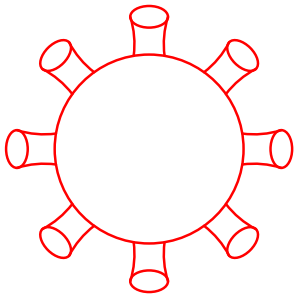
CROISSANCE EXPONENTIELLE, R_0, IMMUNITÉ COLLECTIVE...

On en parle, Covid-19 oblige !

Aziz El Kacimi Alaoui
Professeur émérite (UPHF)
http://www.elkacimi.fr/



0. Préambule

L'imagination est la matière vitale de la littérature de fiction. Les auteurs s'immergent dans le temps, en se tournant vers le passé ou en se projetant dans l'avenir. Ils s'adonnent à fabriquer des histoires fantastiques et folles mais aussi catastrophiques à nous plonger dans l'effroi. Elles appâtent ainsi les lecteurs friands de sensations extrêmes et de dépense d'adrénaline. Mais c'est seulement aux moments perdus où ils sont bien installés sur un canapé, assis sur un banc d'une gare ou un fauteuil d'aéroport qu'ils atteignent l'état de transcendance dans lequel ces histoires les transportent. Ils tuent le temps avec et repartent vaquer à leurs occupations habituelles, comme si de rien n'était, loin d'imaginer qu'un jour ils seraient les acteurs - involontaires mais vrais - de ces scénarios irréels.

L'écrivain sud-africain Deon Meyer raconte dans son roman *L'année du lion* (paru en 2016, il n'y a donc pas longtemps) l'avènement d'une fièvre qui décima une grande partie de la race humaine. Un survivant s'en est remis et tentait alors de repartir à zéro, petit à petit, en fondant une colonie pour «reconstruire une humanité». Sylvia Browne (une essayiste et médium américaine) annonçait dans *La fin des temps* (paru en 2008) l'arrivée d'une pneumonie qui allait toucher de plein fouet la totalité de notre planète-terre, en 2020. Comme c'est étrange, nous y sommes déjà, on dirait ! Mais l'auteure est décédée en 2013 et ne saura donc jamais que son imagination avait un contenu réel. C'est dire qu'une part de la fiction devient quelquefois une réalité impitoyable ! Alors, était-ce la prophétie d'une descendante de Nostradamus ? Non ! Les causes de la crise sanitaire que nous vivons sont purement naturelles, amplifiées certainement par le mode de vie désastreux que s'est choisi l'homme (une histoire que philosophes, sociologues, écologistes, spécialistes de biodiversité... pourraient conter mieux que moi). Mais, surtout, ce n'est nullement une sentence divine, comme certains tentaient de le faire croire.

Ce texte, quelque peu original par son contenu diversifié et sa forme étirée de toutes parts, a pour but d'exposer quelques ingrédients de mathématiques élémentaires destinés

à un public non averti, souhaitant comprendre ce qui se dit par-ci par-là au sujet de la propagation du Coronavirus à laquelle nous sommes confrontés. Il ne faut le considérer que sous cet angle : en aucun cas, il ne prétend apporter quelque prévision que ce soit sur l'évolution future de la pandémie. Il est écrit de façon libre et ne répond pas aux attentes - certainement légitimes - de ceux qui ont la manie de toujours ranger les choses dans des cases ; ceux-là peuvent tout simplement zapper !

C'est en Chine, dans la ville de Wuhan, que naquit le monstre microscopique, tout au moins c'est là qu'il a été déclaré en premier. Les images que nous en offrait la presse (audiovisuelle plus particulièrement) étaient horribles. Elles semblaient tellement loin et ne nous amenaient guère à penser que nous pourrions un jour être nous-mêmes dans une telle réalité. C'est oublier la fameuse question de Lorenz (qui a ravivé la théorie du chaos après Poincaré) posée en 1972 à un congrès scientifique : « *Le battement d'ailes d'un papillon au Brésil peut-il provoquer une tornade au Texas ?* » Question fondamentale sur laquelle des mathématiciens de taille ont apporté des contributions substantielles mais où il reste encore à faire. L'un de ses aspects est la notion de croissance cumulée (éventuellement de l'erreur) : une machine qui peut fabriquer du gigantesque à partir du peu. Et en tête, un type particulier de cette croissance dont on entend parler de temps en temps, et beaucoup plus en ce moment :

1. La croissance exponentielle

On raconte qu'à une époque de l'histoire, un roi en Inde nommé Shirham demanda à son sage Sissa de lui inventer un jouet qui lui permettrait de passer le temps. Ce dernier lui fabriqua un jeu d'échec. « *Super ! s'exclama le roi. Que désires-tu comme récompense, Sissa ? - Une petite chose, Majesté ! lui répondit Sissa, poliment et en exécutant la petite courbette qu'il lui devait habituellement. - Demande ce que tu veux, voyons ! - Ce que je veux ? Juste remplir les cases de l'échiquier en respectant la règle qui suit. Un grain de blé sur la première, deux sur la deuxième, quatre sur la troisième, huit sur la quatrième... et à chaque case, le double de celle qui la précède ! - Entendu ! lui promit le roi.* » Il ordonna alors à ses serviteurs de donner suite à la requête de Sissa, ne se doutant guère où cela allait les amener.

Pour éviter au lecteur hardi tout calcul épuisant, voici le nombre de grains de blé nécessaires pour remplir la 64ème case : 9 223 372 036 854 775 808 ainsi que celui de toutes les cases de l'échiquier : 18 446 744 073 709 551 615. Il paraît que les stocks de blé de tout le royaume ne suffirent pas à venir à bout du problème. De façon évidente, ce sont des nombres astronomiques dont la lecture seule exige du souffle !

Les puissances. Soit a un entier naturel, c'est-à-dire un nombre choisi dans l'ensemble $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \cdots\}$ (liste infinie). Si on le multiplie par lui-même, on obtient le nombre « a fois a » qu'on note a^2, puis on multiplie ce dernier par a, pour obtenir « a fois a fois a » qu'on note a^3, et ainsi de suite... À l'étape n de ce processus, on arrive à un nombre qu'on note a^n et qu'on lit « a à la puissance n » : c'est a multiplié par lui-même n fois. De façon évidente, on a toujours $a^n = 0$ pour $a = 0$ et $a^n = 1$ pour $a = 1$, et ceci quelle que soit la

valeur de l'entier n dans $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, \cdots\}$. (Les mathématiciens conviennent - de façon justifiée bien sûr, mais que nous laissons de côté ici - que $a^n = 1$, pour $a = 0$ et $n = 0$.) Par exemple, si on pend $a = 2$ et $n = 63$, on retrouve le nombre de grains de blé de la case 64 de l'échiquier de Sissa.

Ce jeu de puissances qui croissent de façon rapide pour atteindre de très grandes valeurs est similaire à celui qui régit la dynamique de progression d'une épidémie telle que celle qui sévit actuellement dans le monde. Si, pour faire simple, on suppose qu'en moyenne un sujet atteint contamine deux sujets saints, on peut schématiser la progression par le diagramme ci-dessous.

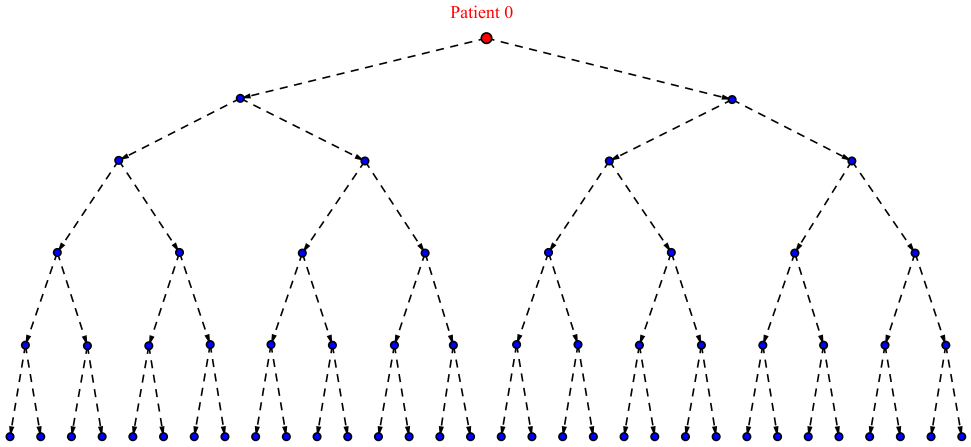


Figure 1

On voit qu'à la cinquième étape, le nombre de nouveaux contaminés (qu'on notera X) est déjà égal à 32. Cela semble a priori peu au début mais on a vu ce que ça donne au bout d'un nombre assez grand d'étapes : par exemple à l'étape 10, on a $X = 1024$ et puis à l'étape 20, $X = 1\ 048\ 576$. C'est à peu près la vitesse de propagation de la pandémie Covid-19 constatée : le nombre de nouveaux contaminés double tous les trois jours (et 3 jours constituent ce que j'entendais par une étape dans le processus). L'étape 20 correspond à 60 jours et donc, si rien n'est entrepris pour stopper la maladie, le nombre de nouveaux contaminés, en partant initialement de deux, s'élèvera au bout de cette période à $2^{20} = 1\ 048\ 576$; par suite, le nombre total de contaminés dans la même période sera (par un calcul mathématique connu : somme des premiers termes d'une suite géométrique) de 2 097 151. Ce qui est considérable et, bien sûr, rudement inquiétant.

L'exponentielle. Le nombre X dépend de n et est une version d'une fonction mathématique bien connue appelée *exponentielle* : à la variable t (généralement désignant le temps), elle associe le nombre (on dit aussi la grandeur) qu'on note e^t. (e est un nombre positif appelé *constante de Néper* et valant approximativement $2,71828$.) Les variantes de cette fonction sont du même type, par exemple la fonction a^t où a est n'importe quel nombre strictement positif (entier, fractionnaire, irrationnel...). La croissance rapide de ces fonctions a été mise en évidence pour la première fois au 18ème siècle par l'éminent mathématicien suisse Euler (et comme par hasard, en travaillant sur la mortalité et la multiplication du genre

humain). Le dessin qui suit représente le graphe de $X = e^t$. On y a choisi la même unité pour mesurer aussi bien la variable t que la grandeur X afin de visualiser de façon réelle la teneur de l'explosion de cette dernière.

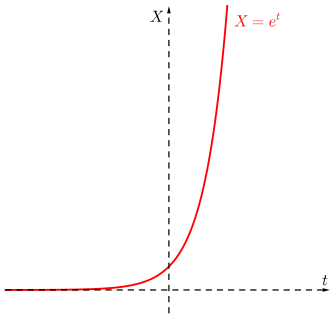


Figure 2

2. Le taux de reproduction R_0

L'étude des variations de certaines grandeurs en fonction du temps aide à rendre compte de leur comportement futur. La transmission de la Covid-19, la pandémie qui préoccupe l'ensemble de la planète ces temps-ci, en est un exemple-type, pour lequel se pose la question : « *Comment mesurer le nombre C de nouveaux cas sur un intervalle de temps donné, afin d'avoir une idée sur l'évolution de l'épidémie dans un avenir proche* ?» Un paramètre, dont on ne cesse d'entendre parler depuis des mois, semble en être un facteur déterminant. On l'appelle communément *taux de reproduction* et on le note R_0.

Une définition naïve mais suffisante a priori : *le R_0 est le nombre moyen de personnes saines que contamine un individu atteint.* (Même si cela dit que R_0 est un nombre entier, il ne l'est pas en général, comme on peut le voir sur des exemples.) On va essayer de mieux comprendre ce qu'indique ce R_0 et comment il impacte la dynamique de l'épidémie. (Désolé pour ceux qui sont rebutés par les maths, on va devoir en faire un peu, mais à un niveau très élémentaire !)

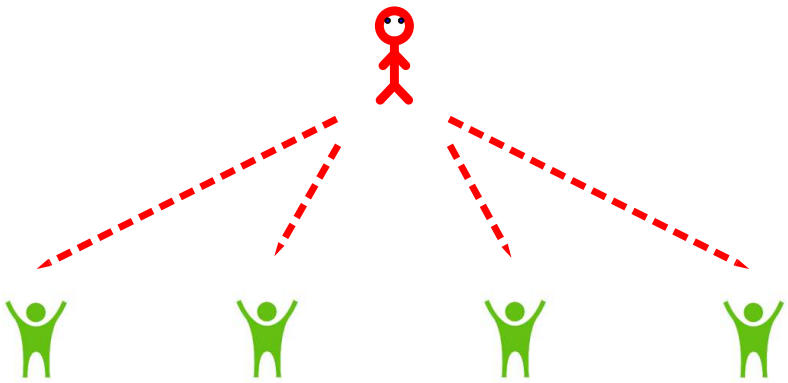


Figure 3

Pour étudier l'évolution de l'épidémie, il faut toujours partir d'un « patient zéro ». On relève alors le nombre d'individus qu'il aura contaminés durant la première période (étalée sur quelques jours, une semaine...) Ce sera alors le R_0 attaché au virus. Si on ne connaît pas ce patient zéro et qu'on part de l'état de l'épidémie à un moment où on a constaté que

dan plusieurs endroits il y a des contaminés, on initialise la situation pour se ramner au cas précedent. On procède dans ce cas-là à une estimation de ce R_0. Voici une manière simple de le faire (il y en a sûrement d'autres, mais elles devraient être fondamentalement proches).

1. On prélève des échantillons (dans des endroits différents), par exemple 5 qu'on notera E_1, E_2, E_3, E_4 et E_5, chacun consistant en 20 personnes contaminées. (On en a prélevé 5 pour fixer les idées et mener plus simplement les calculs, mais on pourrait en prendre plus, ça rendrait même l'estimation encore meilleure.)

2. Pour chaque indice $i = 1, 2, 3, 4, 5$, on note n_i le nombre d'individus contaminés par les patients de l'échantillon E_i pendant la période T. (Par exemple, les patients de l'échantillon E_3 ont contaminé n_3 personnes.) Le taux de *reproduction relatif* à l'échantillon E_i est alors le nombre $r_i = \frac{n_i}{20}$.

3. On obtient ainsi 5 taux relatifs : r_1, r_2, r_3, r_4 et r_5. Le taux de reproduction R_0 qui nous intéresse est leur moyenne arithmétique, c'est-à-dire :

$$R_0 = \frac{r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + r_5}{5}.$$

4. Pour avoir un exemple concret, on prend les valeurs numériques :

$$n_1 = 50, \quad n_2 = 70, \quad n_3 = 65, \quad n_4 = 45, \quad n_5 = 90.$$

Elles donnent $r_1 = 2,5$, $r_2 = 3,5$, $r_3 = 3,25$, $r_4 = 2,25$ et $r_5 = 4,5$. D'où :

$$R_0 = \frac{2,5 + 3,5 + 3,25 + 2,25 + 4,5}{5} = \frac{16}{5} = 3,2.$$

R_0 n'est donc pas nécessairement un entier. Mais il a quand même une interprétation : en moyenne, sur la période considérée, 10 personnes contaminées transmettent le virus à 32 autres. C'est à peu près le taux de reproduction qui a été observé en France en plein pic de l'épidémie de la Covid-19 (en avril 2020). Le paramètre R_0 n'est pas fixe : il varie en fonction de la période k pendant laquelle on l'estime. Il serait donc plus judicieux de le noter R_k pour mettre en évidence cette dépendance.

Nous conviendrons dorénavant que la pandémie est partie d'un seul individu avec un R_0 calculé par le procédé de moyenne arithmétique qu'on vient de décrire. On admettra aussi que ce R_0 est une *caractéristique* du virus et que chacun des termes R_k est *pondéré* par la proportion $p_k = (1 - c_k)$ d'individus exposés et non encore immunisés à la période k (c_k étant le taux de la population immunisée soit par contamination ou vaccination). De façon plus précise, le taux de reproduction R_{k+1} à la fin de la période k et le début de la période $k + 1$, est donné en fonction de R_k par la formule :

$$R_{k+1} = R_k p_k = R_k(1 - c_k).$$

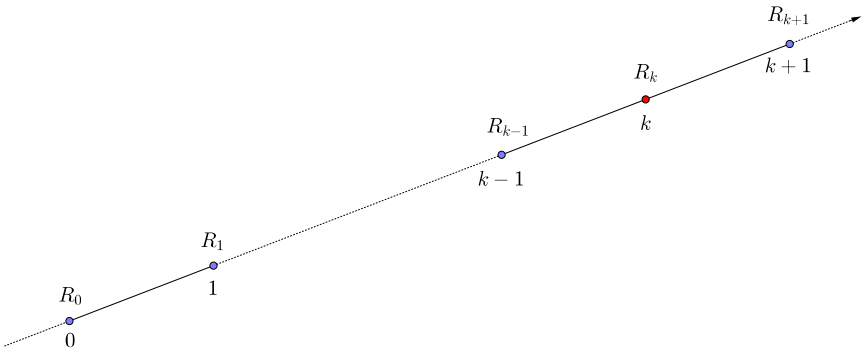


Figure 4

La mesure du R_0 est importante. Par exemple, si $R_0 = 3,2$ (notre exemple numérique) et si on considère qu'elle reste dans cet ordre, au bout de 10 périodes, le nombre C de contaminés sera approximativement $(3,2)^{10} \simeq 112590$. Par contre, si $R_0 = 0,5$ (avec la même hypothèse de constance) C sera de l'ordre $(0,5)^{10}$, ce qui va dans le bon sens car c'est ainsi que l'épidémie sera jugulée et finira par s'éteindre complètement. C'est ce qui pousse les scientifiques et les officiels à redoubler d'efforts pour amener le taux de reproduction R_k vers des valeurs strictement inférieures à 1.

Cela se passe évidemment quand $R_k(1 - c_k) < 1$. Cette inégalité est équivalente à $c_k > 1 - \frac{1}{R_k}$. Avec toujours l'hypothèse $R_k > 1$, le nombre :

$$\mathcal{I}_k = 1 - \frac{1}{R_k}$$

est positif et strictement inférieur à 1. C'est le *seuil d'immunité collective* : la proportion minimale de la population immunisée (soit par contamination soit par vaccination) à partir de laquelle la pandémie commence à s'éteindre.

Si c_k diminue, parce que des individus immunisés perdent leur immunité (et cela arrive), $p_k = 1 - c_k$ augmente et, par suite, fait augmenter le R_k. Lorsque R_k repasse strictement au-dessus de 1, l'épidémie est relancée et on parle alors de *nouvelle vague*. C'est ce qui s'est produit plusieurs fois avec la Covid-19 depuis son apparition en mars 2020 !

3. Le confinement

Les modèles mathématiques qui permettent d'étudier l'évolution dans le temps d'une épidémie ne sont qu'approximatifs. Je dirais, avec regret, qu'on ne pourra comprendre réellement les règles qui régissent la circulation de la Covid-19, aussi bien sous son aspect viral que celui de sa transmission, qu'après un certain temps (des mois ou peut-être même des années). Côté mathématiques, je suis sûr qu'aucun spécialiste en la matière ne peut prédire avec certitude - je dis bien avec certitude - quoi que ce soit sur ce qu'il en sera dans un avenir proche.

Mais que faire pour casser les chaînes de transmission avant d'atteindre cette immunité collective ? Il y a d'abord les gestes barrières évidents : lavage régulier des mains et

distanciation physique, qui sont les seules armes dont on dispose en l'absence de traitement et de vaccin. Mais il y a aussi le *confinement*.

La définition qu'en donne le dictionnaire n'est pas exactement celle qu'on entend ces jours-ci. Pour tout le monde, cela signifie : rester dans un endroit, bien isolé, bordé, sans possibilité de contact avec autrui.

Il a été constaté qu'à une distance d'au moins $1,5\ m$ d'une personne atteinte du virus, la contamination est très peu probable. D'où la nécessité de maintenir les individus d'une population, vivant dans un espace donné, à une telle distance l'un de l'autre. C'est ce qu'on appelle la *distanciation physique*. Une manière d'opérer est d'obliger ces individus à rester chez eux. Sur le dessin qui suit, la patate est un espace de vie (une ville, un pays...), les individus y sont représentés par des points, à l'intérieur d'un disque ; la distance entre les bords de deux disques quelconques est celle prescrite, en l'occurrence $1,5\ m$ ou même $2\ m$ pour plus de sécurité. Les points en vert sont les sujets saints et ceux en rouge les sujets contaminés. On y voit aussi un *cluster* ou *foyer d'infection*, constitué en grande partie de sujets infectés (regroupés comme par exemple pendant la cérémonie religieuse qui a eu lieu à Mulhouse au printemps 2020).

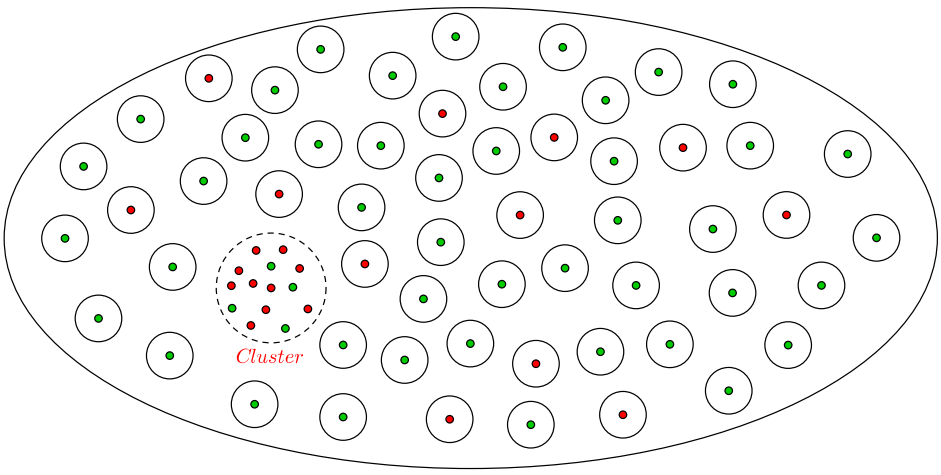


Figure 5

La réponse topologique à la pandémie !

Ici le confinement n'est pas total, il faut encore briser le cluster.

Il est évident que la transmission du virus d'un individu à l'autre a très peu de chance de s'opérer pendant tout le confinement. D'où la nécessité de le maintenir jusqu'à ce que l'épidémie commence à être sérieusement jugulée, et ceci de manière clairement observable. Mais c'est toujours difficile d'imposer de telles contraintes à une population dont le nombre d'individus se compte par dizaines de millions avec, comme personne ne l'ignore, toutes les disparités entre les groupes que ce soit au niveau social, celui du mode de vie ou autres. Mais il faut faire fi de toutes ces contraintes et ne prendre en compte que le danger réel - de mort ! - qui guette la communauté. Et donc, pas de liberté individuelle : dans une telle conjoncture, elle devient une liberté collective.

4. En guise d'épilogue

Dans le roman de Colette, *Dialogues de bêtes*, Kiki-La-Doucette et Toby-Chien racontent leur vie quotidienne et le rapport qu'ils ont, tendre ou méchant, avec leur couple-maître qu'ils appellent communément Elle et Lui. Elle et Lui les regardent toujours d'en haut, pensant que rien ne se passe dans la tête de ces êtres minuscules. Tout comme ces deux bêtes, Corona, qui fait partie d'un monde carrément infinitésimal, nous observe aussi de la même façon, sans que nous nous en doutions un seul instant. C'est l'acteur principal de cette tragédie et il veut juste nous dire un mot. Écoutons-le, c'est lui qui parle :

« *Je suis Corona ! Même si j'apparais comme le destructeur, vous l'êtes autant et, sous d'autres aspects, vous démolissez encore plus que moi. Par mégalomanie, cupidité et soif de cumuler les fortunes, vous n'hésitez pas à raser tout ce qui vit. Et pour vous donner bonne conscience, de temps en temps vous fredonnez :* « *Que cela ne se reproduise !*» *Mais vous oubliez et vous recommencez.*

L'homme est un être plat, mais il est aussi « *...lourd et épais*» *(rajoute Céline). Le philosophe Sartre a parlé de vous :* « *Nous évoluons vers l'homme !*» *Et bien non, même s'il était sincère dans sa pensée, il a vu de travers. En revanche, il avait raison en disant que* « *Quand les riches se font la guerre, ce sont les pauvres qui meurent.* »

Je vous ai foutu la trouille, il me semble. N'est-ce pas ? Pour me fuir, vous, les premiers de cordée, vous êtes allés vous confiner au vert, dans les conserves de votre luxe. Et malheureusement, beaucoup des plus pauvres - les premiers de tranchée ! - n'ont pas eu ce choix ; ils m'affrontent pour continuer à vous servir ; en somme, ils font la guerre à votre place. Qu'ils veuillent bien me pardonner cette épreuve à laquelle je les ai impitoyablement (mais involontairement) soumis ! »

Ce texte est un remodelage de mes deux articles en ligne :

https://maroc-diplomatique.net/croissance-exponentielle-confinementon-en-parle-covid-19-oblige/

https://maroc-diplomatique.net/covid-19-le-mathematicien-el-kacimi-alaoui-nous-explique-la-finalite-du-r0/