PARTAGE D'UN POLYGONE

Aziz El Kacimi, François Recher & Valerio Vassallo

On se donne un polygone $\mathfrak{P}$ et un point M sur l'un de ses côtés. Construire à la règle et au compas un point N sur un autre côté de $\mathfrak{P}$ tel que le segment $[MN]$ partage $\mathfrak{P}$ en deux parties d'aires égales. (On dira simplement *parties égales* pour simplifier). C'est ce que nous nous proposons de faire dans cet article. Avant le travail mathématique proprement dit, nous donnons en introduction quelques motivations qui nous ont amenés à traiter ce problème en formation continue et en classe avec des élèves de lycées et collèges. C'est un travail que nous menons en tant qu'enseignants-chercheurs dans nos universités respectives et en tant que *Mathématiciens en résidence* à la **Cité des Géométries - Gare Numérique de Jeumont**.

Le thème choisi a fait l'objet de séances de travail dans différents établissements du Nord : dans le cadre d'une formation destinée aux enseignants de mathématiques du Collège Vauban à Maubeuge et à des élèves de seconde, sous forme d'ateliers, au Collège Jacques Brel à Louvroil, à la semaine des mathématiques à l'Université de Valenciennes, celle de l'IUT de Maubeuge, au Lycée Kernanec de Marcq en Barœul...

Dans le cadre de la formation susmentionnée, le but était d'approcher la notion d'aire et, éventuellement, pousser les enseignants à découvrir par ce biais un champ d'investigation prolifique : le partage des figures planes en deux ou plusieurs parties égales, historiquement d'un grand intérêt pour ses applications en mathématiques et dans la vie quotidienne. Le premier exemple qui vient à l'esprit est celui du triangle. La médiane donne la solution lorsque le point M est l'un des sommets et est une clé décisive lorsqu'il ne l'est plus. La question du partage se pose naturellement aussi pour un polygone quelconque. Dans le cas particulier des quadrilatères, ce genre de questionnement est bien connu pour les carrés, les rectangles et les losanges : diagonales, axes de symétrie, droites passant par un centre de symétrie. C'est cette idée consistant à éveiller la curiosité par le biais de questions simples, qui nous semble encore trop manquer dans un enseignement des mathématiques davantage libre de contraintes. Donner cette liberté de questionnement à soi-même, aux enseignants pour l'offrir aussi aux élèves peut être un point central dans la formation des enseignants. Ceci a l'avantage de valoriser l'aspect vivant des mathématiques, son aspect recherche, les volets de l'imagination, de la prise d'initiative et du cadrage des idées par la rigueur, aspects devenus désormais obsolètes en mathématiques au cours de ces dernières années (*cf.* [1]). Un enseignant qui n'est pas libre de penser ne peut pas former des élèves libres de penser, des élèves dont tout le monde rêve d'avoir en classe : prêts éventuellement à dépasser le maître et pas à en rester soumis, prêts à rentrer dans la société civile avec un esprit critique et constructif à la fois.

Quant aux ateliers, leur but a été de captiver des élèves qui ne sont pas forcément motivés par les mathématiques, grâce à une activité d'aspect peut-être ludique mais de recherche. Sur le problème du partage d'un triangle ou d'un quadrilatère en deux parties égales, les élèves ont compris ce que signifie "chercher en maths". Ils se sont pris au jeu des idées échangées, notamment de la part de ceux qui ne sont pas forcément brillants ou habituellement peu ou pas dynamiques en classe. Ils ont réellement pris le temps de faire

[1] http://images.math.cnrs.fr/Chronique-d-une-matinee-en-classe.html

des dessins, de formuler des idées et certains d'entre eux sont même arrivés à la solution souhaitée.

Voir les élèves prendre le temps de dessiner et formuler des idées, c'est ce que nous avons trouvé à plusieurs reprises le plus passionnant lors de nos interventions dans les classes de notre région (*cf.* [2]). D'ailleurs, quel sens a une étude sur les questions posées par l'enseignement si elle ne teste pas dans les classes les réponses qu'elle est censée apporter? Sans y voir une nette amélioration de l'intérêt de nos jeunes pour les mathématiques ? Peut-on parler d'une étude sur l'acquisition des connaissances sans créer cet espace pour échanger, écouter et comprendre comment elles ont été acquises par nous mêmes d'abord et par les jeunes ensuite ? Rester dans la théorie pédagogique ou didactique et aborder ces questions sans expérimentation (dans les classes) risque alors d'être totalement inutile !

Dans le cas du partage des triangles nous avons mis tout de suite en avant le problème de l'existence d'une droite qui puisse réaliser le bon partage. Dans un triangle ABC nous avons pris la médiane issue du sommet A et nous l'avons fait pivoter (*cf.* figure 1) autour. Aisément, les élèves on vu qu'elle partage le triangle en deux parties : apparemment une d'aire inférieure à celle de l'autre. Ils ont alors bien vu qu'en poursuivant le mouvement, il va exister nécessairement une position où les deux parties vont être égales. Il sont arrivés à la même conclusion lorsqu'on part d'un point quelconque qui n'est plus un sommet. Ceci offre l'occasion de parler, d'une façon intuitive certes, de la notion de continuité. D'ailleurs, comme il arrive souvent en géométrie, de nombreuses occasions se présentent pour anticiper cette même notion enseignée sans grande motivation. La preuve en est que, même en première année d'université la notion de fonction continue sur un intervalle reste abstraite et surtout incomprise ainsi que beaucoup de choses qui l'entourent comme par exemple le "théorème des valeurs intermédiaires" pour ne citer que cela !

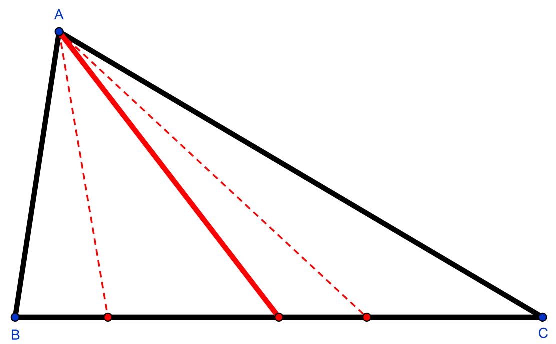

Figure 1

Toutefois, puisque c'est ce que nous les enseignants pensons dans des situations de ce genre, il peut être instructif de partager nos idées avec les élèves mais en prenant les précautions qui s'imposent. Une fois que la classe a été assurée de l'existence de cette droite et a compris à peu près où elle se trouve, la recherche de sa détermination exacte a été lancée. Là, les jeunes pouvaient proposer leurs conjectures en essayant de les justifier. Il a fallu alors vérifier s'ils maîtrisent bien des théorèmes autres que celui de la médiane cité plus haut. En effet, dans ce problème, comme dans celui concernant le quadrilatère, il a fallu se rappeler que deux triangles (*cf.* figure 2) ABC et $A'BC$ ayant la même base BC

[2] http://images.math.cnrs.fr/Gouter-symetrique-chez-les.html

et la même hauteur (par exemple lorsque les sommets A et A' sont situés sur une même droite parallèle à BC) ont la même aire. D'où la mémoire des résultats, autre sujet qui nous a intrigués lors de nos investigations car on ne lui donne pas assez d'importance. Mais l'utilisation fréquente des résultats fait partie d'une bonne approche de l'enseignement des mathématiques et de leur apprentissage. Nous pensons que cette place de la mémoire est très importante pour justifier aux yeux des élèves pourquoi il est indispensable de pratiquer constamment l'utilisation des théorèmes, leurs démonstrations, leurs applications...

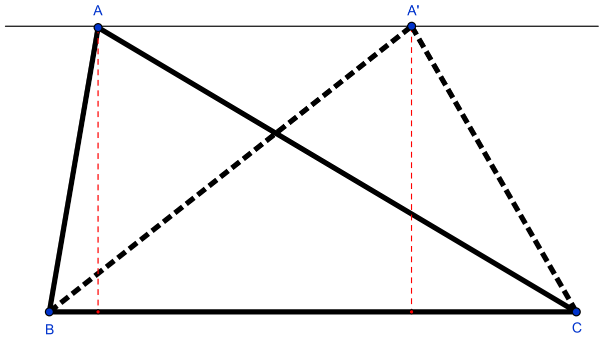

Figure 2

Finalement, pour conter les mathématiques dans un cadre tel que celui des ateliers, il est toujours agréable de le faire en y mettant un peu d'humour pour commencer avec du grand sourire. C'est pourquoi nos séances de travail sur le partage géométrique commencent toujours par la petite histoire qui suit et dont nous conseillons la lecture !

Mère Babette avait l'habitude de préparer chaque dimanche un délicieux gâteau pour ses deux enfants. Celui-ci avait toujours une forme régulière : celle d'un cercle, d'un carré ou, dans le pire des cas, un rectangle. Le partager en deux parts égales d'un seul coup de couteau (elle s'impose toujours cette règle) n'était pas une tâche difficile. Fatiguée par ces formes qu'elle voit dans tous les coins de sa vieille demeure, elle décide d'être un peu fantaisiste : son gâteau, elle le fera sous forme polygonale ! Allons-y, Dieu soit loué, se disait-elle. Mais elle ne réalise que sa décision est irréfléchie qu'au moment où elle devait donner l'unique coup de couteau pour offrir une moitié de gâteau à chacun de ses deux bambins. Quelle galère ! Fort heureusement, Mère Babette ne recule devant rien et se résout à apprendre ce qu'il faut pour s'en sortir : de la géométrie. Écoutons-la, c'est elle qui parle, et elle va nous faire voir des vertes et des pas mûres !

Évidemment, les élèves se posent la question : est-ce un vrai problème ? Bien sûr que non : dans la vraie vie courante, nous nous contentons de l'à peu près, sans jamais vérifier si c'est conforme à une théorie. Et ce débat a son intérêt propre aussi car il permet de voir la différence entre les besoins du réel et les raisons d'une modélisation des problèmes. Il est clair que dans le partage d'un gâteau l'à peu près nous suffit largement !

0. Le problème général

Soit $\mathfrak{P} = A_1 \cdots A_n$ un polygone à $n \geq 3$ côtés. Construire un segment Δ partageant $\mathfrak{P}$ en deux polygones $\mathfrak{P}_1$ et $\mathfrak{P}_2$ ayant même aire.

Une question préliminaire se pose : *un tel segment Δ existe-t-il ?* La réponse est oui ! En effet, un argument de continuité combiné au *théorème des valeurs intermédaires* permet de montrer les deux assertions qui suivent :

i) *Pour toute droite vectorielle fixée $\overrightarrow{\Delta}$, il existe un segment Δ de direction $\overrightarrow{\Delta}$ répondant à la question.*
ii) *Par tout point non intérieur au quadrilatère $ABCD$ passe une droite qui coupe le polygone en un segment Δ répondant à la question.*

1. Cas du triangle

1.1. Problème. *Soient ABC un triangle d'aire $\mathcal{A} > 0$ et $\lambda \in [0,1]$. On se donne un point M sur le côté AB. Construire un segment Δ passant par M et partageant le triangle ABC soit en deux triangles, soit en un triangle et un quadrilatère de telle sorte que l'aire de l'une des deux figures obtenues soit égale à $\lambda\mathcal{A}$.*

Pour les constructions qu'on va faire, on suppose, bien entendu, qu'un segment de longueur λ est donné.

1.2. Solution

• On peut se contenter de prendre $0 \leq \lambda \leq \frac{1}{2}$. Construire le segment Δ revient à construire son autre point N sur le triangle ABC. Notons J le milieu de AB ; alors le segment $[JC]$ est solution du problème pour $\lambda = \frac{1}{2}$.

• On prend M sur le segment AJ. Comme $0 \leq \lambda \leq \frac{1}{2}$, le point N ne peut se trouver que sur le côté BC si on veut par exemple que la figure qu'on cherche soit le triangle BMN. L'aire du triangle BMN doit être λ fois celle de ABC ; par suite $\frac{1}{2}BN \cdot MM_0 = \frac{\lambda}{2}BC \cdot AA_0$ où A_0 et M_0 sont les projections orthogonales respectives des points A et M sur le segment BC. Il s'agit alors de construire le point N sur la droite (BC) tel que $\frac{BN}{BC} = \frac{\lambda \cdot AA_0}{MM_0}$.

• Sur une demi-droite d'origine B (par exemple perpendiculaire à (BC), on prend les points α et β tels que $B\alpha = \lambda \cdot AA_0$ et $B\beta = MM_0$. La parallèle à (βC) passant par α coupe le côté BC en le point N cherché.

• Si M est sur le segment JB, on raisonne comme précédemment en faisant jouer au sommet B le rôle de A et au côté AC celui de BC.

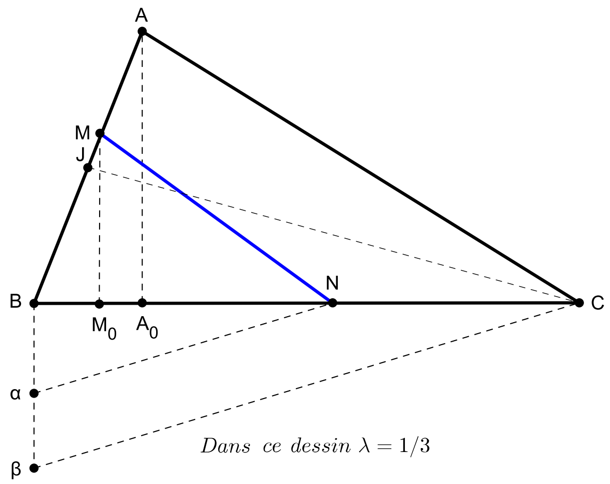

Figure 3

2. Cas du quadrilatère

2.1. Problème. *Soit $ABCD$ un quadrilatère. Construire géométriquement un segment Δ le partageant en deux polygones ayant la même aire.*

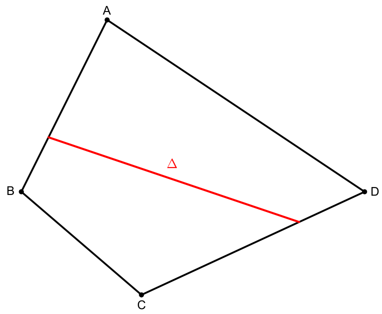

Figure 4

2.2. Solution

Notons A_1 et C_1 les projections orthogonales sur le segment $[BD]$ respectivement des points A et C et posons $\ell = BD$, $h = AA_1$ et $k = CC_1$.

• Si $h = k$, on a $\text{Aire}(BAD) = \text{Aire}(BCD)$; le quadrilatère $ABCD$ est donc partagé en deux triangles de même aire par la diagonale BD. On choisit alors $\Delta = [BD]$.

• Si $h \neq k$, on suppose pour fixer les idées que $h > k$. Sur le segment $[AA_1]$ on repère le point A' tel que $AA' = k$. Par le milieu J du segment $[A'A_1]$ on mène la parallèle à la droite (BD) ; celle-ci coupe le segment $[AD]$ en un point E et le segment $[AB]$ en un point F. Alors les deux segments $[BE]$ et $[DF]$ répondent à la question. Montrons cela pour (BE) par exemple. On a :

$$\begin{aligned}
\text{Aire}(ABE) &= \text{Aire}(ABD) - \text{Aire}(BDE)\\
&= \frac{1}{2}\ell \cdot h - \frac{1}{2}\ell \cdot \frac{h-k}{2}\\
&= \frac{1}{2}\ell \cdot k + \frac{1}{2}\ell \cdot \frac{h-k}{2}\\
&= \text{Aire}(BCD) + \text{Aire}(BDE)\\
&= \text{Aire}(BCDE)\\
&= \frac{\text{Aire}(ABCD)}{2}.
\end{aligned}$$

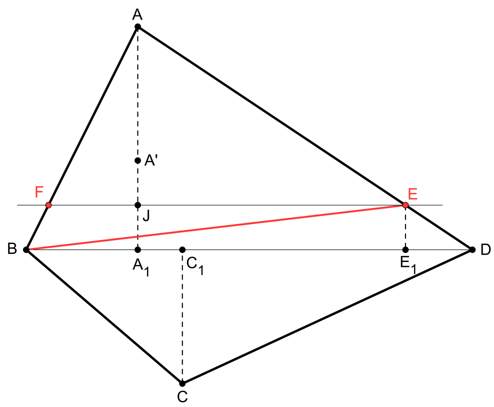

Figure 5

On peut faire le même type de raisonnement en prenant la diagonale AC. On trouve deux autres solutions. Donc, à partir de chaque sommet du quadrilatère passe une droite qui le partage en deux parties ayant la même aire. ♢

2.3. Construction rapide

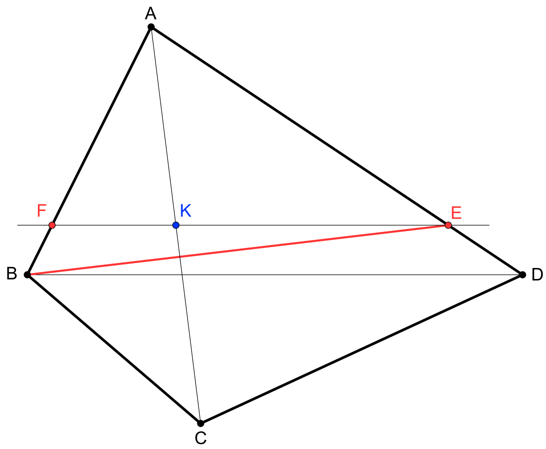

Figure 6

Par le milieu K de la diagonale $[AC]$ on mène la parallèle à la diagonale $[BD]$. Cette parallèle coupe le segment $[DA]$ en E et le segment $[AB]$ en F. Chacun des segments $[BE]$ et $[DF]$ partage alors le quadrilatère $ABCD$ en deux quadrilatères convexes $ABEE$ et $BCDE$ ayant la même aire. On peut échanger les rôles des diagonales et trouver deux autres solutions. ♢

2.4. On ne part plus d'un sommet

Supposons maintenant qu'on impose au segment Δ de passer par un point M qui n'est pas un sommet, par exemple M est sur le segment ouvert $]BC[$. Soit CC' le segment (partant du sommet C) partageant $ABCD$ en deux parties de même aire. Par C menons la parallèle à la droite MC' ; celle-ci coupe le côté AD en un point C_1. Alors le segment $[MC_1]$ partage le quadrilatère $ABCD$ en deux parties de même aire.

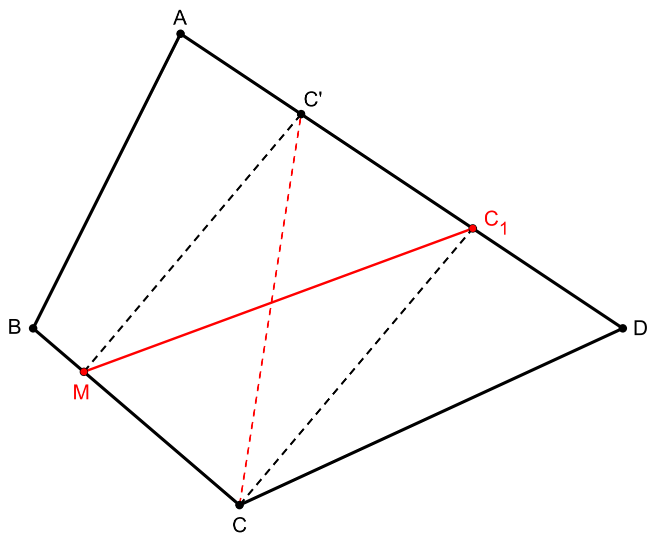

Figure 7

3. Cas d'un polygone quelconque

3.1. *L'entier n est tout à fait quelconque et le polygone est convexe ou non. Toutefois, on n'aura pas le choix du point de départ du coup de couteau : on partira d'un sommet.*

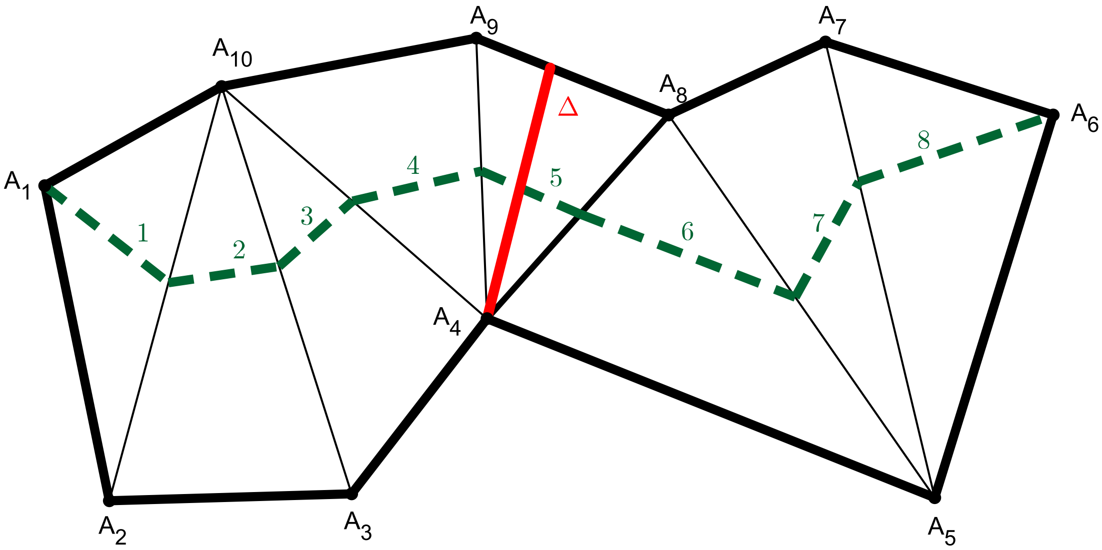

Figure 8

3.2. Solution

L'aire de $\mathfrak{P}$ est supposée égale à 1, ce qui n'est nullement une restriction. On partage le polygone $\mathfrak{P}$ en $m = n-2$ triangles $\delta_1, \cdots, \delta_m$ de telle sorte que δ_i et δ_{i+1} (pour i variant de 1 à $m-1$) aient un côté commun. On symbolise la chaîne $\{\delta_1, \cdots, \delta_m\}$ par une ligne brisée (celle en vert sur le dessin ci-dessus) qu'on appelle *artère* de $\mathfrak{P}$. On note $\mathcal{A}_j$ l'aire de δ_j. Il existe alors $i \in \{1, \cdots, m\}$ tel que :

$$(*) \qquad \mathcal{A}_1 + \cdots + \mathcal{A}_{i-1} + \mathcal{A}_i \geq \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \mathcal{A}_i + \mathcal{A}_{i+1} + \cdots + \mathcal{A}_m \geq \frac{1}{2}.$$

Posons, pour simplifier $a = \mathcal{A}_1 + \cdots + \mathcal{A}_{i-1}$, $b = \mathcal{A}_{i+1} + \cdots + \mathcal{A}_m$ et $c = \mathcal{A}_i$; on a $a+b+c = 1$ et on voit facilement, par la condition $(*)$, que $a \leq \frac{1}{2}$ et $b \leq \frac{1}{2}$. Pour partager le polygone $\mathfrak{P}$ en deux parties de même aire, il suffit de partager le triangle δ_i dans un rapport $\lambda \in [0,1]$ tel que : $a + (1-\lambda)c = b + \lambda c$. Un calcul immédiat nous donne :

$$\lambda = \frac{1-2b}{2(1-a-b)}.$$

Comme $a \leq \frac{1}{2}$ et $b \leq \frac{1}{2}$, le nombre λ est positif. Il se calcule facilement à partir des données sur le polygone (ses côtés...), et on peut aussi le construire géométriquement.

Finalement, il faut que notre segment Δ ne traverse que le triangle δ_i. Ce sera le cas. En effet, l'un des côtés de δ_i est aussi un côté de $\mathfrak{P}$; le segment Δ aura donc pour origine le sommet M de $\mathfrak{P}$ opposé à ce côté. Le reste se fait comme dans la sous-section 1.2. $\diamondsuit$