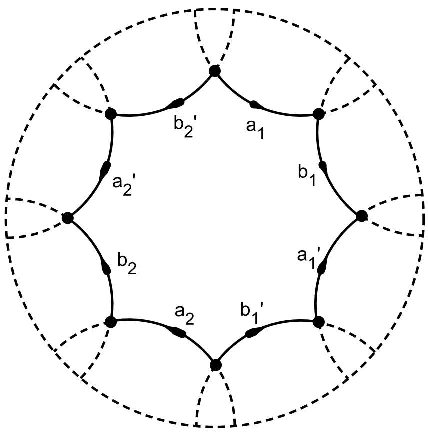
UNIVERSITÉ DE VALENCIENNES
ET DU HAINAUT-CAMRÉSIS

MASTER 1 DE MATHÉMATIQUES
UE : Projet en Mathématiques

par

Aziz El Kacimi

Petite introduction à la courbure des surfaces



Domaine fondamental donnant une surface
hyperbolique compacte orientable de genre 2

Année universitaire 2012-2013

.

CHAPITRE I

Surfaces différentiables

L'espace euclidien $\mathbb{R}^2$ a une particularité parmi les espaces topologiques : il possède des coordonnées globales (x_1, x_2). Celles-ci permettent d'y faire de l'analyse. Mais d'autres n'ayant aucune structure linéaire se comportent toutefois localement comme $\mathbb{R}^2$; on les appelle *surfaces différentiables.* L'objet de ce chapitre est d'en donner la définition, de décrire certaines de leurs propriétés et les divers objets qui leur sont rattachés.

1. Définitions et exemples

Dans ce paragraphe M sera un espace topologique paracompact *i.e.* M est séparé et tel que tout recouvrement ouvert admet un recouvrement ouvert plus *fin* et *localement fini.*

1.1. Définition. *On dira que M est une* **surface topologique** *si tout point $x \in M$ possède un voisinage ouvert U homéomorphe à $\mathbb{R}^2$ i.e. il existe une application bijective $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow U$ telle que φ et son inverse φ^{-1} soient continues.*

Pour connaître un point x de U, il suffit donc de connaître les coordonnées (x_1, x_2) dans $\mathbb{R}^2$ de son image réciproque $\varphi^{-1}(x)$. Pour cette raison, on dira que U est un *ouvert de coordonnées locales* de M au voisinage de x. La paire (U, φ) est appelée *carte locale* et $(x_1, x_2) = \varphi^{-1}(x)$ seront les *coordonnées* de x. Si (U, φ) et (V, ψ) sont deux cartes locales telles que l'intersection $U \cap V$ soit non vide, alors un point $x \in U \cap V$ sera repéré par ses coordonnées (x_1, x_2) dans U et ses coordonnées $({x'}_1, {x'}_2)$ dans V. Comme le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \varphi^{-1}(U \cap V) & \xrightarrow{\varphi} & U \cap V \\ \downarrow & & || \\ \psi^{-1}(U \cap V) & \xrightarrow{\psi} & U \cap V \end{array}$$

est commutatif, on doit avoir :

$$({x'}_1, {x'}_2) = \psi^{-1} \circ \varphi(x_1, x_2). \qquad \text{(I.1)}$$

L'application $\psi^{-1} \circ \varphi$ est appelée *changement de coordonnées* de la carte (U, φ) à la carte (V, ψ). Souvent on a besoin d'une certaine régularité de cette application ; ce qui nous amène à définir la notion de *surface différentiable.* Dorénavant M sera une surface topologique.

1.2. Définition. *Deux cartes locales (U, φ) et (V, ψ) sont dites* **compatibles** *si l'une des conditions suivantes est remplie :*

i) $U \cap V = \emptyset$,

ii) $U \cap V \neq \emptyset$ *et $\psi^{-1} \circ \varphi$ est un difféomorphisme de classe C^∞ ; ceci a un sens car cette application est définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et est à valeurs dans $\mathbb{R}^2$.*

Un ensemble de cartes locales $(U_i,\varphi_i)_{i\in I}$ sur M est appelé *atlas* si $(U_i)_{i\in I}$ est un recouvrement de M et si deux cartes quelconques (U_i,φ_i) et (U_j,φ_j) sont compatibles. Deux atlas $(U_i,\varphi_i)_{i\in I}$ et $(V_j,\psi_j)_{j\in J}$ sont dits *équivalents* si leur réunion est un atlas *i.e.* pour tout $i\in I$ et tout $j\in J$, les cartes (U_i,φ_i) et (V_j,ψ_j) sont compatibles.

1.3. Définition. *Une classe d'équivalence d'atlas est appelée* ***structure différentiable*** *sur M. On dira que M est une surface différentiable.*

(Pour simplifier, dans toute la suite on dira simplement "surface" au lieu de "surface différentiable".)

Tout ouvert non vide d'une surface est une surface.

Une surface M est dite *orientable* si elle peut être définie à l'aide d'un atlas (U_i,φ_i) pour lequel les difféomorphismes (I.1) préservent l'orientation de $\mathbb{R}^2$: pour $x\in U_i\cap U_j$, le déterminant de l'application linéaire $d\left(\varphi_j^{-1}\circ\varphi_i\right)(\varphi_i^{-1}(x))$ est strictement positif.

Une surface M est dite *connexe, compacte...* si l'espace topologique sous-jacent M est connexe, compact...

Dans toute la suite de cette section on ne considérera que les surfaces connexes.

1.4. Exemples

Souvent nous ne spécifierons que la manière d'obtenir les cartes. Le lecteur peut vérifier lui-même leur compatibilité. On peut obtenir des exemples de différentes manières. Mais il est clair que le premier est l'espace $\mathbb{R}^2$ lui-même puisqu'il constiue le *modèle local.*

i) <u>Surfaces de $\mathbb{R}^3$</u>

Une application différentiable $\mathbb{R}^3\xrightarrow{f}\mathbb{R}$ est dite de *rang constant* si le rang de l'application linéaire $d_xf:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}$ (différentielle de f au point x) ne dépend pas de x, donc égal à 0 ou 1. On dira que f est une *submersion* si pour tout $x\in M$, d_xf est surjective, donc de rang 1. Pour tout $c\in f(\mathbb{R}^3)$, posons :

$$M=\{x\in\mathbb{R}^3: f(x)=c\}.$$

Supposons que f est une submersion. On montre alors, par le *théorème des fonctions implicites*, que M est une surface. On dira que f est une *fonction definissant M*.

On appelle *surface* de $\mathbb{R}^3$ toute partie fermée M telle que, pour tout $x\in M$, il existe un voisinage ouvert U de x et une application différentiable $U\xrightarrow{f}\mathbb{R}$ définissant $M\cap U$.

ii) <u>La sphère $\mathbb{S}^2$</u>

C'est la partie fermée de $\mathbb{R}^3$: $\mathbb{S}^2=\left\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3\ :\ x_1^2+x_2^2+x_3^2=1\right\}$. C'est évidemment une surface de $\mathbb{R}^3$ définie par une submersion ; mais on peut voir aussi sa structure de surface en exhibant explicitement un atlas. Considérons le recouvrement ouvert suivant $U_1 = \mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$ et $U_2 = \mathbb{S}^2 \setminus \{S\}$ où N et S sont respectivement le *pôle nord* et le *pôle sud* de la sphère. Alors l'application $\varphi_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow U_1 \subset \mathbb{R}^3$ définie par :

$$\varphi_1(x_1, x_2) = \left(\frac{2x_1}{1 + x_1^2 + x_2^2}, \frac{2x_2}{1 + x_1^2 + x_2^2}, \frac{-1 + x_1^2 + x_2^2}{1 + x_2^2 + x_2^2} \right)$$

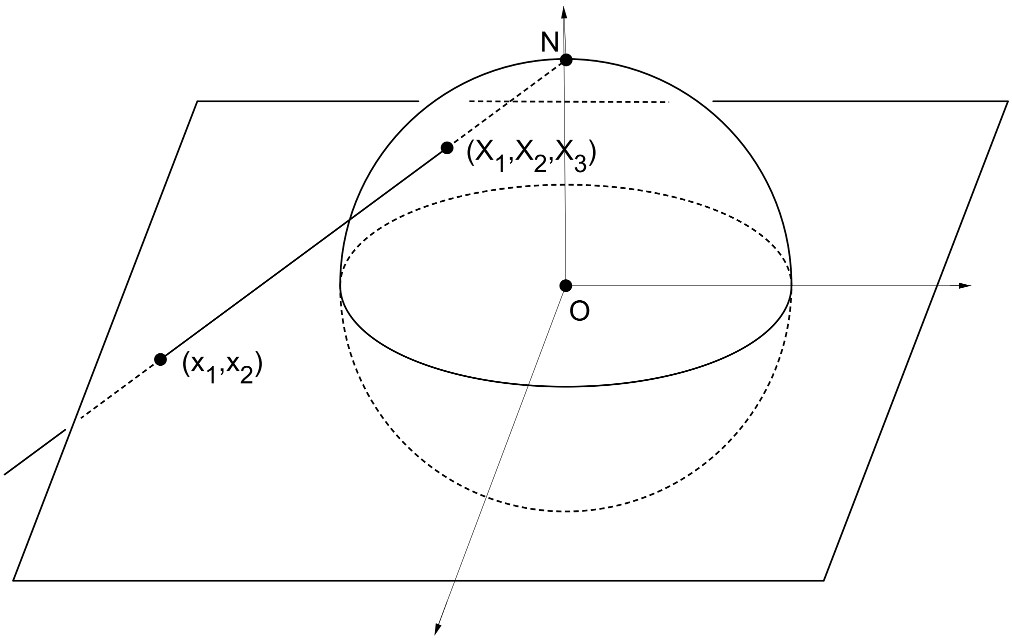


Fig. I.1

est un homéomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur U_1. L'application inverse est donnée par :

$$\varphi_1^{-1}(X_1, X_2, X_3) = \left(\frac{X_1}{1 - X_3}, \frac{X_2}{1 - X_3} \right)$$

De même l'application $\varphi_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow U_2$ donnée par :

$$\varphi_2(x_1, x_2) = \left(\frac{2x_1}{1 + x_1^2 + x_2^2}, \frac{2x_2}{1 + x_1^2 + x_2^2}, \frac{1 - x_1^2 - x_2^2}{1 + x_2^2 + x_2^2} \right)$$

est aussi un homéomorphisme ; l'inverse $\varphi_2^{-1} : U_2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ a pour expression :

$$\varphi_2^{-1}(X_1, X_2, X_3) = \left(\frac{X_1}{1 + X_3}, \frac{X_2}{1 + X_3} \right).$$

L'application de changement de cartes :

$$\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1 : \varphi_1^{-1}(U_1 \cap U_2) = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} = \varphi_2^{-1}(U_1 \cap U_2)$$

s'écrit :

$$\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1(x_1, x_2) = \left(\frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}, \frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2}\right)$$

qui est clairement différentiable ainsi que son inverse. Nous avons donc exhibé explicitement un atlas de la sphère $\mathbb{S}^2$. Les applications φ_1^{-1} et φ_2^{-1} sont appelées *projections steréographiques* de pôles respectifs N et S.

2. Applications différentiables

2.1. Définition. *On dira qu'une application $f : M \longrightarrow N$ entre deux surfaces est* ***différentiable*** *au point $x \in M$ si, pour toute carte locale (U, φ) de M contenant x, toute carte locale (V, ψ) de N contenant $f(x)$ et tout voisinage ouvert W de x contenu dans U et tel que $f(W) \subset V$, l'application :*

$$\psi^{-1} \circ f \circ \varphi : \varphi^{-1}(W) \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \psi^{-1}(V) \subset \mathbb{R}^2 \tag{I.2}$$

est différentiable. On dira que f est ***différentiable****, si elle est différentiable en tout point de M.*

En particulier, on dira qu'une fonction $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ est *différentiable* si, pour toute carte locale (U, φ), la fonction :

$$f \circ \varphi : \varphi^{-1}(U) \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow U \longrightarrow \mathbb{R}$$

est différentiable. La dérivée partielle de $\frac{\partial f}{\partial x_k}(x)$ sera donc par définition :

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x) = \frac{\partial (f \circ \varphi)}{\partial x_k}(\varphi^{-1}(x)). \tag{I.3}$$

Si l'application f est différentiable, bijective et f^{-1} différentiable, on dira que f est un *difféomorphisme* de M sur N.

On notera $C^\infty(M, N)$ l'ensemble des applications différentiables de M dans N et simplement $C^\infty(M)$ lorsque $N = \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) ; ce dernier est une algèbre pour la multiplication des fonctions. L'ensemble des difféomorphismes d'une surface est un groupe (pour la composition des applications) noté $\mathrm{Diff}(M)$.

2.2. Partition de l'unité.

C'est l'un des instruments les plus puissants en Analyse ; il permet de recoller des objets définis localement en objets globaux.

Soient M une surface et $\rho : M \longrightarrow \mathbb{K}$ ou une fonction. On appelle *support* de ρ et on note $\mathrm{supp}(\rho)$ l'adhérence de l'ensemble $\{x \in M : \rho(x) \neq 0\}$.

Soit $\mathcal{U} = (U_i)_i$ un recouvrement ouvert de M. On dira que $\mathcal{U}$ est *localement fini* si tout point $x \in M$ possède un voisinage qui ne rencontre qu'un nombre fini d'ouverts de la famille $\mathcal{U}$. Sur une surface (paracompacte comme cela a été supposé avant) un tel recouvrement existe toujours ; on peut même le choisir dénombrable.

Soit $\mathcal{U} = (U_i)_i$ un recouvrement localement fini sur M. On appelle *partition de l'unité subordonnée* à $\mathcal{U}$ une famille de fonctions réelles différentiables positives $(\rho_i)_i$ telles que :

- pour tout $i \in I$, $\mathrm{supp}(\rho_i)$ est contenu dans U_i,
- $\displaystyle\sum_{i\in I} \rho_i = 1$.

Proposition. *Tout recouvrement localement fini $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ admet une partion de l'unité différentiable $(\rho_i)_{i\in I}$.*

3. Espaces tangents

Soient M une surface et $(U_i, \varphi_i)_{i\in I}$ un atlas définissant M. On a vu qu'une fonction $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ est différentiable si, pour tout $i \in I$, la fonction :

$$f \circ \varphi_i : \varphi^{-1}(U_i) \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow U_i \longrightarrow \mathbb{R}$$

est différentiable et que la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x_k}(x)$ est donnée par :

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x) = \frac{\partial (f \circ \varphi_i)}{\partial x_k}(\varphi_i^{-1}(x)).$$

Pour tout $k = 1, 2$, on obtient donc un opérateur $\frac{\partial}{\partial x_k}$ qui à toute fonction différentiable f sur U_i associe la fonction $\frac{\partial f}{\partial x_k}$. En chaque point $x \in U_i$, les opérateurs $\frac{\partial}{\partial x_1}(x)$, $\frac{\partial}{\partial x_2}(x)$ sont linéairement indépendants. Si (U_j, φ_j) est une autre carte locale de système de coordonnées (x_1', x_2') un point $x \in U_i \cap U_j$ est repéré par ses coordonnées (x_1, x_2) dans U_i et ses coordonnées (x_1', x_2') dans U_j et on a :

$$(x_1', x_2') = \varphi_{ij}(x_1, x_2)$$

avec $\varphi_{ij} = \varphi_j^{-1} \circ \varphi_i$. Il est alors facile de montrer que, pour tout $k = 1, 2$, on a :

$$\frac{\partial}{\partial x_k}(x) = \frac{\partial x_1'}{\partial x_k}(x)\frac{\partial}{\partial x_1'}(x) + \frac{\partial x_2'}{\partial x_k}(x)\frac{\partial}{\partial x_2'}(x). \tag{I.4}$$

En tout point $x \in M$, les opérateurs $\frac{\partial}{\partial x_1}(x)$, $\frac{\partial}{\partial x_2}(x)$ engendrent donc sur $\mathbb{R}$ un espace vectoriel de dimension 2 indépendant de la carte choisie (U_i, φ_i) pour le définir.

3.1. Définition. *On appelle* **espace tangent** *à M en x, l'espace vectoriel T_xM engendré par les opérateurs $\frac{\partial}{\partial x_1}(x)$, $\frac{\partial}{\partial x_2}(x)$ à l'aide d'une carte quelconque (U_i, φ_i).*

Pour les surfaces M de $\mathbb{R}^3$, on peut percevoir de manière très concrète la notion d'espace tangent. Si M est une surface de $\mathbb{R}^3$ définie localement sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^3$ par une équation du type $F(x_1, x_2, x_3) = 0$ où $F : U \longrightarrow \mathbb{R}$ est C^∞, alors l'espace tangent à M au point $a = (a_1, a_2, a_3)$ est le noyau de la forme affine sur $\mathbb{R}^3$:

$$\text{(I.5)} \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longmapsto \frac{\partial F}{\partial x_1}(a)(x_1 - a_1) + \frac{\partial F}{\partial x_2}(a)(x_2 - a_2) + \frac{\partial F}{\partial x_3}(a)(x_3 - a_3).$$

Par exemple la sphère $\mathbb{S}^2$ de $\mathbb{R}^3$ est définie par l'équation $F(x_1, x_2, x_3) = 1 - \sum_{k=1}^3 x_k^2 = 0$ et a pour espace tangent au point $a = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ le plan affine de $\mathbb{R}^3$ d'équation :

$$x_1 + x_2 + x_3 = \sqrt{3}.$$

Pour tout $x \in M$, T_xM est un espace vectoriel réel mais il dépend du point par lequel il "passe". On définit l'ensemble TM comme suit :

$$TM = \bigcup_{x \in M} T_xM.$$

Un élément de TM est la donnée d'un couple (x, u_x) où x est un point de M et u_x un vecteur de T_xM. On a une projection canonique $\pi : TM \longrightarrow M$ définie par $\pi(x, u_x) = x$.

3.2. Définition. *On appelle* **champ de vecteurs** *sur M toute application $X : M \longrightarrow TM$ telle que, sur toute carte locale (U, φ), X s'écrit $X(x) = f_1(x)\frac{\partial}{\partial x_1}(x) + f_2(x)\frac{\partial}{\partial x_2}(x)$ où $f_1, f_2 : U \longrightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions C^∞.*

L'ensemble $\mathfrak{X}(M)$ des champs de vecteurs sur M est un module sur l'anneau $C^\infty(M)$ des fonctions de classe C^∞. On peut y définir une structure multiplicative de la façon suivante : soient X et Y deux champs de vecteurs sur M ; qu'on peut écrire sur la carte locale (U, φ) :

$$X(x) = f_1(x)\frac{\partial}{\partial x_1}(x) + f_2(x)\frac{\partial}{\partial x_2}(x) \quad \text{et} \quad Y(x) = g_1(x)\frac{\partial}{\partial x_1}(x) + g_2(x)\frac{\partial}{\partial x_2}(x).$$

Un calcul facile montre que pour toute fonction $h : M \longrightarrow \mathbb{R}$, de classe C^∞, on a :

$$X(Y(h)) - Y(X(h)) = \sum_{k,\ell} \left(f_k \frac{\partial g_\ell}{\partial x_k}\frac{\partial h}{\partial x_\ell} - g_\ell \frac{\partial f_k}{\partial x_\ell}\frac{\partial h}{\partial x_k} \right).$$

On définit ainsi un nouveau champ (local) de vecteurs $XY - YX$; on montre que ceci ne dépend pas de la carte choisie ; on obtient alors un champ de vecteurs global $XY - YX$ qu'on note $[X, Y]$ et qu'on appelle *crochet* de X et Y ; $[X, Y]$ est le commutateur de X et Y vus comme opérateurs (*différentiels d'ordre* 1) sur $C^\infty(M)$. On vérifie facilement l'identité suivante dite *identité de Jacobi* :

$$\text{(II.6)} \qquad [X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [Y, X]] = 0$$

On dira que $(\mathfrak{X}(M), [\ ,\ ])$ est l'*algèbre de Lie* des champs de vecteurs sur M.

3.3. Application tangente

Soit h une application différentiable d'une surface M dans une autre surface N. On supposera que M et N sont définies par les atlas respectifs $(U_i, \varphi_i)_{i\in I}$ et $(V_j, \psi_j)_{j\in J}$ et, pour ne pas alourdir les notations, on fera comme si les ouverts de coordonnées U_i et V_j étaient en fait l'espace euclidien $\mathbb{R}^2$. Pour tout $x \in M$ de coordonnées (x_1, x_2), l'application h définit une application linéaire :

$$d_x h : T_x M \longrightarrow T_{h(x)} N \tag{I.7}$$

qui à tout opérateur $\frac{\partial}{\partial x_k}(x)$, $k = 1, 2$, associe l'opérateur $d_x h\left(\frac{\partial}{\partial x_k}(x)\right)$ donné sur une fonction $f : N \longrightarrow \mathbb{R}$ par :

$$d_x h\left(\frac{\partial}{\partial x_k}(x)\right)(f) = \frac{\partial y_1}{\partial x_k}(x)\frac{\partial f}{\partial y_1}(h(x)) + \frac{\partial y_2}{\partial x_k}(x)\frac{\partial f}{\partial y_2}(h(x)) \tag{I.8}$$

où (y_1, y_2) sont les coordonnées du point $h(x)$ pour tout $x \in M$. On peut vérifier que la définition de l'application $d_x h$ ne dépend pas du système de coordonnées locales. On l'appelle *application tangente* à h au point $x \in M$.

4. Actions de groupes

Nous présentons de manière brève la notion d'action de groupes. Elle sert, entre autres, à construire des exemples divers de surfaces.

Soit M une surface munie d'une relation d'équivalence $\mathcal{R}$. Pour tout $x \in M$, on notera $\mathcal{O}_x$ sa classe d'équivalence. Si U est une partie de M, $\mathrm{Sat}(U)$ sera son *saturé i.e.* $\mathrm{Sat}(A) = \bigcup_{x\in A} \mathcal{O}_x$. On dira que $\mathcal{R}$ est *ouverte* si, pour tout ouvert U de M, $\mathrm{Sat}(U)$ est un ouvert de M. Soient $\mathcal{R}$ une telle relation d'équivalence, $B = M/\mathcal{R}$ le quotient et notons $\pi : M \longrightarrow B$ la projection canonique. On munit B de la *topologie quotient* : V est un ouvert de B si, et seulement si, $\pi^{-1}(V)$ est un ouvert de M. Cette topologie sur B rend la projection π continue.

Soient Γ un groupe dénombrable discret (cela signifie qu'il est muni de la topologie discrète *i.e.* tout singleton $\{\gamma\}$ est un ouvert) et M une surface. On notera $\mathrm{Diff}(M)$ le groupe des difféomorphismes de M.

4.1. Définition. *Une* ***action*** *de* Γ *sur* M *est une application continue* $\Phi : \Gamma \times M \longrightarrow M$ *telle que :*

i) $\Phi(e, x) = x$ *pour tout* $x \in M$, e *étant l'élément neutre de* Γ ;

ii) $\Phi(\gamma\gamma', x) = \Phi(\gamma, \Phi(\gamma', x))$ *pour tous* $\gamma, \gamma' \in \Gamma$ *et tout point* $x \in M$;

iii) *pour tout* $\gamma \in \Gamma$, *l'application partielle* $\Phi(\gamma, \cdot) : x \in M \longrightarrow \Phi(\gamma, x) \in M$ *est un élément de* $\mathrm{Diff}(M)$.

La donnée d'une action Φ de Γ sur M permet de définir une *représentation* de Γ dans le groupe $\mathrm{Diff}(M)$ *i.e.* un morphisme de groupes $\rho : \gamma \in \Gamma \longmapsto \Phi(\gamma, \cdot) \in \mathrm{Diff}(M)$. Tout élément $\gamma \in \Gamma$ sera confondu avec $\rho(\gamma)$ et pour tout point $x \in M$, $\rho(\gamma)(x) = \Phi(\gamma, x)$ sera noté simplement γx. L'ensemble $\mathcal{O}_x = \{\gamma x \ : \ \gamma \in \Gamma\}$ est appelé *orbite* de x.

i) On dira que $x \in M$ est un *point fixe* de Φ si $\gamma x = x$ pour tout $\gamma \in \Gamma$. L'ensemble $\mathrm{Fix}(\Phi)$ des points fixes de Φ est un fermé de M.

ii) Pour tout $x \in M$, posons $\Gamma_x = \{\gamma \in \Gamma \ : \ \gamma x = x\}$; alors Γ_x est un sous-groupe de Γ appelé *groupe d'isotropie* de x.

iii) On dira que l'action Φ est *libre* si, pour tout $x \in M$, $\Gamma_x = \{e\}$.

iv) Une partie M_0 de M est dite *invariante* par Φ si, pour tout $x \in M_0$, l'orbite $\mathcal{O}_x$ est entièrement contenue dans M_0. On dira que Φ est *transitive* s'il existe x tel que l'orbite $\mathcal{O}_x$ soit égale à M. (Ceci sera donc vrai pour tout $x \in M$.)

Toute action Φ de Γ sur M définit une *relation d'équivalence* $\mathcal{R}$:

$$x \ \mathcal{R} \ y \Longleftrightarrow \text{il existe } \gamma \in \Gamma \text{ tel que } y = \gamma x. \tag{I.9}$$

Cette relation d'équivalence est ouverte car, pour tout ouvert U de M, son saturé est :

$$\mathrm{Sat}(U) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma U$$

qui est un ouvert car, pour tout γ, γU est ouvert puisque γ est un difféomorphisme. On munit $B_\Phi = M/\Phi = M/\mathcal{R}$ de la topologie quotient. On dira que l'action $\Phi : \Gamma \times M \longrightarrow M$ est :

v) *totalement discontinue* si tout point $x \in M$ admet un voisinage ouvert U tel que, pour tous $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ distincts, on ait $\gamma_1 U \cap \gamma_2 U = \emptyset$;

vi) *séparante* si tous points $x, y \in M$ non équivalents admettent des voisinages ouverts respectifs U et V tels que, pour tous $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$, on ait $\gamma_1 U \cap \gamma_2 V = \emptyset$;

vii) *propre* si, pour tout compact $K \subset M$, l'ensemble $\{\gamma \in \Gamma : \gamma K \cap K \neq \emptyset\}$ est fini.

Si Γ est fini et agit librement, alors il agit de façon séparante et totalement discontinue (démonstration laissée au lecteur).

On dira que deux actions Φ_1 et Φ_2 définies respectivement sur les variétés M_1 et M_2 sont *conjuguées*, s'il existe un difféomorphisme $h : M_1 \longrightarrow M_2$ tel que, pour tout $\gamma \in \Gamma$, le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} M_1 & \overset{\Phi_1(\gamma,\cdot)}{\longrightarrow} & M_1 \\ h \downarrow & & \downarrow h \\ M_2 & \overset{\Phi_2(\gamma,\cdot)}{\longrightarrow} & M_2. \end{array} \tag{I.10}$$

Dans toute la suite de cette section, Γ sera un groupe topologique, dénombrable et discret. Dans ce cas, si Γ agit librement et proprement, il agit de façon séparante et totalement discontinue.

4.2. Proposition. *Soient M une surface et Φ une action libre et propre de Γ sur M. Alors le quotient $B_\Phi = M/\Phi$ est une surface et la projection canonique $\pi : M \longrightarrow X$ est un difféomorphisme local i.e. tout point $x \in M$ admet un vosinage ouvert U tel que la restriction $\pi : U \longrightarrow \pi(U)$ soit un difféomorphisme. Si Ψ est une action conjuguée à Φ, les surfaces B_Φ et B_Ψ sont difféomorphes.*

Il est souvent utile de savoir s'il existe une partie d'une surface M (géométriquement intérssante) qui contient le moins possible d'éléments dans chaque orbite. Ceci nous amène à la définition qui suit.

4.3. Définition. *Soit Φ une action propre et discontinue de Γ sur une surface M. On appelle* ***domaine fondamental*** *de cette action toute partie fermée Δ de M telle que :*

i) $\displaystyle\bigcup_{\gamma\in\Gamma} \gamma(\Delta) = M$,

ii) $\mathrm{int}(\Delta) \cap \mathrm{int}(\gamma\Delta) = \emptyset$ *pour tout $\gamma \neq$ identité.*

L'ensemble $\partial\Delta = \Delta \setminus \mathrm{int}(\Delta)$ est le *bord* du domaine fondamental ; il est de mesure nulle (pour la mesure canonique de M : celle donnée par la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^2$ à l'aide des cartes locales). La surface quotient $X = M/\Gamma$ est obtenue à partir de Δ en identifiant les points de $\partial\Delta$ qui sont Γ-équivalents.

Proposition. *Toute action propre et discontinue de Γ sur une surface M admet un domaine fondamental. Ce domaine est compact si, et seulement si, $X = M/\Gamma$ l'est.*

4.4. Quelques exemples

i) Soient $M = \mathbb{R}^2$ et $\Gamma = \mathbb{Z}^2$, $\tau = (\tau_1, \tau_2)$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$ dont les composantes sont toutes non nulles. On définit une action $\Phi : \Gamma \times M \longrightarrow M$ par $\Phi(q, x) = x + \tau q$ où $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $q = (q_1, q_2) \in \mathbb{Z}^2$ et $q\tau = (q_1\tau_1, q_2\tau_2)$. Alors Φ est une action libre et propre ; le quotient M/Γ est une surface. La structure différentiable sur M/Γ ne dépend pas du τ choisi. Cette variété est appelée *tore* et est notée $\mathbb{T}^2$; elle est obtenue en identifiant, deux à deux, les côtés opposés d'un parallélogramme (qui est le domaine fondamental de l'action) en respectant l'orientation (de ces côtés) (*cf.* Fig. I.2).

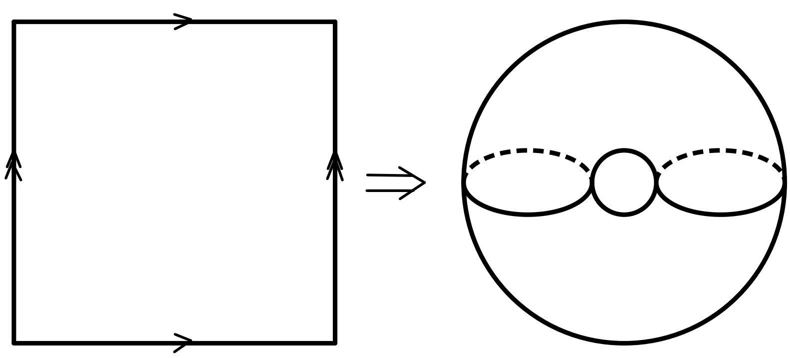


Fig. I.2

ii) Soient M la sphère $\mathbb{S}^2$, ensemble des vecteurs de l'espace $\mathbb{R}^3$ vérifiant la relation $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$ et Γ le groupe multiplicatif $\{1,-1\}$ (qu'on peut aussi identifier au groupe additif $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$) ; Γ agit sur $\mathbb{S}^2$ de la façon suivante :

$$\Phi : (\gamma, x) \in \Gamma \times \mathbb{S}^2 \longmapsto \gamma x \in \mathbb{S}^2.$$

L'action Φ est libre et le quotient $\mathbb{S}^2/\Gamma$ est une surface non orientable ; c'est l'espace projectif $P^2(\mathbb{R})$.

CHAPITRE II

Surfaces riemanniennes

Dans ce chapitre nous introduisons la notion de *métrique riemannienne* sur une surface et nous en donnons quelques exemples.

1. Métriques riemanniennes

Soit M une surface définie par un atlas $(U_i, \varphi_i)_{i\in I}$. Pour tout $x \in M$, T_xM est un espace vectoriel réel de dimension 2. Soient T_x^*M le dual de T_xM et $T^*M = \bigcup_{x\in M} T_x^*M$. Sur une carte locale (U, φ) de coordonnées (x_1, x_2), $\frac{\partial}{\partial x_1}(x)$ et $\frac{\partial}{\partial x_2}(x)$ sont des vecteurs tangents à M au point x ; notons dx_1 et dx_2 les éléments de T_x^*M définis par :

$$dx_1\left(\frac{\partial}{\partial x_1}(x)\right) = 1, \quad dx_1\left(\frac{\partial}{\partial x_2}(x)\right) = 0, \quad dx_2\left(\frac{\partial}{\partial x_1}(x)\right) = 0, \quad dx_2\left(\frac{\partial}{\partial x_2}(x)\right) = 1.$$

Une 1-*forme différentielle* sur M est une application $\omega : M \longrightarrow T^*M$ qui à tout x associe une forme linéaire ω_x sur T_xM de telle sorte que, sur toute carte (U, φ) de coordonnées locales (x_1, x_2), ω s'écrive :

$$\omega(x) = \omega_1(x)dx_1 + \omega_2(x)dx_2$$

où ω_1 et ω_2 sont des fonctions C^∞ sur U.

Soit S^2T_xM l'espace vectoriel réel des *formes bilinéaires symétriques* sur T_xM *i.e.* les applications $\varphi : T_xM \times T_xM \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que :

i) les applications partielles $\varphi(u, \cdot) : v \longrightarrow \varphi(u, v)$ et $\varphi(\cdot, v) : u \longrightarrow \varphi(u, v)$ soient linéaires;
ii) pour tous $u, v \in T_xM$, $\varphi(u, v) = \varphi(v, u)$.

Tout endomorphisme $\gamma_x : T_xM \longrightarrow T_xM$ induit un endomorphisme de S^2T_xM noté γ_x^* défini par $\gamma_x^*(\varphi)(u, v) = \varphi(\gamma_x(u), \gamma_x(v))$ pour $\varphi \in S^2T_xM$ et $u, v \in T_xM$. Posons :

$$\mathcal{S}^2 = \bigcup_{x\in M} S^2T_xM$$

L'ensemble $\mathcal{S}^2$ est constitué des couples $(x, g(x))$ où $x \in M$ et $g(x)$ une forme bilinéaire symétrique.

Par exemple, deux 1-formes α et β sur M permettent de définir une 2-forme symétrique sur M notée $\alpha\otimes\beta$ par $(\alpha\otimes\beta)(u, v) = \alpha(x)(u)\beta(x)(v)$ pour $u, v \in T_xM$. On dira que $\alpha\otimes\beta$ est le *produit tensoriel* de α et β.

1.1. Définition. *Une **métrique riemannienne** sur M est une application $g : M \longrightarrow \mathcal{S}^2$ où, pour tout $x \in M$, $g(x)$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive et telle que, sur toute carte (U, φ) de coordonnées locales (x_1, x_2), g s'écrive :*

$$g(x) = g_{11}(x)dx_1 \otimes dx_1 + g_{12}(x)dx_1 \otimes dx_2 + g_{21}(x)dx_2 \otimes dx_1 + g_{22}(x)dx_2 \otimes dx_2$$

avec $g_{12} = g_{21}$ et les $g_{k\ell}$ sont des fonctions C^∞ sur U.

Cela signifie que, pour tout $x \in M$, $g(x)$ est un produit scalaire sur T_xM et que la famille $(g(x))_{x\in M}$ varie de manière C^∞ en x. Les fonctions $g_{k\ell}$ sont définies par les formules :

$$g_{k\ell}(x) = g(x)\left(\frac{\partial}{\partial x_k}(x), \frac{\partial}{\partial x_\ell}(x)\right) \qquad \text{avec} \qquad k, \ell = 1, 2.$$

1.2. Construction de métriques

Nous allons donner une construction explicite des métriques riemanniennes en utilisant la structure différentiable de M décrite à l'aide d'un atlas $\mathcal{U} = (U_i, \varphi_i)_{i\in I}$; ceci montrera en particulier que de tels objets existent toujours. On supposera que le recouvrement (U_i) est *localement fini* (*i.e.* tout point de M admet un voisinage compact qui ne rencontre qu'un nombre fini d'ouverts U_i).

Soit (U, φ) un élément de l'atlas $\mathcal{U}$. Pour la structure différentiable usuelle sur $\mathbb{R}^2$, l'homéomorphisme $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow U$ est un difféomorphisme de classe C^∞. Pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, l'application $d_x\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow T_{\varphi(x)}U$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Soit $\langle\ ,\ \rangle$ le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^2$; pour tous $u, v \in T_{\varphi(x)}U$ on pose :

$$g(x)(u, v) = \langle \varphi^{-1}(u), \varphi^{-1}(v)\rangle.$$

Soit (x_1, x_2) un système de coordonnées sur U. Alors en chaque point $x \in U$, g a pour expression :

$$g(x) = \sum_{k,\ell=1}^{2} g_{k\ell}(x)dx_k \otimes dx_\ell \tag{II.1}$$

qui n'est rien d'autre que celle donnée dans la définition 1.1.

Notons g_i la métrique riemannienne sur U_i que l'on vient de construire. Soit $(\rho_i)_{i\in I}$ une partition de l'unité C^∞ subordonnée au recouvrement $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$. Pour tout $x \in M$ on pose :

$$g(x) = \sum_{i\in I} \rho_i(x)g_i(x).$$

Il est facile de vérifier que g ainsi définie est une métrique riemannienne sur M. Une surface M munie d'une métrique riemannienne g est appelée *surface riemannienne* ; elle sera notée (M, g).

Soient (M, g) et (N, h) deux surfaces riemanniennes et $\varphi : M \longrightarrow N$ une application de classe C^∞.

1.3. Définition. *On dira que φ est une* ***isométrie locale*** *si, pour tout point $x \in M$ et tous vecteurs u et v tangents à M en x, on a $h(y)(d_x\varphi(u), d_x\varphi(v)) = g(x)(u,v)$ où $y = \varphi(x)$. Ceci signifie que l'application linéaire $d_x\varphi : T_xM \longrightarrow T_yN$ est une isométrie. Si en plus φ est bijective, on dira que φ est une* ***isométrie*** de (M,g) sur (N,h).

L'ensemble des isométries de la surface riemannienne (M,g) forment un groupe pour la composition des applications ; on le note $\mathrm{Isom}(M,g)$.

14. Longueur d'une courbe

On appelle *courbe différentiable* dans une surface M toute application γ continue d'un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ dans M ; on dira que γ est C^1 *par morceaux* s'il existe une partition dénombrable de I en intervalles I_n tels que la restriction de γ à l'intérieur de chacun des I_n soit une courbe de classe C^1. On appelle *champ de vecteurs le long d'une courbe* $\gamma : I \longrightarrow M$ toute application différentiable qui à tout $t \in I$ associe un vecteur tangent $X(t) \in T_{\gamma(t)}M$. Par exemple, si γ est différentiable, l'image $d_t\gamma\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)$ du champ canonique $\frac{\partial}{\partial t}$ sur I par la dérivée de γ est un champ de vecteurs le long de γ.

Supposons M munie d'une métrique riemannienne $g = \langle\ ,\ \rangle$ et soit $\gamma : I \longrightarrow M$ une courbe C^1 par morceaux. On appelle *longueur* du segment $\gamma([t_0,t_1])$ le nombre positif :

$$\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\left\langle \frac{d\gamma}{dt}(t), \frac{d\gamma}{dt}(t) \right\rangle} dt \tag{II.2}$$

où l'intégrale est, bien entendu, calculée en dehors des points de discontinuité de $\frac{d\gamma}{dt}(t)$.

2. Exemples de surfaces riemanniennes

Nous allons en donner celles dites usuelles car elles sont naturelles et apparaissenr souvent en tête des exemples.

2.1. Métrique usuelle sur $\mathbb{R}^2$

Sur $\mathbb{R}^2$ on a une base de champs de vecteurs globaux $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}\right)$. On définit une métrique riemannienne sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$g(x) = dx_1 \otimes dx_1 + dx_2 \otimes dx_2. \tag{II.3}$$

Le groupe des isométries $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2, g)$ de cette surface riemannienne n'est rien que celui des isométries affines de $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire $\langle (x_1,x_2),(y_1,y_2)\rangle = x_1y_1 + x_2y_2$. Ce n'est rien d'autre que le produit semi-direct $\mathbb{R}^2 \rtimes \mathrm{O}(2)$; $\mathbb{R}^2$ étant vu comme le groupe des translations et $\mathrm{O}(2)$ est engendré par les rotations de centre l'origine et la réflexion d'axe une droite vectorielle.

2.2. Graphe d'une fonction

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une application C^∞. Alors son graphe $M = \{(x_1,x_2,x_3) \in U \times \mathbb{R}\ :\ x_3 = f(x_1,x_2)\}$ est une surface plongée dans $\mathbb{R}^3$ à l'aide de l'application C^∞ :

$$F : (x_1,x_2) \in U \longrightarrow (x_1,x_2,f(x_1,x_2)) \in \mathbb{R}^3.$$

Pour tout $x \in U$, les vecteurs $\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}$ forment une base de l'espace tangent T_xU. Leurs images par la différentielle d_xF sont les vecteurs de $T_{F(x)}M \subset \mathbb{R}^3$:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial}{\partial x_1}(x) \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial}{\partial x_2}(x) \end{pmatrix}$$

Sur $\mathbb{R}^3$ on considère le produit scalaire usuel $\langle\ ,\ \rangle$; on le restreint à chaque espace tangent $T_{F(x)}M$ et on obtient ainsi une métrique riemannienne g sur M. Pour tout $k = 1, 2$ posons $p_k = \frac{\partial f}{\partial x_k}$. Alors :

$$\langle e_k, e_\ell \rangle = \begin{cases} 1 + p_k^2 & \text{si } k = \ell \\ p_k p_\ell & \text{sinon} \end{cases}$$

D'où l'expression de la métrique dans le système de coordonnées (x_1, x_n) :

$$g = (1 + p_1^2)dx_1 \otimes dx_1 + (1 + p_2^2)dx_2 \otimes dx_2 + 2p_1p_2 dx_1 \otimes dx_2. \tag{II.4}$$

2.3. La sphère

On note $\mathbb{S}^2$ la sphère unité de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$. Si on ôte le pôle nord $= (0, 0, 1)$ et le pôle sud $=(0, 0, -1)$ l'ouvert M qui reste a pour repésentation paramétrique (où $\theta \in \mathbb{R}$ et $\varphi \in]0, \pi[$) :

$$\begin{cases} x_1 = \cos\theta \sin\varphi \\ x_2 = \sin\theta \sin\varphi \\ x_3 = \cos\varphi \end{cases}$$

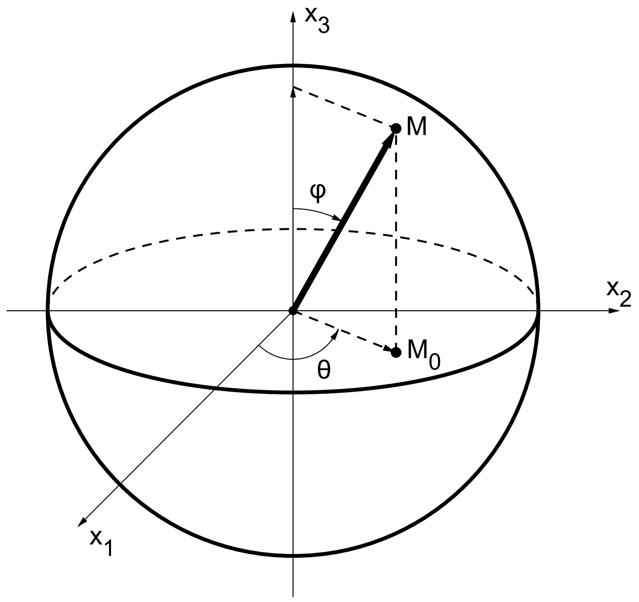


Fig. II.1

L'application $F : (\theta, \varphi) \in \mathbb{R}\times]0, \pi[\longrightarrow (x_1, x_2, x_3) \in M$ n'est pas injective mais sa différentielle l'est en tout point (θ, φ). Elle est donnée par la matrice :

$$\begin{pmatrix} -\sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\cos\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi & \sin\theta\cos\varphi \\ 0 & -\sin\varphi \end{pmatrix}$$

L'espace tangent à M au point $F(\theta, \varphi)$ est donc engendré par les vecteurs :

$$e_1 = \begin{pmatrix} -\sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad e_2 = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\cos\varphi \\ -\sin\varphi \end{pmatrix}$$

Les différents produits scalaires $\langle e_k, e_\ell \rangle$, pris dans $\mathbb{R}^3$, donnent la métrique riemannienne sur M :

$$g = \sin^2\varphi d\theta \otimes d\theta + d\varphi \otimes d\varphi. \tag{II.5}$$

Le groupe $\mathrm{Isom}(\mathbb{S}^2)$ s'identifie au groupe $\mathrm{O}(3)$ des isométries linéaires de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ ou groupe des matrices orthogonales 3×3.

2.4. Le demi-plan $\mathbb{H}^2$

On note $\mathbb{H}^2$ le demi-espace $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x_2 > 0\}$ sur lequel on définit la métrique riemannienne :

$$g = \frac{dx_1 \otimes dx_1 + dx_2 \otimes dx_2}{x_2^2} \tag{II.6}$$

Par la suite, nous donnerons de manière explicite le groupe d'isométries de cette surface riemannienne ainsi que d'autres propriétés en remarquant que :

$$\mathbb{H}^2 = \{z = x_1 + ix_2 \in \mathbb{C} \ : \ \mathrm{Im}z = x_2 > 0\}$$

et que la métrique en question s'écrit aussi sous la forme :

$$h = -\frac{4dz \otimes d\overline{z}}{(z - \overline{z})^2} \tag{II.7}$$

où $dz = dx_1 + idx_2$ et $d\overline{z} = dx_1 - idx_2$. (L'utilisation de la coordonnée complexe se prête mieux au calcul que celle des coordonnées réelles.)

CHAPITRE III

Courbure

Dans ce chapitre nous définissons la notion de *courbure* que nous accompagnons par quelques exemples de calculs explicites.

1. Connexions

Soit M une surface de $\mathbb{R}^3$. Un champ de vecteurs sur M le long d'une courbe différentiable $\gamma : I \longrightarrow M$ est une application différentiable

$$X : t \in M \longrightarrow (X_1(t), X_2(t), X_3(t)) \in T_{\gamma(t)}M.$$

On pourrait penser que dériver X (en imposant à la dérivée de rester tangente à M) reviendrait à dériver simplement les composantes ; il n'en est rien : on peut trouver des fonctions X_1, X_2, X_3 telles que le vecteur $(X_1'(t), X_2'(t), X_3'(t))$ ne soit plus tangent à M. On est alors amené à chercher des *lois* permettant de dériver des objets tels que champ de vecteurs. Cela se fait à l'aide d'une *connexion* (*affine* ou *riemannienne*) qui est une notion fondamentale en géométrie différentielle.

1.1. Connexions affines

Soit M une surface. On note TM son fibré tangent et $\mathfrak{X}(M)$ le $C^\infty(M)$-module des champs de vecteurs sur M. On appelle *connexion affine* sur M toute application :

$$\nabla : (X, Y) \in \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \nabla_X Y \in \mathfrak{X}(M)$$

$C^\infty(M)$-linéaire par rapport au premier facteur, additive par rapport au second et telle que $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$ pour tous $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ et toute fonction $f \in C^\infty(M)$.

Mettons-nous dans un ouvert de coordonnées locales (U, x_1, x_2). Alors on a une base de champs de vecteurs sur U :

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x_2}.$$

Pour connaître la connexion ∇, il suffit de connaître les différentes quantités $\nabla_{X_i} X_j$ avec $i, j = 1, 2$; mais celles-ci s'écrivent :

$$\nabla_{X_i} X_j = \sum_{k=1}^{2} \Gamma_{ij}^k X_k \qquad \text{(III.1)}$$

où Γ_{ij}^k sont des fonctions C^∞ sur U. La connaissance (localement) de ∇ revient donc à celle des fonctions Γ_{ij}^k, $i, j, k = 1, 2$ appelées *symboles de Christoffel* de la connexion ∇.

On suppose M munie d'une connexion affine ∇. Soient $\gamma : I \longrightarrow M$ une courbe différentiable et X un champ de vecteurs le long de γ. Alors :

Il existe une unique loi qui associe à X un champ de vecteurs le long de γ noté $\frac{DX}{dt}$ appelé ***dérivée covariante*** *de X le long de γ et vérifiant les proporiétés suivantes* :

i) $\frac{D}{dt}(X+Y) = \frac{DX}{dt} + \frac{DY}{dt}$,

ii) $\frac{D}{dt}(fX) = f\frac{DX}{dt} + \frac{df}{dt}X$,

iii) *si X est la restriction à l'image de γ d'un champ $\widetilde{X}$ sur M alors $\frac{DX}{dt} = \nabla_{\frac{d\gamma}{dt}}\widetilde{X}$.*

Ecriture locale explicite

On suppose que l'ouvert (U, x_1, x_2) de coordonnées locales est tel que $U \cap \gamma(I) \neq \emptyset$. On peut écrire :

$$\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t)), \quad X = \sum_{j=1}^{2} f_j X_j \text{ avec } f_j \in C^\infty(U).$$

Alors, en utilisant les propriétés énoncées de la dérivée covariante, on établit :

$$\frac{DX}{dt} = \sum_{j=1}^{2} \frac{df_j}{dt} X_j + \sum_{i,j=1}^{2} \frac{dx_i}{dt} f_j \nabla_{X_i} X_j$$

ou encore :

$$\text{(III.2)} \qquad \frac{DX}{dt} = \sum_{k=1}^{2} \left\{ \frac{df_k}{dt} + \sum_{i,j=1}^{2} f_j \frac{dx_i}{dt} \Gamma_{ij}^k \right\} X_k.$$

Soit X un champ de vecteurs le long d'une courbe γ. On dira que X est *parallèle* si sa dérivée covariante $\frac{DX}{dt}$ est identiquement nulle.

Soit $\gamma : I \longrightarrow M$ une courbe, $t_0 \in I$ et X_0 un vecteur de $T_{\gamma(t_0)}M$. Alors on peut construire un champ unique X parallèle le long de toute la courbe γ et prenant la valeur X_0 au point t_0. Un tel champ est appelé *transport parallèle* de X_0 le long de γ. Si on l'écrit sous la forme $X = \sum_{j=1}^{2} f_j X_j$, ses composantes f_j sont les solutions du système différentiel :

$$\frac{DX}{dt} = \frac{df_k}{dt} + \sum_{i,j=1}^{2} f_j \frac{dx_i}{dt} \Gamma_{ij}^k = 0 \quad k = 1, 2$$

qui sont uniques en raison de la condition initiale $(f_1(t_0), f_2(t_0)) = X_0$.

Une connexion affine ∇ sur M est dite *symétrique* si elle vérifie pour tous champs $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ la relation :

$$\text{(III.3)} \qquad \nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y].$$

Localement pour $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ on a $\nabla_{X_i} X_j - \nabla_{X_j} X_i = [X_i, Y_j] = 0$ et donc pour tous $i, j, k = 1, 2$:

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k.$$

1.2. Connexions riemanniennes

Soit (M, g) $(g = \langle\ ,\ \rangle)$ une surface riemannienne munie d'une connexion affine ∇. On dira que ∇ est *compatible* avec g si, pour tous $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, on a :

$$X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle. \tag{III.4}$$

En particulier si X, Y sont des champs de vecteurs définis le long d'une courbe γ on a :

$$\frac{d}{dt}\langle X, Y\rangle = \left\langle \frac{DX}{dt}, Y \right\rangle + \left\langle X, \frac{DY}{dt} \right\rangle.$$

On arrive à un théorème fondamental qui assure l'existence d'une connexion affine symétrique compatible avec une métrique g.

Théorème de Levi-Civita. *Soit M une surface munie d'une métrique riemannienne g qu'on notera aussi $\langle\ ,\ \rangle$. Alors, il existe sur M une unique connexion affine ∇ symétrique et compatible avec g. Elle est appelée* **connexion de Levi-Civita** *de la surface riemannienne (M, g).*

Un calcul simple montre que ∇ est définie de façon unique par l'identité :

$$\langle \nabla_Y X, Z\rangle = \frac{1}{2}\big\{X\langle Y, Z\rangle + Y\langle Z, X\rangle - Z\langle X, Y\rangle - \langle [X, Z], Y\rangle - \langle [Y, Z], X\rangle - \langle [X, Y], Z\rangle\big\}$$

Faisant $X = X_j$, $Y = X_i$ et $Z = X_k$ et $\langle X_i, X_j\rangle = g_{ij}$ on obtient :

$$\sum_{\ell=1}^{2} g_{\ell k}\Gamma_{ij}^{\ell} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij}\right).$$

D'où l'on déduit :

$$\Gamma_{ij}^{\ell} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2} g^{\ell k}\left(\frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij}\right) \tag{III.5}$$

où (g^{ij}) est l'inverse de la matrice (g_{ij}).

1.3. Géodésiques

Soit $g = \langle\ ,\ \rangle$ une métrique riemannienne sur M. Une courbe $\gamma : I \longrightarrow M$ est dite *géodésique* si $\frac{D}{dt}\left(\frac{d\gamma}{dt}\right) = 0$ identiquement. Cela se traduit par le système d'équations différentielles :

$$\frac{d^2 x_k}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^{2} \Gamma_{ij}^k \frac{dx_i}{dt}\frac{dx_j}{dt} = 0 \quad k = 1, 2 \tag{III.6}$$

où les $x_i(t)$ sont les composantes de γ dans le système de coordonnées (U, x_1, x_2).

Si γ est une géodésique, la restriction de γ à tout intervalle fermé $[t_0, t_1]$ est appelée *segment de géodésique* de $\gamma(t_0)$ à $\gamma(t_1)$. On a :

$$\frac{d}{dt}\left\langle \frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt} \right\rangle = 2\left\langle \frac{D}{dt}\left(\frac{d\gamma}{dt}\right), \frac{d\gamma}{dt} \right\rangle = 0.$$

La norme $\alpha = \left\|\frac{d\gamma}{dt}\right\|$ du vecteur $\frac{d\gamma}{dt}$ est donc constante. On en déduit alors que :

$$s(t) = \text{longueur}([\gamma(t_0), \gamma(t)]) = \int_{t_0}^{t} \left\|\frac{d\gamma}{dt}\right\| dt = \alpha(t - t_0).$$

Si $\alpha = 1$ la géodésique est dite *normalisée.* En remplaçant t par s on *paramètre* γ *par la longueur de l'arc.* Quand on peut faire cela sur tout l'intervalle $]-\infty, +\infty[$ on dira que γ est *complète.* On dira alors que la surface riemannienne (M, g) est *complète* si toute géodésique est complète.

Les géodésiques sont les courbes qui minimisent localement la distance entre les points de la variété.

2. Courbure

Une *métrique riemannienne* sur une surface permet d'y introduire un invariant fondamental appelé *courbure.* Celle-ci a pour fonction de distinguer à quel point un morceau de cette surface peut être “loin” d'un disque plan. On peut illustrer cela en constatant qu'il est impossible de coller de *façon isométrique* la pelure d'une orange sur le plan d'une table ! C'est cet invariant que nous nous proposons de définir dans ce paragraphe.

Dans toute la suite, M sera une surface munie d'une métrique riemannienne g et de sa connexion de Levi-Civita ∇ associée.

2.1. Tenseur de courbure

On appelle *courbure* de (M, g) l'application qui à tout $(X, Y) \in \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)$ associe l'application $R(X, Y) : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$ définie par :

$$R(X, Y)Z = \nabla_{[X,Y]}Z - (\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z). \tag{III.7}$$

Pour tous $X, Y, Z, T \in \mathfrak{X}(M)$, posons :

$$(X, Y, Z, T) = \langle R(X, Y)Z, T \rangle. \tag{III.8}$$

La courbure R de (M, g) vérifie les propriétés qui suivent dont la démonstration consiste en de simples calculs.

i) L'application $(X, Y) \longrightarrow R(X, Y)$ est $C^\infty(M)$-bilinéaire.
ii) Pour tous $(X, Y) \in \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)$, l'application $Z \longrightarrow R(X, Y)Z$ est $C^\infty(M)$-linéaire.
iii) $R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0$ (*identité de Bianchi*).

iv) $(X,Y,Z,T) = -(Y,X,Z,T)$ et $(X,Y,Z,T) = -(X,Y,T,Z)$.
v) $(X,Y,Z,T) = (Z,T,X,Y)$.

Ecriture locale

Comme toujours on pose $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ avec $i = 1,2$. Le champ $R(X_i, X_j)X_k$ s'écrit dans la base (X_1, X_2) :

$$R(X_i, X_j)X_k = \sum_{\ell=1}^{2} R_{ijk}^{\ell} X_\ell \tag{III.9}$$

où les R_{ijk}^{ℓ}, $i,j,k,\ell = 1,2$ sont des fonctions C^∞ sur l'ouvert de coordonnées locales (U, x_1, x_2). Elles s'expriment en fonction des symboles de Christoffell Γ_{ij}^{k}. Il suffit de voir que :

$$R(X_i, X_j)X_k = \nabla_{X_j}\nabla_{X_i}X_k - \nabla_{X_i}\nabla_{X_j}X_k$$

qui donne :

$$R_{ijk}^{s} = \sum_{\ell=1}^{2} \Gamma_{ik}^{\ell}\Gamma_{j\ell}^{s} - \sum_{\ell=1}^{2} \Gamma_{jk}^{\ell}\Gamma_{i\ell}^{s} + \frac{\partial}{\partial x_j}\Gamma_{ik}^{s} - \frac{\partial}{\partial x_i}\Gamma_{jk}^{s}. \tag{III.10}$$

De même :

$$(X_i, X_j, X_k, X_s) = R_{ijks} = \langle R(X_i, X_j)X_k, X_s\rangle = \sum_{l=1}^{2} R_{ijk}^{\ell} g_{\ell s}. \tag{III.11}$$

Les fonctions R_{ijks} vérifient les relations suivantes découlant immédiatement de celles du "crochet" $(\ , \ , \ , \ )$:

$$\begin{cases} R_{ijks} + R_{jkis} + R_{kijs} = 0 \\ R_{ijks} = -R_{jiks} \\ R_{ijks} = -R_{ijsk} \\ R_{ijks} = R_{ksij} \end{cases} \tag{III.12}$$

2.2. La courbure sectionnelle

On considère toujours une surface M munie d'une métrique riemannienne $g = \langle \ , \ \rangle$ et de la connexion de Levi-civita associée.

<u>Lemme</u>. *Soient $x \in M$ et (X,Y) une base de T_xM. Alors la quantité :*

$$\kappa(X,Y) = \frac{(X,Y,X,Y)}{||X||^2||Y||^2 - \langle X,Y\rangle^2} \tag{III.13}$$

ne dépend pas de la base (X,Y).

La démonstration est facile bien qu'elle soit un peu calculatoire. Le nombre $\kappa(X,Y)$ (où (X,Y) est une base quelconque de T_xM) sera noté $\kappa(x)$ et appelé *courbure sectionnelle* de (M,g) au point x. C'est une fonction C^∞ sur la surface M. On dira que (M,g) est à *courbure constante* si cette fonction est constante.

3. Exemples de calcul

3.1. La surface euclidienne $\mathbb{R}^2$

Les champs $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, $i = 1,2$ sont définis globalement, commutent et forment une base de l'espace tangent en chaque point $x \in \mathbb{R}^2$. On munit $\mathbb{R}^2$ de la métrique ;

$$g = dx_1 \otimes dx_1 + dx_2 \otimes dx_2$$

qui a pour matrice associée la matrice identité *i.e.* :

$$g_{ij} = \langle X_i, X_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On vérifie facilement que $\nabla_{X_i} X_j = 0$ pour tous $i,j = 1,2$. Comme, par définition, les symboles de Christoffel sont donnés par :

$$\Gamma_{ij}^\ell = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{2} g^{\ell k} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij} \right) \tag{III.13}$$

ils sont identiquement nuls. Par suite la *courbure sectionnelle est identiquement nulle.*

Les géodésiques de $\mathbb{R}^2$ sont les courbes $\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t))$ qui vérifient le système différentiel :

$$\frac{d^2 x_k}{dt^2}(t) = 0$$

et sont les droites affines $\gamma(t) = (a_1 t + b_1, a_2 t + b_2)$. Elles sont donc complètes.

3.2. La sphère $\mathbb{S}^2$

La sphère $\mathbb{S}^2$ étant plongée dans $\mathbb{R}^3$ elle hérite d'une métrique riemannienne dont l'écriture en coordonnées sphériques est :

$$g = \sin^2 \varphi d\theta \otimes d\theta + d\varphi \otimes d\varphi.$$

La matrice de g s'écrit donc :

$$g = (g_{ij}) = \begin{pmatrix} \sin^2 \varphi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad g^{-1} = (g^{ij}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sin^2 \varphi} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour adapter les calculs aux formules dont on dispose on posera $x_1 = \theta$ et $x_2 = \varphi$. Les champs $\frac{\partial}{\partial x_1}$ et $\frac{\partial}{\partial x_2}$ seront respectivement $\frac{\partial}{\partial \theta}$ et $\frac{\partial}{\partial \varphi}$. On a bien entendu $[X_1, X_2] = 0$. La formule (III.13) donne :

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 & \Gamma_{12}^1 \\ \Gamma_{21}^1 & \Gamma_{22}^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} \\ \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \Gamma^2_{11} & \Gamma^2_{12} \\ \Gamma^2_{21} & \Gamma^2_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos\varphi\sin\varphi & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculons maintenant la quantité $(X_1, X_2, X_1, X_2) = \langle R(X_1, X_2)X_1, X_2\rangle$. On a :

$$\nabla_{X_2}\nabla_{X_1}X_1 = \nabla_{X_2}(\Gamma^1_{11}X_1 + \Gamma^2_{11}X_2) = \nabla_{X_2}(-\cos\varphi\sin\varphi X_2) = -\cos(2\varphi)X_2$$

et :

$$\nabla_{X_1}\nabla_{X_2}X_1 = \nabla_{X_1}(\Gamma^1_{21}X_1 + \Gamma^2_{21}X_2) = \nabla_{X_1}\left(\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}X_1\right) = -(\cos\varphi)^2X_2.$$

Finalement :

$$R(X_1, X_2)X_1 = \nabla_{X_2}\nabla_{X_1}X_1 - \nabla_{X_1}\nabla_{X_2}X_1 = \sin^2\varphi X_2$$

et donc $(X_1, X_2, X_1, X_2) = \sin^2\varphi$. La formule donnant la courbure sectionnelle par rapport à la base (X_1, X_2) est :

$$\kappa(X_1, X_2) = \frac{(X_1, X_2, X_1, X_2)}{||X_1||^2||X_2||^2 - \langle X_1, X_2\rangle^2}$$

Comme $||X_1||^2 = \sin^2\varphi$, $||X_2|| = 1$ et X_1 et X_2 orthogonaux on obtient $\kappa(X_1, X_2) = 1$.

La sphère $\mathbb{S}^2$ munie de sa métrique standard (celle induite par la métrique euclidienne de $\mathbb{R}^3$) est une *surface riemannienne compacte orientable simplement connexe de courbure sectionnelle constante égale à* 1.

3.3. Le demi-espace $\mathbb{H}^2$

On rappelle que $\mathbb{H}^2$ est le demi-espace $\{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 > 0\}$ muni de la métrique riemannienne :

$$g = \frac{dx_1 \otimes dx_1 + dx_2 \otimes dx_2}{x_2^2}$$

dont la matrice associée est $g = (g_{ij}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{x_2^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{x_2^2} \end{pmatrix}$. On calcule les symboles de Christoffel de la même manière que précédemment :

$$(\Gamma^1_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{x_2} \\ -\frac{1}{x_2} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad (\Gamma^2_{ij}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{x_2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{x_2} \end{pmatrix}$$

Ceci nous donne :

$$\begin{aligned} \nabla_{X_2}\nabla_{X_1}X_1 &= \nabla_{X_2}(\Gamma^1_{11}X_1 + \Gamma^2_{11}X_2) \\ &= \nabla_{X_2}\left(\frac{1}{x_2}X_2\right) \\ &= \frac{1}{x_2}\nabla_{X_2}X_2 - \frac{1}{x_2^2}X_2 \\ &= \frac{1}{x_2}\left(\Gamma^1_{22}X_1 + \Gamma^2_{22}X_2\right) - \frac{1}{x_2^2}X_2 \\ &= -\frac{2}{x_2^2}X_2 \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}\nabla_{X_1}\nabla_{X_2}X_1 =&\nabla_{X_1}(\Gamma_{21}^1 X_1 + \Gamma_{21}^2 X_2)\\ =&\nabla_{X_1}\left(-\frac{1}{x_2}X_1\right)\\ =&-\frac{1}{x_2^2}X_2\end{aligned}$$

D'où :

$$R(X_1, X_2)X_1 = \nabla_{X_2}\nabla_{X_1}X_1 - \nabla_{X_1}\nabla_{X_2}X_1 = -\frac{1}{x_2^2}X_2$$

et par suite :

$$\begin{aligned}(X_1, X_2, X_1, X_2) =&\langle R(X_1, X_2)X_1, X_2\rangle\\ =&\langle -\frac{1}{x_2^2}X_2, X_2\rangle\\ =&-\frac{1}{x_2^2}\langle X_2, X_2\rangle\\ =&-\frac{1}{x_2^4}\end{aligned}$$

La courbure sectionnelle est finalement :

$$\kappa(X_1, X_2) = \frac{(X_1, X_2, X_1, X_2)}{||X_1||^2||X_2||^2 - \langle X_1, X_2\rangle^2} = -1$$

car $||X_1||^2||X_2||^2 = \left(\frac{1}{x_2^2}\right)\left(\frac{1}{x_2^2}\right)$ et $\langle X_1, X_2\rangle = 0$ (les vecteurs X_1 et X_2 étant orthogonaux).

Le demi-plan $\left(\mathbb{H}^2, \frac{dx_1^2+dx_2^2}{x_2^2}\right)$ est une *surface riemannienne orientable et simplement connexe de courbure sectionnelle constante égale à* -1.

Les surfaces $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{S}^2$ et $\mathbb{H}^2$ seront supposées munies respectivement des métriques que l'on vient de considérer.

3.4. Un théorème de classification. *Soit (M, g) une surface riemannienne complète simplement connexe de courbure sectionnelle κ constante. Alors si :*

(1) $\kappa = 0$, *M est isométrique à $\mathbb{R}^2$ (cas parabolique)* ;

(2) $\kappa = 1$, *M est isométrique à $\mathbb{S}^2$ (cas elliptique)* ;

(3) $\kappa = -1$, *M est isométrique à $\mathbb{H}^2$ (cas hyperbolique).*

CHAPITRE IV

Le demi-plan hyperbolique

Ce chapitre est consacré exclusivement au demi-plan hyperbolique $\mathbb{H}$. Nous y étudions son groupe d'isométries et ses géodésiques ainsi qu'un exemple de ses sous-groupes discrets Γ opérant proprement et librement sur $\mathbb{H}$. Les quotients $\mathbb{H}/\Gamma$ sont ainsi des surfaces riemanniennes à courbure constante égale à -1 ; on les appelle *surfaces hyperboliques.*

1. Groupe des isométries

On reprend les notations du chapitre précédent : $\mathbb{H}$ est le demi-plan $\{x+iy \in \mathbb{C} : y > 0\}$. Selon le besoin, on utilisera les coordonnées réelles (x, y) ou la coordonnée complexe $z = x + iy$.

1.1. Définition. *Soient (M, g) et (N, h) deux surfaces riemanniennes. Une application $\gamma : M \longrightarrow N$ est dite* **conforme** *s'il existe une fonction $f : M \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ telle que, pour tout point $z \in M$ (d'image $w = \gamma(z) \in N$) et tous vecteurs $u, v \in T_zM$, on ait :*

$$h(d_z\gamma(u), d_z\gamma(v)) = f(z)g(u, v). \tag{IV.1}$$

(La fonction f est appelée **facteur de conformité** *de γ.) C'est aussi équivalent à dire que γ préserve les angles orientés : l'angle (u, v) dans T_zM est égal à l'angle $(d_z(u), d_z(v))$ dans T_wN.*

Une isométrie locale directe γ est une application conforme ; son facteur de conformité est la fonction identiquement égale à 1. Si $\gamma : M \longrightarrow N$ est bijective et conforme, on dira que γ est une *équivalence conforme* entre M et N ; une équivalence conforme de (M, g) sur elle-même est appelée *transformation conforme* de (M, g). L'ensemble des transformations conformes de (M, g) est un groupe qu'on note $\mathrm{Conf}(M, g)$ et qu'on appelle *groupe conforme* de la surface riemannienne (M, g). Bien sûr $\mathrm{Isom}(M, g) \subset \mathrm{Conf}(M, g)$.

1.2. Quelques rappels

On se situe dans le plan $\mathbb{R}^2$ qu'on identifie au plan complexe par $(x, y) \longmapsto z = x+iy$. Le produit scalaire usuel $((x, y), (x', y')) = xx' + yy'$ sur $\mathbb{R}^2$ n'est rien d'autre que la partie réelle du produit hermitien $(z, w) = z\overline{w}$ sur $\mathbb{C}$. L'orientation sur $\mathbb{R}^2$ est celle donnée par sa base canonique $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$ qu'on suppose directe.

• *Une application linéaire $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ non nulle qui conserve les angles (orientés ou pas) est une similitude, c'est-à-dire :*

- *le produit d'une rotation et d'une homothétie de même centre si la transformation φ préserve les angles orientés ;*
- *le produit d'une réflexion, d'une rotation et d'une homothétie de même centre si φ ne préserve pas les angles orientés.*

Preuve. Quitte à remplacer φ par $\varphi \circ s$ où s est la réflexion d'axe celui des abscisses, on peut supposer que φ préserve l'orientation.

Soit r la rotation qui amène le vecteur $\varphi(e_1)$ sur $\tau_1 e_1$ avec $\tau_1 > 0$. Posons $\psi = r \circ \varphi$. Comme ψ préserve les angles orientés et qu'elle fixe la direction et le sens de e_1, l'image de e_2 par ψ est un vecteur du type $\tau_2 e_2$. Ce qui nous donne $\psi(e_1+e_2) = \tau_1 e_1 + \tau_2 e_2$. Comme, encore une fois ψ préserve les angles orientés et fixe la direction et le sens de e_1, $\psi(e_1+e_2)$ est de la forme $\tau(e_1+e_2)$, ce qui impose $\tau_1 = \tau_2 = \tau$. Donc $r \circ \varphi$ est l'homothétie centrée à l'origine et de rapport τ ; par suite, φ est la similitude directe centrée à l'origine et de rapport τ et d'angle $\theta = (e_1, \varphi(e_1))$. $\diamondsuit$

En coordonnées complexes, une similitude $\varphi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ s'écrit $\varphi(z) = \lambda z$ si elle conseve l'orientation et $\varphi(z) = \lambda \overline{z}$ sinon (avec $\lambda \in \mathbb{C}^*$).

• *Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{C}$. Une application $f : U \longrightarrow V$ est conforme si, et seulement si, f est holomorphe et vérifie $f'(z) \neq 0$ pour tout $z \in U$.*

Preuve. L'implication (f conforme $\Longrightarrow$ f holomorphe et $f'(z) \neq 0$) résulte de ce qu'on vient de voir précédemment. L'implication réciproque est une conséquence du fait que les conditions de Cauchy-Riemann disent exactement que la différentielle $\varphi = d_z f$ de f est une similitude. Nous laissons le soin au lecteur de mettre tout cela en forme. $\diamondsuit$

1.3. Lemme de Schwarz. *Soit $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorphe sur le disque unité ouvert $\mathbb{D}$ et telle que $|f| < 1$ et $f(0) = 0$. Alors $|f(z)| \leq |z|$ et $|f'(0)| \leq 1$. Si $|f(a)| = |a|$ pour un certain $a \neq 0$ ou si $|f'(0)| = 1$, alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $f(z) = e^{i\theta} z$.*

Démonstration. On applique le principe du maximum à la fonction $h(z) = \frac{f(z)}{z}$ pour $z \neq 0$ et $h(0) = f'(0)$: sur tout cercle γ_r centré en 0 et de rayon $0 < r < 1$, le module de la fonction h est $\leq \frac{1}{r}$ et donc $|h(z)| \leq \frac{1}{r}$ pour $|z| \leq r$. On fait tendre r vers 1 et on obtient $|h(z)| \leq 1$, c'est-à-dire $|f(z)| \leq |z|$ pour tout z. Si l'égalité $|f(z)| = |z|$ est atteinte en un point $a \in \mathbb{D}$ ou si $|f'(0)| = 1$, $|h|$ atteint son maximum sur l'ouvert $\mathbb{D}$ et donc h est constante ; par suite il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $h(z) = e^{i\theta}$ *i.e.* $f(z) = e^{i\theta} z$. $\diamondsuit$

Ce lemme est utilisé de manière substantielle dans la détermination explicite des transformations conformes du disque unité ouvert $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. C'est ce que nous allons voir tout de suite.

Pour tout ouvert U de $\mathbb{C}$, on note $\mathrm{Aut}(U)$ le groupe des biholomorphismes (des automorphismes ou des transformations conformes) de U.

1.4. Théorème. *Toute transformation conforme (ou tout biholomorphisme) du disque unité ouvert $\mathbb{D}$ est de la forme $f(z) = e^{i\theta} \frac{z-p}{\overline{p}z-1}$ où θ est un réel et $p \in \mathbb{D}$. De manière équivalente, on peut aussi écrire f sous la forme $\frac{\alpha z+\overline{\beta}}{\beta z+\overline{\alpha}}$ avec $|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1$.*

Démonstration. D'abord, toute transformation $f(z) = e^{i\theta} \frac{z-p}{\overline{p}z-1}$ où θ est un réel et $p \in \mathbb{D}$ est un biholomorphisme (transformation conforme) de $\mathbb{D}$. En effet, comme la multiplication par $e^{i\theta}$ est une isométrie euclidienne, ceci va découler du lemme qui suit.

On note $\overline{\mathbb{D}}$ le disque unité fermé $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ dont le bord est le cercle unité $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Soit $p \in \mathbb{D}$ et posons $\omega = \frac{1}{\overline{p}}$; il est clair que $|\omega| > 1$ et donc $\omega \notin \overline{\mathbb{D}}$. Pour tout $z \in \Omega = \mathbb{C} \setminus \{\omega\}$, posons $\varphi(z) = \frac{z-p}{\overline{p}z-1}$.

Lemme. *L'application φ est un automorphisme de Ω et sa restriction au disque unité ouvert $\mathbb{D}$ est un automorphisme de celui-ci.*

Preuve du lemme. Le fait que φ soit un automorphisme de Ω est immédiat : φ est une bijection de l'ouvert Ω sur lui-même d'inverse $\varphi^{-1}(w) = \frac{w-p}{\overline{p}w-1} = \varphi(w)$!

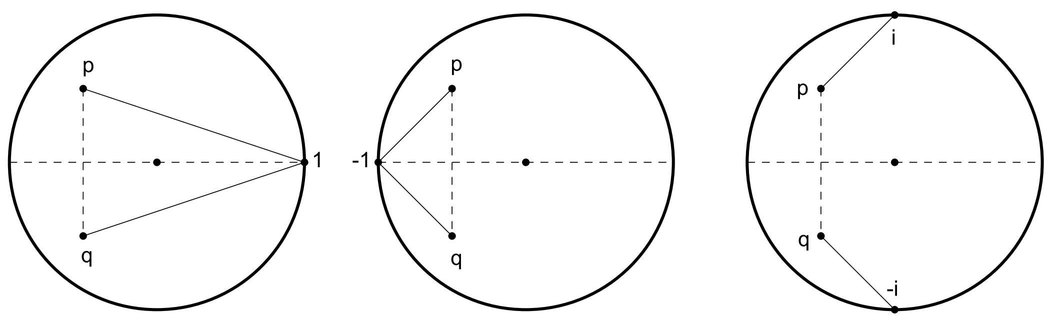
Pour voir que φ induit un automorphisme de $\mathbb{D}$, il suffit de montrer que l'image $\varphi(\mathbb{D})$ de $\mathbb{D}$ par φ est contenue dans $\mathbb{D}$. On peut écrire φ sous la forme :

$$\varphi(z) = \frac{1}{\overline{p}} + \frac{\frac{1-p\overline{p}}{\overline{p}^2}}{z - \frac{1}{\overline{p}}}.$$

Ceci montre alors que φ est la composée de l'inversion de puissance 1 et de pôle ω, de la symétrie d'axe l'axe des abscisses, d'une similitude et d'une translation. Elle transforme donc tout cercle qui ne passe pas par ω en un cercle. Montrons qu'elle laisse le cercle unité Γ globalement invariant. Il suffit à cet effet de montrer que les images de trois points distincts de Γ sont encore sur Γ. (Ce qui suit se justifie en regardant juste les trois dessins.) On a $\varphi(1) = \frac{1-p}{\overline{p}-1}$ qui est de module 1 ; de même $\varphi(-1) = \frac{-1-p}{-1-\overline{p}}$ qui est aussi de module 1. Calculons le module de $\varphi(i) = \frac{i-p}{\overline{p}i-1}$; on a :

$$\left|\frac{i-p}{\overline{p}i-1}\right| = \frac{|i-p|}{|\overline{p}i-1|} = \frac{|i-p|}{|-i(-i-\overline{p})|} = \frac{|i-p|}{|(-i-\overline{p})|} = 1.$$

Comme φ est un homéomorphisme de Ω sur lui-même laissant Γ globalement invariant, il envoie composante connexe de $\Omega\setminus\Gamma$ ($\mathbb{D}$ en est une) sur composante connexe de $\Omega\setminus\Gamma$. Mais $p \in \mathbb{D}$ et $\varphi(p) = 0$ qui appartient encore à $\mathbb{D}$; donc l'image de $\mathbb{D}$ est $\mathbb{D}$. Ce qui termine la démonstration. $\diamondsuit$



q est le conjugué de p

Soit maintenant f un biholomorphisme de $\mathbb{D}$. Posons $z_0 = f(0)$, $h(z) = \frac{z-z_0}{(\overline{z}_0)z-1}$ et $g = h \circ f$. Alors g est une transformation conforme de $\mathbb{D}$ qui vérifie $g(0) = 0$. D'après le lemme de Schwarz, on a $|g(z)| \leq |z|$ pour tout $z \in \mathbb{D}$. Mais comme g^{-1} est aussi une transformation conforme de $\mathbb{D}$ qui vérifie $g^{-1}(0) = 0$, on a $|g^{-1}(z)| \leq |z|$ pour tout $z \in \mathbb{D}$. On en déduit donc que :

$$|g(z)| = |z| \quad \text{pour tout } z \in \mathbb{D}.$$

La fonction $\frac{g(z)}{z}$ est holomorphe et son module $\left|\frac{g(z)}{z}\right|$ est constant égal à 1 ; elle est donc égale à une constante λ de module 1. D'où $f(z) = h^{-1}(g(z)) = h^{-1}(\lambda z) = \lambda\frac{z-\overline{\lambda}z_0}{(\lambda\overline{z}_0)z-1}$. En posant $p = \overline{\lambda}z_0$ et $\lambda = e^{i\theta}$ on peut écrire :

$$f(z) = e^{i\theta}\frac{z-p}{\overline{p}z-1}.$$

C'est l'expression cherchée. Maintenant on peut remarquer que :

$$f(z) = e^{i\theta}\frac{z-p}{\overline{p}z-1} = \frac{e^{i\theta/2}\cdot z - e^{i\theta/2}\cdot p}{\overline{p}e^{-i\theta/2}\cdot z - e^{-i\theta/2}} = \frac{\alpha z+\overline{\beta}}{\beta z+\overline{\alpha}}$$

avec $\alpha = i\frac{e^{i\theta/2}}{\sqrt{1-p\overline{p}}}$ et $\beta = i\frac{\overline{p}e^{-i\theta/2}}{\sqrt{1-p\overline{p}}}$. Ceci termine la démonstration du théorème. $\diamondsuit$

1.5. Corollaire. *Toute transformation conforme (ou tout biholomorphisme) du demi-plan ouvert $\mathbb{H} = \{x+iy \in \mathbb{C} : y > 0\}$ est de la forme $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ où a, b, c, d sont des réels tels que $ad - bc = 1$.*

Démonstration. On peut montrer assez facilement que la transformation homographique $\phi(z) = \frac{z-i}{z+i}$ est un biholomorphisme de $\mathbb{H}$ sur $\mathbb{D}$. On a donc une application :

$$\zeta : \mathrm{Aut}(\mathbb{D}) \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathbb{H})$$

définie par $\zeta(f) = \phi^{-1}\circ f\circ\phi$. On vérifie immédiatement que ζ est un isomorphisme de groupes. Par conséquent, toute transformation conforme h de $\mathbb{H}$ est du type $h = \phi^{-1}\circ f\circ\phi$ avec $f(z) = \frac{\alpha z+\overline{\beta}}{\beta z+\overline{\alpha}}$, α et β vérifiant $|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1$. Un calcul un peu long donne :

$$h(z) = \frac{(\Re(\alpha)+\Re(\beta))z + (\Im(\alpha)+\Im(\beta))}{(\Im(\beta)-\Im(\alpha))z + (\Re(\alpha)-\Re(\beta))}.$$

(Ici $\Re(w)$ et $\Im(w)$ désignent respectivement la partie réelle et la partie imaginaire du nombre complexe w.) On pose $a = \Re(\alpha)+\Re(\beta)$, $b = \Im(\alpha)+\Im(\beta)$, $c = \Im(\beta)-\Im(\alpha)$ et $d = \Re(\alpha)-\Re(\beta)$. Clairement, a, b, c, d sont des réels et le lecteur peut vérifier que $ad - bc = \alpha\overline{\alpha} - \beta\overline{\beta} = 1$. $\diamondsuit$

Nous allons exploiter tout le matériel que nous venons d'introduire pour déterminer explicitement le groupe des isométries du demi-plan hyperbolique $\mathbb{H}$.

1.6. Théorème. *Toute isométrie du demi-plan ouvert $\mathbb{H} = \{x+iy \in \mathbb{C} : y > 0\}$ est de la forme $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ ou $f(z) = \frac{-a\overline{z}+b}{-c\overline{z}+d}$ avec a, b, c, d réels tels que $ad - bc = 1$.*

Démonstration. Une isométrie qui préserve l'orientation est une transformation conforme. Elle est donc de la forme $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ où a, b, c, d sont des réels tels que $ad - bc = 1$. (*cf.* Corollaire 1.5). Si elle ne préserve pas l'orientation, elle est du type $f(z) = \frac{-a\overline{z}+b}{-c\overline{z}+d}$ où a, b, c, d sont aussi des réels tels que $ad - bc = 1$.

Reste à montrer qu'une transformation de la forme $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ ou $f(z) = \frac{-a\overline{z}+b}{-c\overline{z}+d}$ avec a, b, c, d réels tels que $ad - bc = 1$ est une isométrie de $\mathbb{H}$. On traitera seulement la première forme ; le cas de la seconde s'en déduit immédiatement.

Comme on l'a déjà fait remarquer, la métrique hyperbolique peut aussi s'écrire en la coordonnée complexe z sous la forme :

$$\langle\ ,\ \rangle_z = -\frac{4dz \otimes d\overline{z}}{(z - \overline{z})^2}.$$

Dire que f est une isométrie, c'est dire qu'elle préserve cette métrique. Ceci signifie de façon concrète que, pour tout $z \in \mathbb{H}$, on a :

$$\langle\ ,\ \rangle_{f(z)} = -\frac{4d\left(f(z)\right) \otimes d\overline{f(z)}}{\left(f(z) - \overline{f(z)}\right)^2} = -\frac{4dz \otimes d\overline{z}}{(z - \overline{z})^2} = \langle\ ,\ \rangle_z.$$

(i) La métrique $\langle\ ,\ \rangle_z$ est invariante par toute translation $z \longmapsto z + b$ (avec b réel) car :

$$-\frac{4d(z+b) \otimes d\left(\overline{z+b}\right)}{\left((z+b) - (\overline{z+b})\right)^2} = -\frac{4dz \otimes d\overline{z}}{(z - \overline{z})^2} = \langle\ ,\ \rangle_z.$$

(ii) Elle est invariante par l'application $z \longmapsto -\frac{1}{z}$ car :

$$-\frac{4d\left(-\frac{1}{z}\right) \otimes d\left(\overline{-\frac{1}{z}}\right)}{\left(-\frac{1}{z} - \overline{\left(-\frac{1}{z}\right)}\right)^2} = -4\frac{\left(\frac{1}{z^2}\right)dz \otimes \left(\frac{1}{\overline{z}^2}\right)d\overline{z}}{\frac{(z-\overline{z})^2}{(z\overline{z})^2}} = -\frac{4dz \otimes d\overline{z}}{(z - \overline{z})^2} = \langle\ ,\ \rangle_z.$$

(iii) Et finalement, il est immédiat de voir qu'elle est aussi invariante par toute homothétie $z \longmapsto az$ avec $a \in \mathbb{R}_+^*$.

Considérons la transformation $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$. Si $c = 0$, $ad = 1$ et par suite $\frac{a}{d} > 0$; donc f est de la forme $f(z) = \alpha z + \beta$ avec $\alpha = \frac{a}{d} > 0$. Par suite f est une isométrie en vertu des points (i) et (iii). Si $c \neq 0$, on peut écrire f sous la forme :

$$f(z) = \frac{a}{c} - \frac{1}{c^2 z + cd}.$$

Par suite f laisse invariante la métrique $\langle\ ,\ \rangle$ en vertu des points (i), (ii) et (iii). La transformation f est finalement une isométrie de $\mathbb{H}$. $\diamondsuit$

2. Géodésiques du demi-plan hyperbolique $\mathbb{H}$.

On rappelle qu'une courbe $\gamma : I \longrightarrow M$ (I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$) C^1 par morceaux tracée sur une surface riemannienne (M, g) est une géodésique si elle minimise localement la distance entre les points : le plus court chemin pour aller du point $\gamma(t_0)$ au point

$\gamma(t)$ ($t_0, t \in I$ proches) est $\gamma([t_0, t])$. Nous allons décrire explicitement les géodésiques du demi-plan hyperbolique $\mathbb{H}$. Mais avant commençons par une :

2.1. Remarque. *Soit $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{H}$ une géodésique. Alors son image $f \circ \gamma : I \longrightarrow \mathbb{H}$ par toute isométrie f de $\mathbb{H}$ est une géodésique.*

Cette remarque est valable dans toute surface riemannienne (M, g). Plus même : tout ce qui est défini à partir de la métrique (connexion riemannienne, courbure, géodésique...) se "conserve" par le groupe $\mathrm{Isom}(M, g)$ des isométries de (M, g).

2.2. Proposition. *Soient p_0 et p_1 deux points du demi-plan $\mathbb{H}$ ayant même abscisse x_0 et d'ordonnées respectives y_0 et y_1. Alors la portion de la droite (p_0p_1) contenue dans $\mathbb{H}$ est une géodésique complète.*

Démonstration. Soit $\gamma : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{H}$ une courbe de classe C^1 telle que $\gamma(0) = p_0$ et $\gamma(1) = p_1$ s'écrivant $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$. On a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{longueur}(\gamma([0,1])) &= \int_0^1 \frac{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}{y(t)} dt \\
&\geq \int_0^1 \frac{|y'(t)|}{y(t)} dt \\
&\geq \left| \int_0^1 \frac{y'(t)}{y(t)} dt \right| \\
&= |\mathrm{Log}(y_1) - \mathrm{Log}(y_0)|.
\end{aligned}$$

La quantité $|\mathrm{Log}(y_1) - \mathrm{Log}(y_0)|$ n'est rien d'autre que la longueur hyperbolique du segment $[p_0p_1]$. Si la courbe γ est une géodésique, l'égalité :

$$\mathrm{longueur}(\gamma([0,1])) = |\mathrm{Log}(y_1) - \mathrm{Log}(y_0)|$$

doit avoir lieu, sinon la courbe $\tau(t) = x_0 + iy(t)$ avec $t \in [0, 1]$ (qui joint aussi p_0 à p_1) sera aussi de plus courte longueur. Toute demi-droite ouverte contenue dans $\mathbb{H}$ commençant en un point sur l'axe réel et perpendiculaire à celui-ci est une géodésique complète : en effet, elle est paramétrée sur tout l'intervalle $]-\infty, +\infty[$ par $\gamma(t) = x_0 + ie^t$. ♢

2.3. Proposition. *Soient p_0 et p_1 deux points de $\mathbb{H}$ ayant des abscisses respectives x_0 et x_1 avec $x_0 \neq x_1$. Alors le demi-cercle contenu dans $\mathbb{H}$, centré sur l'axe réel et passant par les points p_0 et p_1 est une géodésique complète.*

Démonstration. Comme les points p_0 et p_1 n'ont pas la même abscisse, la médiatrice du segment $[p_0p_1]$ coupe l'axe réel en un point ω. Le demi-cercle $\mathcal{C}$ de centre ω et passant par p_0 (et donc aussi par p_1) coupe l'axe réel en deux points Ω et H (*cf.* Fig. IV.1). Notons ρ le rayon de $\mathcal{C}$ (on a $0 < \rho = \omega\Omega = \omega H = \omega p_0 = \omega p_1$) et posons $\kappa = 4\rho^2$. L'inversion $\mathcal{I}$ de pôle Ω et de puissance κ s'écrit :

$$\mathcal{I}(z) = \frac{\kappa}{\overline{z} - a} + a = \frac{(-0)\overline{z} + \sqrt{\kappa}}{-\left(-\frac{1}{\sqrt{\kappa}}\right)\overline{z} + \left(-\frac{a}{\sqrt{\kappa}}\right)} + a$$

(où a est l'abscisse de Ω, qui est aussi son affixe). Cette inversion envoie le demi-cercle $\mathcal{C}$ sur la demi-droite Δ_+ (contenue dans $\mathbb{H}$) issue du point H et orthogonale à l'axe réel. Si $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{H}$ est une courbe géodésique telle que $\gamma(0) = p_0$ et $\gamma(1) = p_1$, sa transformée $\mathcal{I} \circ \gamma$ par l'isométrie $\mathcal{I}$ est aussi une géodésique, donc sera contenue dans Δ_+ ; par suite γ est forcément contenue dans $\mathcal{C}$. On en conclut que la géodésqiue complète passant par p_0 et p_1 est l'image inverse par $\mathcal{I}$ de la demi-droite Δ_+, c'est-à-dire le demi-cercle $\mathcal{C}$. $\diamondsuit$

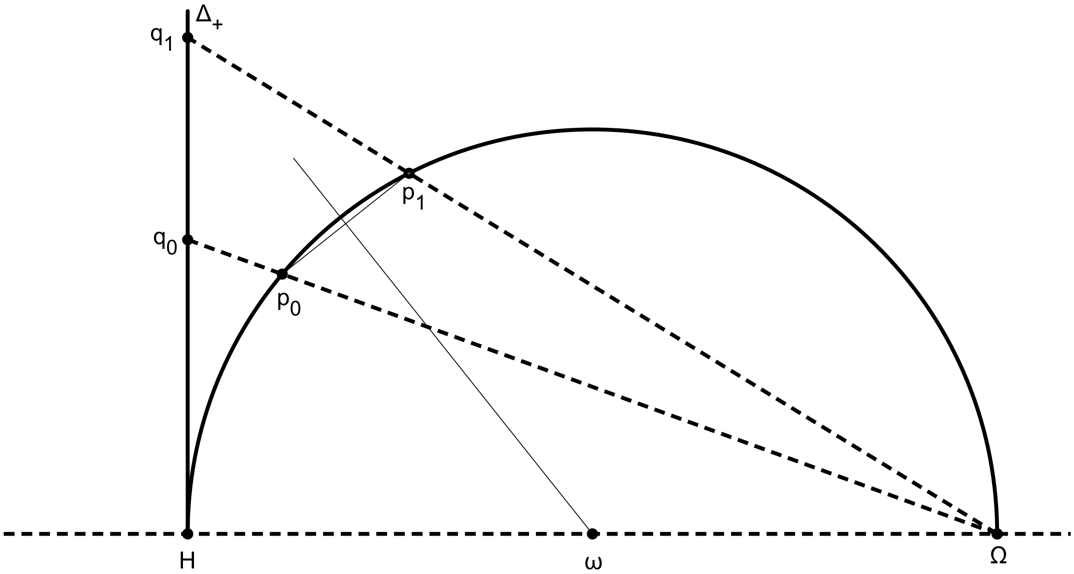


Fig. IV.1

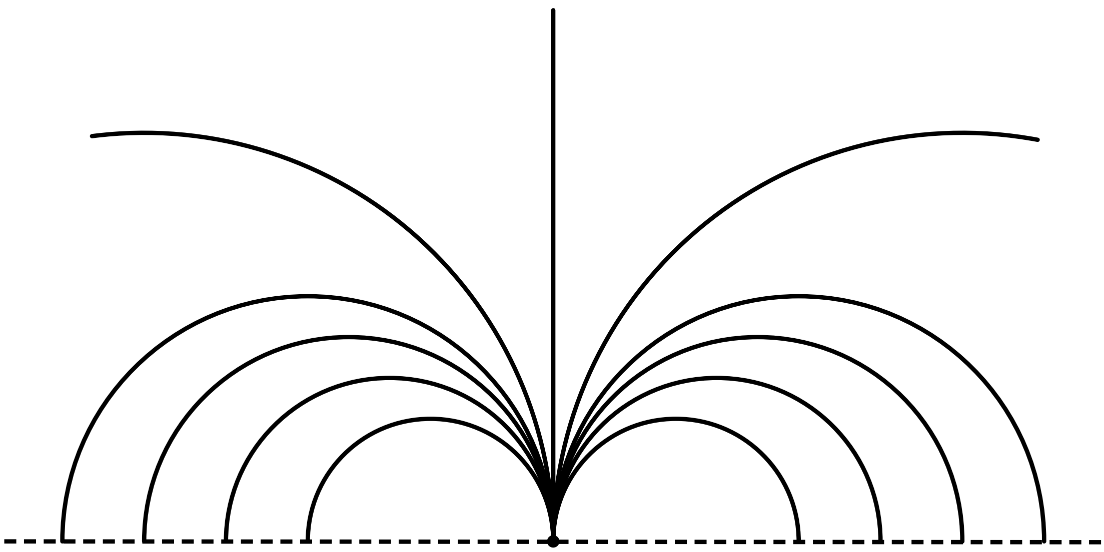


Fig. IV.2

3. Surfaces hyperboliques

L'objet de cette section est d'en donner la définition et un exemple de surface compacte obtenue comme quotient de $\mathbb{H}$ par l'action d'un groupe d'isométries.

3.1. SL(2,R) et son action sur $\mathbb{H}$

On note $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ le groupe des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels et de déterminant égal à 1. C'est une partie de $\mathbb{R}^4$ donnée par l'injection naturelle :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \hookrightarrow (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4;$$

elle hérite donc d'une structure d'espace topologique. Comme l'application :

$$(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \longrightarrow ad - bc \in \mathbb{R}$$

est continue, $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ est un fermé de $\mathbb{R}^4$, donc un espace localement compact. En plus les applications naturelles :

$$(M,N) \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \times \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \longrightarrow MN \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$$

et :

$$M \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \longrightarrow M^{-1} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$$

sont indéfiniment différentiables (et même analytiques réelles). On dira que $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ est un *groupe de Lie*.

On appelle *transformation homographique* toute transformation $\gamma : z \longrightarrow \frac{az+b}{cz+d}$ où $a,b,c,d \in \mathbb{C}$ et tels que $ad - bc \neq 0$; elle est définie bien entendu pour $z \neq -\frac{d}{c}$. Une telle transformation est donc associée à la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Un calcul facile montre que si $a,b,c,d \in \mathbb{R}$, on a :

$$\mathrm{Im}(\gamma(z)) = \frac{\mathrm{Im} z}{|cz+d|^2}$$

et donc γ préserve $\mathbb{H}$ et est définie partout sur $\mathbb{H}$. On vérifie qu'au produit de deux matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ correspond la composition $\gamma\gamma'$. Comme les matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix}$ définissent la même transformation, la condition $ad - bc \neq 0$ (qui assure la bijectivité de γ) peut être remplacée par $ad - bc = 1$. Ainsi le groupe $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ agit sur $\mathbb{H}$. Cette action est *holomorphe* et *isométrique i.e.* la transformation γ associée à une matrice de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ est biholomorphe et est une isométrie. Notons $\mathrm{Aut}(\mathbb{H})$ le groupe des transformations biholomorphes de $\mathbb{H}$. On a donc un morphisme de groupes :

$$\rho : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \longrightarrow \gamma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{H})$$

où γ est la transformation $z \longrightarrow \frac{az+b}{cz+d}$. Le noyau de ρ est constitué des matrices I et $-I$ et induit donc un homomorphisme injectif :

$$\rho : \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) = \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})/\{I, -I\} \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathbb{H}).$$

Nous travaillerons toujours sur $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ que nous confondrons (modulo le sous-groupe $\{I, -I\}$) avec $\mathrm{Aut}(\mathbb{H})$ et dont on notera un élément indifféremment γ ou $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

3.2. Proposition. *L'action de* $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ *sur* $\mathbb{H}$ *est transitive i.e. pour tous* $z, z' \in \mathbb{H}$ *il existe un élément* $\phi = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ *tel que* $z = \phi(z')$. *En d'autres termes cette action n'a qu'une seule orbite.*

Démonstration. Écrivons $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$. Un calcul immédiat permet de vérifier que les éléments :

$$\gamma = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{y}} & -\frac{x}{\sqrt{y}} \\ 0 & \sqrt{y} \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \gamma' = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{y'}} & -\frac{x'}{\sqrt{y'}} \\ 0 & \sqrt{y'} \end{pmatrix}$$

transforment z et z' en le point i : $\gamma(z) = i$ et $\gamma'(z') = i$. Par suite, l'élément $\phi = \gamma^{-1} \circ \gamma'$ tranforme z' en z. $\diamondsuit$

Nous allons terminer par la notion de surface hyperbolique. Elle sera donnée de façon très sommaire car faire les choses en détail nécessite un peu plus de matériel.

Un sous-groupe discret de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ *est une partie* Γ *de* $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ *qui est à la fois discrète (son intersection avec tout compact est finie) et un sous-groupe.*

3.3. Théorème [Fr]. *Soit* Γ *un sous-groupe discret de* $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$. *On considère son action naturelle sur* $\mathbb{H}$, *celle induite par* $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ *en tant que groupe d'isométries du demi-plan hyperbolique. Alors* :

i) Γ *agit proprement sur* $\mathbb{H}$, *c'est-à-dire, pour tout compact* K *du demi-plan* $\mathbb{H}$, *l'ensemble* $\{\gamma \in \Gamma : \gamma(K) \cap K \neq \emptyset\}$ *est fini.*

ii) *Si en plus* Γ *agit librement i.e. le groupe d'isotropie* Γ_x *de tout point* x *est trivial, le quotient* $M = \mathbb{H}/\Gamma$ *est une surface orientable. La métrique hyperbolique sur* $\mathbb{H}$ *induit sur* M *une métrique riemannienne dont la courbure sectionnelle est égale à* -1.

Les surfaces de la forme $M = \mathbb{H}/\Gamma$ sont appelées *surfaces hyperboliques.* On démontre (loin d'être trivial) que toute surface riemannienne orientable à courbure constante égale à -1 est de ce type. Pour en construire, il faut donc trouver des sous-groupes discrets de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ qui agissent librement sur $\mathbb{H}$. Nous allons nous restreindre au cas des surfaces compactes. On a le :

3.4. Théorème de Poincaré [Ve]. *Soit* Δ_g *un polygone ayant* $4g$ *côtés (des segments de géodésiques)* $a_1, a'_1, b_1, b'_1 \cdots, a_g, a'_g, b_g, g'_1$. *On suppose que tous les sommets de* Δ_g *sont dans* $\mathbb{H}$, *pour tout* $\ell \in \{1, \cdots, g\}$, *les côtés* a_ℓ *et* b_ℓ *sont isométriques respectivement aux côtés* a'_ℓ *et* b'_ℓ *et qu'une orientation est donnée sur chacun des côtés de telle sorte qu'un* *parcours sans recul sur le bord soit dans le sens* $a_1 b_1 {a'_1}^{-1} {b'_1}^{-1} \cdots a_g b_g {a'_g}^{-1} {b'_g}^{-1}$ *(on peut voir cela sur la* Fig. IV.3 *qui illustre le cas* $g = 2$). *Alors :*

i) *Pour tout* $\ell \in \{1, \cdots, g\}$*, il existe des isométries* γ_ℓ *et* σ_ℓ *de* $\mathbb{H}$ *préservant l'orientation et telles que* $\gamma_\ell(a_\ell) = a'_\ell$ *et* $\sigma_\ell(b_\ell) = b'_\ell$.

ii) *Les isométries* $\gamma_1, \sigma_1, \cdots, \gamma_g, \sigma_g$ *engendrent un sous-groupe discret* Γ_g *de* $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ *agissant librement et proprement sur* $\mathbb{H}$ *et ayant* Δ_g *comme domaine fondamental. Le groupe* Γ_g *a une présentation :*

$$\Gamma_g = \left\langle \gamma_1, \sigma_1, \cdots, \gamma_g, \sigma_g \;\middle|\; \gamma_1 \sigma_1 {\gamma_1}^{-1} {\sigma_1}^{-1} \cdots \gamma_g \sigma_g {\gamma_g}^{-1} {\sigma_g}^{-1} \right\rangle.$$

iii) *Le quotient* $M_g = \mathbb{H}/\Gamma_g$ *est une surface hyperbolique compacte orientable de genre* g *(voir* Fig. IV.4 *pour les cas* $g = 2$*).*

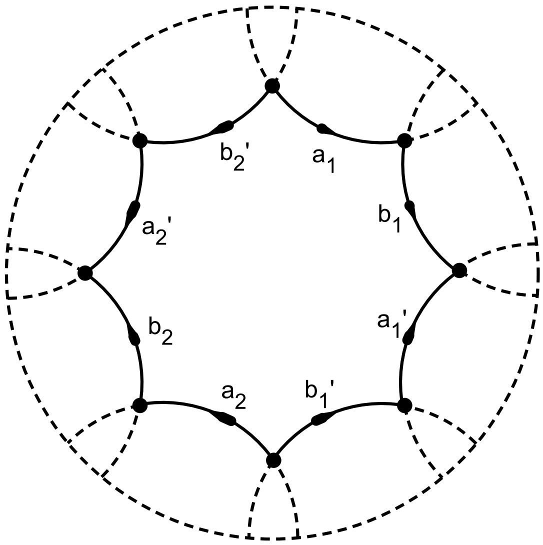


Fig. IV.3

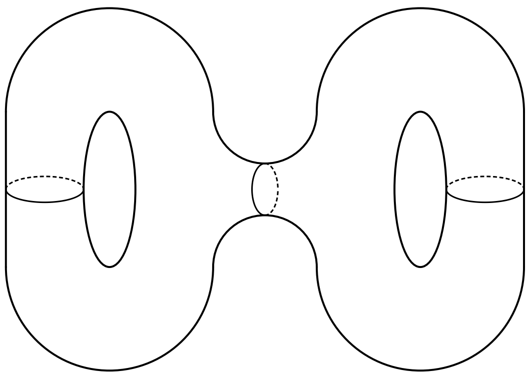


Fig. IV.4

EXERCICES

Exercice 1

Soit $n \geq 0$ un entier. Sur $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ on considère la relation d'équivalence $x \sim y$ si, et seulement si, il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $y = \lambda x$. Le quotient $P^n(\mathbb{R}) = (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})/\sim$ est l'*espace projectif réel* de dimension n. C'est l'ensemble des droites vectorielles (privées de l'origine) de l'espace $\mathbb{R}^{n+1}$. Un point x de $P^n(\mathbb{R})$ est représenté par un vecteur non nul de $\mathbb{R}^{n+1}$; les coordonnées $(x_1, \cdots, x_{n+1})$ de ce vecteur donnent donc x ; mais, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$, $(\lambda x_1, \cdots, \lambda x_{n+1})$ donnent aussi x ! Ces coordonnées ne sont donc définies qu'à un facteur multiplicatif près ; on les note $[x_1, \cdots, x_{n+1}]$ et on les appelle *coordonnées homogènes* de x. On note π la projection canonique $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow P^n(\mathbb{R})$. On munit $P^n(\mathbb{R})$ de la *topologie quotient*, c'est-à-dire la topologie $\mathcal{T}$ la plus fine parmi toutes celles qui rendent continue la projection π.

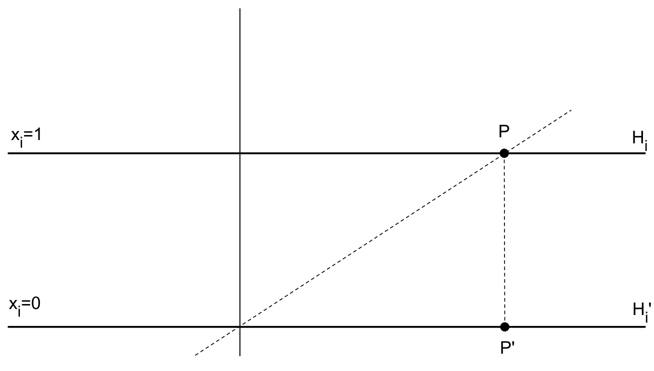
Pour $i = 1, 2, 3$, on pose $\widetilde{U}_i = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_i \neq 0\}$ et $U_i = \pi(\widetilde{U}_i)$.

1 - Dire pourquoi les U_i forment un recouvrement ouvert de $P^2(\mathbb{R})$ pour $\mathcal{T}$.

On considère les applications $\varphi_i : \mathbb{R}^2 \longrightarrow U_i$ définies par :

$$\begin{cases} \varphi_1(u, v) = [1, u, v] \\ \varphi_2(u, v) = [u, 1, v] \\ \varphi_3(u, v) = [u, v, 1]. \end{cases}$$

2 - Montrer que le recouvrement ouvert $\{U_i\}$ et les applications φ_i forment un atlas définissant une structure de surface différentiable sur $P^2(\mathbb{R})$. (*Un examen attentif du dessin ci-dessous permet de voir quel choix de représentants il faut faire pour avoir les φ_i^{-1}.*)



H_i et H_i' sont les plans d'équations
respectives $x_i = 1$ et $x_i = 0$

Exercice 2

On identifie $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$ par l'isomorphisme (d'espaces vectoriels réels) :

$$(x,y) \in \mathbb{R}^2 \overset{\simeq}{\longmapsto} x + iy = z \in \mathbb{C}.$$

Soient $\lambda, \alpha \in]0,1[$ et $a = \lambda e^{2i\pi\alpha}$. On note r la rotation d'angle $2\pi\alpha$ et h l'homothétie complexe $h(z) = az$.

1 - La représentation $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathrm{Diff}(\mathbb{C}^*)$ (groupe des difféomorphismes de $\mathbb{C}^*$) qui envoie le générateur 1 sur la rotation r définit une action Φ de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{C}^*$. Pour quelles valeurs de α l'action Φ est-elle fidèle ? libre ? propre ?

2 - La représentation $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathrm{Diff}(\mathbb{C}^*)$ qui envoie cette fois-ci le générateur 1 sur l'homothétie h définit une autre action Ψ de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{C}^*$.

i) Montrer que l'action Ψ est libre et propre et en donner un domaine fondamental.

ii) Quelle est la surface quotient $M = \mathbb{C}^*/\Psi$?

Exercice 3

Soient M et N deux surfaces différentiables et Γ un groupe dénombrable (discret). On se donne deux actions de Γ :

$$\Phi : \Gamma \times M \longrightarrow M \quad \text{et} \quad \Psi : \Gamma \times N \longrightarrow N.$$

On dira que Φ et Ψ sont *conjuguées* s'il existe un difféomorphisme $h : M \longrightarrow N$ tel que, pour tout $\gamma \in \Gamma$ et tout $x \in M$ on ait :

$$h(\Phi(\gamma, x)) = \Psi(\gamma, h(x)).$$

Au niveau des représentations $\rho : \Gamma \longrightarrow \mathrm{Diff}(M)$ et $\sigma : \Gamma \longrightarrow \mathrm{Diff}(N)$, ceci signifie que, pour tout $\gamma \in \Gamma$, on a :

$$\sigma(\gamma) = h \circ \rho(\gamma) \circ h^{-1}.$$

1 - On suppose que les actions Φ et Ψ sont libres et propres et conjuguées par un difféomorphisme $h : M \longrightarrow N$.

Montrer que h induit un difféomorphisme $\overline{h}$ entre les surfaces M/Φ et N/Ψ (obtenues en prenant les quotients de M et N respectivement par les actions Φ et Ψ).

2 - On définit une action Φ du groupe cyclique $\Gamma = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{\overline{0}, \overline{1}\}$ sur la sphère unité (de $\mathbb{R}^3$ muni de la norme euclidienne usuelle) $\mathbb{S}^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : ||x|| = 1\}$ par :

$$\Phi(\gamma, x) = \begin{cases} x & \text{si } \gamma = \overline{0} \\ -x & \text{si } \gamma = \overline{1} \end{cases}$$

Montrer que cette action est libre et que la surface quotient $\mathbb{S}^2/\Phi$ est difféomorphe au plan projectif $P^2(\mathbb{R})$.

Dans toute la suite $\mathbb{R}^3$ sera muni du produit scalaire $\langle (x,y,z),(x',y',z')\rangle = xx' + yy' + zz'$ pour lequel la base canonique $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ est orthonormée.

Exercice 4

Soit M l'ensemble des points (x,y,z) de l'espace $\mathbb{R}^3$ qui vérifient la relation $x^2 - y^2 - z = 0$.

1 - Montrer qu'une représentation paramétrique régulière $\Phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow M$ de M est donnée par :

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(u+v) \\ y = \frac{1}{2}(u-v) \\ z = uv \end{cases}$$

et en déduire ainsi que M est une surface différentiable.

2 - Donner la métrique riemannienne sur M induite par le produit scalaire de $\mathbb{R}^3$.

3 - La surface M est-elle compacte ?

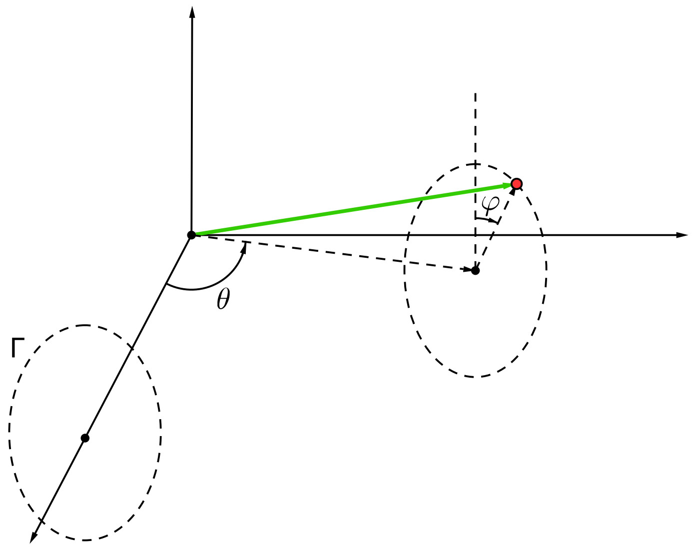
Exercice 5

Soit M une partie de $\mathbb{R}^3$. On appelle *arc* dans M une application continue $\sigma : [0,1] \longrightarrow M$. Les points $\sigma(0)$ et $\sigma(1)$ sont respectivement l'*origine* et l'*extrémité* de σ. On dira que M est *connexe par arcs* si, pour tous points a et b de M, il existe un arc σ dans M ayant a pour origine et b pour extrémité.

Montrer que la sphère $\mathbb{S}^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ est connexe par arcs en donnant explicitement un arc joignant deux points donnés de $\mathbb{S}^2$.

Exercice 6

Soient r et R deux nombres réels tels que $R > r > 0$. Dans le plan (x,z), on note Γ le cercle de centre $(R,0,0)$ et de rayon r. On fait tourner le plan (x,z) autour de la droite vectorielle de direction $\overrightarrow{k}$. Le cercle Γ engendre alors un tore T.



1 - Montrer que, sur le complémentaire U d'un cercle méridien et d'un cercle parallèle (qu'on précisera), T admet comme représentation paramétrique régulière, l'application :

$$\Psi : (\theta, \varphi) \in]0, 2\pi[\times]0, 2\pi[\longmapsto (x, y, z) \in U$$

donnée par :

$$\begin{cases} x = (R + r\sin\varphi)\cos\theta \\ y = (R + r\sin\varphi)\sin\theta \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$$

2 - Donner la métrique riemannienne g sur U induite par le produit scalaire de $\mathbb{R}^3$.

3 - Calculer la courbure sectionnelle de la surface riemannienne (U, g).

Exercice 7

Soient a, b et c trois nombres réels strictement positifs. On considère l'*ellipsoïde* $\mathcal{E}$ d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

1 - Dire pourquoi $\mathcal{E}$ est une surface régulière (énoncer de façon précise le théorème qui permet de justifier cela).

2 - Soient L le demi-plan fermé de $\mathbb{R}^3$ défini par $y = 0$ et $x \geq 0$, V l'ouvert $\mathbb{R}^3 \setminus L$ (*i.e.* $\mathbb{R}^3$ privé de L) et $S = \mathcal{E} \cap V$. Donner une représentation régulière $\Phi : U \longrightarrow S$ (où U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$).

3 - Montrer que la surface $\mathcal{E}$ est difféomorphe à la sphère unité $\mathbb{S}^2$ de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 8

On note M l'image de l'ouvert $U = \mathbb{R}\times]0, +\infty[\subset \mathbb{R}^2$ par l'application $\Phi : U \longmapsto \mathbb{R}^3$ définie par :

$$\begin{cases} x(u, v) = e^{-v}\cos u \\ y(u, v) = e^{-v}\sin u \\ z(u, v) = v. \end{cases}$$

1 - Montrer que M est une surface régulière de $\mathbb{R}^3$.

2 - Donner la métrique riemannienne g sur M induite par le produit scalaire de $\mathbb{R}^3$.

3 - Calculer la courbure sectionnelle de la surface riemannienne (M, g).

4 - Donner, en chaque point $p \in M$, des équations cartésiennes de la normale à M.

5 - Montrer que M est difféomorphe à $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Exercice 9

On pose $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2z^2 = 1\}$ et $N = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^4 + z^6 = 1\}$. On munit ces ensembles de la topologie induite par celle de $\mathbb{R}^3$.

1 - Dire pourquoi M et N sont des surfaces régulières.

2 - Les surfaces M et N sont-elles compactes ?

Exercice 10

Soient F le point $(0,0,1)$ de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{H}$ le plan d'équation $z=-1$. On pose :

$$M=\{p\in\mathbb{R}^3 : \text{distance de } p \text{ à } F\text{=distance de } p \text{ à } \mathcal{H}\}.$$

1 - Montrer que la partie M est définie par une équation de la forme $z=f(x,y)$ qu'on explicitera.

2 - Montrer que M est une surface régulière de $\mathbb{R}^3$. En donner une paramétrisation globale.

3 - Donner la métrique riemannienne g sur M induite par le produit scalaire de $\mathbb{R}^3$.

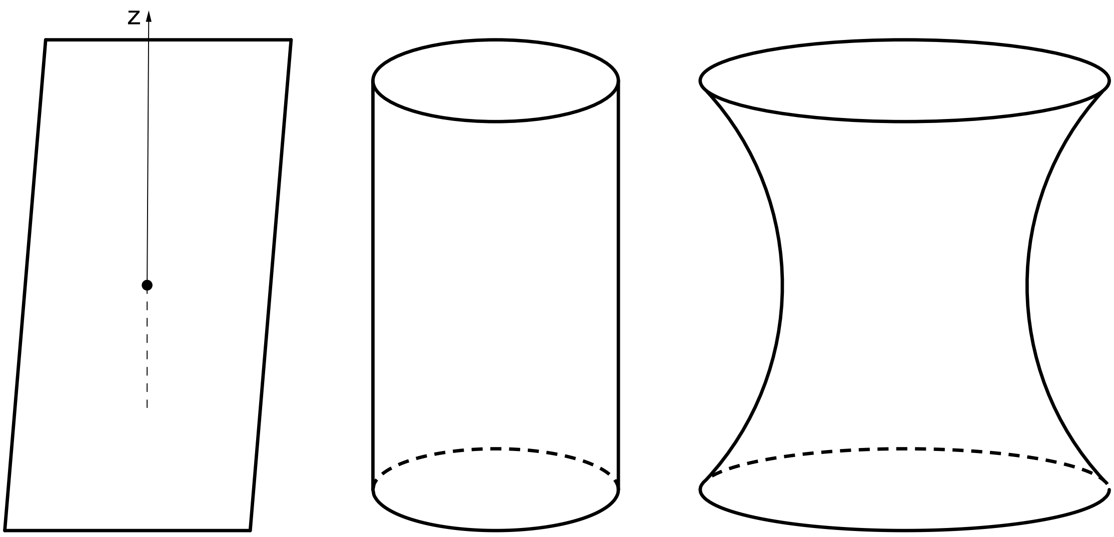
Exercice 11

On considère les surfaces M, N et L de l'espace $\mathbb{R}^3$ données comme suit :

$$M=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : z=0 \text{ et } x^2+y^2\neq 0\}$$

$$N=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2=1\}$$

$$L=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2-z^2=1\}.$$



M N L

1- Montrer que les trois surfaces M, N et L sont deux à deux difféomorphes en exhibant de façon explicite des difféomorphismes (il suffit de faire cela entre M et N et puis entre N et L).

2 - Donner la métrique riemannienne h induite par $\mathbb{R}^3$ sur N et calculer la courbure sectionnelle de la surface riemannienne (N,h).

Exercice 12

On munit le demi-plan supérieur $\mathbb{H} = \{z = x+iy \in \mathbb{C} : y > 0\}$ de la métrique riemannienne hyperbolique $g = \frac{dx^2+dy^2}{y^2}$.

Soient a un réel strictement positif différent de 1 et $\gamma : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}$ le difféomorphisme donné par $\gamma(z) = az$. On définit une action Ψ de $\Gamma = \mathbb{Z}$ à l'aide de la représentation ρ de $\mathbb{Z}$ dans Diff($\mathbb{H}$) (groupe des difféomorphimses de $\mathbb{H}$) qui envoie 1 sur γ.

1 - Montrer que l'action Ψ est libre et propre. Dessiner l'orbite du point $z_0 = 1 + i$.

2 - Donner un domaine fondamental de Ψ.

3 - Montrer que la surface quotient $M = \mathbb{H}/\Psi$ est difféomorphe au cylindre ouvert $\mathcal{C} = \Gamma\times]0, \pi[$ où Γ est un cercle.

4 - Quelle métrique riemannienne h faut-il mettre sur $\mathcal{C}$ pour que les deux surfaces riemanniennes (M, g) et $(\mathcal{C}, h)$ soient isométriques ?

Exercice 13

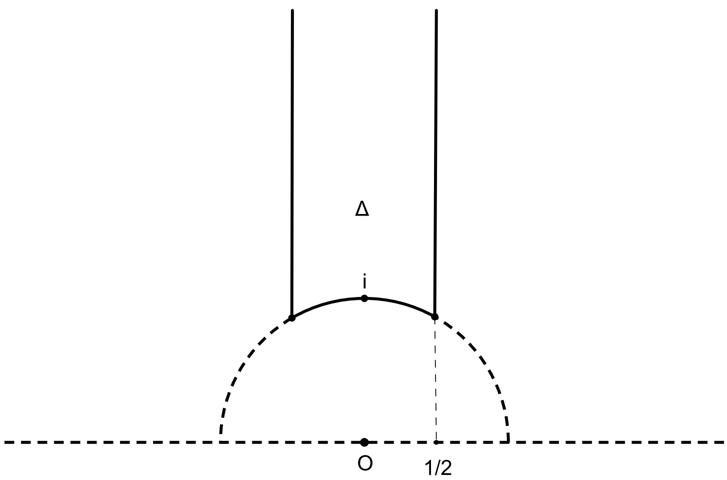
On munit le demi-plan supérieur $\mathbb{H} = \{z = x+iy \in \mathbb{C} : y > 0\}$ de la métrique riemannienne hyperbolique $g = \frac{dx^2+dy^2}{y^2} = -4\frac{dz\otimes d\bar{z}}{(z-\bar{z})^2}$. Le groupe SL$(2, \mathbb{R})$ des matrices carrées réelles d'ordre 2 et de déterminant 1 agit sur $\mathbb{H}$ par la représentation $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \stackrel{\rho}{\longmapsto} \left\{z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d}\right\}$. Cette action est par isométries.

On note SL$(2, \mathbb{Z})$ le sous-groupe de SL$(2, \mathbb{R})$ dont les éléments sont les matrices à coefficients dans $\mathbb{Z}$. On admet que SL$(2, \mathbb{Z})$ est discret dans SL$(2, \mathbb{R})$.

Soit Γ l'image de SL$(2, \mathbb{Z})$ par le morphisme $\rho :$ SL$(2, \mathbb{R}) \longrightarrow$ Isom$(\mathbb{H}, g)$. On admet que Γ agit proprement sur $\mathbb{H}$, que $\Delta = \{z = x + iy \in \mathbb{H} : |x| \leq \frac{1}{2}$ et $|z| \geq 1\}$ (voir le dessin ci-dessous) en est un domaine fondamental et qu'il est engendré par les isométries $S(z) = -\frac{1}{z}$ et $T(z) = z + 1$.

1 - Montrer que l'action de Γ sur $\mathbb{H}$ n'est pas libre. (Voir le stabilisateur du point i.)

2 - Dessiner le quotient $\mathcal{O} = \mathbb{H}/\Gamma$. À quelle surface bien connue est-il homéomorphe ?



RÉFÉRENCES

[Be] Beardon, A. F. *The Geometry of Discrete Groups.* GTM 91, Springer-Verlag, (1983).

[BP] Benedetti, R. & Petronio, C. *Lectures on Hyperbolic Geometry.* Universitex, Springer-Verlag, (1992).

[BBM] Berard Bergery, L., Bourguignon, J. P. & Mazet, E. *Variétés à courbure négative.* Publications Mathématiques de l'Université de Paris VII, (1971).

[Ca] do Carmo, M. *Geometria riemanniena.* Projeto Euclides, Rio de Janeiro, (1988).

[DNF] Doubrovine, B., Novikov, S. & Fomenko, A. *Géométrie contemporaine.* Tomes I, II et III Editions MIR, (1979).

[ST] Sá Earp, R. & Toubiana, E. *Introduction à la géométrie hyperbolique et aux surfaces de Riemann.* Bibliothèque des Sciences, Diderot Éditeur (1997).

[Fr] Freitag, E. *Hilbert Modular Forms.* Springer-Verlag, (1990).

[JS] Jones, G. & Singerman, D. *Complex Functions. An algebraic and geometric viewpoint.* Cambridge University Press, (1987).

[La] Lang, S. *Faire des Maths : grands problèmes de géométrie et de l'espace.* Revue du Palais de la découverte 12, 114, (1984), 21-72.

[Ma] Maass, H. *Lectures on Modular Functions of one Complex Variable.* Tata Institute of Fundamental Research, (1964).

[Po] Postnikov, M. *Leçons de géométrie. Variétés différentiables.* Editions MIR, (1990).

[Ra] Ratcliffe, J.G. *Foundations of Hyperbolic Geometry.* GTM 149, Springer-Verlag (1994).

[Ve] Verjovsky, A. *Introducción a la geometría y variedades hiperbólicas.* Publié au Mexique par Instituto Politéchnico Nacional, (1986).

A. El Kacimi Alaoui
LAMAV, Le Mont Houy
Université de Valenciennes
59313 Valenciennes Cedex 9 – France

aziz.elkacimi@univ-valenciennes.fr
http://www.univ-valenciennes.fr/lamav/elkacimi/