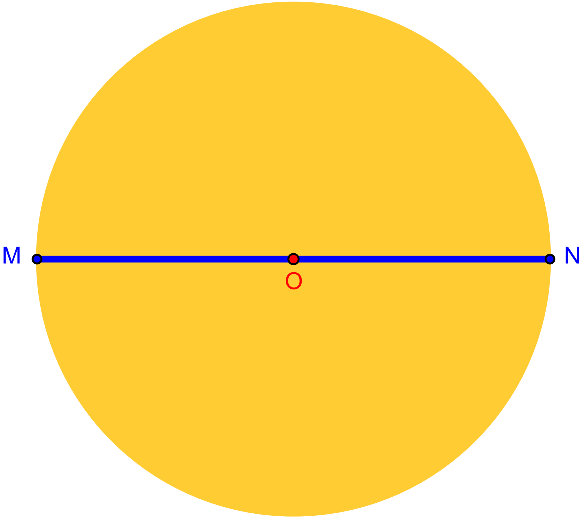
Partage d'un polygone

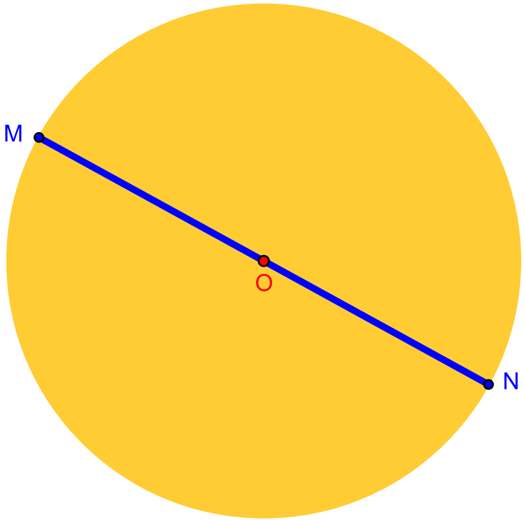
Aziz El Kacimi
Université de Valenciennes - Cité des Géométries
François Recher & Valerio Vassallo
Université de Lille I - Cité des Géométries

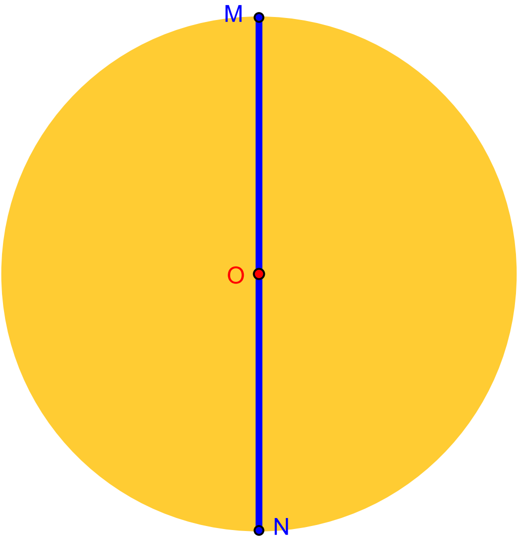
A fait l'objet d'exposés, d'ateliers ou autres à différentes occasions dans divers établissements secondaires de la région Nord - Pas de Calais.

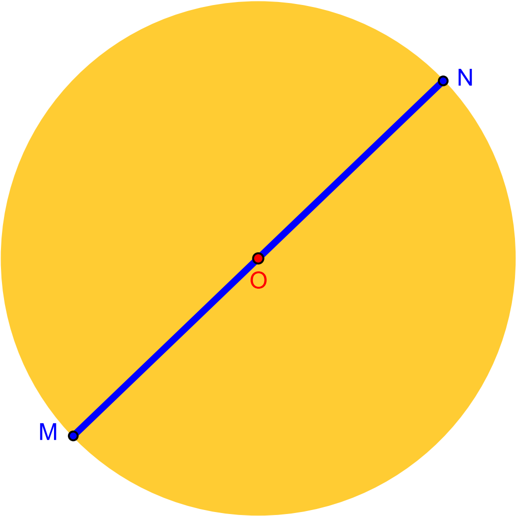

60
Joyeux
Anniversaire
Jacqueline

Qu'en est-il pour un gâteau circulaire ?

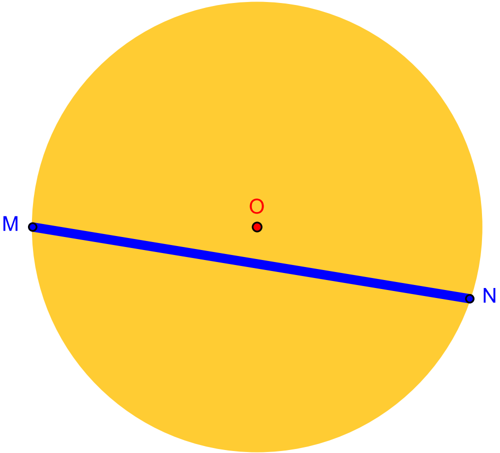


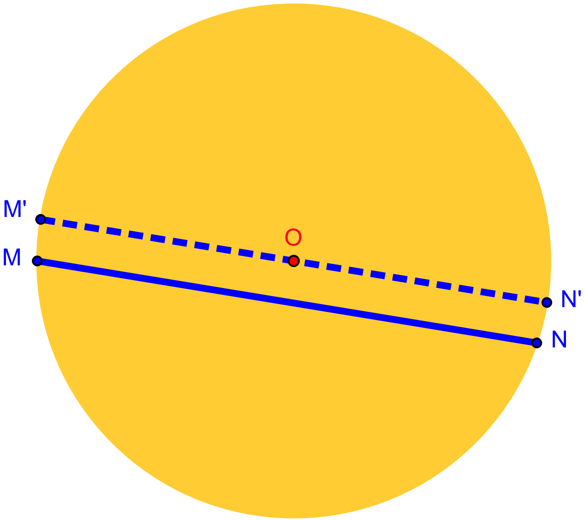

M
O
N


M
O
N

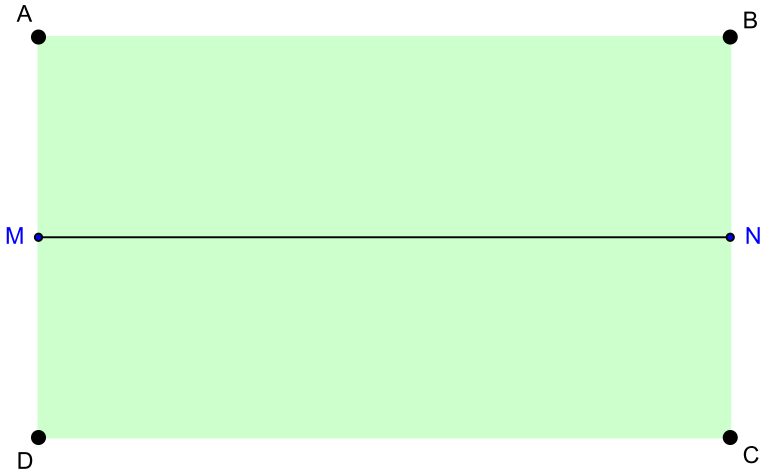

N
O
M

Un segment MN qui n'est pas un diamètre peut-il partager en deux parties égales ?

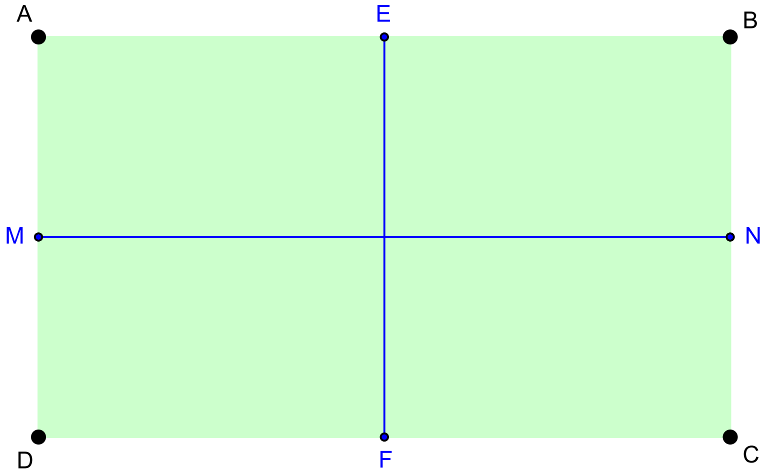


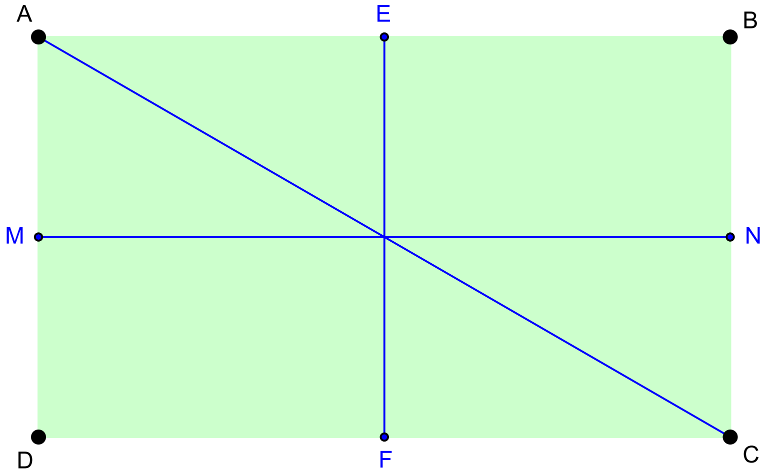

M'
O
M
N'
N

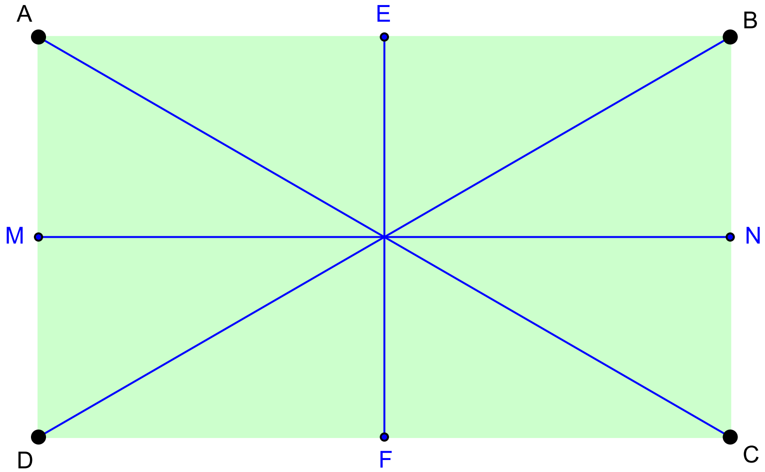
Qu'en est-il pour un gâteau rectanglaire ?

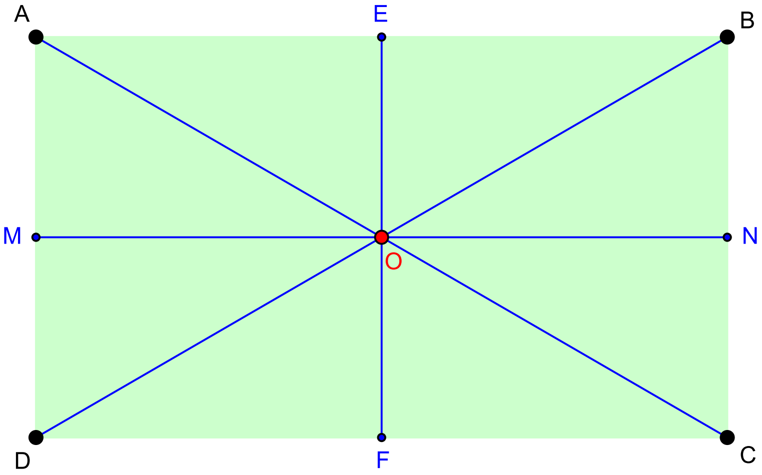


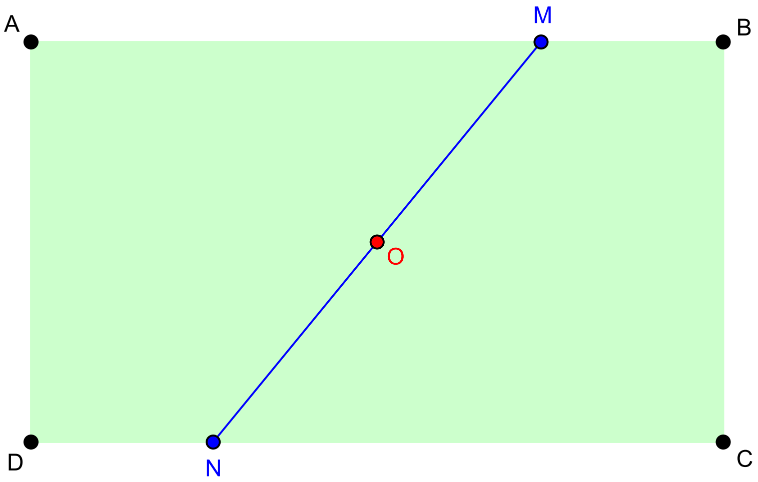
A
B
M
N
D
C

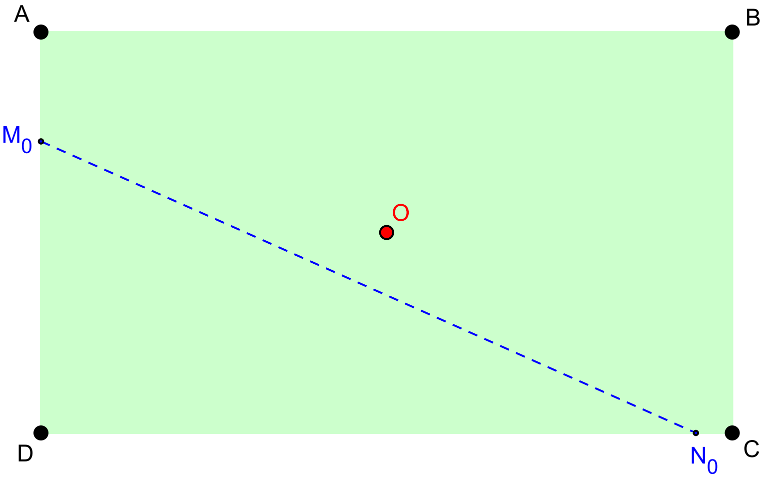

A
E
B
M
N
D
F
C

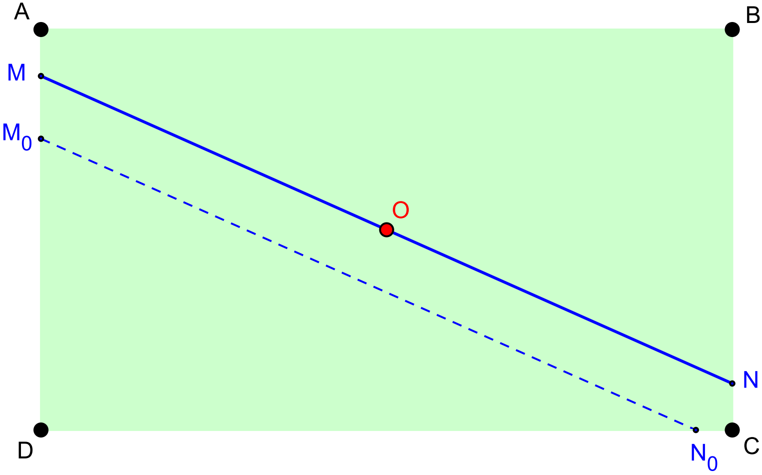

A
E
B
M
N
D
F
C


A
E
B
M
N
D
F
C

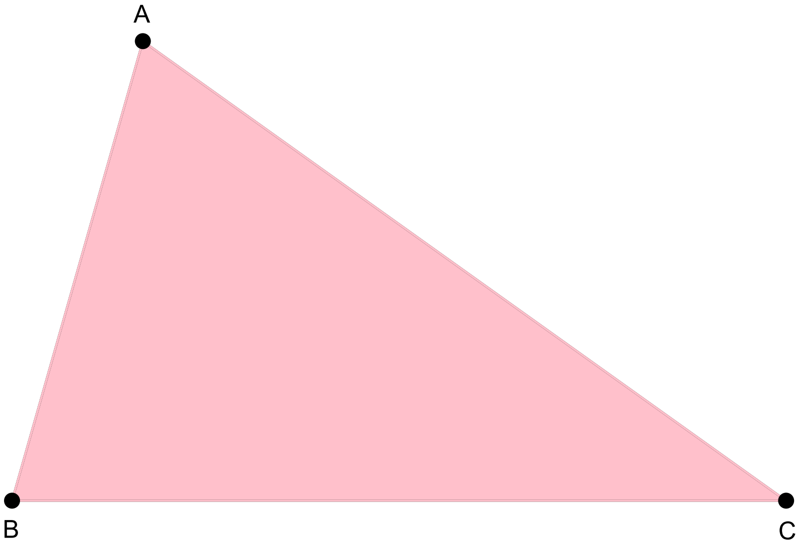

A
E
B
M
N
O
D
F
C

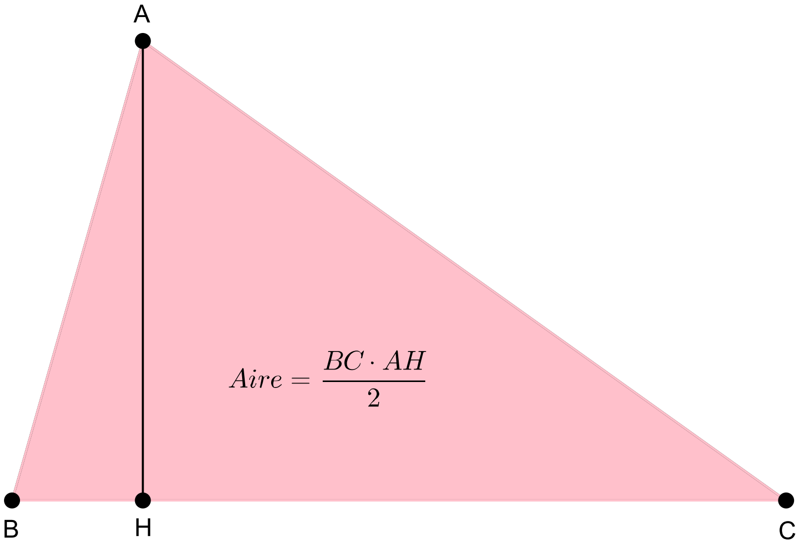

A
M
B
O
D
N
C

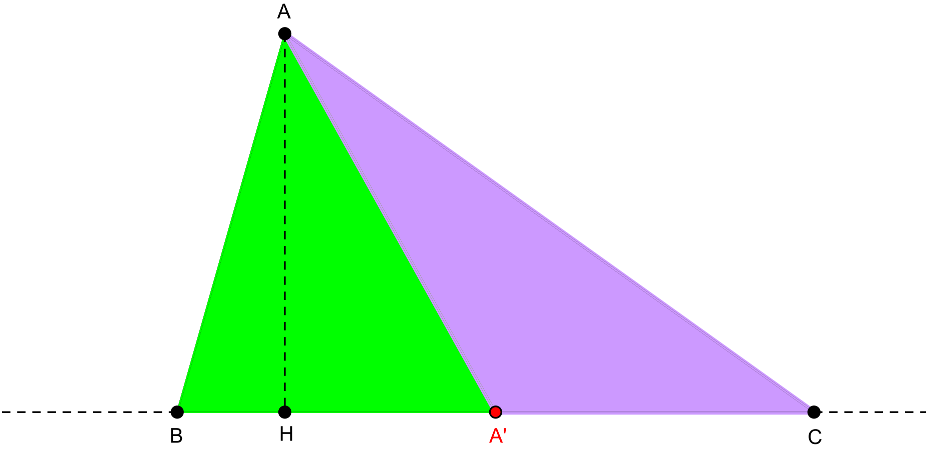

A
B
M0
O
D
C
N0


A
B
M
M_0
O
N
D
C
N_0

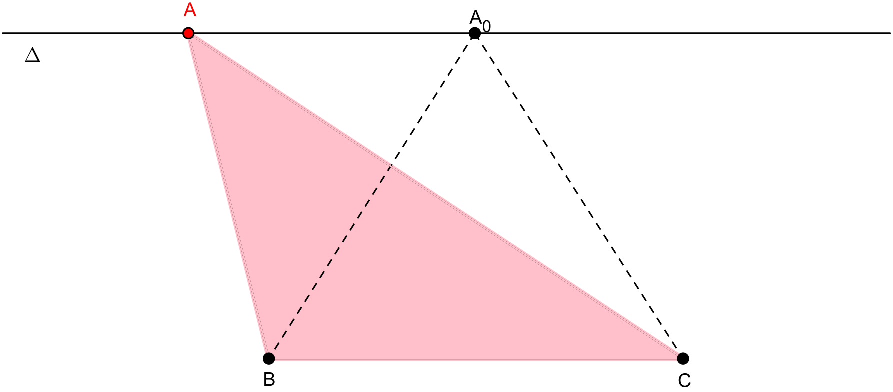
Qu'en est-il pour un gâteau triangulaire ?




A
B
H
C
$$Aire = \frac{BC \cdot AH}{2}$$

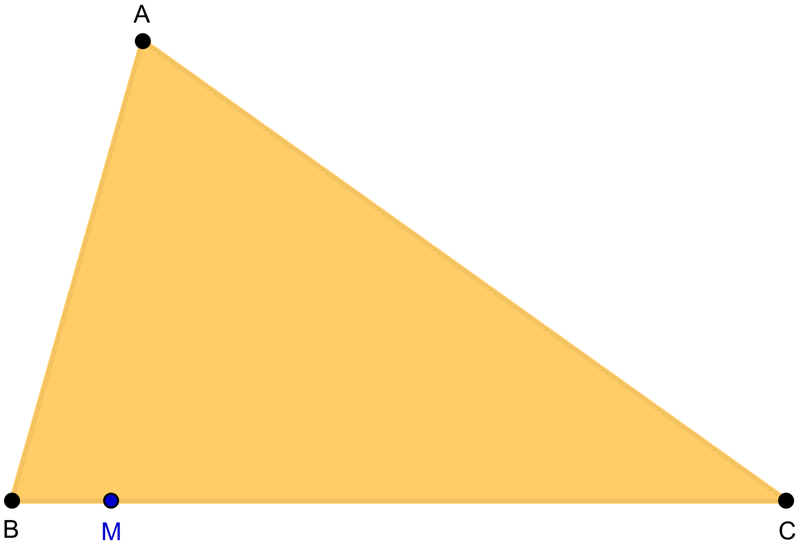


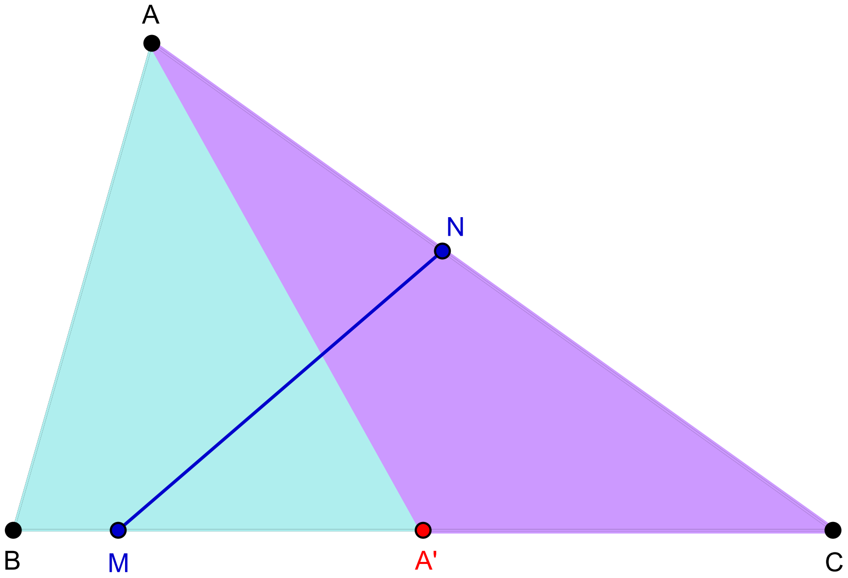
A' **est le milieu du segment** $[BC]$**.**

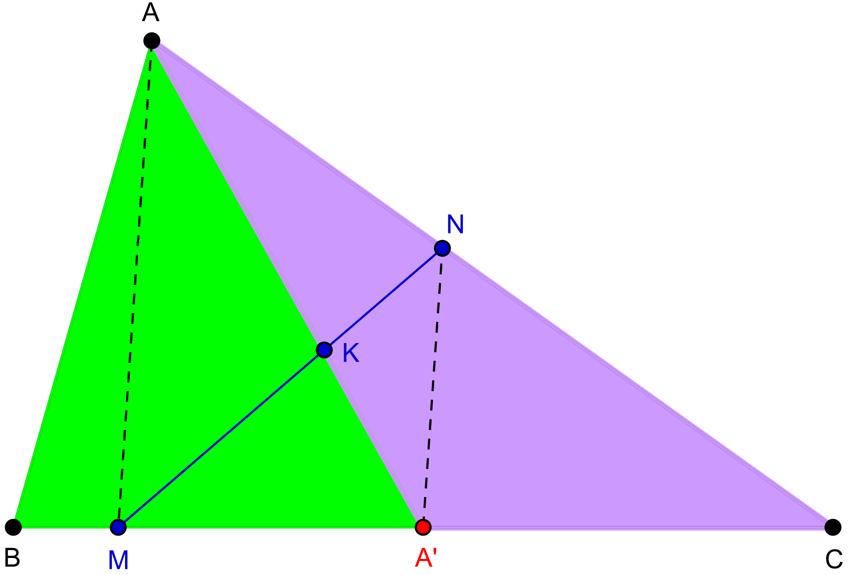


L'aire du triangle ABC est la même
quelle que soit la position de A sur Δ

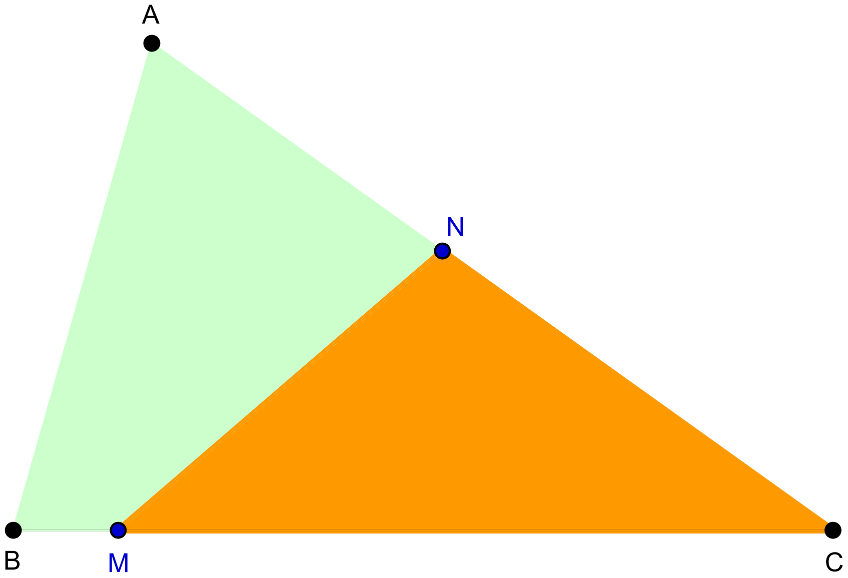
On impose le point de départ de la coupe !



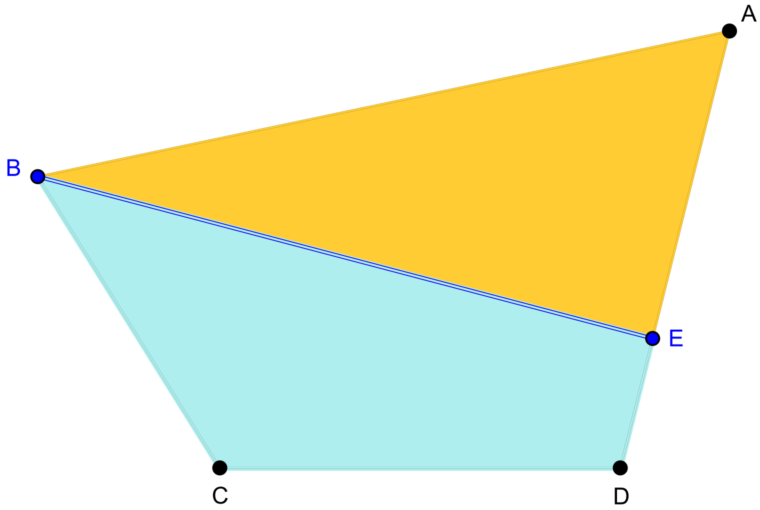

A
N
B
M
A'
C

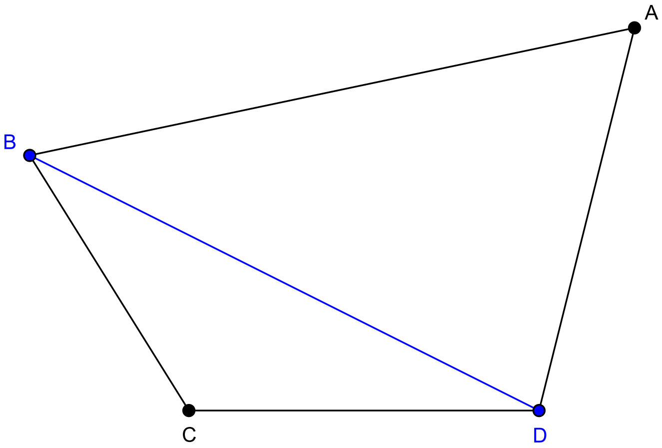


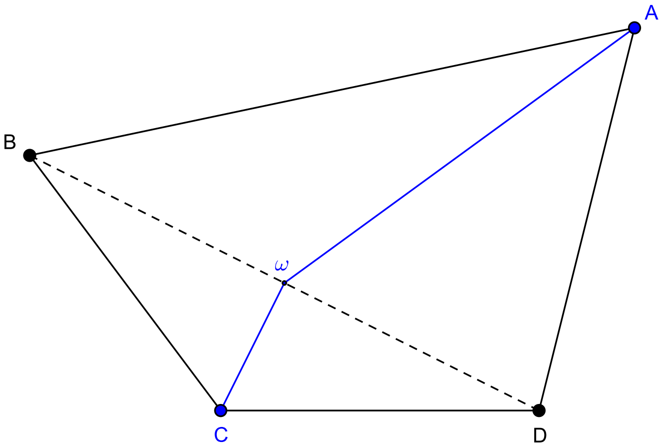
A
N
K
B
M
A'
C


A
N
B
M
C

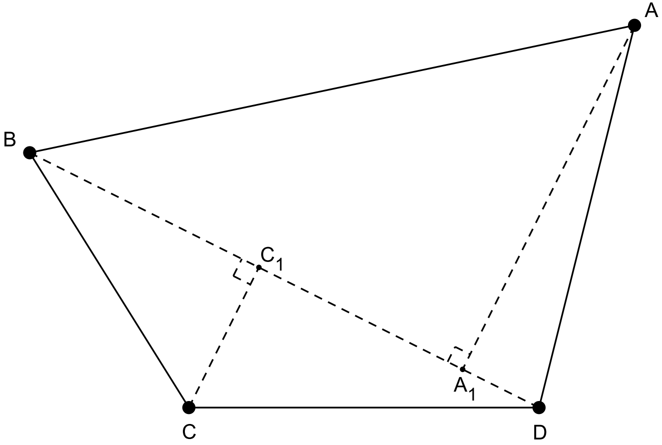
Qu'en est-il pour un gâteau quadrilatéral ?




A
B
C
D



A
B
ω
C
D


A
B
C
D
C_1
A_1

Fixons quelques notations. *On pose :*

$$BD = \ell, \quad AA_1 = h \quad et \quad CC_1 = k.$$

D'où :

$$\boldsymbol{Aire}(ABD) = \frac{\ell}{2} \cdot h \quad et \quad \boldsymbol{Aire}(CBD) = \frac{\ell}{2} \cdot k.$$

Si $h = k$, $\boldsymbol{Aire}(ABD) = \boldsymbol{Aire}(CBD)$ *et on a le partage qu'on cherche. Sinon, on va supposer, pour fixer les idées, que* $h > k$. *Donc :*

$$\boldsymbol{Aire}(ABD) > \boldsymbol{Aire}(CBD)$$

Fixons quelques notations. On pose :

$$BD = \ell, \quad AA_1 = h \quad \textbf{\textit{et}} \quad CC_1 = k.$$

D'où :

$$\textbf{\textit{Aire}}(ABD) = \frac{\ell}{2} \cdot h \quad \textbf{\textit{et}} \quad \textbf{\textit{Aire}}(CBD) = \frac{\ell}{2} \cdot k.$$

Si $h = k$, ***Aire***$(ABD) =$ ***Aire***(CBD) ***et on a le partage qu'on cherche. Sinon, on va supposer, pour fixer les idées, que*** $h > k$. ***Donc :***

$$\textbf{\textit{Aire}}(ABD) > \textbf{\textit{Aire}}(CBD)$$

Fixons quelques notations. On pose :

$$BD = \ell, \quad AA_1 = h \quad \textbf{\textit{et}} \quad CC_1 = k.$$

D'où :

$$\textbf{\textit{Aire}}(ABD) = \frac{\ell}{2} \cdot h \quad \textbf{\textit{et}} \quad \textbf{\textit{Aire}}(CBD) = \frac{\ell}{2} \cdot k.$$

Si $h = k$, $\textbf{\textit{Aire}}(ABD) = \textbf{\textit{Aire}}(CBD)$ ***et on a le partage qu'on cherche. Sinon, on va supposer, pour fixer les idées, que*** $h > k$. ***Donc :***

$$\textbf{\textit{Aire}}(ABD) > \textbf{\textit{Aire}}(CBD)$$

Fixons quelques notations. On pose :

$$BD = \ell, \quad AA_1 = h \quad \textit{et} \quad CC_1 = k.$$

D'où :

$$\textit{Aire}(ABD) = \frac{\ell}{2} \cdot h \quad \textit{et} \quad \textit{Aire}(CBD) = \frac{\ell}{2} \cdot k.$$

Si $h = k$, $\textit{Aire}(ABD) = \textit{Aire}(CBD)$ *et on a le partage qu'on cherche. Sinon, on va supposer, pour fixer les idées, que* $h > k$. *Donc :*

$$\textit{Aire}(ABD) > \textit{Aire}(CBD)$$

Fixons quelques notations. On pose :

$$BD = \ell, \quad AA_1 = h \quad \textit{et} \quad CC_1 = k.$$

D'où :

$$\mathit{Aire}(ABD) = \frac{\ell}{2} \cdot h \quad \textit{et} \quad \mathit{Aire}(CBD) = \frac{\ell}{2} \cdot k.$$

Si $h = k$, $\mathit{Aire}(ABD) = \mathit{Aire}(CBD)$ *et on a le partage qu'on cherche. Sinon, on va supposer, pour fixer les idées, que* $h > k$. *Donc :*

$$\mathit{Aire}(ABD) > \mathit{Aire}(CBD)$$

La différence entre les aires des deux triangles est donc :

$$\mathcal{D} = \boldsymbol{Aire}(ABD) - \boldsymbol{Aire}(CBD) = \frac{\ell}{2} \cdot (h-k).$$

Pour avoir deux figures ayant la même aire, il va donc falloir retrancher à ABD ***une figure*** $\mathcal{F}$ ***d'aire*** $\frac{\mathcal{D}}{2} = \frac{\ell}{2} \cdot \frac{h-k}{2}$ ***qu'il faut rajouter à*** CBD***.***

La figure $\mathcal{F}$ ***en question sera un triangle*** BDE ***dont la hauteur issue de*** E ***mesure*** $\frac{h-k}{2}$***.***

Le triangle $\mathcal{F}$ ***se construit comme sur le dessin qui suit.***

La différence entre les aires des deux triangles est donc :

$$\mathcal{D} = \boldsymbol{Aire}(ABD) - \boldsymbol{Aire}(CBD) = \frac{\ell}{2} \cdot (h - k).$$

Pour avoir deux figures ayant la même aire, il va donc falloir retrancher à ABD *une figure* $\mathcal{F}$ *d'aire* $\frac{\mathcal{D}}{2} = \frac{\ell}{2} \cdot \frac{h-k}{2}$ *qu'il faut rajouter à* CBD*.*

La figure $\mathcal{F}$ *en question sera un triangle* BDE *dont la hauteur issue de* E *mesure* $\frac{h-k}{2}$*.*

Le triangle $\mathcal{F}$ *se construit comme sur le dessin qui suit.*

La différence entre les aires des deux triangles est donc :

$$\mathcal{D} = \boldsymbol{Aire}(ABD) - \boldsymbol{Aire}(CBD) = \frac{\ell}{2} \cdot (h-k).$$

Pour avoir deux figures ayant la même aire, il va donc falloir retrancher à ABD ***une figure*** $\mathcal{F}$ ***d'aire*** $\frac{\mathcal{D}}{2} = \frac{\ell}{2} \cdot \frac{h-k}{2}$ ***qu'il faut rajouter à*** CBD***.***

La figure $\mathcal{F}$ ***en question sera un triangle*** BDE ***dont la hauteur issue de*** E ***mesure*** $\frac{h-k}{2}$***.***

Le triangle $\mathcal{F}$ ***se construit comme sur le dessin qui suit.***

La différence entre les aires des deux triangles est donc :

$$\mathcal{D} = \boldsymbol{Aire}(ABD) - \boldsymbol{Aire}(CBD) = \frac{\ell}{2} \cdot (h - k).$$

Pour avoir deux figures ayant la même aire, il va donc falloir retrancher à ABD ***une figure*** $\mathcal{F}$ ***d'aire*** $\frac{\mathcal{D}}{2} = \frac{\ell}{2} \cdot \frac{h-k}{2}$ ***qu'il faut rajouter à*** CBD***.***

La figure $\mathcal{F}$ ***en question sera un triangle*** BDE ***dont la hauteur issue de*** E ***mesure*** $\frac{h-k}{2}$***.***

Le triangle $\mathcal{F}$ ***se construit comme sur le dessin qui suit.***

La différence entre les aires des deux triangles est donc :

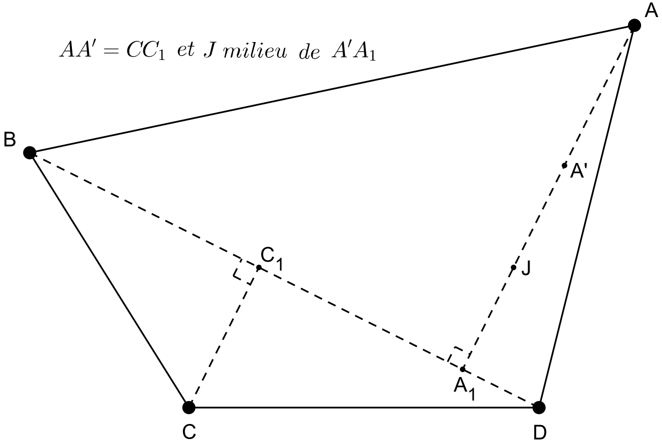
$$\mathcal{D} = \boldsymbol{Aire}(ABD) - \boldsymbol{Aire}(CBD) = \frac{\ell}{2} \cdot (h - k).$$

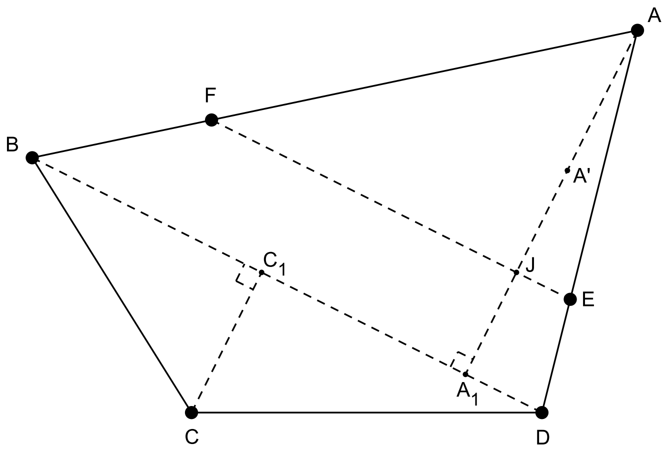
Pour avoir deux figures ayant la même aire, il va donc falloir retrancher à ABD *une figure* $\mathcal{F}$ *d'aire* $\frac{\mathcal{D}}{2} = \frac{\ell}{2} \cdot \frac{h-k}{2}$ *qu'il faut rajouter à* CBD*.*

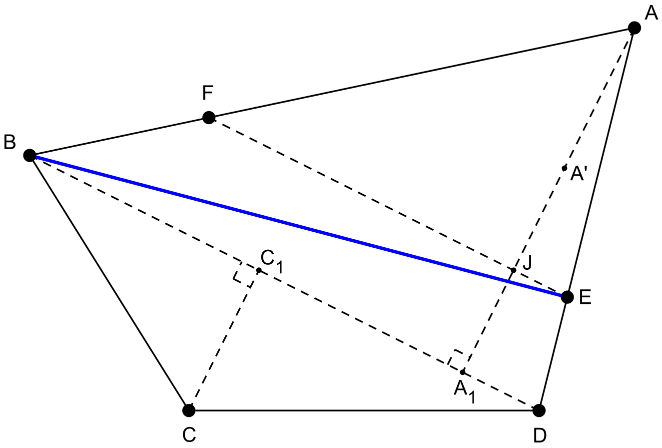
La figure $\mathcal{F}$ *en question sera un triangle* BDE *dont la hauteur issue de* E *mesure* $\frac{h-k}{2}$*.*

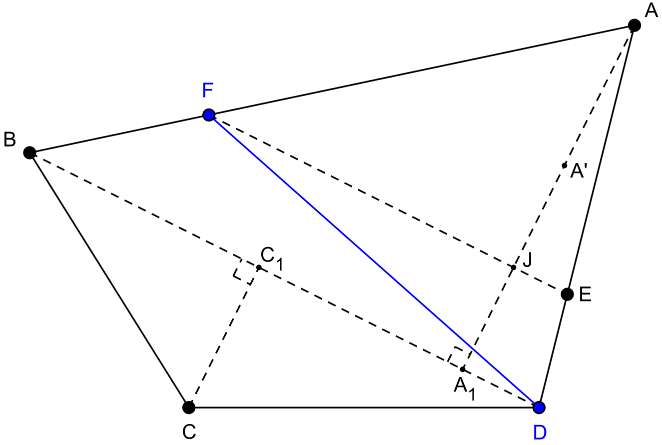
Le triangle $\mathcal{F}$ *se construit comme sur le dessin qui suit.*

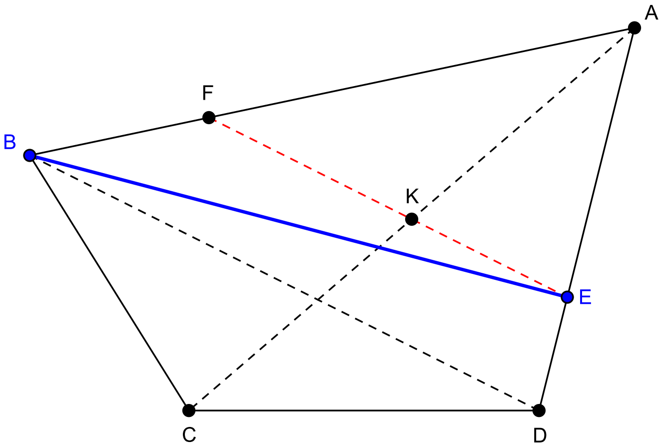
$AA' = CC_1 \;\; et \;\; J \; milieu \;\; de \;\; A'A_1$

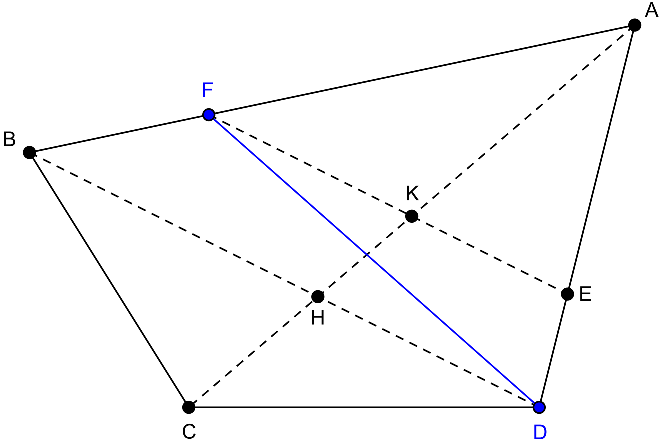



A
F
B
A'
C1
J
E
A1
C
D

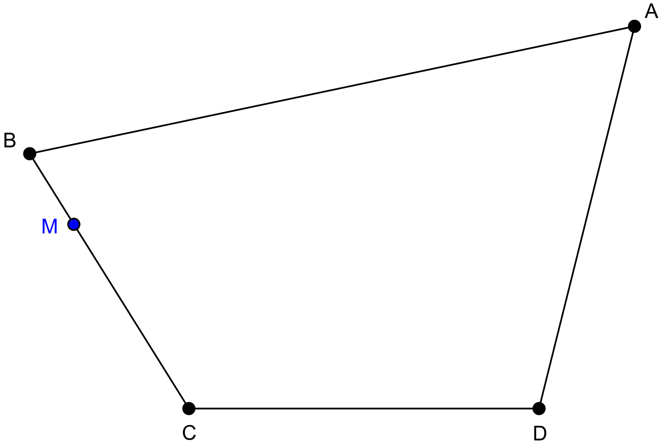

A
F
B
A'
C1
J
E
A1
C
D

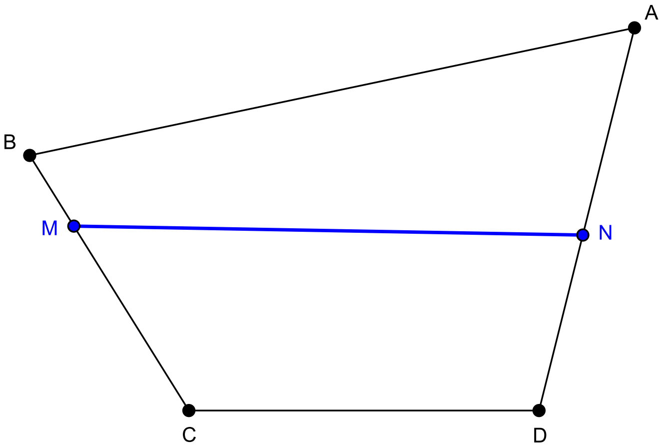

A
F
B
A'
C_1
J
E
A_1
C
D

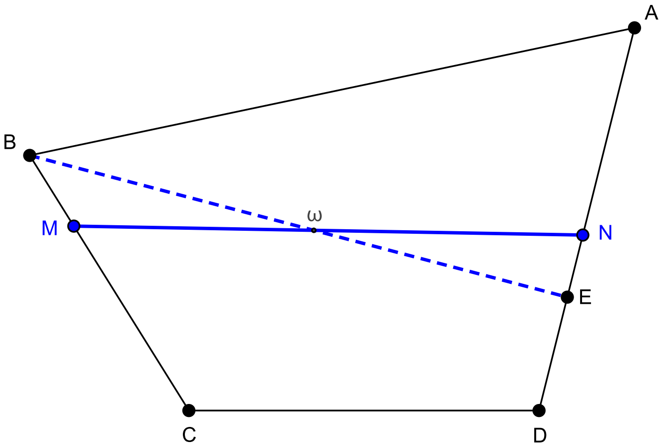

A
F
B
K
E
C
D

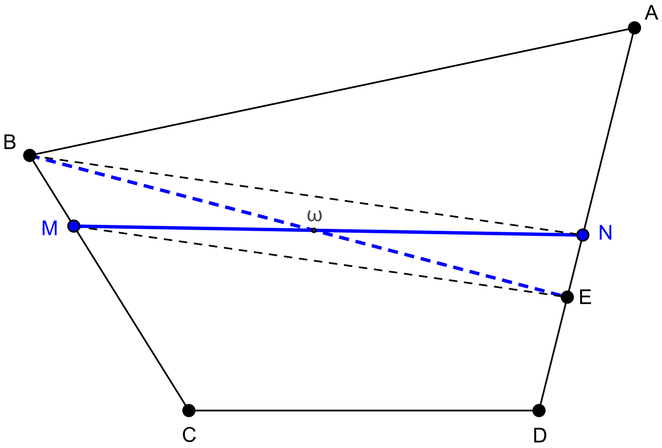

A
F
B
K
E
H
C
D

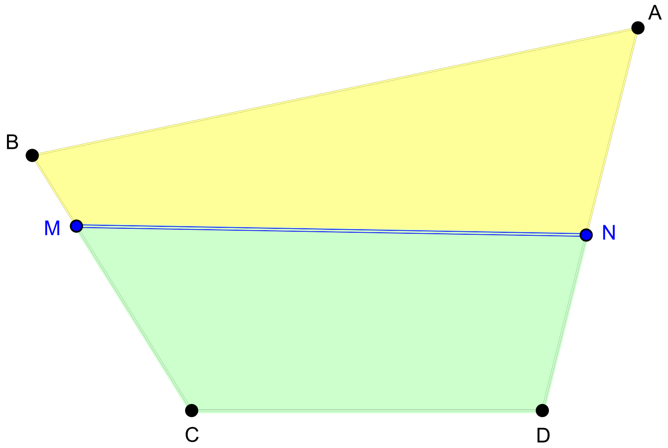
On impose le point de départ de la coupe !




A
B
M
N
C
D


A
B
ω
M
N
E
C
D


A
B
ω
M
N
E
C
D


A
B
M
N
C
D