' = f(M)$ est alors $z' = e^{i\theta} + i - e^{-i\theta} = (2\sin\theta + 1)i$.

7 - Comme $z' = (2\sin\theta+1)i$ le point M' varie sur l'axe imaginaire. Lorsque θ varie sur le cercle, le nombre θ varie dans $\mathbb{R}$ (tout entier !) et donc la partie imaginaire $2\sin\theta+1$ de z' varie entre son minimum -1 et son maximum 3. Par suite le point M décrit le segment $[A'C]$ où C est le point d'affixe $c = -i$.

Exercice 3

1 - Comme p est premier, x et p sont premiers entre eux. Il existe donc $m, n \in \mathbb{Z}$ tels $mx + np = 1$ *i.e.* $mx - 1 = np$. Ceci signifie que la classe $\overline{m}$ de m dans l'anneau $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est l'inverse de la classe $\overline{x}$ de x. Il existe donc un unique représentant y de $\overline{m}$ dans E tel que xy soit congru à 1 modulo p. (Tout élément non nul de l'anneau $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est inversible *i.e.* $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est corps.)

2 - L'application $\varphi : x \in E \longrightarrow E$ est bien sûr bijective. Elle associe à $x \in E$, l'unique représentant y dans E de l'inverse $(\overline{x})^{-1}$ de la classe de x dans le corps $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

3 - Dire que $\varphi(x) = x$, c'est dire que $(\overline{x})^{-1} = \overline{x}$, c'est-à-dire $(\overline{x})^2 = 1$. Ce qui nous donne $\overline{x} = \overline{1}$ ou $\overline{x} = -\overline{1}$. On aura donc $x = 1$ ou $x = p - 1$.

Exercice 4

On pose $T' = \frac{T-\mu}{\sigma} = \frac{T-13{,}9}{4{,}1}$. Alors T' suit une loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$ (la probabilité associée sera noté p). On peut donc calculer les probabilités en question en utilisant la table de $\mathcal{N}(0,1)$.

1 - D'abord 5 heures 48 minutes correspondent à 5, 8 heures. On a donc :

$$\begin{aligned}
P(5,8 \leq T \leq 22) &= p(-1,97 \leq T' \leq 1,97) \\
&= 2p(0 \leq T' \leq 1,97) \\
&= 2\{p(T' \leq 1,97) - p(T' \leq 0)\} \\
&= (2(0,97 - 0,5) \\
&= 0,94.
\end{aligned}$$

2 - De même :

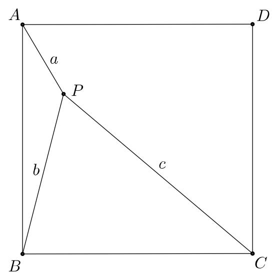
$$\begin{aligned}
P(T \geq 18) &= 1 - P(T \leq 18) \\
&= 1 - p(T' \leq 1) \\
&= 1 - 0,84 \\
&= 0,16.
\end{aligned}$$

MEÉF 1 - Mathématiques
DS4 - 12 décembre 2016
Mathématiques fondamentales

Exercice 1

Partie I

On se donne trois nombres réels a, b et c strictement positifs et tels que $a^2 + 2b^2 = c^2$. Soient $ABCD$ un carré et P un point intérieur (à ce carré) tel que $PA = a$, $PB = b$ et $PC = c$ (*cf.* dessin ci-dessous). On note Q le transformé de P par la rotation r de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.



1. Quelle est la nature du triangle CPQ ?
2. Montrer que les points A, P et Q sont alignés.
3. Quelle est la mesure (en degrés) de l'angle $\widehat{APB}$?

Partie II

Construire géométriquement (à la règle et au compas) un carré $ABCD$ et un point P intérieur (à ce carré) tel que $PA = 2$, $PB = 4$ et $PC = 6$.

Exercice 2

On se propose de caluler les intégrales $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n dx$ et $J_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^n dx$ (dites *intégrales de Wallis*) pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Par une intégration par parties, montrer que, pour tout $n \geq 2$, on a $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$.
2. Donner la valeur de I_n. (Considérer les deux cas : n pair et n impair.)
3. Déduire de ce qui précède la valeur de J_n.

Exercice 3

On munit l'espace $\mathbb{E} = \mathbb{R}^3$ de son produit scalaire usuel $\langle u, u' \rangle = xx' + yy' + zz'$. Soit $\mathcal{D}$ la droite passant par les points $A = (1, -2, -1)$ et $B = (3, -5, -2)$.

1. Donner une représentation paramétrique $(x(t), y(t), z(t))$ de $\mathcal{D}$ en fonction du paramètre $t \in \mathbb{R}$.

On note $\mathcal{D}'$ la droite ayant pour représentation paramétrique $\begin{cases} x(s) = 2 - s \\ y(s) = 1 + 2s \\ z(s) = s. \end{cases}$

2. Montrer que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ne sont pas coplanaires (*i.e.* ne sont pas sur un même plan).

3. On note $\mathcal{P}$ le plan d'équation $4x+y+5z+3=0$. Montrer que $\mathcal{P}$ contient la droite $\mathcal{D}$ et qu'il coupe la droite $\mathcal{D}'$ en un point C dont on déterminera les coordonnées.

Exercice 4

1. Rappeler l'énoncé du *théorème de Bézout* et du *théorème de Gauss*. Démontrer le théorème de Gauss en utilisant celui de Bézout.

Le but de l'exercice est de résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système :

$$(\mathrm{S}) \qquad \begin{cases} n \equiv 13 \;\; (19) \\ n \equiv 6 \;\; (12). \end{cases}$$

2. Dire pourquoi il existe un couple (u,v) d'entiers relatifs tel que $19u+12v=1$.

3. Vérifier que, pour un tel couple (u,v), le nombre $N=13\times 12v+6\times 19u$ est une solution du système (S).

Soit n_0 une solution du système (S).

4. Vérifier que (S) équivaut au système :

$$(\mathrm{S}') \qquad \begin{cases} n \equiv n_0 \;\; (19) \\ n \equiv n_0 \;\; (12). \end{cases}$$

5. Démontrer que le système (S$'$) équivaut à l'équation $n \equiv n_0 \;\; (12\times 19)$.

6. Trouver un couple (u,v) solution de l'équation $19u+12v=1$ et calculer la valeur de N correspondante.

7. Déterminer l'ensemble des solutions de (S). (On pourra utiliser la question 5.)

8. Un entier naturel n est tel que lorsqu'on le divise par 12 le reste est 6 et lorsqu'on le divise par 19 le reste est 13. On divise n par $228=12\times 19$. Quel est le reste r de cette division ?

Exercice 5

1. Dans un stand de tir, un tireur effectue des tirs successifs pour atteindre un ballon afin de le crever. À chaque tir, la probabilité de crever le ballon est $p=0,2$. Le tireur s'arrête quand le ballon est crevé. Les tirs successifs sont supposés indépendants.

(a) Quelle est la probabilité qu'au bout de deux tirs le ballon soit intact ?
(b) Quelle est la probabilité que deux tirs suffisent pour crever le ballon ?
(c) Quelle est la probabilité p_n que n tirs suffisent pour crever le ballon ?
(d) Pour quelles valeurs de n a-t-on $p_n>0,99$?

2. Ce tireur participe au jeu suivant. Dans un premier temps, il lance un dé tétraédrique régulier dont les faces sont numérotées de 1 à 4 (la face obtenue avec un tel dé est la face cachée) ; soit k le numéro de la face obtenue. Le tireur se rend alors au stand de tir et il a droit à k tirs pour crever le ballon.

On suppose le dé bien équilibré. Quelle est la probabilité de crever le ballon ? (On pourra utiliser un arbre pondéré.)

Il sera tenu compte (4 points de la note) de la rédaction et de la présentation de la copie.

CORRIGÉ

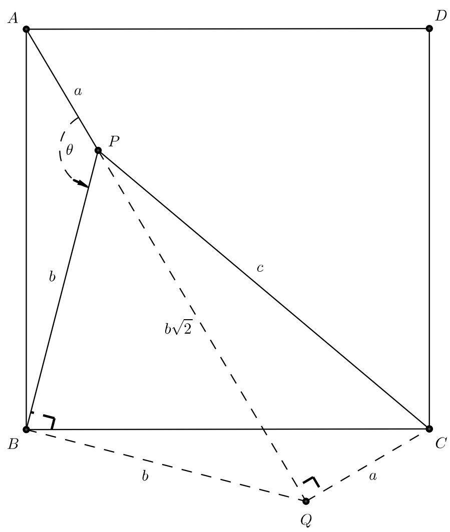
Exercice 1

Partie I

1. La rotation r envoie A sur C ($ABCD$ étant un carré) et P sur Q (par hypothèse). Le segment $[AP]$ est donc envoyé sur le segment $[CQ]$ de telle sorte que $CQ = AP = a$ et la droite (AP) est orthogonale à la droite (CQ). Le triangle PBQ est à la fois isocèle et rectangle en B. L'angle $\widehat{BPQ}$ mesure donc $\frac{\pi}{4}$ et le côté PQ mesure $b\sqrt{2}$. Le triangle PQC a ses côtés QC, PC et PQ égaux respectivement $PA = a$, c et $\sqrt{2} \cdot PB = b\sqrt{2}$; d'où :

$$QC^2 + PQ^2 = a^2 + 2b^2 = c^2 = PC^2$$

ce qui montre qu'il est rectangle en Q.



2. D'après ce qui précède, les droites (PA) et (PQ) sont perpendiculaires (toutes les deux) à la droite (QC) ; elles sont donc parallèles. Comme en plus elles ont le point P en commun, elles sont confondues. Ce qui signifie que les trois points A, P et Q sont alignés.

3. Les points A, P et Q sont alignés et l'angle $\widehat{BPQ}$ étant égal à $\frac{\pi}{4}$, l'angle $\widehat{APB}$ mesure donc $\theta = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} = 135$ degrés.

Partie II

Pour la construction du carré $ABCD$ et du point P, on s'inspire de la partie I. (Bien entendu, il suffit des points A, B et C pour avoir le carré.) On construit d'abord un triangle BQP isocèle et rectangle en B tel que $BQ = BP = 4$. Du côté de P, sur la droite (PQ), on prend le point A tel que $PA = 2$. Le point C sera alors le transformé de A par la rotation r considérée dans la partie I. Le triangle BCQ est le transformé par r de BAP, donc $QC = PA = 2$. Comme le triangle PQC est rectangle, le théorème de Pythagore nous donne $PC = \sqrt{CQ^2 + PQ^2} = 6$. Nous avons donc construit le carré $ABCD$ et le point P avec les propriéts requises.

Exercice 2

1. On pose $u(x) = (\sin x)^{n-1}$ et $v'(x) = \sin x$. D'où $u'(x) = (n-1)(\cos x)(\sin x)^{n-2}$ et $v(x) = -\cos x$. Par suite :

$$\begin{aligned}
I_n &= \left[-\cos x(\sin x)^{n-1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{n-2}(\cos x)^2 dx \\
&= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{n-2}(1-(\sin x)^2) dx \\
&= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left((\sin x)^{n-2} - (\sin x)^n\right) dx \\
&= (n-1)(I_{n-2} - I_n).
\end{aligned}$$

D'où l'on tire $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ pour $n \geq 2$.

2. Pour calculer de manière effective l'intégrale I_n, on distinguera les cas n pair et n est impair. Pour $n = 2k$, on a :

$$I_{2k} = \frac{2k-1}{2k} I_{2k-2} = \cdots = \frac{(2k-1)(2k-3)\cdots 3\cdot 1}{2k(2k-2)\cdots 4\cdot 2} I_0 = \left(\frac{(2k-1)(2k-3)\cdots 3\cdot 1}{2k(2k-2)\cdots 4\cdot 2}\right)\frac{\pi}{2}.$$

Pour $n = 2k+1$, on a :

$$I_{2k+1} = \frac{(2k)(2k-2)\cdots 4\cdot 2}{(2k+1)(2k-1)\cdots 5\cdot 3} I_1 = \frac{(2k)(2k-2)\cdots 4\cdot 2}{(2k+1)(2k-1)\cdots 5\cdot 3}.$$

3. On remarque que $J_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^n dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)^n dx$. Le changement de variable $t = \frac{\pi}{2} - x$ donne $J_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^n dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n dx$. On a donc :

$$J_{2k} = \left(\frac{(2k-1)(2k-3)\cdots 3\cdot 1}{2k(2k-2)\cdots 4\cdot 2}\right)\frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad I_{2k+1} = \frac{(2k)(2k-2)\cdots 4\cdot 2}{(2k+1)(2k-1)\cdots 5\cdot 3}.$$

Exercice 3

1. La droite $\mathcal{D}$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$ avec t variant dans $\mathbb{R}$. Une représentation paramétrique est donnée par :

$$\begin{cases} x = 2t+1 \\ y = -3t-2 \\ z = -t-1. \end{cases}$$

2. Dire que les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ont un point commun, c'est dire qu'il existe un couple (t, s) de réels tels que :

$$\begin{cases} 2t+1 = 2-s \\ -3t-2 = 2s+1 \\ -t-1 = s. \end{cases}$$

La première et la troisième équations donnent $t = 2$ et $s = -3$ mais ces deux valeurs ne sont pas solution de la deuxième ; $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ n'ont donc pas de point commun. D'autre part, les points $U = (2,1,0)$ et $V = (0,5,2)$ sont sur $\mathcal{D}'$; par suite $\overrightarrow{UV} = (-2,4,2)$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}'$ et il n'est pas colinéaire à $\overrightarrow{AB} = (2,-3,-1)$ qui est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$. Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ n'ont pas de point commun et ne sont pas parallèles, elles ne sont donc pas coplanaires.

3. Un calcul immédiat montre que les coordonnées des points A et B vérifient l'équation $4x + y + 5z + 3 = 0$; A et B appartiennent donc au plan $\mathcal{P}$. Par suite, la droite $\mathcal{D}$ est entièrement contenue dans ce plan.

Un point $(2-s, 1+2s, s)$ de $\mathcal{D}'$ est sur le plan $\mathcal{P}$ si ses coordonnées vérifient l'équation $4x + y + 5z + 3 = 0$, c'est-à-dire si $4(2-s) + (1+2s) + 5s + 3 = 0$. Ce qui donne $s = -4$. La droite $\mathcal{D}'$ coupe donc le plan $\mathcal{P}$ au point $C = (6,-7,-4)$.

Exercice 4

1.(a) **Théorème de Bézout.** *Deux entiers naturels a et b sont premiers entre eux si, et seulement si, il existe deux entiers relatifs u et v tels que $ua + vb = 1$.*

1.(b) **Théorème de Gauss.** *Soient a, b et c trois entiers naturels. Si a est premier avec b et si a divise bc, alors a divise c.*

Démontrons le théorème de Gauss à partir de celui de Bézout. Les deux entiers naturels a et b étant premiers entre eux, il existe deux entiers relatifs u et v tels que $ua + vb = 1$. D'où $uac + vbc = c$. Comme a divise bc, il existe un entier naturel k tel que $bc = ka$. L'égalité devient alors $a(uc + vk) = c$. Ceci montre bien que a divise c.

2. Comme 19 est un nombre premier, il est premier avec tout autre entier naturel qu'il ne divise pas, et donc avec 12. D'après le théorème de Bézout, il existe deux entiers relatifs u et v tels que $19u + 12v = 1$.

3. On a $N - 13 = 13(12v - 1) + 6 \times 19u = 13(-19u) + 6 \times 19u = 19u(-7)$ qui montre bien que N est congru à 13 modulo 19. De même $N - 6 = 13 \times 12v + 6(19u - 1) = 12v \times 7$ qui montre bien que N est congru à 6 modulo 12. En conclusion, N est solution du système (S).

4. Il existe $k_0 \in \mathbb{Z}$ tel que $n_0 - 13 = 19k_0$. Supposons n congru à 13 modulo 19 ; alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n - 13 = 19k$. Par suite $n - n_0 = 19(k - k_0)$, c'est-à-dire n est congru à 13 modulo 19 si, et seulement si, n est congru à n_0 modulo 19. De la même manière on montre que n est congru à 6 modulo 12 si, et seulement si, n est congru à n_0 modulo 12. Conclusion : n est solution du système (S) si, et seulement si, n est solution du système (S$'$).

5. Supposons n solution de (S$'$). Alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n - n_0 = 19k$. Comme 12 divise aussi $n - n_0$ et qu'il est premier avec 19, d'après le théorème de Gauss, il divise k. Il existe donc $k' \in \mathbb{Z}$ tel que $n - n_0 = 19 \times 12k'$ *i.e.* n est congru à n_0 modulo 19×12. Réciproquement si n est congru à n_0 modulo 19×12, il est congru à n_0 à la fois modulo 19 et modulo 12.

6. On peut remarquer que $1 = -95 + 96 = (-5) \times 19 + 8 \times 12$. On peut donc prendre $(u,v) = (-5,8)$. La valeur de N correspondante est $N = 13 \times 12 \times 12 - 6 \times 19 \times 5 = 678$.

7. D'après la question 3, $N = 678$ est solution du système (S). Toute autre solution est donc un entier n congru à 678 modulo $19 \times 12 =$ (*cf.* question 5). L'ensembles E des solutions du système (S) est donc $E = \{678 + 228k : k \in \mathbb{Z}\}$.

8. Ce nombre n est solution de (S). Il est donc congru à 678 modulo 228. Mais 678 est congru à 222 modulo 228 ; par suite le reste de la division de n par 12×19 est 222.

Exercice 5

Précisons d'abord quelques notations pour simplifier la rédaction de la solution de cet exercice.

- Pour k tirs, on notera C_k^i l'événement "Le ballon est crevé au $i^{\text{ème}}$ tir" ; il a pour probabilité $p = 0,2$.
- On notera C_k l'événement "Le ballon est crevé au bout de k tirs".
- Pour $k = 1, 2, 3, 4$, A_k sera l'événement "Le numéro de la face cachée du dé est k". Comme le dé est bien équilibré, on a $P(A_k) = \frac{1}{4}$ pour tout k.
- Et enfin E sera l'événement "Crever le ballon dans le jeu proposé".
- Pour tout événement K, $\overline{K}$ sera son événement contraire.

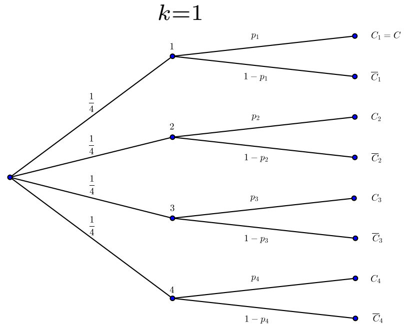
1.(a) L'événement "Le ballon n'est pas crevé au bout de deux tirs" est $\overline{C}_2 = \overline{C}_2^1 \cap \overline{C}_2^2$. Comme les tirs sont indépendants $P\left(\overline{C}_2\right) = P\left(\overline{C}_2^1 \cap \overline{C}_2^1\right) = 0,8 \times 0,8 = 0,64$.

1.(b) L'événement "Deux tirs suffisent pour crever le ballon" est exactement C_2. On a donc $P(C_2) = 1 - P(\overline{C}_2) = 1 - 0,64 = 0,36$.

1.(c) L'événement C_n a pour contraire "n tirs ne suffisent pas pour crever le ballon" qui n'est rien d'autre que l'intersection $\overline{C}_n^1 \cap \cdots \cap \overline{C}_n^n$. Cet événement a pour probabilité $(0,8)^n$; donc $p_n = 1 - (0,8)^n$.

1.(d) L'inégalité $p_n > 0,99$ s'écrit $1 - (0,8)^n > 0,99$ *i.e.* $(0,8)^n < 0,01$. En passant au logarithme on obtient $n \cdot \ell n(0,8) < \ell n(0,01)$, c'est-à-dire $n > \frac{\ell n(0,01)}{\ell n(0,8)}$. Ce qui nous donne finalement $n \geq 21$.

2. Comme les événements A_1, A_2, A_3 et A_4 sont disjoints, E est partitionné comme suit : $E = (A_1 \cap C_1) \cup (A_2 \cap C_2) \cup (A_3 \cap C_3) \cup (A_4 \cap C_4)$. Sa probabilité se calcule en utilisant l'arbre pondéré ci-dessous : $P(E) = \displaystyle\sum_{k=1}^{4} P(A_k)P(C_k \cap C_k|A_k)$.



Pour chaque valeur de $k = 1, 2, 3, 4$, la probabilité de crever le ballon sachant que le dé a donné la face cachée k est $p_k = 1 - (0,8)^k$ (c'est la probabilité calculée en 1.(c)). On a donc :

$$P(E) = \frac{1}{4}(p_1 + p_2 + p_3 + p_4) = 0,4096.$$

MEÉF 1 - Mathématiques
DS de rattrapage - 14 février 2017
Mathématiques fondamentales

Exercice 1

Soient $a \in]0,1[$ et (x_n) la suite réelle définie par $x_0 = a$ et $x_{n+1} = x_n(2 - x_n)$.

On prend $a = \frac{1}{8}$.

1 - Dans le plan $\mathbb{R}^2$ muni de sa base canonique et de son produit scalaire usuel, tracer le graphe Γ de la fonction $f(x) = x(2 - x)$ ainsi que la droite Δ d'équation $x - y = 0$.

2 - Utiliser la droite Δ et la courbe Γ pour construire sur l'axe des abscisses les points A_1, A_2 et A_3 d'abscisses respectives x_1, x_2 et x_3.

Cette fois-ci a sera quelconque mais toujours tel que $0 < a < 1$.

3 - Montrer par récurrence que $0 < x_n < 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4 - Montrer que la suite (x_n) est croissante. Qu'en déduit-on ?

On considère la suite (y_n) définie par $y_n = 1 - x_n$.

5 - Exprimer y_{n+1} en fonction de y_n et en déduire y_n en fonction de n et de a.

6 - Calculer la limite de (y_n) puis celle de (x_n).

Exercice 2

Soit ABC un triangle isocèle rectangle en A tel que la base vectorielle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ soit directe. Soient M un point sur le segment $[BC]$ et P et Q ses projections orthogonales respectivement sur les côtés AB et AC. On note U et V les deux autres sommets du carré $PUQV$ dont le segment $[PQ]$ est une diagonale (le point U est du côté qui contient le segment $[BC]$ par rapport à la droite (PQ)). On se propose de déterminer le lieu géométrique de U lorsque M varie sur $[BC]$.

1 - Faire un dessin et construire le carré $PUQV$ lorsque le point M est en B.Même chose lorsque M est en C. Que peut-on conjecturer ?

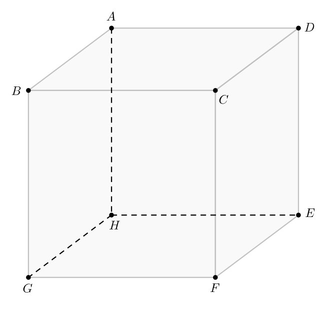
On note J le milieu du segment $[BC]$ et r la rotation de centre J et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

2 - Quelles sont les images respectives des points A et C par la rotation r ? Quelle est l'image par r du segment $[AC]$?

3 - Montrer que $r(Q) = P$ et en déduire le lieu géométrique du point U.

Exercice 3

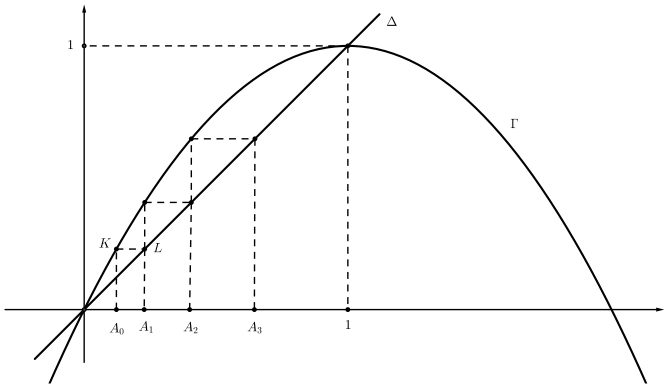
Soit $ABCDEFGH$ un cube (voir dessin ci-dessous). Les diagonales (AF), (BE), (CH) et (DG) sont-elles des axes de symétrie de ce cube ? (Justifier la réponse.)



Corrigé

Exercice 1

1 - Ci-dessous le graphe Γ de la fonction f ainsi que la droite Δ d'équation $x - y = 0$.



2 - A_0 étant le point d'abscisse $a = \frac{1}{8}$, pour construire le point A_1, on mène la parallèle à l'axe des ordonnées ; elle coupe Γ en un point K ; par K, on mène la parallèle à l'axe des abscisses ; elle coupe Δ en point L. La parallèle passant par L à l'axe des ordonnées coupe l'axe des abscisses en le point A_1 cherché. Pour avoir A_2, on refait tout ce tralala en partant cette fois-ci de A_1 ! Et ainsi de suite...

3 - Par hypothèse, $x_0 = a \in]0, 1[$. La fonction f est strictement croissante sur $[0, 1]$ et vérifie $f(x) > x$, $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Donc si $0 < x_n < 1$ on a $0 < x_{n+1} = f(x_n) < 1$.

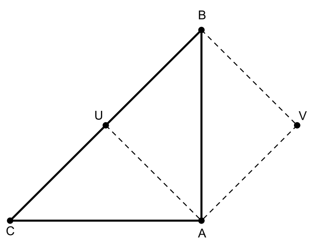
4 - D'après la question 3, on a $0 < x_n < x_{n+1} < 0$ *i.e.* la suite (x_n) est strictement croissante. Comme elle est majorée par 1, elle converge.

5 - On a $y_{n+1} = 1 - x_{n+1} = 1 - (x_n(2 - x_n)) = (1 - x_n)^2 = y_n^2$. Par suite, le terme général s'écrit : $y_n = (y_0)^{2^n} = (1 - a)^{2^n}$.

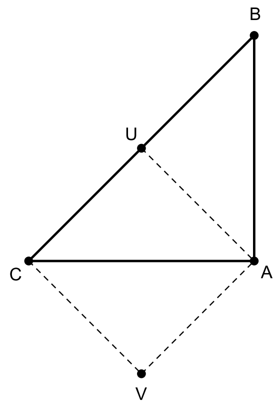
6 - Comme $0 < a < 1$, on a $0 < 1 - a < 1$. Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} y_n = 0$; ce qui donnne : $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 1$.

Exercice 2

1 - Lorsque M est en B, le point P est en B et Q est en A. Comme le triangle ABC est isocèle rectangle en A, le point U est le milieu J du côté BC.



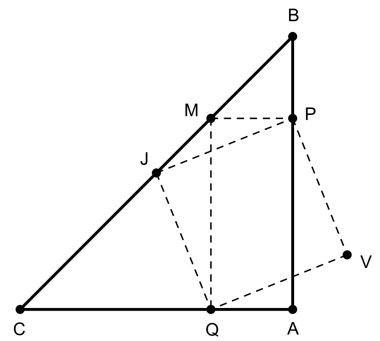
Lorsque M est en C, le point P est en A et Q est en C. Comme le triangle ABC est isocèle rectangle en A, le point U est aussi le milieu J du côté BC.



On peut donc conjecturer que lorsque M varie sur le segment BC, le point U est constamment confondu avec le point J.

2 - Les triangles JCA et JAB sont tous les deux isocèles rectangles en J. Donc la rotation r envoie C sur A et A sur B. Elle envoie donc le segment CA sur le segment AB ; comme elle est une isométrie, elle envoie le segment QA sur le segment PB (car $QA = MP = PB$). Donc $r(Q) = P$. $\square$

3 - Comme P s'obtient à partir de Q par la rotation r (de centre J et d'angle $\frac{\pi}{2}$) pour tout M sur BC, tout carré ayant PQ comme diagonale a le point J comme sommet. Donc, quelle que soit la position de M sur BC, $U = J$. $\square$



Exercice 3

Soit $a > 0$ la mesure du côté du cube. Les droites (AH) et (CF) sont parallèles. Elles déterminent donc un plan dans lequel les quatre points A, C, F et H forment un rectangle de largeur a et de longueur $a\sqrt{2}$ (qui n'est donc pas un carré). Si la symétrie σ d'axe (AF) laissait invariant le cube, elle laisserait aussi invariant le rectangle $ACFH$. Mais ceci n'est pas possible : dans un rectangle qui n'est pas un carré, aucune diagonale n'est un axe de symétrie.

Évidemment, la même démonstration vaut pour les droites (BE), (CH) et (DG) : aucune d'elles n'est axe de symétrie du cube $ABCDEFGH$.

MEÉF 1 - Mathématiques
DS de rattrapage - 14 mars 2017
Mathématiques fondamentales

Exercice 1. Soit $f : [0, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[$ la fonction définie par $f(x) = \sqrt{1+x}$.

1 - Montrer que f est contractante *i.e.* il existe une constante $k \in]0, 1[$ telle que on ait l'inégalité $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$ pour tous $x, y \in [0, +\infty[$.

Soit (x_n) la suite dans $[0, +\infty[$ définie par $x_0 = 1$ et $x_n = f(x_{n-1})$ pour $n \geq 1$.

2 - Montrer que (x_n) est une suite de Cauchy. Dire pourquoi elle est alors convergente et calculer sa limite.

3 - Donner le rapport qu'il y a entre cette limite et la quantité :

$$\phi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \cdots}}}}}$$

Exercice 2. Deux robinets R_1 et R_2 alimentent, à débits constants, un bassin d'eau. Pour le remplir, il faut un temps $t_1 > 0$ quand on utilise R_1 seul et un temps $t_2 > 0$ quand on utilise R_2 seul.

On se propose de calculer le temps t que mettent R_1 et R_2 pour remplir le bassin quand on les ouvre en même temps (à leurs débits respectifs habituels) ?

[Il y a plusieurs façons de résoudre ce problème, toutes basées sur le même principe. Quelle que soit celle dont on procède, on doit détailler ses étapes et expliquer tout ce qu'on fait.]

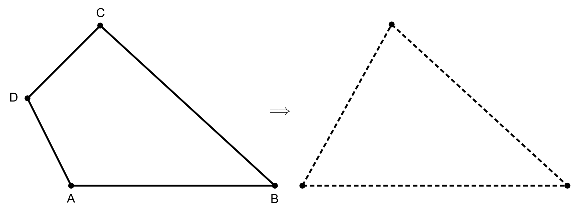
1 - On pose le problème à des élèves de Troisième. Quelle méthode pourraient-ils utiliser pour le résoudre ?

2 - On pose le problème à des élèves de Terminale. Quelle méthode (autre que celle qui précède bien sûr) pourraient-ils utiliser pour le résoudre ?

Exercice 3. On se donne un nombre $\alpha > 0$ et deux points distincts B et C du plan euclidien. On note b la distance entre B et C. (On peut penser au nombre α comme la longueur d'un segment $[UV]$ supposé donné.)

1 - Donner une méthode pour construire géométriquement tous les points A pour lesquels les triangles ABC ont pour aire α.

Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe. On cherche à le transformer géométriquement (par des découpages) en un triangle ayant même aire.



2 - Expliquer les étapes nécessaires à la compréhension du problème et exhiber les ingrédients qui permettent sa résolution.

3 - On se situe au plus au niveau de la Terminale (scientifque bien sûr). Comment peut-on résoudre concrètement ce problème ?

Corrigé

Exercice 1

1 - Soient $x, y \in [0, +\infty[$. On a :

$$\begin{aligned}
|(fx) - f(y)| &= \left|\sqrt{1+x} - \sqrt{1+y}\right| \\
&= \frac{\left|(\sqrt{1+x} - \sqrt{1+y})(\sqrt{1+x} + \sqrt{1+y})\right|}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1+y}} \\
&= \frac{|x-y|}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1+y}} \\
&\leq \frac{|x-y|}{2}.
\end{aligned}$$

La dernière inégalité découle du fait que $\sqrt{1+x} + \sqrt{1+y} \geq 2$ car $x, y \geq 0$. Pour $k = \frac{1}{2}$ on a donc $|f(x) - f(y)| \leq k|x-y|$ pour tous $x, y \geq 0$. □

2 - Soit $n \geq 1$. Alors, un calcul simple montre que $|x_n - x_{n-1}| \leq k^{n-1}|x_1 - x_0|$. Soient maintenant m et n des entiers tels que $n \geq m$. On a :

$$\begin{aligned}
|x_n - x_m| &\leq |x_n - x_{n-1}| + |x_{n-1} - x_{n-2}| + \cdots + |x_{m+2} - x_{m+1}| + |x_{m+1} - x_m| \\
&\leq \left(k^{n-1} + k^{n-2} + \cdots + k^{m+1} + k^m\right)|x_1 - x_0| \\
&\leq \frac{k^m}{1-k}|x_1 - x_0|.
\end{aligned}$$

Comme $0 < k < 1$, k^m tend vers 0 quand m tend vers $+\infty$. Donc, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier n_0 tel que : $n, m \geq n_0 \Longrightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon$, autrement dit la suite (x_n) est de Cauchy. D'autre part, l'intervalle $[0, +\infty[$ étant un fermé de $\mathbb{R}$, il en est une partie complète. La suite (x_n) y convege donc vers un élément x. □

3 - Comme f est contractante, elle est continue. Donc :

$$x = \lim_{n \to +\infty} x_{n+1} = \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = f(\lim_{n \to +\infty} x_n) = f(x).$$

Par conséquent x est solution de l'équation $x = \sqrt{1+x}$; donc $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (solution positive, l'autre étant $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$). Mais : $\phi^2 = 1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}}} = 1+\phi$, donc $x = \phi$. La limite x n'est donc rien d'autre que le nombre d'or $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. □

Exercice 2

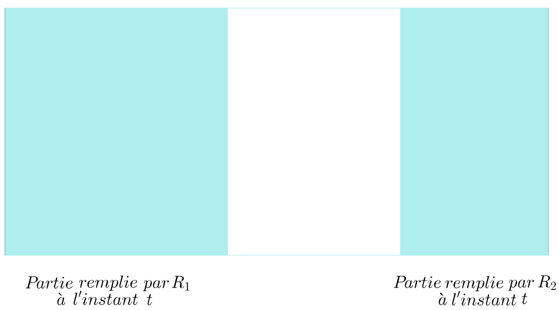
1. On se situe au niveau de la Troisiène. Les élèves peuvent avoir des difficultés à aborder un tel problème parce que il n'y a pas de données numériques. On commence donc par traiter un exemple particulier en prenant “1 heure” d’abord comme unité de temps (pour fixer les idées), $t_1 = 6h$ et $t_2 = 4h$; non notera V le volume du bassin dont la valeur n’aura aucune importance comme on le verra.

• On ouvre R_1 et R_2 en même temps ; ils remplissent alors le bassin à débits respectifs constants. Le volume v atteint au bout d’une heure est alors $v = \frac{V}{6} + \frac{V}{4} = \left(\frac{6+4}{6\cdot 4}\right) V = \frac{10}{24}V$.

• Les deux nombres 1 et t (mesurés en heures) sont proportionnels aux nombres v et V, c’es-à-dire qu’on a : $\frac{t}{1} = \frac{V}{v}$; ce qui nous donne $t = \frac{V}{\frac{10}{24}V} = \frac{24}{10} = 2,4$. Le temps que mettent les deux robinets pour remplir le bassin est donc $t = 2,4$ h c’est-à-dire 2 heures et 24 minutes.

• On suit la même démarche mais avec les valeurs générales t_1 et t_2 ; le temps t mis par les deux robinets est alors : $t = \frac{t_1 t_2}{t_1+t_2}$. ♢

2. Le problème est linéaire et, en Terminale, on peut le traiter en utilisant la notion de fonction. Il est évident, qu’à débit constant d (volume par unité de temps), le volume v qu’aura rempli un robinet à l’instant $t \in [0, +\infty[$ est de la forme $v(t) = dt$. Dans notre cas, les volumes $v_1(t)$ et $v_2(t)$ qu’apportent respectivement les robinets R_1 et R_2 sont $v_1(t) = \frac{V}{t_1}t$ et $v_2(t) = \frac{V}{t_2}t$ où V est le volume du bassin. À l’instant t cherché, on doit avoir $v_1(t) + v_2(t) = V$, ce qui amène à l’équation du premier degré en t : $\left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2}\right) Vt = V$ dont la solution est : $t = \frac{t_1 t_2}{t_1+t_2}$. ♢



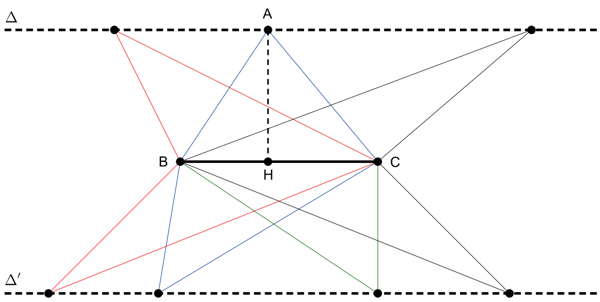
Problème équivalent

Deux amis R_1 et R_2 (Régine et Roger) habitent deux villes A et B reliées par un chemin rectiligne (un segment). Ils se rendent visite à tour de rôle. Le temps que met R_1 pour parcourir ce chemin est t_1 et celui que met R_2 est t_2. La vitesse de parcours de chacun est toujours la même. Quel temps t mettront-ils à se rencontrer s’ils partent l’un en direction de l’autre ?

Pour résoudre le problème on considère une droite Δ sur laquelle on choisit deux points à une distance d égale à celle du parcours entre les deux villes ; on prend A comme origine et on oriente Δ dans le sens A vers B. Ainsi A aura pour abscisse 0 et B aura pour abscisse d. Quand R_1 part de A vers B il marche à la vitesse $v_1 = \frac{d}{t_1}$ et R_2 marche vers A à la vitesse $\frac{d}{t_2}$ mais comme il se déplace dans le sens opposé ce sera en fait $v_2 = -\frac{d}{t_2}$. À l’instant t, l’abscisse de R_1 est $x_1 = v_1 t = \frac{d}{t_1}t$. Celle de R_2 sera $x_2 = v_2 t + d = -\frac{d}{t_2}t + d$ (la présence du terme constant d vient du fait qu’à l’instant $t = 0$, R_2 est en B). Au point de rencontre on doit avoir $x_1 = x_2$, ce qui nous donne l'équation en t : $\frac{d}{t_1}t = -\frac{d}{t_2}t + d$ qui admet pour solution $t = \frac{t_1 t_2}{t_1+t_2}$. C'est celle qu'on a calculée. ♢

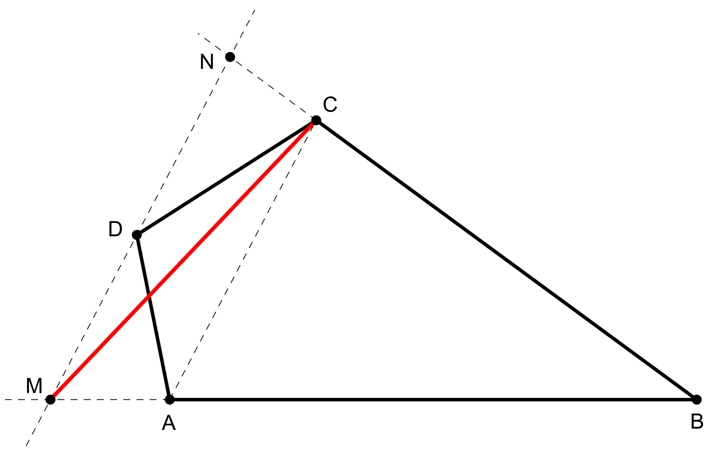
Exercice 3

1. Rappelons que si ABC est un triangle dont la hauteur issue de A est de mesure h alors son aire α est égale à $\frac{bh}{2}$ où $b = BC$. Si on impose aux points B et C de rester fixes et à l'aire α d'être constante alors h est constante égale à $\frac{2\alpha}{b}$. Le point A doit donc être sur l'une des deux droites Δ ou Δ' parallèles à (BC) et à la distance h. ♢



2. Il s'agit de transformer un quadrilatère $ABCD$ par découpages en un triangle mais de telle sorte que les deux figures géométriques aient la même aire. La première remarque à faire est que l'une des diagonales de $ABCD$ (par exemple AC) le partage en deux triangles ACD et ACB. On pourrait donc penser à garder ACB et déformer ACD en un autre triangle ayant la même aire, qui puisse être collé (le long d'un côté) à ACB pour obtenir un triangle parmi ceux qu'on cherche. La clé de cette opération est la cconstruction de la question qui précède.

3. Pour procéder concrètement, on choisit d'éliminer l'un des sommets du quadrilatère en l'alignant avec deux autres. Par exemple, on déplace le point D pour l'aligner avec A et B (ou avec B et C). Par D on trace la parallèle à (AC) ; celle-ci coupe (AB) en un point M. Les deux triangles ACD et ACM ont la même aire (question 1.) et donc le triangle MBC et le quadrilatère $ABCD$ ont la même aire. Le triangle ABN est aussi une solution du problème. ♢



MEÉF 1 - Mathématiques

DS2 - 2 octobre 2017

Mathématiques fondamentales

Exercice 1

Soient $a \in]0,1[$ et $f :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$. On définit la suite (x_n) par $x_0 = a$ et $x_n = f(x_{n-1})$ pour ≥ 1.

1. Donner le sens de variation de f et tracer son graphe Γ.
2. Montrer que la suite (x_n) est bornée.
3. Montrer que la suite $u_k = x_{2k}$ $(k = 0, 1, \cdots)$ est croissante et que la suite $v_k = x_{2k+1}$ $(k = 0, 1, \cdots)$ est décroissante. (Indication : utiliser la fonction $\phi = f \circ f$ et s'assurer que $x_0 \leq x_2$ et $x_3 \leq x_1$.)
4. En déduire (des questions 2 et 3) que les suites (u_k) et (v_k) convergent vers des limites qu'on notera respectivement ℓ_0 et ℓ_1.
5. Montrer que ℓ_0 et ℓ_1 vérifient les relations $\ell_1 = f(\ell_0)$ et $\ell_0 = f(\ell_1)$.
6. En déduire que la suite (x_n) converge vers une limite ℓ qu'on déterminera.

Exercice 2

L'objet de cet exercice est de montrer que l'équation algébrique $x^3 - 2x - 5 = 0$ admet une unique solution réelle et comment approcher cette solution. Notons $P(x)$ le polynôme $x^3 - 2x - 5$.

1. Donner le tableau de variation de la fonction $x \in \mathbb{R} \longmapsto P(x) \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que l'équation $P(x) = 0$ admet une solution unique réelle α et que $\alpha \in [2,3]$.
   Soit $\phi : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ la fonction définie par $\phi(x) = (2x+5)^{\frac{1}{3}}$
3. Montrer que $\phi([2,3]) \subset [2,3]$ et qu'il existe $k \in]0,1[$ tel que ϕ soit k-contractante.
4. Montrer que α est le point fixe de ϕ.
5. On choisit x_0 dans $[2,3]$ et on pose $x_n = \phi(x_{n-1})$ pour tout $n \geq 1$. Expliquer pourquoi la suite (x_n) converge vers α.
6. À partir de quel rang n, x_n est-elle une valeur approchée de α à 10^{-3} près ?

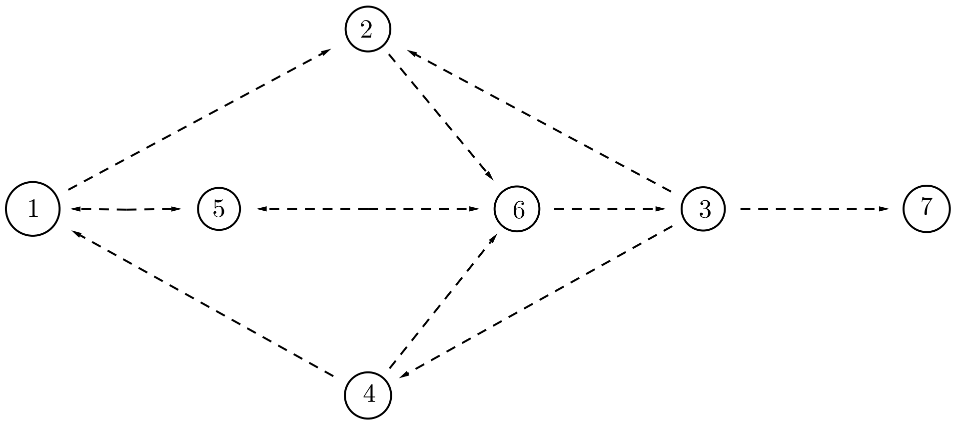
PROBLÈME

Soit n un entier naturel non nul. On désigne par $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'anneau des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels ; I_n sera la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Le produit d'une matrice A (à n lignes et p colonnes) par une matrice B (à p lignes et q colonnes) sera noté $A \cdot B$.

On dira qu'une suite de vecteurs $X^k = (x_1^k, \cdots, x_n^k)$ (indexée par $k \in \mathbb{N}$) dans $\mathbb{R}^n$ converge vers le vecteur $X = (x_1, \cdots, x_n)$ si, pour tout $i = 1, \cdots, n$, la suite réelle $\left(x_i^k\right)$ converge vers x_i. Un vecteur $P = (p_1, \cdots, p_n)$ est dit *stochastique* si ses composantes vérifient $p_i \geq 0$ pour tout $i = 1, \cdots, n$ et $p_1 + \cdots + p_n = 1$. Soit $A^k = \left(a_{ij}^k\right)$ une suite dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $A = (a_{ij})$ un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; on dit que la suite (A^k) converge vers A si, pour tous $i, j = 1, \cdots, n$, la suite réelle $\left(a_{ij}^k\right)$ converge vers a_{ij}.

Un *graphe* est la donnée d'un ensemble fini de points appelés *sommets* reliés par des *arêtes*. Si toutes les arêtes sont orientées, on dira que le graphe est *orienté*. Dans un graphe orienté, un sommet j est dit *voisin* d'un sommet i s'il existe une arête orientée de i vers j. Par exemple, sur le graphe ci-dessous, le sommet 1 a pour voisins 2, 4 et 5 ; le sommet 3 a pour voisins 2, 4 et 7 ; 6 n'est pas voisin de 3 ; 7 n'a aucun voisin.



Marche aléatoire sur un graphe

Soit G un graphe orienté ayant n sommets numérotés de 1 à n. Un point M se balade aléatoirement sur les sommets de G au cours d'étapes ; le nombre d'étapes peut tendre vers l'infini. À chaque étape, le point se déplace, avec la même probabilité, du sommet où il se trouve vers un sommet voisin. Ceci entraîne notamment que la probabilité de passer du sommet i vers le voisin j ne dépend pas du rang de l'étape.

Pour $i, j = 1, ..., n$, on note a_{ij} la probabilité de passage du point M du sommet i au sommet j ; s'il n'y a pas d'arête de i vers j, a_{ij} vaut évidemment 0. On note A la matrice (a_{ij}) ; on l'appelle *matrice de transition* du graphe G.

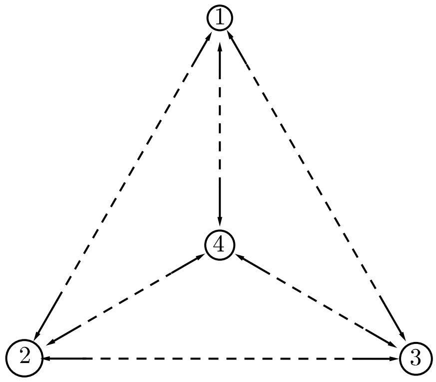
Pour $k \in \mathbb{N}$, on note p_i^k la probabilité que le point M se trouve au sommet i à l'étape de rang k et P^k le vecteur $(p_1^k, \cdots, p_n^k)$.

I. Résultats généraux

1. Justifier l'égalité $p_1^k + \cdots + p_n^k = 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que $P^{k+1} = P^k \cdot A$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
3. En déduire une expression de P^k en fonction de k, P^0 et la matrice A, pour $k \in \mathbb{N}$.
4. On suppose que la suite de vecteurs (P^k) converge (quand k tend vers $+\infty$) vers un vecteur $P = (p_1, \cdots, p_n)$. Montrer que $p_1 + \cdots + p_n = 1$ et que $P \cdot A = P$.

II. Marche aléatoire sur un tétraèdre

Dans cette section, le graphe G est un tétraèdre (dessiné comme ci-dessous). On suppose que lorsque le point M est sur l'un des sommets, la probabilité qu'il aille vers l'un de ses sommets voisins est la même.



À l'étape $k=0$, M est sur le sommet 1 et donc $P^0=(1,0,0,0)$. On pose :

$$U=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{pmatrix}.$$

1. Exprimer la matrice de transition A à l'aide de U.
2. Calculer U^2 et U^3.
3. Montrer qu'il existe deux suites (α_k) et (β_k) telles que, pour tout entier k :

$$U^k=\begin{pmatrix}\alpha_k&\beta_k&\beta_k&\beta_k\\\beta_k&\alpha_k&\beta_k&\beta_k\\\beta_k&\beta_k&\alpha_k&\beta_k\\\beta_k&\beta_k&\beta_k&\alpha_k\end{pmatrix}.$$

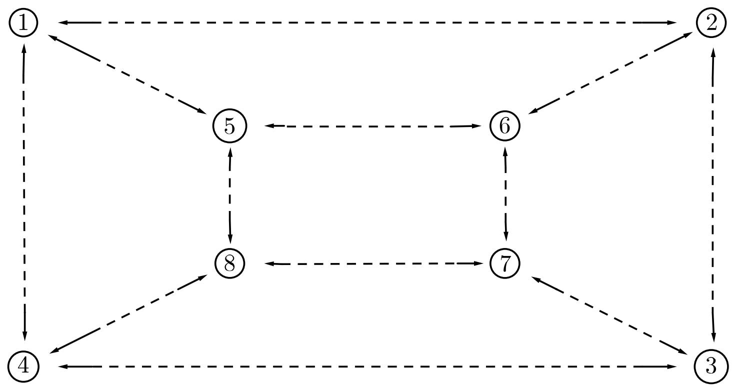
   Montrer que (α_k) et (β_k) vérifient les relations suivantes pour tout k :

$$\begin{cases}\alpha_{k+1}=3\beta_k\\\beta_{k+1}=\alpha_k+2\beta_k.\end{cases}$$

4. En déduire que $\beta_{k+2}=2\beta_{k+1}+3\beta_k$ pour tout k.
5. En déduire (de 3 et 4) que, pour tout k, on a $\beta_k=\frac{3^k-(-1)^k}{4}$ et $\alpha_k=\frac{3^k+3(-1)^k}{4}$.
6. En déduire une expression de P^k pour tout entier naturel k.
7. Montrer que la suite de vecteurs (P^k) converge et déterminer sa limite P.

III. Marche aléatoire sur une pyramide rectangulaire tronquée

Dans toute cette section, G est le graphe ci-dessous.



Au départ le point M est sur le sommet 1 de sorte que $P^0 = (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$ et on suppose que lorsqu'il est sur l'un des sommets du graphe il a la même probabilité de se rendre sur l'un de ses sommets voisins. On partitionne l'ensemble des sommets $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ du graphe G en posant $X = \{1, 3, 6, 8\}$ et $Y = \{2, 4, 5, 7\}$.

1. Donner la matrice A de transition du graphe et calculer $(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1) \cdot A$.
2. Montrer que si le point M se trouve à une étape dans la partie X (resp. Y), il se trouvera à l'étape qui suit dans la partie Y (resp. X).

3. a) Montrer que les coefficients de P^k dont les indices sont dans la partie X sont nuls si k est impair et que les coefficients de P^k dont les indices sont dans la partie Y sont nuls si k est pair.

3. b) La suite (P^k) converge-t-elle ?

IV. <u>Une question générale sur une marche aléatoire</u>

Soit (A^k, P^k) une marche aléatoire sur un graphe G de matrice de transition $A = A^0$ et de vecteur stochastique initial P^0. Parmi les liens logiques habituels *condition nécessaire*, *condition suffisante* et *condition nécessaire et suffisante*, quel est celui qui existe entre les propositions suivantes ?

(i) La suite de vecteurs (P^k) converge.

(ii) Il existe un vecteur stochastique $P = (p_1, \cdots, p_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $P \cdot A = P$.

La réponse, qui devra être soigneusement justifiée, sera présentée sous forme d'une phrase rédigée en français et sous forme d'une proposition mathématique comportant une implication ou une équivalence.

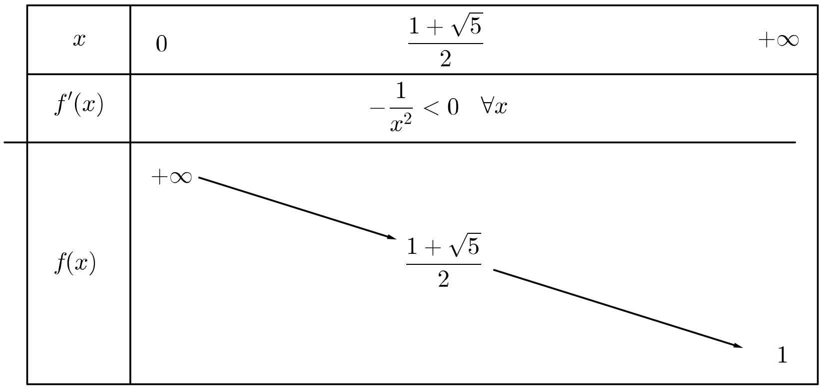
Ce problème est un extrait du sujet de la seconde épreuve de l'examen du concours du CAPES 2017

Corrigé

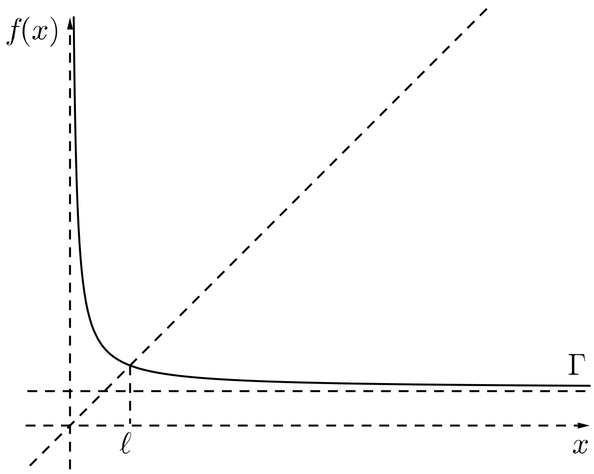
Exercice 1

1. Étude da la fonction f

Tableau de variation



Graphe



2. Comme f est décroissante et que $x_n \geq 1$ pour tout $n \geq 1$, on a $f(x_n) \leq f(1) = 2$. Donc, pour tout $n \geq 2$, le terme x_n est dans l'intervalle $[1, 2]$; ceci implique que la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est bornée.

3. Comme f est décroissante (strictement), la fonction $\phi(x) = f \circ f(x) = \frac{2x+1}{x+1}$ est strictement croissante. D'autre part $x_2 - x_0 = \frac{2a+1}{a+1} - a = \frac{-a^2+a+1}{a+1}$ est strictement positif pour $0 < a < 1$. Par suite $x_0 < x_2$ implique $x_2 = \phi(x_0) < \phi(x_2) = x_4$ et ainsi de suite. La suite $u_k = x_{2k}$ est donc strictement croissante. De la même manière, on montre que la suite $v_k = x_{2k+1}$ est strictement décroissante.

4. La suite (u_k) étant bornée, elle est en particulier majorée ; comme en plus elle est croissante, elle converge vers une limite notée ℓ_0. De même, La suite (v_k) étant bornée,

elle est minorée ; comme en plus elle est décroissante, elle converge vers une limite ℓ_1.

5. De façon immédiate, on peut voir que $v_k = f(u_k)$. Comme f est continue on a $\ell_1 = \lim_k v_k = f(\lim_k u_k) = f(\ell_0)$. Par un raisonnement du même type on montre que $\ell_0 = f(\ell_1)$.

6. Par la question 5, on a $\ell_0 = 1 + \frac{1}{\ell_1}$ et $\ell_1 = 1 + \frac{1}{\ell_0}$. Un calcul simple permet de montrer que ces deux relations imposent $\ell_0 = \ell_1$. Ceci montre que la suite (x_n) converge et a pour limite l'unique solution positive ℓ de l'équation $1 + \frac{1}{x} = x$, c'est-à-dire le nombre d'or $\ell = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Exercice 2

1. Étude da la fonction P

Tableau de variation

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{2}{3}}$		$\sqrt{\frac{2}{3}}$		$+\infty$
$P'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$P(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	b	$\searrow$	c	$\nearrow$	$+\infty$

2. D'après ce qui précède, la fonction P admet un maximum local $f(-a) = b < 0$ en $-a = -\sqrt{\frac{2}{3}}$ et un minimum local $f(a) = c < 0$ en a. Elle est strictement croissante sur l'intervalle $[a, +\infty[$ (remarquons que $a < 2$) et telle que $f(2) = -1 < 0$ et $f(3) = 16 > 0$. Elle s'annule donc une seule fois en un point $\alpha \in]2, 3[$.

3. La fonction ϕ a pour dérivée $\phi'(x) = \frac{2}{3(2x+5)^{\frac{2}{3}}}$ qui est strictement positive sur l'intervalle $[2, 3]$ et donc ϕ y est strictement croissante. Comme on a $\phi(2) = 9^{\frac{1}{3}} > 2$ et $\phi(3) = 11^{\frac{1}{3}} < 3$, $\phi([2, 3]) \subset [2, 3]$ *i.e.* ϕ est une application de $[2, 3]$ dans $[2, 3]$. Montrons qu'elle est contractante. La dérivée ϕ' atteint son maximum au point $x = 2$; il vaut $k = \frac{2}{3^{\frac{5}{3}}}$ et est dans l'intervalle $]0, 1[$. D'après le théorème des accroissement finis, on a, pour tous $x, y \in [2, 3]$:

$$|\phi(x) - \phi(y)| \leq \sup_{c \in [2,3]} |\phi'(c)| \cdot |x - y| = k|x - y|$$

c'est-à-dire ϕ est contractante de facteur k.

4. L'espace métrique $[2, 3]$ est complet et $\phi : [2, 3] \longrightarrow [2, 3]$ est une application contractante ; ϕ admet donc un point fixe $x \in [2, 3]$ c'est-à-dire x vérifie $x = (2x + 5)^{\frac{1}{3}}$ ou $x^3 - 2x - 5 = 0$. Par suite $x = \alpha$ puisque α est l'unique solution réelle de l'équation $x^3 - 2x - 5 = 0$.

5. La convergence de la suite (x_n) vers α est une simple conséquence des questions 3 et 4 qu'on vient de traiter.

6. Comme (x_n) converge vers α, il suffit de trouver $n \geq 0$ tel que $|x_n - \alpha| \leq 10^{-3}$; x_n sera alors la valeur approchée à 10^{-3} près qu'on cherche. On a, en se rappelant que α est le point fixe de ϕ :

$$|x_n - \alpha| \leq k|x_{n-1} - \alpha| \leq \cdots \leq k^n|x_0 - \alpha| \leq k^n.$$

La dernière égalité se justifie par le fait que $x_0, \alpha \in [2,3]$ et donc $|x_0 - \alpha| \leq 3 - 2 = 1$. Il suffit alors de choisir n tel que que $k^n \leq 10^{-3}$, c'est-à-dire $\left(\frac{2}{3^{\frac{5}{3}}}\right)^n \leq 10^{-3}$. La résolution donne :

$$n \geq \frac{3\mathrm{Log}(10)}{\frac{5}{3}\mathrm{Log}(3) - \mathrm{Log}(2)} \simeq 6,070591.$$

Pour $n \geq 7$, x_n donne une valeur approchée de α à $1/1000$ près.

PROBLÈME

Désignons par Ω l'ensemble $\{1, \cdots, n\}$ des sommets du graphe sur lesquels se balade le point M au cours de sa marche aléatoire.

Section I

1. Pour $i \in \Omega$, soit E_i^k l'événement "M est sur i à l'étape k". Alors $P(E_i^k) = p_i^k$ et $\{E_1^k, \cdots, E_n^k\}$ est une partition de Ω. Donc, de façon évidente $1 = P(\Omega) = p_1^k + \cdots + p_n^k$.

2. Soient $i, j \in \Omega$ et C_{ij}^k l'événement "M part de i vers j à l'étape k". À l'étape k, M est au moins sur l'un des sommets $1, \cdots, n$; la probabilité de l'événement E_j^{k+1} est donc celle de la réunion disjointe des événements $E_1^k \cap C_{1j}^k, \cdots, E_n^k \cap C_{nj}^k$. Comme E_i^k et C_{ij}^k sont indépendants pour tout i, on a $P(E_j^{k+1}) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} P(E_i^k)P(C_{ij}^k) = \sum_{i=1}^{n} p_i^k a_{ij}^k$ qui n'est rien d'autre que la $j^{\text{ème}}$ composante du vecteur $P^{k+1} = P^k \cdot A$.

3. Pour $k = 0$, $A^0 = I_n$ et on a $P^0 = P^0 \cdot A^0$. Pour $k \geq 1$ on a, d'après ce qui précède, $P^k = P^{k-1} \cdot A$. Donc :

$$P^k = P^{k-1} \cdot A = (P^{k-2} \cdot A) \cdot A = P^{k-2} \cdot A^2 = \cdots = P^0 \cdot A^k.$$

4. La suite P^k converge vers $P = (p_1, \cdots, p_n)$, donc pour tout $i = 1, \cdots, n$, p_i^k converge vers p_i. Comme $p_1^k + \cdots + p_n^k = 1$ pour tout k, la suite $(p_1^k + \cdots + p_n^k)_k$ est constante et donc sa limite est 1, *i.e.* $p_1 + \cdots + p_n = 1$. D'autre part on a :

$$P = \lim_{k \to +\infty} P^{k+1} = \lim_{k \to +\infty} (P^k \cdot A) = (\lim_{k \to +\infty} P^k) \cdot A = P \cdot A.$$

Section II

1. De chaque sommet du tétraèdre partent, avec la même probabilité, trois arêtes vers les trois autres sommets. La matrice de transition du graphe en question est donc :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}U.$$

2. Calcul des matrices U^2 et U^3. On a :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = U$$

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} = U^2$$

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 6 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 6 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 6 \end{pmatrix} = U^3$$

3. Les suites en question (α_k) et (β_k) sont telles que u_{ij}^k (coefficient de la matrice U^k) vaut α_k si $i = j$ et β_k si $i \neq j$. C'est ce qu'on voit sur U, U^2 et U^3 ; montrons que c'est vrai à tout rang k. Le produit $U \cdot U^k = U^{k+1}$ est :

$$\begin{pmatrix} 3\beta_k & \alpha_k + 2\beta_k & \alpha_k + 2\beta_k & \alpha_k + 2\beta_k \\ \alpha_k + 2\beta_k & 3\beta_k & \alpha_k + 2\beta_k & \alpha_k + 2\beta_k \\ \alpha_k + 2\beta_k & \alpha_k + 2\beta_k & 3\beta_k & \alpha_k + 2\beta_k \\ \alpha_k + 2\beta_k & \alpha_k + 2\beta_k & \alpha_k + 2\beta_k & 3\beta_k \end{pmatrix}.$$

La matrice U^{k+1} est donc bien de la forme :

$$\begin{pmatrix} \alpha_{k+1} & \beta_{k+1} & \beta_{k+1} & \beta_{k+1} \\ \beta_{k+1} & \alpha_{k+1} & \beta_{k+1} & \beta_{k+1} \\ \beta_{k+1} & \beta_{k+1} & \alpha_{k+1} & \beta_{k+1} \\ \beta_{k+1} & \beta_{k+1} & \beta_{k+1} & \alpha_{k+1} \end{pmatrix}$$

avec $\alpha_{k+1} = 3\beta_k$ et $\beta_{k+1} = \alpha_k + 2\beta_k$.

4. On a $\beta_{k+2} = 2\beta_{k+1} + \alpha_{k+1} = 2\beta_{k+1} + 3\beta_k$ pour tout k.

5. Il est clair que pour $k = 0$, on a $0 = \beta_0 = \frac{3^0 - (-1)^0}{4}$ et $1 = \alpha_0 = \frac{3^0 + 3(-1)^0}{4}$. Faisons une récurrence sur k ; supposons $\alpha_k = \frac{3^k + 3(-1)^k}{4}$ et $\beta_k = \frac{3^k - (-1)^k}{4}$. Alors :

$$\alpha_{k+1} = 3\beta_k = 3\frac{3^k - (-1)^k}{4} = \frac{3^{k+1} - 3(-1)^k}{4} = \frac{3^{k+1} + 3(-1)^{k+1}}{4}$$

et

$$\beta_{k+1} = \alpha_k + 2\beta_k = \frac{3^k + 3(-1)^k}{4} + 2\frac{3^k - (-1)^k}{4} = \frac{3^{k+1} - (-1)^{k+1}}{4}.$$

C'est ce qu'il fallait démontrer.

6. Comme $A = \frac{1}{3}U$, on a $A^k = \frac{1}{3^k}U^k$. Par suite :

$$A^k = \begin{pmatrix} \frac{\alpha_k}{3^k} & \frac{\beta_k}{3^k} & \frac{\beta_k}{3^k} & \frac{\beta_k}{3^k} \\ \frac{\beta_k}{3^k} & \frac{\alpha_k}{3^k} & \frac{\beta_k}{3^k} & \frac{\beta_k}{3^k} \\ \frac{\beta_k}{3^k} & \frac{\beta_k}{3^k} & \frac{\alpha_k}{3^k} & \frac{\beta_k}{3^k} \\ \frac{\beta_k}{3^k} & \frac{\beta_k}{3^k} & \frac{\beta_k}{3^k} & \frac{\alpha_k}{3^k} \end{pmatrix}$$

On en déduit alors :

$$\begin{aligned}P^k &= P^0 \cdot A \\ &= (1,0,0,0)\cdot A^k = \left(\frac{\alpha_k}{3^k}, \frac{\beta_k}{3^k}, \frac{\beta_k}{3^k}, \frac{\beta_k}{3^k}\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(1+\frac{(-1)^k}{3^{k-1}}, 1-\frac{(-1)^k}{3^k}, 1-\frac{(-1)^k}{3^k}, 1-\frac{(-1)^k}{3^k}\right).\end{aligned}$$

7. De façon évidente la suite (P^k) converge vers le vecteur $P = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$.

Section III

1. De chaque sommet partent trois arêtes. Et comme les voisins d'un sommet ont la même probabilité d'être atteints, par simple observation du graphe, sa matrice de transition (carrée d'ordre 8) s'écrit :

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Un calcul immédiat montre que le vecteur $P' = (1,1,1,1,1,1,1,1)$ est transformé en lui-même *i.e.* $P' \cdot A = P'$. (Le vecteur P' est fixé par A.)

2. En regardant le graphe on voit que le sommet 1 a pour voisins $\{2,4,5\}$, 3 a pour voisins $\{2,4,7\}$, 6 a pour voisins $\{2,5,7\}$ et 8 a pour voisins $\{4,5,7\}$. Donc si le point M est sur X à une étape, il sera sur Y à l'étape qui suit. De la même manière, on vérifie (encore une fois en regardant le graphe) que si le point M est sur Y à une étape, il sera sur X à l'étape qui suit.

3. a) On aura besoin de l'expression de la matrice A^2. Un calcul simple (qu'on ne détaille pas) donne :

$$A^2 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 3 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Remarque 1 : Si $j \in Y$, les coefficients a^2_{ij} sont nuls pour $i \in X$. De même, si $j \in X$, les coefficients a^2_{ij} sont nuls pour $i \in Y$.

Remarque 2 : Le vecteur $P^0 = (1,0,0,0,0,0,0,0)$ est tel que $p^0_2 = p^0_4 = p^0_5 = p^0_7 = 0$ *i.e.* $p^0_i = 0$ pour $i \in Y$ et le vecteur $P^1 = P^0 \cdot A = \frac{1}{3}(0,1,0,1,1,0,0,0)$ est tel que $p^1_1 = p^1_3 = p^1_6 = p^1_8 = 0$ *i.e.* $p^1_i = 0$ pour $i \in X$.

Supposons maintenant que $P^{2k} = (p_1^{2k}, \cdots, p_8^{2k})$ a ses composantes p_i^{2k} nulles lorsque $i \in Y$. Soit $j \in Y$ et calculons la composante p_j^{2k+2} de $P^{2k+2} = P^{2k} \cdot A^2$. On a $p_j^{2k+2} = \sum_{i=1}^{8} p_i^{2k} a_{ij}^2$. Mais $p_i^{2k} = 0$ pour $i \in Y$, donc $p_j^{2k+2} = \sum_{i \in X} p_i^{2k} a_{ij}^2$ qui vaut 0 puisque $a_{ij}^2 = 0$ pour $i \in X$ (et $j \in Y$).

On a donc montré que, pour k pair les composantes du vecteur P^k dont les indices sont dans Y sont nulles. (Le démarrage de la propriété est donné par la remarque 2).

De la même manière, on démontre que, pour k impair les composantes du vecteur P^k dont les indices sont dans X sont nulles. (Le démarrage de la propriété est aussi donné par la remarque 2).

3. b) Supposons que (P^k) converge vers $P = (p_1, \cdots, p_8)$. Alors $p_1 + \cdots + p_8 = 1$. Comme la suite (P^{2k}) est extraite de (P^k), elle converge aussi vers P. On aura $p_i = 0$ pour $i \in Y$. De même, la suite (P^{2k+1}) est extraite de (P^k) donc converge aussi vers P et par suite $p_i = 0$ pour $i \in X$. Finalement on doit avoir $P = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$, ce qui n'est pas possible car ça contredit la relation $p_1 + \cdots + p_8 = 1$. La suite (P^k) n'est donc pas convergente.

<u>Section IV</u>

• Si la suite $P^k = P^0 \cdot A^k$ converge, alors il existe un vecteur stochastique $P = (p_1, \cdots, p_n)$ vérifiant $P = P \cdot A$.

C'était l'objet de la question I.4. La réciproque de cette assertion est fausse comme on a l'a vu dans la question III.1 :

Le vecteur $P' = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$ vérifie $P' = P' \cdot A$; donc le vecteur stochastique $P = \frac{1}{8}P'$ verifie aussi $P = P \cdot A$ et pourtant la suite (P^k) ne converge pas comme on l'a vu dans la question III.3. b).

• On a : $(i) \Longrightarrow (ii)$. Ou encore : *(ii) est une condition nécessaire pour (i).*

• On n'a pas : $(ii) \Longrightarrow (i)$. Ou encore : *(ii) n'est pas une condition suffisante pour (i).*

MEÉF 1 - Mathématiques

DS4 - 18 décembre 2017

Mathématiques fondamentales

Exercice 1

Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe. On suppose que tous ses angles ont une mesure dans $]0,\pi[$. On dira qu'un quadrilatère $MNPQ$ est *strictement inscrit* dans $ABCD$ si chacun des segments ouverts $]AB[$, $]BC[$, $]CD[$ et $]DA[$ porte un et un seul sommet de $MNPQ$, par exemple $M \in]AB[$, $N \in]BC[$, $P \in]CD[$ et $Q \in]DA[$.

On suppose que $ABCD$ est un rectangle de longueur $AB = CD = a$ et de largeur $AD = BC = b$ avec $0 < b < a$ et on se donne un quadrilatère $MNPQ$ strictement inscrit dans $ABCD$.

Dans les questions 1 et 2, et dans ces questions seulement, les points M, N, P et Q sont tels que $BM = BN = DP = DQ = x$ où $x \in]0, b[$.

1. Quelle est la nature du quadrilatère $MNPQ$. Calculer son aire $\mathcal{A}$ en fonction des grandeurs a, b et x. Pour quelle valeur de x cette aire est-elle maximale ? Donner la valeur de son maximum.

2. Écrire l'équation que doit satisfaire x pour que $MNPQ$ soit un losange. Traduire cela en fonction du rapport $k = \frac{a}{b}$.

3. Montrer qu'il existe une infinité de losanges $MNPQ$ strictement inscrits dans $ABCD$ et donner un procédé pour les construire géométriquement.

Exercice 2

1. a) Déterminer trois nombres réels positifs x, y et z dont la somme est 1 et formant une progression arithmétique de raison $\frac{1}{4}$.

1. b) Déterminer trois nombres réels positifs x, y et z dont la somme est 1 et formant une progression géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

On considère deux variables aléatoires X et Y sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On suppose que X et Y sont indépendantes et que :

i) X prend les valeurs 3, 1 et 2 avec des probabilités respectives formant une progression arithmétique de raison $\frac{1}{4}$;

ii) Y prend les valeurs 2, 1 et 0 avec des probabilités respectives formant une progression géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

2. a) Calculer les espérances mathématiques $E(X)$ et $E(Y)$.

2. b) Établir la loi de probabilité de la variable aléatoire $Z = XY$.

2. c) Calculer $E(Z)$ et en déduire $E(XY + 2Y - X)$.

Problème

On munit le plan $\mathbb{E} = \mathbb{R}^2$ de son produit scalaire usuel $\langle (x,y),(x',y')\rangle = xx' + yy'$ et de son repère orthonormé canonique $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ où $\overrightarrow{i} = (1,0)$ et $\overrightarrow{j} = (0,1)$. On identifie $\mathbb{R}^2$ au plan complexe $\mathbb{C}$ via la bijection $\mathbb{R}$-linéaire $(x,y) \longmapsto z = x + iy$.

Partie I

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $T_\alpha : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}$ l'application affine qui au point M de coordonnées (x,y) associe le point M' de coordonnées (x',y') :

$$\begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x - \alpha y \\ y' = \alpha x - \frac{1}{2}y. \end{cases}$$

1. Montrer que T_α est une bijection et qu'elle admet un unique point invariant que l'on déterminera.

2. Montrer qu'il existe une unique valeur de α pour laquelle T_α est une homothétie qu'on notera h. En donner le centre et le rapport.

3. Montrer qu'il existe deux valeurs de α pour lesquelles T_α est une isométrie. Montrer que ces isométries sont réciproques l'une de l'autre. On les notera r et r^{-1}.

4. Montrer que les affixes $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ respectivement de M et M' vérifient une relation de la forme $z' = az$ où a est un nombre complexe qu'on déterminera en fonction de α. En déduire que T_α est une similitude dont on donnera le centre, le rapport ρ et l'angle θ (qu'on caractérisera par son cosinus et son sinus).

5. Donner la valeur de a pour $T_\alpha = h$, $T_\alpha = r$ et $T_\alpha = r^{-1}$. Montrer que r et r^{-1} laissent globalement invariant tout triangle équilatéral ayant O comme centre de gravité (isobarycentre).

Partie II

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = 1$. On note A, B et C les points du plan ayant pour affixes les solutions de cette équation (B et C d'abscisses négatives et B d'ordonnée positive) et par A_1, B_1 et C_1 leurs images respectives par T_α.

Calculer les coordonnées des points A_1, B_1 et C_1 en fonction de α. En déduire que, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, le point A_1 est sur la droite (BC), B_1 sur la droite (CA) et C_1 sur la droite (AB).

2. Montrer que lorsque α décrit $\mathbb{R}$, le milieu du segment $[B_1C_1]$ décrit une droite que l'on précisera.

3. a) Soit A_2 le transformé de A_1 par T_α. Montrer que les coordonnées du point A_2 sont $x = \frac{1}{4} - \alpha^2$ et $y = -\alpha$.

3. b) Reconnaître et construire la courbe Γ des points A_2 lorsque α varie.

3. c) Montrer que le vecteur $\overrightarrow{B_1C_1}$ et le vecteur dérivé de $\overrightarrow{OA_2}$, considéré comme une fonction du paramètre α, sont linéairement dépendants. En déduire que la droite (B_1C_1) est la tangente au point A_2 à la courbe Γ.

Partie III

On fixe à présent la valeur du réel α et on définit, par récurrence, la suite d'applications affines : $T_\alpha^0 = I$ (application identité) et pour $n \geq 1$ $\quad T_\alpha^n = \overbrace{T_\alpha \circ \cdots \circ T_\alpha}^{n \text{ fois}}$.

Le point A a toujours pour coordonnées $(1, 0)$. On pose $A_n = T_\alpha^n(A)$ pour $n \geq 0$.

1. Calculer l'affixe z_n de A_n en fonction de a (*cf.* I.4) et démontrer que :

$$z_n = \left(-\frac{1}{2\cos\theta}\right)^n (\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$$

où θ est l'angle de la similitude T_α (*cf.* I.4).

Pour quelles valeurs de θ le module de z_n est-il une fonction décroissante de n ?

2. Calculer $||\overrightarrow{A_pA_{p+1}}||$ en fonction de $p \in \mathbb{N}$ puis $S_n = \sum_{p=0}^{n} ||\overrightarrow{A_pA_{p+1}}||$.

Comment faut-il choisir θ pour que la suite S_n admette une limite S finie quand n tend vers $+\infty$? Donner la valeur de cette limite S.

Corrigé

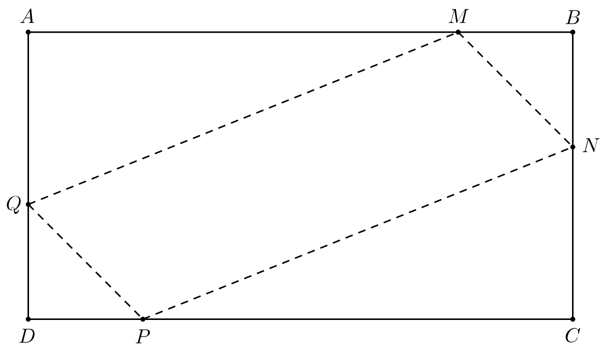
Exercice 1

1. Les deux triangles BMN et DPQ sont rectangles isocèles respectivement en B et D et tels que $BM = BN = x = DP = DQ$; ils sont donc égaux et par suite $MN = PQ$.

Dans les deux triangles AMQ et CNP, rectangles respectivement en A et C, on a par le théorème de Pythagore :

$$MQ = \sqrt{AM^2 + AQ^2} = \sqrt{(a-x)^2 + (b-x)^2} = \sqrt{CP^2 + CN^2} = NP.$$

Le quadrilatère $MNPQ$ a donc ses côtés opposés égaux deux à deux ; par suite c'est un parallélogramme.



Juste en regardant le dessin, on voit que l'aire de notre parallélogramme est :

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(x) &= \text{aire}(ABCD) - \text{aire}(BMN) - \text{aire}(DPQ) - \text{aire}(CNP) - \text{aire}(AMQ)\\ &= ab - x^2 - (a-x)(b-x)\\ &= -2x^2 + (a+b)x.\end{aligned}$$

Ci-dessous le tableau de variation de la fonction $x \in]0, b[\longmapsto \mathcal{A}(x) \in \mathbb{R}_+$:

x	0		$\frac{a+b}{4}$		b
$\mathcal{A}'(x)$		$+$	0	$-$	
$\mathcal{A}(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{(a+b)^2}{8}$	$\searrow$	$b(a-b)$

La dérivée $\mathcal{A}'(x)$ s'annule en $x_0 = \frac{a+b}{4}$ en lequel l'aire est maximale et vaut $\mathcal{A}(x_0) = \frac{(a+b)^2}{8}$.

2. Pour que $MNPQ$ soit un losange il faut, et il suffit, que $MN = MQ$, c'est-à-dire $2x^2 = (a-x)^2 + (b-x)^2$. Ce qui donne la condition :

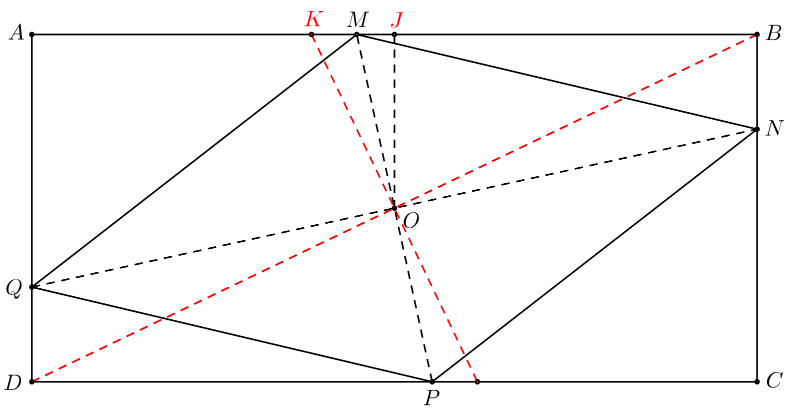
$$x = \frac{a^2+b^2}{2(a+b)}.$$

Et comme $x \in]0, b[$, on doit avoir $\frac{a^2+b^2}{2(a+b)} < b$ ou $a^2 + b^2 < 2(ab + b^2)$. Ce qui impose à $k = \frac{a}{b}$ de satisfaire l'inégalité $k^2 - 2k - 1 < 0$ *i.e.* $1 - \sqrt{2} < k < 1 + \sqrt{2}$. Comme $k > 1$ (car $a > b$) k doit en fait satisfaire la double inégalité $1 < k < 1 + \sqrt{2}$.

3. Faisons d'abord une petite remarque. Soient O le centre du rectangle $ABCD$ et J le milieu de AB. Alors la perpendiculaire à (la grande) diagonale BD (qui passe bien sûr par O) coupe la droite (AB) en un point K sur le segment $[JA]$. En effet, un calcul simple donne $JK = \frac{b^2}{2a}$; comme $b < a$, $JK < \frac{a}{2}$.

Sur le segment ouvert $]BC[$ on choisit un point N. La droite (NO) coupe AD en un point Q tel que $DQ = BN$. Par O on mène la perpendiculaire à la droite (NQ). En vertu de la remarque préliminaire que nous venons de faire, on vérifie facilement que celle-ci coupe les droites (AB) et (CD) respectivement sur les segments ouverts $]AB[$ et $]CD[$ en des points M et P. Le quadrilatère $MNPQ$ ainsi obtenu est un losange.

On obtient tous les losanges strictement inscrits dans $ABCD$ en faisant varier le point N sur le segment ouvert $]BC[$. (Le point M varie sur le segment ouvert $]KK'[$ où K' est le symétrique de K par rapport à J.)



Exercice 2

1. a) Les trois nombres cherchés x, y, z vérifient $y = x + \frac{1}{4}$, $z = y + \frac{1}{4}$ et $x + y + z = 1$, c'est-à-dire $x + (x + \frac{1}{4}) + (x + \frac{2}{4}) = 1$. Ceci nous donne $x = \frac{1}{12}$, $y = \frac{4}{12}$ et $z = \frac{7}{12}$.

1. b) Les trois nombres cherchés x, y, z vérifient $y = \frac{1}{2}x$, $z = \frac{1}{4}x$ et $x + y + z = 1$, c'est-à-dire $x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x = 1$. Ceci nous donne $x = \frac{4}{7}$, $y = \frac{2}{7}$ et $z = \frac{1}{7}$.

2. a) La variable X prend trois valeurs : 3, 1 et 2 avec les probabilités :

$$\begin{cases} p_1 = P(X=3) = \frac{1}{12} \\ p_2 = P(X=1) = \frac{4}{12} \\ p_3 = P(X=2) = \frac{7}{12}. \end{cases}$$

D'où $E(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 = 3 \cdot \frac{1}{12} + 1 \cdot \frac{4}{12} + 2 \cdot \frac{7}{12} = \frac{7}{4}$.

La variable Y prend trois valeurs : 2, 1 et 0 avec les probabilités :

$$\begin{cases} q_1 = P(Y=2) = \frac{4}{7} \\ q_2 = P(Y=1) = \frac{2}{7} \\ q_3 = P(Y=0) = \frac{1}{7}. \end{cases}$$

D'où $E(Y) = y_1q_1 + y_2q_2 + y_3q_3 = 2 \cdot \frac{4}{7} + 1 \cdot \frac{2}{7} + 0 \cdot \frac{4}{7} = \frac{10}{7}$.

2. b) La loi de la variable aléatoire $Z = XY$ est donnée dans le tableau qui suit :

z_i	0	1	2	3	4	6
$P(Z = z_i)$	$\frac{6}{42}$	$\frac{4}{42}$	$\frac{15}{42}$	$\frac{1}{42}$	$\frac{14}{42}$	$\frac{2}{42}$

2. c) Un calcul élémentaire (et habituel) donne $E(Z) = \frac{5}{2}$. (C'est aussi $E(X)E(Y)$ puisque X et Y sont indépendantes.) On en déduit, en utilisant la linéarité de l'espérance mathématique :

$$E(XY + 2Y - X) = E(XY) + 2E(Y) - E(X) = \frac{101}{28}.$$

Problème

Partie I

1. L'application T_α est linéaire de matrice $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\alpha \\ \alpha & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ dont le déterminant $\frac{1}{4} + \alpha^2$ est toujours non nul ; donc T_α est une bijection.

Un point fixe a pour coordonnées (x, y) vérifiant le système linéaire $\begin{cases} -\frac{1}{2}x - \alpha y = x \\ \alpha x - \frac{1}{2}y = y. \end{cases}$ Sa résolution est immédiate et donne $x = 0$ et $y = 0$; O est donc le seul point fixe de T_α.

2. Comme T_α est linéaire, elle est une homothétie s'il existe $k \in \mathbb{R}^*$ tel que $x' = kx$ et $y' = ky$ (son centre est forcément O). On doit donc avoir $-\frac{1}{2}x - \alpha y = kx$ et $\alpha x - \frac{1}{2}y = ky$ pour tout couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$; ceci donne forcément $\alpha = 0$ et $k = -\frac{1}{2}$.

3. Si T_α est une isométrie, son déterminant (qui est positif) doit être égal à 1 *i.e.* on doit avoir $\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ou $\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Ce qui signifie que T_α a pour matrice $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ ou

$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$, c'est-à-dire T_α est la rotation linéaire r (de centre O) d'angle $\theta = \frac{2\pi}{3}$ ou son inverse r^{-1} qui est la rotation linéaire d'angle $-\theta = -\frac{2\pi}{3}$.

4. La matrice de l'application linéaie T_α peut s'écrire :

$$\frac{\sqrt{4\alpha^2+1}}{2}\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{4\alpha^2+1}} & -\frac{2\alpha}{\sqrt{4\alpha^2+1}} \\ \frac{2\alpha}{\sqrt{\alpha^2+1}} & -\frac{1}{\sqrt{4\alpha^2+1}} \end{pmatrix}.$$

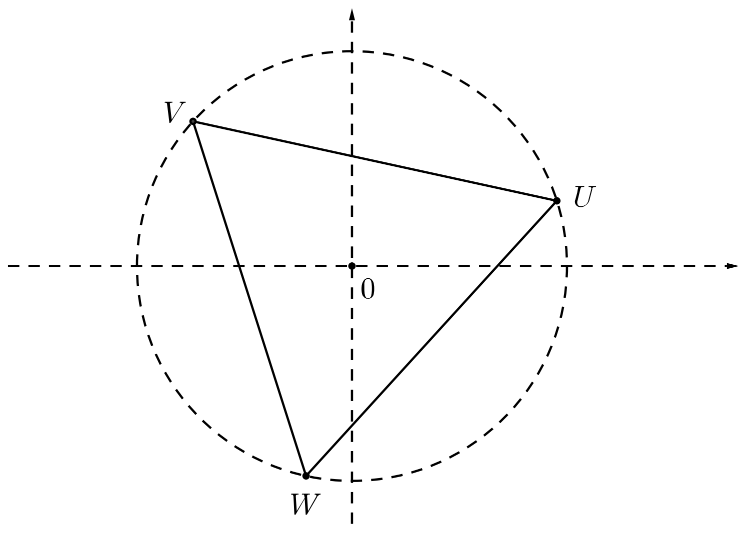
On pose $\rho = \frac{\sqrt{4\alpha^2+1}}{2}$ et on note θ le réel tel que $\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{4\alpha^2+1}}$ et $\sin\theta = \frac{2\alpha}{\sqrt{4\alpha^2+1}}$. Alors le nombre complexe $a = \rho e^{i\theta} = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ vérifie $z' = az$.

La transformation T_α est la similitude de centre O, de rapport ρ et d'angle θ.

5. Pour $\alpha = 0$, $T_0 = h$; on a $\rho = \frac{1}{2}$ et $\theta = \pi$ *i.e.* $a = -\frac{1}{2}$. Pour $\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $T_\alpha = r$; on a $a = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Pour $\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $T_\alpha = r^{-1}$; on a $a = e^{-\frac{2i\pi}{3}}$.

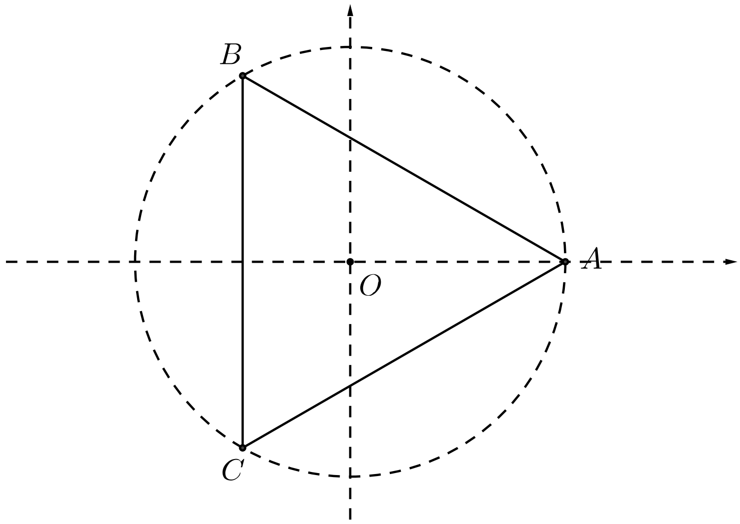
Un triangle équilatéral UVW ayant l'origine pour centre de gravité (point de concours des médianes, donc des médiatrices) a ses sommets sur un cercle centré à l'origine (et dont le rayon est égal à $\frac{2}{3}$ (hauteur du triangle)). Les angles $(\overrightarrow{OU}, \overrightarrow{OV})$, $(\overrightarrow{OV}, \overrightarrow{OW})$ et $(\overrightarrow{OW}, \overrightarrow{OU})$ valent tous $\frac{2\pi}{3}$. Par suite r (resp. r^{-1}) envoie un sommet du triangle sur un autre sommet du même triangle.

Les rotations r et r^{-1} laissent globalement invariant tout triangle équilatéral ayant l'origine comme isobarycentre.



Partie II

1. On pose $z = ke^{i\theta}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{R}_+$. L'équation $z^3 = 1$ devient $k^3 e^{3i\pi} = 1$. Ce qui donne $k = 1$ et 3θ congru à 0 modulo 2π. On a donc trois solutions $z_0 = 1$, $z_1 = e^{\frac{2i\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = e^{-\frac{2i\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Les points d'affixes respectives z_0, z_1 et z_2 seront notés A, B et C.



Déterminons les points A_1, B_1 et C_1 en calculant leurs coordonnées. On rappelle que $A = (1, 0)$, $B = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $C = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. On a donc :

$$A_1 = T_\alpha(A) = \left(-\frac{1}{2}, \alpha\right)$$

$$B_1 = T_\alpha(B) = \left(\frac{1}{4} - \alpha\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\alpha}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

$$C_1 = T_\alpha(B) = \left(\frac{1}{4} + \alpha\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\alpha}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right).$$

On voit que l'abscisse de A_1 est indépendante de α et est égale à $-\frac{1}{2}$, donc reste sur la droite d'équation $x = -\frac{1}{2}$, c'est-à-dire la droite (BC). D'autre part, un calcul immédiat donne :

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{AB_1} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} - \alpha\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\alpha}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} \end{pmatrix}.$$

D'où dét $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB_1}\right) = -\frac{3}{2}\left(-\frac{\alpha}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\alpha\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{4}\right) = 0$. Ceci montre que le point B_1 est sur la droite (AC). De la même manière :

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{AC_1} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} + \alpha\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\alpha}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} \end{pmatrix}.$$

D'où dét $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC_1}\right) = -\frac{3}{2}\left(-\frac{\alpha}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{3}{4} + \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}\right) = 0$. Ceci montre que le point C_1 est sur la droite (AB).

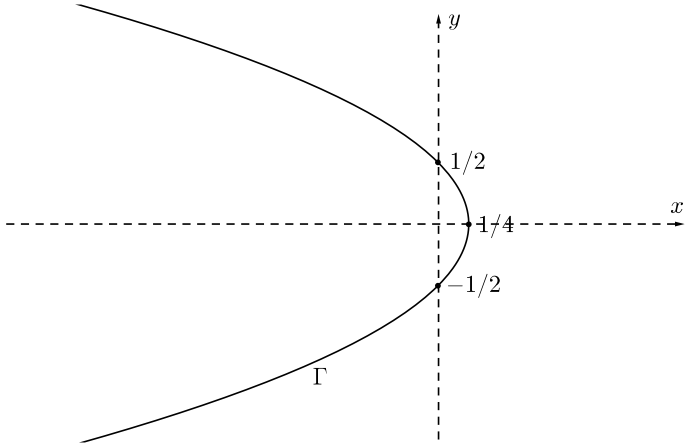
2. Le milieur J du segment $[B_1C_1]$ a pour coordonnées :

$$\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{4} - \alpha\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\alpha}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} + \alpha\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\alpha}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right)\right\} = \left(\frac{1}{4}, -\frac{\alpha}{2}\right).$$

Le point J varie donc sur la droite d'équation $x = \frac{1}{4}$.

3. a) Le calcul des coordonnées du point $A_2 = T_\alpha(A_1)$ est vraiment immédiat. On a $A_2 = \left(\frac{1}{4} - \alpha^2, -\alpha\right)$.

3. b) Le point A_2 varie sur la courbe Γ d'équation cartésienne $x = -y^2 + \frac{1}{4}$ qui est une parabole.



3. c) Le vecteur dérivé (calculé par rapport à la variable α) du vecteur $\overrightarrow{OA_2}$ a pour coordonnées $x'(\alpha) = -2\alpha$ et $y'(\alpha) = -1$ et :

$$\overrightarrow{B_1C_1} = \begin{pmatrix} \alpha\sqrt{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\begin{pmatrix} -2\alpha \\ -1 \end{pmatrix} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{OA_2}'(\alpha).$$

Comme A_2 est le seul point commun à la la courbe Γ et la droite (B_1C_1) (qui n'est pas parallèle à l'axe de la parabole) celle-ci est bien la tangente à Γ en A_2.

Partie III

On rappelle que la transformation T_α est la similitude qui, au point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe $z' = az$ où a est le nombre complexe $a = \rho e^{i\theta}$ tel que :

$$\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{4\alpha^2+1}} \qquad \sin\theta = \frac{2\alpha}{\sqrt{4\alpha^2+1}}$$

et :

$$\rho = \frac{\sqrt{4\alpha^2+1}}{2} = -\frac{1}{2\cos\theta}.$$

1. Le point $A_0 = A$ a pour affixe $z_0 = 1$, $A_n = T_\alpha^n(A)$ aura donc pour affixe :

$$z_n = a^n z_0 = a^n = \left(-\frac{1}{2\cos\theta}\right)^n e^{in\theta} = \left(-\frac{1}{2\cos\theta}\right)^n (\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)).$$

On a $|z_n| = \frac{1}{|2\cos\theta|^n}$. Cette quantité est une fonction décroissante (au sens large) de n si $|2\cos\theta| \geq 1$, c'est-à-dire si $-\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$ ou $\frac{2\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{4\pi}{3}$.

2. On a $||\overrightarrow{A_pA_{p+1}}|| = |z_{p+1} - z_p| = |a^{p+1} - a^p| = |a|^p \cdot |a-1|$. D'où :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{p=0}^{n} ||\overrightarrow{A_pA_{p+1}}|| \\ &= |a-1| \sum_{p=0}^{n} |a|^p \\ &= \frac{|a-1|}{1-|a|} \cdot (1 - |a|^{n+1}) \text{ (si } |a| \neq 1). \end{aligned}$$

Pour que cette suite ait une limite quand n tend vers $+\infty$, il est nécessaire et suffisant que $|a| < 1$. Ce qui revient à choisir θ tel que :

$$-\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{\pi}{3} \quad \text{ou} \quad \frac{2\pi}{3} < \theta < \frac{4\pi}{3}.$$

Dans ces conditions, on a :

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 - |a|^{n+1}\right) = 1$$

et donc :

$$S = \frac{|a-1|}{1-|a|}.$$

MEÉF 1 - Mathématiques
DS de rattrapage - 7 mars 2018

Les exercices sont délibérément élémentaires et l'appréciation portera bien entendu sur le "savoir les résoudre" mais aussi sur la clarté de la rédaction. C'est essentiellement le but de l'épreuve Écrit II du concours du CAPES !

Exercice 1

1 - Pour quelles valeurs de $x \in \mathbb{R}$ la quantité $f(x) = \sqrt{\frac{x+7}{x-2} - \frac{x+6}{x+4}}$ est-elle définie ?

2 - Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $\frac{x}{x-1} + \frac{2}{x+1} > \frac{1}{x-1} + \frac{x}{x+1}$.

Exercice 2

Dans $\mathbb{R}^2$ muni de son produit scalaire usuel on considère la parabole $\mathcal{B}$ d'équation $y = x^2 + q$ où $q \in \mathbb{R}$ et une droite Δ d'équation cartésienne $y = ax + b$ avec $a > 0$.

1 - Sous quelles conditions (portant sur les paramètres q, a et b) la parabole $\mathcal{B}$ intersecte-t-elle la droite Δ en exactement deux points A et B ?

On note M le milieu du segment $[AB]$.

2 - On garde le paramètre a fixe et on fait varier b. Montrer que le point M varie sur une demi-droite ouverte que l'on déterminera.

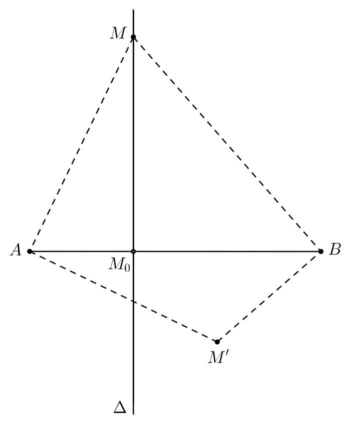
Exercice 3

Soient AB un segment et Δ une droite le coupant perpendiculairement en un point M_0. Soit M un point de Δ distinct de M_0 ; la perpendiculaire en A à la droite (AM) et celle en B à (BM) se coupent en un point M'.

1 - Où varie le point M' lorsque M varie sur Δ ?

2 - Dire pourquoi les quatre points A, M, B et M' sont sur un même cercle Γ.

3 - Où varie le centre ω du cercle Γ lorsque M varie sur Δ.



Indication. *Utiliser l'orthocentre H (point de concours des hauteurs) du triangle MAB.*

Corrigé

Exercice 1

1 - La racine carrée d'un réel u est le réel positif a noté $\sqrt{u}$ et tel que $a^2 = u$. Ce qui impose $u \geq 0$.

Pour que la quantité $u(x) = \frac{x+7}{x-2} - \frac{x+6}{x+4}$ soit définie, il faut d'abord (et il suffit) d'avoir $x \neq -4$ et $x \neq 2$; nous chercherons donc x dans $\mathbb{R} \setminus \{-4, 2\}$. Ensuite, la quantité $u(x)$ doit être positive ou nulle. Après calcul et simplification, elle devient :

$$u(x) = \frac{7x + 40}{(x-2)(x+4)}.$$

Étudier le signe de celle-ci (en fonction de la variable x) revient à étudier celui de chacun des facteurs $a = 7x + 40$, $b = x + 4$ et $c = x - 2$. C'est ce qui est résumé dans le tableau ci-dessous.

x		$-\frac{40}{7}$		-4		2	
$7x+4$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x+4$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x-2$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$u(x)$	$-$	0	$+$	‖	$-$	‖	$+$

L'expression $u(x)$ est définie et positive lorsque $x \in \mathcal{D} = [-40/7, -4[\cup]2, +\infty[$ $\square$

2 - Il faut d'abord que les quatre fractions intervenant dans l'inéquation soient définies ; on doit donc imposer les conditions $x \neq -1$ et $x \neq 1$. Ceci étant, on peut écrire l'inéquation sous la forme :

$$\frac{x}{x-1} - \frac{1}{x+1} + \frac{3}{x+1} > \frac{1}{x-1} + \frac{x}{x+1}$$

ou encore, après transposition des termes du membre de droite vers celui de gauche : $\frac{3}{x+1} > 0$. La fraction $\frac{3}{x+1}$ est strictement positive si, et seulement si, son dénominateur l'est, c'est-à-dire lorsque $x > -1$. L'ensemble des solutions de notre inéquation est donc $\mathcal{S} =]-1, 1[\cup]1, +\infty[$. $\square$

Exercice 2

1 - Un point M est sur $\mathcal{B} \cap \Delta$ si, et seulement si, ses coordonnées (x, y) sont solutions du système :

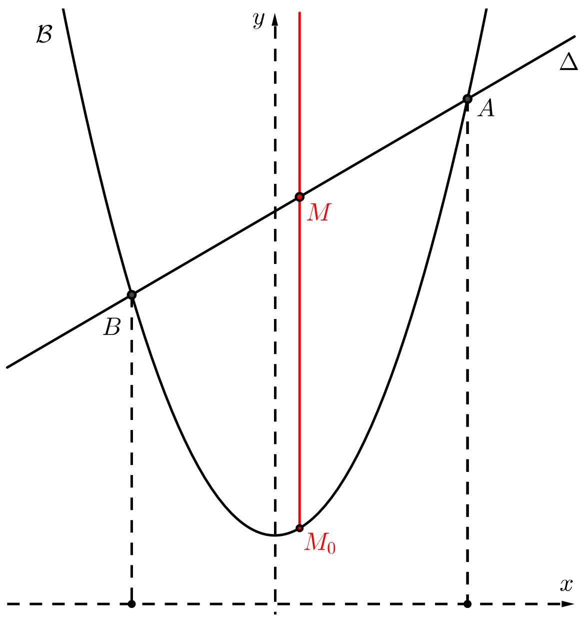
$$\begin{cases} y = x^2 + q \\ y = ax + b \end{cases}$$

Sa résolution passe par celle de l'équation du second degré $x^2 - ax + q - b = 0$. Elle a pour discriminant $a^2 - 4(q - b)$. Pour avoir deux solutions réelles distinctes ce discriminant doit être strictement positif ; d'où la condition $a^2 > 4(q - b)$. Ces solutions sont alors $x' = \frac{a+\sqrt{a^2-4(q-b)}}{2}$ et $x'' = \frac{a-\sqrt{a^2-4(q-b)}}{2}$; ce sont les abscisses respectives de A et B, points d'intersection de la parabole $\mathcal{B}$ avec la droite Δ. $\square$

2 - Lorsque b varie, la droite Δ varie parallèlement à la direction de pente a. Bien sûr, les points A et B varient aussi ainsi que leur milieu M qui a pour abscisse :

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{x' + x''}{2} = \frac{a}{2}.$$

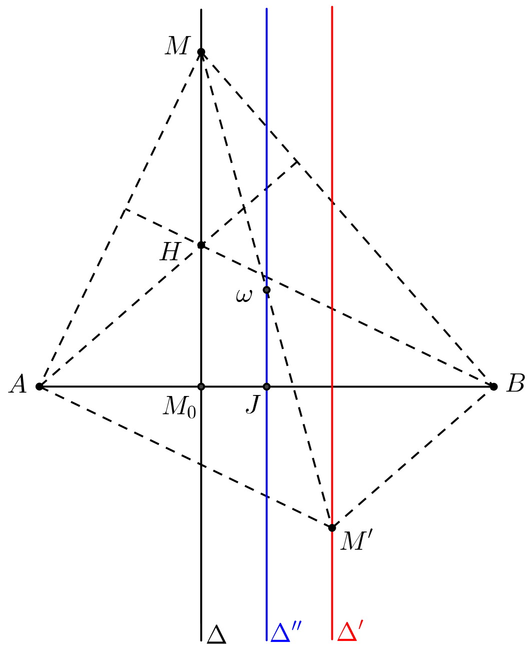
Comme cette abscisse reste constante, M varie sur la demi-droite ouverte définie par les relations $x = \frac{a}{2}$ et $y > \frac{a^2}{4} + q$ (représentée ci-dessous en rouge). $\square$



Exercice 3

1 - Comme MM_0 est hauteur du triangle MAB, l'orthocentre H est sur la droite (MM_0) ; donc la droite (AH) est perpendiculaire à (MB) et par suite les segments AH et $M'B$ sont parallèles. De la même manière, on montre que les deux segments BH et $M'A$ sont parallèles. Le quadrilatère $AHBM'$ est donc un parallélogramme, par suite ses diagonales AB et HM' se coupent en leur milieu J. Il en résulte que lorsque M varie sur

Δ, M' varie sur la droite Δ' parallèle à Δ et passant par le symétrique de H par rapport à J (H reste tout le temps sur Δ). $\square$



2 - Le quadrilatère $AMBM'$ est inscrit dans le cercle Γ de diamètre MM' car ses deux angles opposés $\widehat{MAM'}$ et $\widehat{MBM'}$ sont droits. $\square$

3 - Le centre ω du cercle Γ est le milieu du segment MM'. On a vu que quand M varie sur Δ, M' varie sur Δ' parallèle à Δ. Par suite ω varie sur une droite Δ'' parallèle à Δ (et à Δ'). Quand M et H sont confondus (c'est-à-dire lorsque le triangle AMB est rectangle en M), ω est sur J ; donc Δ'' est la parallèle à Δ passant par le point J. $\square$