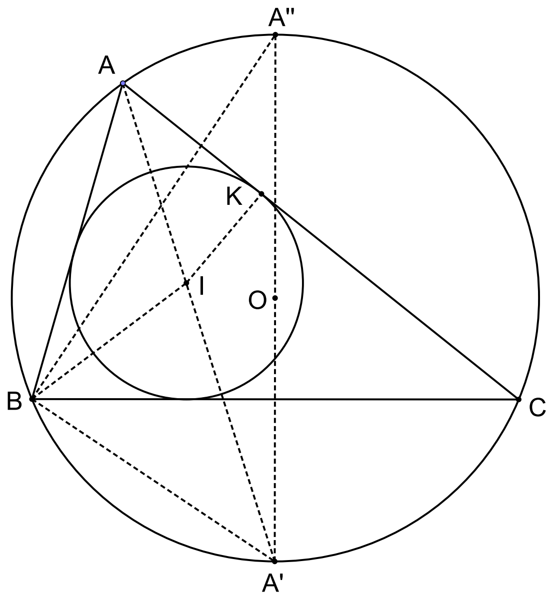
UNIVERSITÉ DE VALENCIENNES

PRÉPARATION AU CAPES
Compléments de géométrie élémentaire

par

Aziz El Kacimi

EXERCICES



Année universitaire 2008-2009

.

1. LE TRIANGLE ET LE CERCLE

Exercice 1. Soient ABC un triangle et a, b et c les mesures respectives des côtés BC, AC et AB. Démontrer l'équivalence

$$\widehat{A} \leq \widehat{B} \Longleftrightarrow a \leq b.$$

Exercice 2. Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles tels que $AB = A'B'$ et $BC = B'C'$; on suppose en plus que les médianes AM et $A'M'$ (M et M' étant les milieux respectifs de BC et $B'C'$) sont égales. Montrer que les triangles ABC et $A'B'C'$ sont égaux.

Exercice 3. On suppose que deux triangles ABC et $A'B'C'$ sont rectangles en A et A', que les côtés AB et $A'B'$ sont égaux et que les hauteurs AH et $A'H'$ sont égales.

i) Démontrer que les triangles ABH et $A'B'H'$ sont égaux.

ii) Qu'en déduit-on pour les triangles ABC et $A'B'C'$?

Exercice 4. Démontrer que la somme des angles d'un triangle est égale à π.

Exercice 5. Soit ABC un triangle isocèle de base BC telle $BC < AB$. Sur la droite BC au-delà de C, on prend un point E tel que $BE = AB$ et sur la droite AB au-delà de B on prend un point D tel que $BD = CE$.

i) Démontrer que les triangles ACE et BDE sont égaux.

ii) En déduire que l'on a $\widehat{AED} = \widehat{AEC} + \widehat{CAE}$.

Exercice 6. Donner un exemple de deux triangles non égaux et ayant deux côtés égaux et un angle égal.

Exercice 7. Soit ABC un triangle. On appelle *segment de Céva* tout segment joignant l'un des sommets à un point du côté opposé. Soient AA', BB' et CC' trois segments de Céva de ABC. Démontrer le

Théorème de Céva Les segments AA', BB' et CC' sont concourants si et seulement si on a la relation

$$\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1.$$

Exercice 8. Soient M un point intérieur à un triangle ABC, A', B' et C' les projections orthogonales de M respectivement sur les côtés BC, CA et AB et a, b et c les symétriques de M respectivement par rapport aux droites BC, CA et AB.

i) Montrer que les triangles $A'B'C'$ et abc ont leurs côtés respectivement parallèles.

ii) Montrer que les perpendiculaires abaissées de A, B et C respectivement aux côtés $B'C'$, $C'A'$ et $A'B'$ sont concourantes.

Exercice 9. Dans un triangle ABC le centre de gravité est confondu avec l'orthocentre. Quelle est la nature de ce triangle ?

Exercice 10. Soient A, B, C et D quatre points alignés tels que les segments AB et CD aient même milieu I. Sur la perpendiculaire en A à AB on choisit un point E et on désigne par O le milieu de EB.

Montrer que les deux triangles EAB et ECD ont même centre de gravité G.

Exercice 11. Soit (Δ) une droite partageant le plan $\mathcal{P}$ en deux demi-plans $\mathcal{P}_+$ et $\mathcal{P}_-$. On se donne deux points A et B dans $\mathcal{P}$.

Déterminer les point $M \in (\Delta)$ pour lesquels la quantité $|MA - MB|$ est maximale dans les deux cas suivants

i) $A, B \in \mathcal{P}_+$ ou $A, B \in \mathcal{P}_-$;

ii) $A \in \mathcal{P}_+$ et $B \in \mathcal{P}_-$.

Exercice 12. Soient ABC un triangle et B' et C' deux points respectivement sur AC et AB tels que BB' et CC' soient les bissectrices (intérieures) respectivement des angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$. On se propose de démontrer le

Théorème de Steiner-Lehmus *Si $BB' = CC'$ alors ABC est isocèle de base BC.*

On fait l'hypothèse : $\widehat{ABC} > \widehat{ACB}$ et on va montrer que cela mène à une contradiction. Soit D le point du plan tel que le quadrilatère $B'BC'D$ soit un parallélogramme.

i) Montrer que

$$\widehat{C'CB} < \widehat{C'DB'}. \tag{1}$$

ii) En comparant les triangles CBC' et BCB' montrer que l'on a

$$B'C > B'D.$$

En déduire que

$$\widehat{B'CD} < \widehat{B'DC}. \tag{2}$$

et :

$$\widehat{DCC'} < \widehat{CDC'}. \tag{3}$$

iii) Conclure à partir de ce qui précède.

Exercice 13. Soient ABC un triangle (non dégénéré) et D un point du segment BC. La parallèle à la droite (AD) passant par Ccoupe la droite (AB) en E.

i) Montrer l'équivalence :

$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} \iff \begin{cases} \text{La droite } (AD) \text{ est bissectrice} \\ \text{intérieure de l'angle } \widehat{A}. \end{cases}$$

ii) On pose :

$$BC = a \;\; AC = b \;\; AB = c.$$

Montrer que le barycentre des points A, B et C affectés respectivement des coefficients a, b et c est le centre du cercle inscrit dans le triangle ABC.

Exercice 14. Soit ABC un triangle. On note O, G et H respectivement le centre du cercle (Γ) circonscrit à ABC, le centre de gravité et l'orthocentre du triangle ABC. Soit R le rayon de (Γ).

i) Montrer que la longueur du segment AH est égale à 2 fois la distance de O à la droite (BC). Montrer que O, G et H sont sur une même droite (qu'on appelle la *droite d'Euler du triangle ABC*).

ii) Montrer que les cercles circonscrits respectivement aux triangles AHC, BHC et AHB ont même rayon égal à R

iii) Montrer que le symétrique H_1 de H par rapport à la droite BC est sur le cercle (Γ).

Exercice 15. Soient A, B et C des points de l'espace et α, β, γ, et k des nombres réels. Déterminer l'ensemble des points M de l'espace vérifiant la relation :

$$\alpha MA^2 + \beta MB^2 + \gamma MC^2 = k.$$

Exercice 16. Soit (Γ) un cercle. Montrer que la mesure d'un angle inscrit est égale à la moitié de l'angle au centre qui intercèpte le même arc.

Exercice 17. Montrer que par trois points distincts deux à deux, non alignés, il passe toujours un et un seul cercle. Quelle est la condition nécessaire et suffisante que doivent satisfaire quatre points distincts deux à deux pour qu'ils soient cocycliques (i.e sur un même cercle) ?

Exercice 18. Un cercle (Γ) de centre O et de rayon $R > 0$ dans le plan partage ce dernier en deux parties : l'*intérieur* qui est l'ensemble des points M tels que $OM < R$ et l'*extérieur* qui est l'ensemble des points M qui vérifient $OM > R$. On appelle *angle intérieur* (resp. *angle extérieur*) au cercle un angle ayant le sommet à l'intérieur du cercle (resp. à l'extérieur du cercle et dont les côtés rencontrent celui-ci).

Montrer qu'un angle intérieur est égal à la demi-somme (resp. la demi-différence) des angles au centre qui intercèptent les mêmes arcs.

Exercice 19. Soient (Γ) un cercle de centre O et de rayon $R > 0$ et A et B deux points sur (Γ) diamétralement opposés. Un diamètre MN pivote autour de O. Soient P et Q les points d'intersection respectivement des droites (AM) et (AN) avec la tangente en B à (Γ).

i) Montrer que les quatre points M, N, P et Q sont cocycliques.

ii) Montrer que la médiane issue de A du triangle APQ est hauteur du triangle AMN. Où varie le centre du cercle passant par les points M, N et P quand M varie sur (Γ) ?

Exercice 20. Deux cercles (Γ) et (Γ') de centres respectifs O et O' et de rayons respectifs R et R' se coupent en A et B. Une droite (Δ) passant par A les coupe en M et M'. Montrer que le rapport $\frac{BM}{BM'}$ reste constant quand (Δ) pivote autour de A. Calculer ce rapport.

Exercice 21

i) Soient (Γ) un cercle de centre O et S un point extérieur à (Γ). Construire les tangentes à (Γ) qui passent par S.

ii) Soient (Γ) et (Γ') deux cercles de centres respectifs O et O'. Construire les tangentes communes à ces deux cercles.

Exercice 22. Soient (Γ) un cercle et Δ_1, Δ_2 et Δ_3 trois diamètres distincts deux à deux. Construire un triangle ABC inscrit dans (Γ) ayant ces trois diamètres comme médiatrices.

Exercice 23. Soit $(\mathcal{C})$ un demi-cercle de centre O et de diamètre AB. On note Δ et Δ' les tangentes à $(\mathcal{C})$ en A et B. Une tangente à $(\mathcal{C})$ coupe Δ et Δ' respectivement en M et N. Montrer que l'angle $\widehat{MON}$ est droit.

Exercice 24. Soient (Γ) un cercle de centre O et de rayon $R > 0$ et S un point du plan. On note d la distance de O à S. Une droite Δ pivotant autour de S coupe (Γ) en deux points M et N. Montrer que la produit $\overline{SM}.\overline{SN}$ est constant égal $d^2 - R^2$.

Ce nombre qu'on notera $P(S,\Gamma)$ s'appelle *puissance de S par rapport à* (Γ).

Exercice 25. Une relation métrique entre les rayons des cercles inscrit et circonscrit d'un triangle et la distance entre leurs centres

Soient ABC un triangle non dégénéré, O le centre du cercle (Γ) circonscrit et I le centre du cercle (γ) inscrit. On note R et r leurs rayons respectifs et d la distance entre O et I. Montrer que :

$$R^2 - d^2 = 2rR.$$

C'est le *Théorème de Poncelet* pour un cercle.

2. POINTS CONJUGUÉS ET POLAIRES

Exercice 1. Soient (Δ) une droite du plan et A, B, et C trois points de (Δ). Construire le conjugué harmonique D du point C par rapport à A et B.

Exercice 2. Soient (d) et (d') deux droites du plan sécantes en O et M un point du plan. Construire la *polaire* (δ') de M par rapport à (d) et (d').

Exercice 3. Le plan $\mathcal{E}$ étant rapporté à un repère orthnormé (O, i, j), soient (d) et (d') les deux droites d'équations :

$$(d) \;\; 2x - y + 4 = 0 \;\; \text{et} \;\; (d') \;\; 5x - 3y + 2 = 0.$$

Déterminer l'équation de la polaire du point $A = (1, 0)$ par rapport aux droites (d) et (d').

Exercice 4

i) Le plan $\mathcal{E}$ étant toujours rapporté à un repère orthnormé (O, i, j), montrer que l'ensemble

$$\mathcal{A} = \{(x, y) \;\; 3x^2 - 5xy - 2y^2 = 0\}$$

est constitué de deux droites (d) et (d') dont on déterminera les équations.

ii) Quelle est l'équation de la polaire (δ) du point $A = (1, 1)$ par rapport à (d) et (d') ?

Exercice 5. Soient (d) et (d') deux droites du plan $\mathcal{E}$ et k un nombre réel stritement positif.

Déterminer l'ensemble $\mathcal{M}$ des points de $\mathcal{E}$ tels que :

$$\frac{MH}{MH'} = k$$

où H et H' sont les projections orthogonales de M respectivement sur (d) et (d').

3. CONSTRUCTIONS GÉOMÉTRIQUES

Exercice 1. Soient (D) et (D') deux droites fixes et $[AB]$ un segment fixé.

Construire deux points $M \in (D)$ et $M' \in (D')$ tels que $MM' = AB$ et MM' parallèle à AB.

Exercice 2. Soient $[AB]$ un segment, K un point de $[AB]$ différent de A et B. Un point M varie sur la perpendiculaire (D) à $[AB]$ passant par K. Les perpendiculaires respectives à MA et MB passant par A et B se rencontrent en M'.

Quel est le lieu géométrique de M' quand M varie dans (D) ?

Exercice 3

i) On se donne un cercle (Γ) et une droite (Δ). Construire tous les cercles $(\mathcal{C})$ tangents à (Γ) et à (Δ).

ii) On se donne deux cercles (Γ) et (Γ'). Construire tous les cercles $(\mathcal{C})$ tangents à (Γ) et à (Γ').

Exercice 4. Démontrer le :

Théorème de Menelaüs. *Une condition nécessaire et suffisante pour que 3 points P, Q et R situés respectivement sur les côtés $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$ d'un triangle ABC soient alignés, est*

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \cdot \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} \cdot \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = 1.$$

Exercice 5. Soient (D) et (D') deux droites fixes et A un point donné. Une droite (Δ) coupe (D) et (D') respectivement en B et C. On note G le centre de gravité du triangle ABC.

Déterminer le lieu géométrique de G quand (Δ) varie parallèlement à une direction donnée.

Exercice 6. On se donne un cercle (Γ) de centre O et trois diamètres (Δ_1), (Δ_2) et (Δ_3) deux à deux distincts.

Construire un triangle ABC inscrit dans le cercle et ayant (Δ_1), (Δ_2) et (Δ_3) pour médiatrices.

Exercice 7. Soient a et b et deux nombres réels positifs et $\theta \in [0, \pi]$. Construire un triangle ABC tel que :

i) $BC = a$ et $AC = b$;

ii) $\widehat{ABC} = \theta$.

4. TRANSFORMATIONS GÉOMÉTRIQUES

Exercice 1. Exceptionnellement dans cet exercice on se situe dans l'espace $\mathcal{E}$ de dimension 3 muni de son produit scalaire usuel. Une *transformation* de $\mathcal{E}$ sera par définition une application bijective $\mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$.

Soit (Δ) une droite dans $\mathcal{E}$. On appelle *retournement* d'axe (Δ) la transformation de $\mathcal{E}$ qui à un point M fait correspondre le point M' tel que (Δ) soit la médiatrice du segment MM'. Une telle transformation s'appelle aussi *symétrie axiale* ou *symétrie orthogonale.*

i) Montrer que tout retournement de $\mathcal{E}$ est une isométrie de $\mathcal{E}$.

Soient T et T' deux retournements du plan $\mathcal{P}$ (supposé plongé dans $\mathcal{E}$) d'axes respectifs (Δ) et (Δ') distincts.

ii) Montrer que la transformation composée $T' \circ T$ est

– une translation si les axes (Δ) et (Δ') sont parallèles et dans ce cas préciser le vecteur de translation ;

– une rotation si (Δ) et (Δ') ont un point commun ; déterminer l'angle et le centre de la rotation.

iii) **Application.** Soit ABC un triangle du plan $\mathcal{P}$ et notons H son *orthocentre*. On note H' l'image de H par le retournement de $\mathcal{E}$ d'axe (BC). Montrer que H' est sur le *cercle circonscrit* au triangle ABC i.e le cercle passant par les trois sommets.

iv) On se donne maintenant deux retournements T et T' de l'espace $\mathcal{E}$ d'axes respectifs (Δ) et (Δ') disjoints et non parallèles. Montrer que le produit $T' \circ T$ est la composée d'une translation et d'une rotation. Préciser le vecteur de translation et l'axe de rotation. Une telle transformation est appelée *déplacement hélicoïdal* ou *vissage* (on voit pourquoi !).

Exercice 2. Soient (Γ) un cercle variable de centre O passant par deux points fixes distincts A et B et H le point de OB tel que $\frac{\overline{HB}}{\overline{HO}} = -m$ où m est un réel strictement positif donné.

i) Où varie le point H quand le cercle (Γ) varie ?

Par H on mène la perpendiculaire à (OB) qui coupe (Γ) en P et Q.

ii) Montrer que l'angle $\widehat{HOP}$ reste constant. En déduire que les points P et Q décrivent deux droites (Δ) et (Δ') passant par A et symétriques par rapport à AB.

iii) Montrer que (Δ) et (Δ') se déduisent l'une de l'autre par une rotation de centre B dont on précisera l'angle.

On oriente (Δ) et (Δ') de façon à ce que B soit sur la bissectrice des axes ainsi obtenus.

iv) Montrer que le nombre $\overline{AP} + \overline{AQ}$ reste constant quand (Γ) varie.

Exercice 3. On appelle *similitude plane directe* le produit d'une homothétie positive $\mathcal{H}(\mathcal{O}, \|)$ (i.e $k > 0$) et d'une rotation $\mathcal{R}(\omega, \theta)$. Le nombre k s'appelle le *rapport de similitude* et θ l'*angle de similitude.*

i) Démontrer que toute similitude plane directe se décompose en une homothétie et une rotation ayant le même centre Ω appelé le *centre de similitude.* Cette similitude sera notée $\mathcal{S}(\otimes, \|, \theta)$.

ii) Montrer que le produit de deux similitudes planes directes est une similitude plane directe ou une translation.

iii) Montrer que l'ensemble des similitudes planes directes et des translations est un groupe non abélien.

On munit le plan de son produit scalaire usuel et à l'aide d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2)$ on l'identifie à $\mathbb{R}^2$.

iv) Montrer qu'une similitude plane directe de centre l'origine est une application $\mathbb{R}$-linéaire. Calculer sa matrice par rapport à la base $(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2)$.

On identifie $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$ par l'application $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow z = x + iy \in \mathbb{C}$.

v) Montrer qu'une similitude plane directe est une application $\mathbb{C}$-linéaire.

Exercice 4. On appelle *inversion* de *pôle* O et de puissance $k \in \mathbb{R}^*$, la transformation du plan $\mathcal{I}(\mathcal{O}, \|) : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$ qui à tout point M fait correspondre le point $M' \in (OM)$

tel que $\overline{OM} \cdot \overline{OM'} = k$. On dira que $\mathcal{I}(\mathcal{O}, \|)$ est *positive* (resp. *négative*), si $k > 0$ (resp. si $k < 0$).

i) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que deux figures géométriques (F) et (F') se correspondent dans une inversion.

Soit $\mathcal{I}(\mathcal{O}, \|)$ une inversion.

ii) Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une droite (Δ) soit invariante par $\mathcal{I}(\mathcal{O}, \|)$. Même question pour un cercle (Γ).

iii) Soient M et N deux points du plan et M' et N' leurs images respectives par $\mathcal{I}(\mathcal{O}, \|)$. Calculer la longueur du segment $[M'N']$.

iv) Une *courbe* dans le plan $\mathcal{P}$ est une application continue $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{P}$. Montrer que si une courbe γ admet une tangente en un point $M_0 = \gamma(t_0)$ alors sa transformée γ' par $\mathcal{I}(\mathcal{O}, \|)$ admet aussi une tangente au point $M_0' = \gamma'(t_0)$.

v) Chercher les transformées

- d'une droite (Δ) ;
- d'un cercle (Γ).

Considérer tous les cas possibles : $O \in (\Delta)$, $O \notin (\Delta)$, $O \in (\Gamma)$ et $O \notin (\Gamma)$.

vi) On se donne une droite (Δ) et un cercle (Γ). Existe-t-il une inversion qui tranforme (Δ) en (Γ) (et (Γ) en (Δ)) ?

vii) On se donne deux cercles (Γ) et (Γ'). Existe-t-il une inversion qui transforme l'un en l'autre ?

Exercice 5. On se donne un cercle (Γ), une droite (Δ) et un point A. Construire un cercle $(\mathcal{C})$ passant par A et tangent à (Γ) et à (Δ).

Exercice 6. Démontrer le
Théorème de Ptolémée *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un quadrilatère convexe soit inscriptible dans un cercle est que le produit des diagonales soit égal à la somme des produits des côtés opposés.*

Dans les exercices 7, 8, 9, 10 et 11 $\mathcal{P}$ et $\mathcal{E}$ seront le plan affine et l'espace affine associés respectivement aux espaces vectoriels $\overrightarrow{P}$ et $\overrightarrow{E}$ de dimensions respectives 2 et 3.

Exercice 7. Deux cercles (Γ) et (Γ') dans le plan $\mathcal{P}$ se coupent en A et B. Soit M un point de la droite (AB) extérieur au segment AB.

i) On note S et S' les points de contact des tangentes menées de M respectivement à (Γ) et (Γ'). Comparer MS et MS'.

ii) Une droite passant par M coupe (Γ) en N et P ; de même une droite passant par M (distincte de (MN)) coupe (Γ') en N' et P'. Montrer que le quadrilatère $NPP'N'$ est inscriptible.

Exercice 8. Le plan $\mathcal{P}$ étant rapporté à un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, on considère les 3 points $A = (4, 0)$, $B = (9, 0)$ et $C = (0, 3)$.

i) Déterminer l'équation du cercle circonscrit au triangle ABC.

ii) donner les équations des cercles passant par A et B et tangents à l'axe des ordonnées.

Exercice 9. Dans $\mathcal{E}$ on considère une droite (Δ), un plan (P) et (D) et (δ) deux droites de ce plan. Soient T la projection de $\mathcal{E}$ sur (P) parallèlement à (Δ) et S la projection de (P) sur (D) parallèlement à (δ). Quelle est l'application représentée par le produit $S \circ T$?

Exercice 10. Soient (Δ) et (Δ') deux droites du plan $\mathcal{P}$. On note S la symétrie par rapport à (Δ) et S' la symétrie par rapport à (Δ'). Quelle est la transformation de $\mathcal{P}$ représentée par le produit $S' \circ S$?

Exercice 11. Soient (D) une droite du plan $\mathcal{E}$, A un point fixe de (D) et M un point variable de (D). Soit P un point de la médiatrice de AM. On suppose que M et P varient de façon à ce que le rayon du cercle (Γ) circonscrit au triangle AMP reste constant égal à r.

i) Soit O le centre de (Γ). Quel est le lieu géométrique de O ?

ii) En déduire l'ensemble décrit par le point P lorsque M varie.

Exercice 12. Soient (Γ) et (Γ') deux cecles égaux de centres respectifs O et O' tangents extérieurement. A tout point M de (Γ) on fait correspondre un point M' de (Γ') tel que :

$$(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{O'M'}) = \frac{\pi}{2}.$$

Quel est le centre de la rotation qui transforme $\overrightarrow{OM}$ en $\overrightarrow{O'M'}$?

Exercice 13. Quel est le produit de deux rotations $\mathcal{R}(\mathcal{O}, \theta)$ et $\mathcal{R}(\mathcal{O}', \theta')$ avec les centres O et O' distincts ?

Exercice 14. On considère deux points A et B distincts sur un cercle et M un point variable de l'arc d'extrémités A et B. Sur la demi-droite issue de B contenant M on considère le point N tel que $BN = AM$.

i) Montrer que l'angle $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BN})$ est constant quand M varie.

ii) En déduire qu'il existe une rotation qui transforme A en B et M en N dont le centre Ω et l'angle ne dépendent pas de M.

iii) Quel est le lieu géométrique du point N ?

Exercice 15

i) Soient (D), (D') et (D'') trois droites parallèles du plan $\mathcal{E}$. Construire un triangle équilatéral ABC tel que $A \in (D)$, $B \in (D')$ et $C \in (D'')$.

ii) Soient (Γ), (Γ') et (Γ'') trois cercles concentriques du plan $\mathcal{E}$. Construire un triangle équilatéral ABC tel que $A \in (\Gamma)$, $B \in (\Gamma')$ et $C \in (\Gamma'')$.

Exercice 16. Soient $\mathcal{H}(\mathcal{O}, \|)$ et $\mathcal{H}(\mathcal{O}', \|')$ deux homothéties du plan $\mathcal{E}$. Déterminer la transformation composée $\mathcal{H}(\mathcal{O}', \|') \circ \mathcal{H}(\mathcal{O}, \|)$.

Exercice 17. Soient A et B deux points distincts d'un cercle (Γ) du plan $\mathcal{E}$. Un point M étant variable sur (Γ) on note P le point de la droite (BM) tel que $\frac{\overline{MB}}{\overline{MP}} = k$ où k est un réel donné. Soient D le milieu de AB et Q l'intersection des droites (AM) et (DP).

Quel est le lieu géométrique de Q lorsque M varie dans (Γ) ?

Exercice 18. Soient ABC un triangle et (Γ) son cercle circonscrit. Les tangentes à (Γ) respectivement en A, B et C coupent les droites BC, CA et AB respectivment en P, Q et R.

i) Etablir la relation :

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2.$$

ii) Etablir des relations analogues pour les points Q et R et en déduire que les points P, Q et R sont alignés.

Exercice 19. Quel est l'ensemble des centres de similitude de rapport k donné qui font correspondre une droite (D') donnée à une droite (D) donnée ?

Exercice 20. Soit $\mathcal{S}$ le groupe des similitudes planes directes.

i) Déterminer les sous-groupes commutatifs de $\mathcal{S}$.

ii) Montrer que $\mathcal{S}$ est isomorphe au produit semi-direct $\mathbb{C} \rtimes \mathbb{C}^*$ où $\mathbb{C}^*$ agit sur $\mathbb{C}$ par :

$$(a, z) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \longrightarrow az \in \mathbb{C}.$$

Exercice 21. Soient (D), (D') et (Δ) trois droites du plan $\mathcal{E}$ telles que :

$$\text{angle } (D, D') = \frac{\pi}{2} \text{ et angle } (D, \Delta) = \frac{\pi}{4}.$$

Soient O le point d'intersection de (D) et (D') et $a \in \mathbb{R}_+^*$; on note A le point de (D) tel que $OA = a$, A' son symétrique par rapport à O et U le point de (Δ) qui se projette orthogonalement sur A.

i) Déterminer la similitude T dans laquelle les points A' et O se transforment respectivement en les points O et U. Quelle est la transformée de la droite (D) dans cette similitude ?

ii) Donner une construction simple du transformé N d'un point M de (D).

iii) Notons S le centre de la similitude T. Quelle est la projection orthogonale de S sur la droite (MN) ?

On suppose qu'on a choisi un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ porté par les deux droites (D) et (D') et de telle sorte que l'abscisse de U soit a.

iv) Soit P un point sur la droite d'équation $y = -a$. Construire le point $M \in (D)$ et son transformé N de telle sorte que P appartienne à la droite (MN).

v) Donner l'expression analytique $f(z) = \alpha z + \beta$ associée à T et retrouver l'affixe du point S.

Exercice 22. Le plan affine $\mathcal{E}$ étant rapporté à un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ on considère les points :

$$A = (3, -1), \quad B = (6, 0), \quad A' = (1, 1), \quad B' = (2, 2).$$

Déterminer le centre, le rapport et l'angle de la similitude qui transforme les points A et B respectivement en les points A' et B'.

Exercice 23. Interpréter géométriquement les transformations associées aux applications $z \longrightarrow z'$ suivantes :

$$z' = (1+i)z - i, \qquad z' = \frac{1+i}{\sqrt{2}z - (1-i)}.$$

Exercice 24. Dans le plan complexe on considère trois points A, B et C d'affixes respectives a, b et c.

Démontrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que le triangle ABC soit équilatéral et de sens direct est que l'on ait la relation

$$a + bj + cj^2 = 0 \quad \text{avec} \quad j = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}.$$

Exercice 25. Dans le plan complexe on note z l'affixe de tout point M et (x, y) ses coordonnées réelles. Soit $\mathcal{I}$ l'inversion de pôle O et de puissance 1. L'affixe de M', transformé de M par $\mathcal{I}$ sera notée z'.

i) Montrer que pour tout $M(z)$ on a $z \cdot \overline{z'} = 1$.

ii) En déduire les coordonnées réelles (x', y') de M'.

iii) Déterminer le lieu géométrique de M' lorsque M décrit :

(1) la droite d'équation : $ax + by + c = 0$,

(2) le cercle d'équation : $x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \gamma = 0$

5. CONIQUES

Exercice 1. Le plan affine $\mathcal{E}$ est rapporté à un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. On se donne un nombre réel strictement positif a, le point $A \in \mathcal{E}$ de coordonnées $(a, 0)$, (D) la droite d'équation $x = a$ et $f : t \in]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[\longrightarrow f(t) \in \mathbb{R}_+^*$ une fonction. Dans toute la suite $t \in]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$ jouera le rôle de paramètre. Un point M de $\mathcal{E}$ sera repéré par ses coordonnées (x, y) relativement à $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ ou par son affixe $z = x + iy$.

Pour chaque t on note S_t la transformation de $\mathcal{E}$ qui à tout point M d'affixe z fait correspondre le point $M_t = S_t(M)$ d'affixe $z_t = f(t)(\cos t + i \sin t)z$.

Partie A

i) Quelle est la nature de l'application S_t ? Donner les éléments géométriques qui la caractérisent.

ii) Donner les équations qui la définissent dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ ainsi que pour son inverse S_t^{-1}.

Partie B

Dans toute cette partie f sera la fonction $f(t) = \frac{1}{\cos t}$.

iii) Montrer que pour tout point M distint de O et tout t, le triangle OMM_t est rectangle en M.

iv) Le point M étant fixe, quel est l'ensemble $J(M)$ décrit par M_t lorsque t varie?

v) Montrer que l'image de (D) par S_t est une droite (D_t) dont on donnera une équation cartésienne dépendant seulement des paramètres a et $\theta = \tan t$.

vi) Montrer que la parabole (P) de foyer O, dont la tangente au sommet est (D), a pour équation

$$y^2 = 4a(a - x).$$

vii) Montrer que pour tout t, l'intersection de (D_t) et de (P) est formée d'un point unique K_t et que (D_t) est tangente à (P) en ce point.

viii) Montrer que lorsque t décrit $]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$, K_t décrit toute la parabole (P).

On note (C) un cercle de centre A dont le rayon R est strictement positif et différent de a. On note (Γ) la conique d'équation

$$\frac{(x-a)^2}{R^2} + \frac{y^2}{R^2 - a^2} = 1.$$

ix) Indiquer suivant les valeurs de R la nature de la conique (Γ). Déterminer son centre et ses foyers.

x) Déterminer le centre et le rayon du cercle (C_t) image de (C) par S_t.

xi) Montrer que (C_t) est définie par l'équation

$$(x-a)^2 + (y - a\theta)^2 = R^2(1 + \theta^2 t).$$

B.10) Montrer que lorsque (C_t) et (Γ) se coupent, leur intersection est formée de deux points N_t et N'_t symétriques par rapport à (D) et dont on calculera l'ordonnée.

(*Extrait de l'épreuve du Bac C, Clermont-Ferrand 1981*)

Exercice 2. Soit A_k une affinité plane de direction (δ), d'axe (D) et de rapport $k \in \mathbb{R}^*$.

i) Démontrer géométriquement que le transformé d'une droite (Δ) est une droite (Δ').

ii) Quel est le transformé par A_k :

(1) d'une division harmonique ?
(2) du milieu d'un segment $[AB]$?
(3) du centre de gravité d'un triangle ABC ?

Exercice 3. Soient (D) une droite et A et A' deux points distincts et tels que la droite (AA') ne soit pas parallèle à (D). Soit (Δ) une droite non parallèle à (D).

Construire la droite (Δ'), transformée de (Δ) par l'affinité d'axe (D) et transformant A en A'.

Exercice 4. On rapporte le plan affine $\mathcal{E}$ à un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. On notera (δ) et (δ') les axes supportant respectivement les vecteurs $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$. Deux points A et B varient respectivement sur (δ) et (δ') de telle sorte que la longueur AB reste constante. Sur le segment $[AB]$ on se donne un point M tel que $MA = a$ et $MB = b$ où a et b sont des constantes réelles strictement positives.

Montrer que, lorsque les points A et B varient (les nombres a et b restant fixes), le point M varie sur une ellipse dont on déterminera l'équation.

Exercice 5. Un segment $[AB]$ de longueur constante est tel que A décrit une droite (δ) et B décrit une droite (δ') rencontrant (δ) en un point O ; on suppose que l'angle formé par ces droites n'est pas droit.

i) Démontrer que le rayon R du cercle (C) circonscrit au triangle OAB reste constant quand A et B varient.

Soit M un point du segment $[AB]$ tel que les longueurs MA et MB restent constantes égales respectivement à $a > 0$ et $b > 0$. La droite joignant le point M au centre ω du cercle (C) coupe celui-ci en deux points P et Q.

ii) Démontrer que les points P et Q se déplacent respectivement sur deux droites fixes (Δ) et (Δ') perpendiculaires en O.

iii) En déduire que l'ensemble des points M est une ellipse.