UNIVERSITÉ DE LILLE III

ADMINISTRATION ÉCONOMIQUE ET SOCIALE

DEUXIÈME ANNÉE

Cours d'Algèbre

par

AZIZ EL KACIMI

EXERCICES DE PROGRAMMATION LINÉAIRE

ANNÉE UNIVERSITAIRE 1986-1987

AVANT-PROPOS

Le but de ce texte est de présenter quelques méthodes graphiques et algébriques de résolution de certains problèmes linéaires soumis à des contraintes : les variables qui y interviennent ne peuvent prendre que des valeurs permises. Souvent, il s'agit de chercher les valeurs des variables pour lesquelles l'optimum d'une fonction, appelée *fonction économique* du problème, est atteint. Par exemple, maximiser un bénéfice avec des moyens limités, minimiser un coût ou des dépenses tout en préservant une certaine qualité ou exigence *etc.* Les exemples de telles situations ne manquent pas. Pour une fonction quelconque, le problème est assez délicat et nécessite souvent des techniques mathématiques élaborées. Ceci dépasse largement le niveau que nous avons fixé ici.

Nous nous limiterons au cas où la fonction éconmique à optimiser est linéaire ainsi que les contraintes auxquelles sont soumises les variables. Le cas à deux variables, que nous pouvons visualiser sur un plan, peut être résolu graphiquement et de manière assez simple. Mais déjà en dimension 3 la résolution graphique devient un peu compliquée. Nous ferons alors appel à la méthode simpliciale. Celle-ci est basée sur des techniques d'algèbre linéaire assez classiques : matrices et leur inversion par la méthode du pivot *etc.* Aussi, nous nous attarderons un peu plus sur ces notions de base. Nous traiterons la partie proprement dite de *programmation linéaire* (élémentaire) sur des exemples concrets sans toutefois perdre le caractère général de la démarche.

Nous rappelons que ceci n'est pas un cours structuré mais simplement un résumé de quelques-unes des notions d'algèbre linéaire et de problèmes résolus de programmation linéaire. Le lecteur ne doit donc pas s'étonner s'il ne trouve pas de démonstration de théorèmes !

Lille, Mars 1987
AZIZ EL KACIMI

CONTENU

PREMIERE PARTIE

Algèbre linéaire

CHAPITRE I

VECTEURS

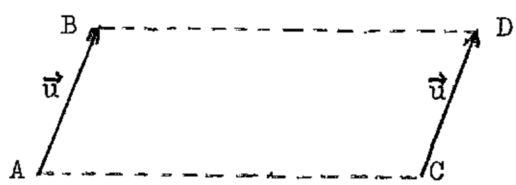
Nous pensons qu'il serait très utile de ne pas démunir un cours d'Algèbre linéaire de sa base et son support véritables: les vecteurs du plan.
Nous avons donc préféré commencer par ça afin de bien montrer l'aspect géométrique qu'il y a derrière.

1-Vecteurs du plan.

Nous considèrons que le lecteur possède intuitivement la notion de vecteur qui est celle de segment orienté.

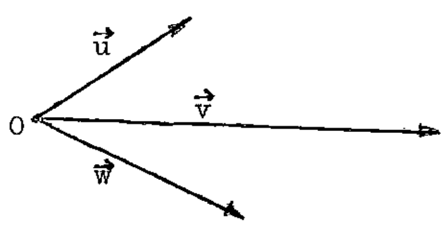
On dira que deux vecteurs du plan $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ sont "équivalents" si le quadrilatère ABDC est un parallélogramme :

Fig 1.1



$\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ sont deux representations différentes du même vecteur $\vec{u}$.On peut alors fixer un point O en lequel on choisira une representation pour chaque vecteur :

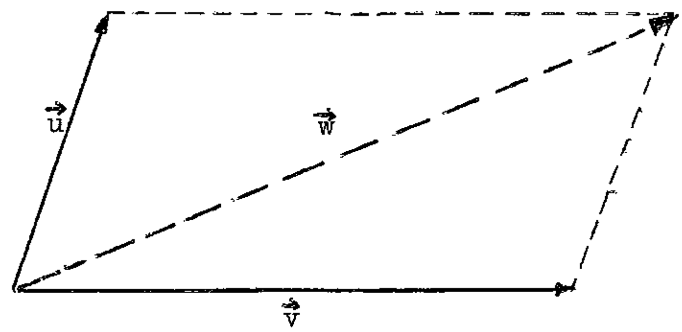
Fig 1.2



1.1-Somme de deux vecteurs.

Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan.On peut interpreter $\vec{u}$ comme une force agissant sur le point O.Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont donc deux forces appliquées à O.La resultante est alors une force $\vec{w}$ donnée par la diagonale du parallélogramme défini par $\vec{u}$ et $\vec{v}$;et ceci se justifie physiquement.

Fig 1.3



La somme de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sera par définition le vecteur $\vec{w}$.On peut montrer facilement que cette somme vérifie les propriétés suivantes :

i)Commutativité : $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$,

ii)associativité :$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$,

iii)existence d'un élément neutre noté $\vec{0}$ et appelé le <u>vecteur nul</u>,

iv)chaque vecteur $\vec{u}$ admet un opposé $-\vec{u}$.

1.2-<u>Multiplication des vecteurs par les réels.</u>

Soient $\vec{u}$ un vecteur du plan et λ un réel.

Le produit de $\vec{u}$ par λ est le vecteur $\lambda\vec{u}$ ayant :

-même direction que $\vec{u}$,

-même sens que $\vec{u}$ si λ est positif et sens contraire à $\vec{u}$ si λ est négatif,

-sa longueur égale à $|\lambda|$ fois celle de $\vec{u}$.

Cette multiplication par les réels vérifie :

i) $1.\vec{u} = \vec{u}$, $0.\vec{u} = \vec{0}$ et $\lambda.\vec{0} = \vec{0}$,

ii) $\lambda.(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda.\vec{u} + \lambda.\vec{v}$,

iii) $(\lambda+\mu).\vec{u} = \lambda.\vec{u} + \mu.\vec{u}$,

iv) $\lambda.(\mu.\vec{u}) = (\lambda\mu).\vec{u}$.

L'ensemble V_2 des vecteurs du plan muni de ces deux opérations vérifiant les propriétés ci-dessus est appelé Espace vectoriel des vecteurs du plan.

1.3-Vecteurs colinéaires.

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux éléments non nuls de V_2.On dira que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires s'ils ont la même direction.
Ceci est équivalent au fait qu'il existe un réel λ vérifiant:
$\vec{v} = \lambda\vec{u}$.

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires on dira qu'ils sont linéairement indépendants.D'une manière équivalente :toute relation $\lambda.\vec{u} + \beta.\vec{v} = 0$ implique $\lambda = \beta = 0$.

Vecteurs colinéaires

(a)

Vecteurs linéairement indépendants

(b)

Fig 1.5

1.6-Système générateur.

Soit $\vec{u}$ un élément de V_2.Il est clair que l'ensemble de tous les vecteurs $\lambda.\vec{u}$ où λ parcourt R n'est pas égal à V_2 tout entier :l'élément $\vec{w}$ (Voir Fig 1.4.1) n'appartient pas à cet ensemble.

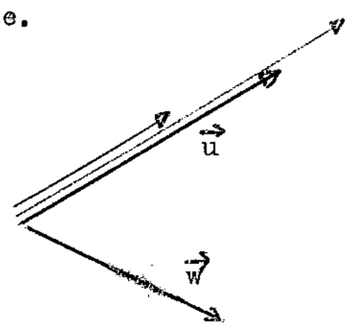


Fig 1.4.1

De la même manière deux vecteurs colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne suffisent pas à engendrer tous les éléments de V_2 car toute combinaison $\lambda.\vec{u}+\beta.\vec{v}$ où λ et β sont des réels, est colinéaire à $\vec{u}$ et $\vec{v}$ (Fig 1.4.2).

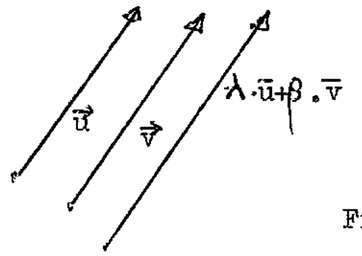


Fig 1.4.2

Par contre si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont linéairement indépendants, alors tout vecteur $\vec{w}$ de V_2 s'écrit : $\vec{w}=\lambda.\vec{u}+\beta.\vec{v}$ et ceci d'une manière unique i.e λ et β sont uniques.

Pour le démontrer on considère les droites $D_{\vec{u}}$ et $D_{\vec{v}}$ qui supportent respectivement $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

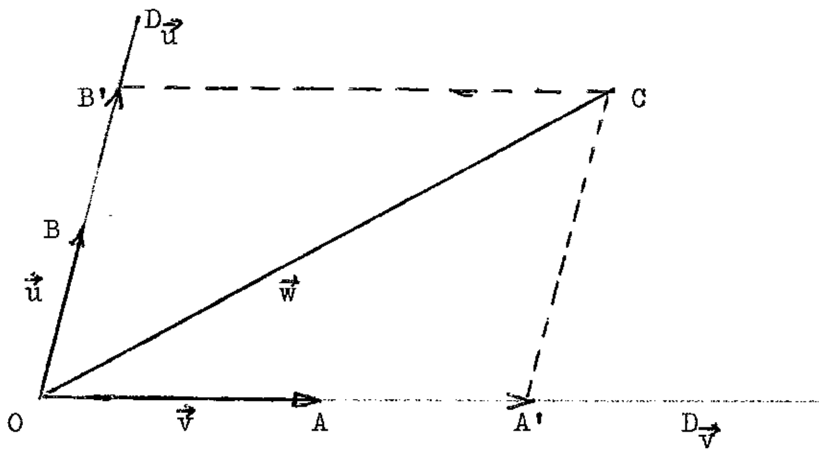


Fig 1.4.3

On projette le point C sur $D_{\vec{v}}$ et $D_{\vec{u}}$ respectivement en A' et B' parallèlement à $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Par construction on a :

$$\vec{w}=\overrightarrow{OB'}+\overrightarrow{OA'}.$$

Or $\overrightarrow{OB'}$ et $\overrightarrow{OA'}$ sont colinéaires respectivement à $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Ils s'écrivent donc de manière unique : $\overrightarrow{OB'}=\lambda.\vec{u}$ et $\overrightarrow{OA'}=\beta.\vec{v}$. D'où l'on déduit :

$$\vec{w}=\lambda.\vec{u}+\beta.\vec{v}.$$

On dira que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ forment un <u>système générateur</u>. Ceci signifie que si l'on fixe $\vec{u}$ et $\vec{v}$, alors la connaissance de $\vec{w}$ est équivalente à celle du couple de réels (λ,β). Si on change $\vec{u}$ et $\vec{v}$, le couple (λ,β) change.

Le système $(\vec{u},\vec{v})$ est appelé <u>base</u> de l'espace vectoriel V_2 i.e $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont linéairement indépendants et forment un système générateur de V_2.

Il est facile de montrer que toute base de V_2 a exatement deux éléments. Pour cela on dit que V_2 est un espace vectoriel de <u>dimension deux</u>.

1.5-<u>Espace R^2</u>.

Considèrons l'espace vectoriel V_2 muni de la base $(\vec{u},\vec{v})$. Nous avons vu que tout vecteur de V_2 s'écrit d'une manière unique sous la forme $\vec{w} = x.\vec{u} + y.\vec{v}$. Autrement dit à tout vecteur $\vec{w}$ on associe le couple de réels (x,y). On définit alors l'application :

$$V_2 \xrightarrow{\theta} R^2 \qquad \text{en posant} \quad \theta(\vec{w}) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Il est clair que cette application est bien définie, bijective. En plus à la somme de deux vecteurs $\vec{w} = x.\vec{u} + y.\vec{v}$ et $\vec{w}' = x'.\vec{u} + y'.\vec{v}$ correspond la somme dans R^2 définie par :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix}$$

et qu'à la multiplication de $\vec{w}$ par α correspond la multiplication :

$$\alpha.\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{pmatrix}$$

Très important :L'application Θ dépend de la base $(\vec{u},\vec{v})$.

Il est facile de voir que ces opérations définies sur R^2 vérifient les mêmes propriétés que celles définies sur V_2.On peut oublier V_2 et ne considèrer que l'espace vectoriel R^2.

1.5-Remarque.

Tout ce qu'on vient de voir pour V_2 se généralise aux vecteurs de l'espace V_3 .

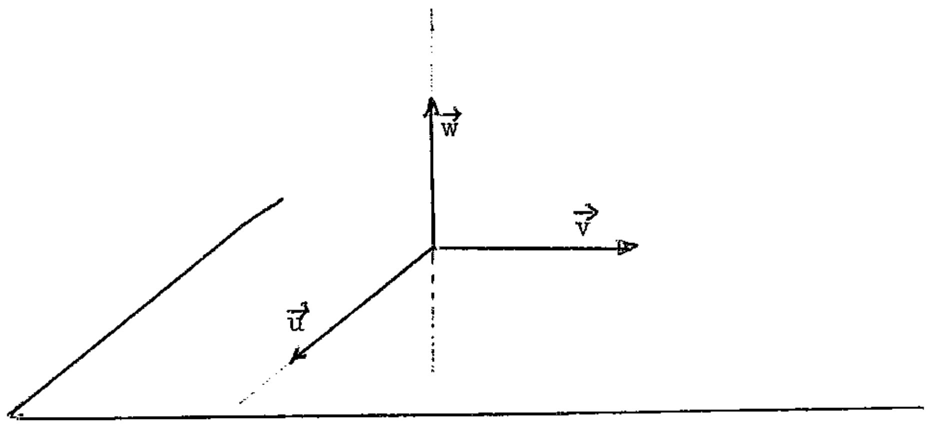


Fig 1.5.1

Dans ce cas une base de V_3 aura 3 éléments $\vec{u},\vec{v}$ et $\vec{w}$ de telle sorte que tout vecteur $\vec{t}$ de V_3 s'écrit de manière unique sous la forme:

$\vec{t} = x.\vec{u} + y.\vec{v} + z.\vec{w}$.

On définit alors l'application :

$$\Theta : V_3 \longrightarrow R^3 \quad \text{par} \quad \Theta(\vec{t}) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

et les opérations sur R^3 par :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \\ z + z' \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \alpha . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \\ \alpha z \end{pmatrix} .$$

On définit une addition dans R^n et une multiplication par les réels comme celles pour R^2 et R^3. On obtiendra alors une structure d'espace vectoriel sur R^n. Dans la suite on ne considèrera que ce type d'espace. On notera un élément quelconque de R^n par u (sans flèche). On revient alors sur la notion d'indépendance linéaire, de système générateur et de base.

2-Indépendance linéaire. Bases.

Soit $(u_1, \ldots, u_p)$ un système de p vecteurs dans R^n.

2.1-Définition.

On dit que le système $(u_1, \ldots, u_p)$ est libre ou que les vecteurs $u_1, \ldots, u_p$ sont linéairement indépendants si on a :

$$\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_p u_p = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_p = 0 .$$

Autrement dit toute relation du type $\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_p u_p = 0$ ne peut avoir lieu que si $\lambda_1 \ldots \lambda_p$ sont tous nuls.

Exemple.

Dans R^2 on considère les vecteurs :

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Ce système est libre. En effet si $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = 0$ on a:

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{i.e :}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

D'où l'on déduit $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

Si $(u_1,\dots,u_p)$ n'est pas libre,on dit qu'il est <u>lié</u>.On peut trouver des nombres $\lambda_1,\dots,\lambda_p$ <u>non tous nuls</u> tels que :

$$\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_p u_p = 0.$$

<u>Exemple.</u>

Les vecteurs $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

forment un système lié car ils vérifient la relation :

$$u_1 + u_2 - u_3 = 0 \ .$$

<u>Exercice.</u>

Soit$(u_1,\dots,u_p)$ un système de p vecteurs dans R^n.Montrer que si $p > n$ alors ce système est lié.

2.2-<u>Définition.</u>

On dit qu'un système $(u_1,\dots,u_p)$ est un système <u>générateur</u> de R^n si tout vecteur u de R^n s'écrit (pas nécessairement de manière unique) sous la forme :

$$u = x_1 u_1 + \dots + x_p u_p \ .$$

<u>Exemple.</u>

Soient $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ deux vecteurs dans R^2.Ces vecteurs forment un système générateur.En effet pour tout vecteur $u = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ il existe x_1 et x_2 réels tels que $u = x_1 u_1 + x_2 u_2$.Il suffit de prendre $x_1 = \beta$ et $x_2 = \alpha - \beta$.

<u>Exercice.</u>

Montrer que si $p < n$,un système de vecteurs $(u_1,\dots,u_p)$ dans R^n n'est jamais un système générateur.

2.3-Définition.

Un système de vecteurs $(u_1,\dots,u_p)$ dans R^n qui est à la fois libre et générateur est appelé base de R^n.

Dans ce cas on a nécessairement $p \leqslant n$ et $p \geqslant n$, c'es-à-dire $n = p$.

Tout vecteur de R^n s'écrit d'une manière unique sous la forme : $u = x_1u_1 + \dots + x_nu_n$.

Exemple.

On a vu que les vecteurs $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sont linéairement indépendants et forment un système générateur. Donc (u_1,u_2) est une base de R^2.

On montre facilement que dans un espace vectoriel toutes les bases ont le même nombre d'éléments. Ce nombre est appelé la dimension de cet espace vectoriel. Ainsi R^n est de dimension n.

Une base particulière est donnée par les vecteurs :

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \dots \quad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On l'appelle la base canonique de R^n.

La proposition suivante est relativement importante pour démontrer qu'un système de vecteurs est une base.

2.4-Proposition.

Dans R^n on considère n vecteurs $u_1,\dots,u_n$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

i) $(u_1,\dots,u_n)$ est un système libre,

ii) $(u_1,\dots,u_n)$ est un système générateur,

iii) $(u_1,\dots,u_n)$ est une base de R^n.

Nous terminons ce chapitre par quelques exercices.

3-Exercices.

1-Dans R^3 on considère les vecteurs :

$$u_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \quad u_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \quad u_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} .$$

a)Montrer que le système (u_1,u_2,u_3) est une base de R^3.

b)Exprimer le vecteur $u = \begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}$ dans la base (u_1,u_2,u_3).

2-Soient $u_1 = \begin{pmatrix}t\\1\end{pmatrix}$ et $u_2 = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ deux vecteurs de R^2.

Pour quelles valeurs de t forment-ils une base ?

3-Soit E un sous-ensemble de R^n.On dit que E est un sous-espace vectoriel de R^n si :

-Pour tous u et v de E ,u - v appartient encore à E,

-Pour tout λ réel et tout u de , λu appartient à E.

Montrer que l'ensemble E des vecteurs u dont les coordonnées x_1,x_2 et x_3 vérifient $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ est un sous-espace vectoriel de R^3.

Exhiber une base de E et en déduire sa dimension.

CHAPITRE II
MATRICES

Dorénavant on numérotera les vecteurs en mettant l'indice en haut contrairement à ce qu'on a fait jusqu'à present.

L'objet de ce chapitre est de donner une introduction et une étude assez élémentaires de la notion de matrice réelle.

1-Matrice d'une application linéaire.

Soient $E = R^p$ et $F=R^n$ deux espaces vectoriels et f une application de E dans F.

1.1-Définition.

On dira que f est linéaire si :

i)Pour tous u et v dans E on a : $f(u + v) = f(u) + f(v)$,

ii)pour tout réel λ et tout u dans E on a : $f(\lambda u) = \lambda f(u)$.

Une application linéaire respecte les opérations définies sur les vecteurs.Autrement dit si on connaît les images de u et v on peut en déduire celles de $u + v$ et λu.

1.2-Exemples.

1.2.1-Application linéaire.

On suppose $E = F = R^n$.Pour tout u dans E on pose :

$f(u) = 3u$.

On a alors :

i) $$f(u + v) = 3(u + v) = 3u + 3v = f(u) + f(v),$$

ii) $$f(\lambda u) = 3(\lambda u) = (3\lambda)u = \lambda(3u) = \lambda f(u).$$

1.2.2-Application non linéaire.

Soient $E = F = R$ et posons $f(u) = u^2$.

Cette application n'est pas linéaire car elle ne vérifie pas la propriété ii) de la définition 1.1 (ni i) d'ailleurs). En effet $f(\lambda u) = (\lambda u)^2 = \lambda^2 u^2 = \lambda^2 f(u)$ et ceci est différent de $\lambda f(u)$ en général.

1.3-Representation d'une application linéaire par une matrice.

Soient $(A^1,\dots,A^p)$ une base de R^p , $(B^1,\dots,B^n)$ une base de R^n et $u = x_1 A^1 + \dots + x_p A^p$ un vecteur de R^p.
Si $f : R^p \longrightarrow R^n$ est une application linéaire on a :

$$f(u) = f(\sum_{i=1}^{p} x_i A^i) = \sum_{i=1}^{p} x_i f(A^i)$$

Pour connaître $f(u)$ il suffit donc de connaître $f(A^1),\dots,$ $f(A^p)$ qui sont des vecteurs de R^n et s'expriment dans la base $B^1,\dots,B^n$:

$$f(A^1) = a_1^1 B^1 + \dots + a_n^1 B^n$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$f(A^p) = a_1^p B^1 + \dots + a_n^p B^n$$

ou encore :

$$f(A^1) = \begin{pmatrix} a_1^1 \\ \vdots \\ a_n^1 \end{pmatrix} \quad \dots\dots\dots \quad f(A^p) = \begin{pmatrix} a_1^p \\ \vdots \\ a_n^p \end{pmatrix}$$

Pour déterminer f il suffit de déterminer le "tableau de nombres" :

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_1^p \\ \vdots & & \vdots \\ a_n^1 & \dots & a_n^p \end{pmatrix}$$

qu'on appelle la <u>matrice</u> de f par rapport aux bases (A^i) et (B^j) et qu'on note $M(f;A^i,B^j)$.

Si on change la base (A^i) ou la base (B^j) (ou les deux), la matrice de f change.Nous verrons par la suite comment s'effectue ce changement et illustrerons ça sur quelques exemples.

Nous voyons que la $i^{\text{ème}}$ colonne de la matrice $M(f;A^i,B^j)$ est formée par les coordonnées du vecteur $f(A^i)$ dans la base $(B^1,\dots,B^n)$.

1.4-<u>Exemples.</u>

Soit $f : R^2 \longrightarrow R^3$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ x_1-x_2 \\ 3x_1+x_2 \end{pmatrix}$$

Toute matrice de f aura 2 colonnes et 3 lignes.

a)Calculons la matrice de f par rapport aux bases canoniques de R^2 et R^3 :

On a : $f(e^1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ $f(e^2) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

D'où :

$$M(f;e^i,e'^j) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

b)Cette fois-ci on prendra comme base de R^2 :

$A^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $A^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

On aura :

$$f(A^1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = 2e'^1 + 0e'^2 + 4e'^3$$

$$f(A^2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 0e'^1 + 2e'^2 + 2e'^3$$

et donc : $$M(f;A^i,e'^j) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

c)Enfin on prend :

$A^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $A^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ pour base de R^2 et :

$B^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $B^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $B^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ pour base de R^3.

Pour déterminer la matrice $M(f;A^i,B^j)$ il faut exprimer les vecteurs $f(A^1)$ et $f(A^2)$ dans la base (B^1, B^2,B^3).Pour cela il faut exprimer les vecteurs e'^1,e'^2 et e'^3 dans cette base.

On sait que :

$$\begin{cases} B^1 = e'^1 + e'^2 \\ B^2 = e'^2 + e'^3 \\ B^3 = e'^1 + e'^3 \end{cases}$$

La resolution de ce système donne :

$$\begin{cases} e'^1 = \frac{1}{2}(B^1 - B^2 + B^3) \\ e'^2 = \frac{1}{2}(B^1 + B^2 - B^3) \\ e'^3 = \frac{1}{2}(-B^1 + B^2 + B^3) \end{cases}$$

En repportant ces expressions dans celles de $f(A^1)$ et $f(A^2)$ (déjà calculées en fonction de e'^1, e'^2 et e'^3)on trouve :

$$f(A^1) = -B^1 + B^2 + 3B^3$$

Un calcul analogue au précèdent donne :

$$f(A^3) = 2B^2.$$

Finalement :

$$M(f;A^i,B^j) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

d)Matrice identité : Soit id : $R^n \longrightarrow R^n$ l'application qui à tout u associe u lui même.

Si $(A^i)_{i=1,\dots,n}$ est une base de R^n alors la matrice de id par rapport à cette base est :

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

et est appelée la matrice <u>identité (ou unité)</u> d'ordre n.

Etant donné une matrice :

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_1^p \\ a_n^1 & \dots & a_n^p \end{pmatrix}$$

on peut toujours la considèrer comme associée à une application linéaire f de R^p dans R^n.Il suffit de prendre :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \xrightarrow{f} \begin{pmatrix} a_1^1 x_1 + \dots + a_1^p x_p \\ \vdots \\ a_n^1 x_1 + \dots + a_n^p x_p \end{pmatrix}$$

Au besoin on fera recours à cette correspondance.

Dans la suite on notera une matrice A de la façon suivante :

$A = (a_j^i)$ ou $i = 1,\dots,p$ et $j = 1,\dots,n$ et a_j^i est le céfficient qui se situe à la $i^{\text{ème}}$ colonne et la $j^{\text{ème}}$ ligne.

1.5-<u>Somme et produit par un réel</u>.

Soient $A = (a^i_j)$ et $B = (b^i_j)$ ou $i = 1,\dots,p$ et $j=1,\dots,n$. La somme de A et B est par définition la matrice :

$$A + B = (a^i_j + b^i_j).$$

Par exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

On ne peut sommer que les matrices ayant même nombre de lignes et même nombre de colonnes.La somme des matrices correspond à la somme des applications linéaires i.e :

$$M(f;A^i,B^j) + M(g;A^i,B^j) = M(f + g;A^i,B^j) .$$

Si λ est un réel on définit le produit d'une matrice A par λ comme étant la matrice $\lambda.A$ dont les coéfficients sont les coéfficients de A multipliés par λ.Par exemple :

$$\lambda.\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\lambda & \lambda \\ 0 & 3\lambda \end{pmatrix}$$

On a aussi :

$$M(\lambda f;A^i,B^j) = \lambda M(f;A^i,B^j) .$$

Outre le fait qu'une matrice A à n lignes et p colonnes peut être associée à une application linéaire $f : R^p \longrightarrow R^n$ (relativement à des bases),on peut aussi la considèrer comme la donnée de p vecteurs $A^1,\dots,A^p$ dans R^n.La $i^{\text{ème}}$ colonne étant constituée des composantes du vecteur A^i dans la base canonique. On dira que A est la matrice du système $(A^1,\dots,A^p)$ dans cette base.

Si au lieu de prendre la base canonique,on prend une autre base,les vecteurs $(A^i)_{i=1,\dots,p}$ restant fixes,la matrice change. Là encore on voit que la notion de matrice d'un système de vecteurs n'a de sens que si l'on précise la base dans laquelle on travaille.

Exemple.

Les vecteurs : $A^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $A^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ dans R^2 ont pour matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ par rapport à la base canonique mais :

$$A' = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \text{ dans la base } A'^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} , A'^2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Cette interpretation va nous permettre d'introduire la notion de :

2-Rang d'une matrice.

Soit A une matrice à n lignes et p colonnes.D'après ce qu'on vient de voir A est associée aux vecteurs colonnes $(A^1,\dots,A^p)$.

2.1-Définition.

On appelle rang de A et on note rg(A) le nombre maximum de vecteurs linéairement indépendants que l'on peut extraire de la famille $A^1,\dots,A^p$.

2.2-Exemples.

i)La matrice : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est de rang 2,

ii) " $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ est de rang 1,

iii) " $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est de rang 3.

Si $rg(A) = Inf(n,p)$ où A est une matrice à n lignes et p colonnes, on dira que A est de rang maximum. Par exemple la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ est de rang maximum .}$$

3-<u>Produit de matrices.</u>

On se donne :

-Une base $(A^1,\dots,A^p)$ de R^p,

-une base $(B^1,\dots,B^n)$ de R^n,

-une base $(C^1,\dots,C^q)$ de R^q,

-une application linéaire $f:R^p \longrightarrow R^n$ et une application linéaire $g:R^n \longrightarrow R^q$,

-La matrice $A=(a^i_j)$ de f et la matrice $B=(b^j_k)$ de g par rapport aux bases considérées.

<u>Problème</u> : Trouver la matrice $C = (c^i_k)$ de l'application $h = gof$:

$$\begin{tikzcd} R^p \arrow[r, "f"] \arrow[dr, dashed, "h"'] & R^n \arrow[d, "g"] \\ & R^q \end{tikzcd}$$

Calculons $h(A^i)$ et exprimons le dans la base $(C^1,\dots,C^q)$.

On aura :

$$h(A^i) = gof(A^i) = g\left[f(A^i)\right] \;.$$

Or $\quad f(A^i) = \sum_{j=1}^{n} a^i_j B^j$ et donc $h(A^i) = \sum_{j=1}^{n} a^i_j g(B^j)$,

mais $\quad g(B^j) = \sum_{k=1}^{q} b^j_k C^k$.

D'où : $h(A^i) = \sum_{k=1}^{q} \Big(\sum_{j=1}^{n} a^i_j b^j_k \Big) C^k.$

Finalement : $c^i_k = \sum_{j=1}^{n} b^j_k a^i_j$.

Par définition le produit B.A sera la matrice de l'application $h = g \circ f$, i.e la matrice $C = (c^i_k)$ dont les coéfficients sont donnés par l'egalité ci-dessus en fonction de ceux de A et de B.

Ce produit n'est évidemment possible que si le nombre de colonnes de B est égal au nombre de lignes de A.

Il n'est pas difficile de voir que ce produit vérifie les propriétés suivantes :

i) $C.(B.A) = (C.B).A$,

ii) $C.(B+A) = C.B + C.A$,

iii) $(B+A).C = B.C + A.C$,

iv) $B.(\lambda A) = \lambda(B.A)$,

v) Si A a n lignes et p colonnes on a $I_n.A = A$ et $A.I_p = A$ où I_n et I_p designent les matrices identité respectivement d'ordres n et p.

Nous allons donner un exemple de calcul sur lequel on verra comment on peut procèder de manière pratique. Soient :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On calcule B.A :

$$\begin{array}{ccc} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} & = A \\ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} & = B.A \end{array}$$

On calcule A.B :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = B$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = A.B$$

Sur cet exemple on constate que B.A n'est pas égal à A.B et donc le produit de matrices <u>n'est pas commutatif</u>.

De manière pratique le produit de B et A se fait de la façon suivante :

$$\begin{pmatrix} & a_1^i & \\ & \vdots & \\ & a_j^i & \\ & \vdots & \\ & a_n^i & \end{pmatrix} = A$$

$$B = \begin{pmatrix} \\ b_k^1 \ldots \; b_k^j \ldots \; b_k^n \\ \\ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \\ \qquad \qquad c_k^i \qquad \\ \\ \end{pmatrix} = C = B.A$$

Pour avoir le coéfficient c_k^i on multiplie terme à terme la $k^{\text{ème}}$ ligne de B et la $i^{\text{ème}}$ colonne de A et on somme (voir ci-dessus).

<u>Autre exemple.</u>

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 8 & 4 \end{pmatrix} = A.B$$

Matrices inversibles.

Soit A une matrice carrée d'ordre n.On dira que A est inversible s'il existe une matrice carrée d'ordre n notée A^{-1} telle que : $A.A^{-1} = I_n$ et $A^{-1}.A = I_n$

3.1-Exercice.

Soient A et M deux matrices carrées d'ordre n avec M inversible.Démontrer les assertions suivantes :

i)A est inversible si et seulement si rg(A) = n ,

ii)Si A est inversible on a $(A.M)^{-1} = M^{-1}.A^{-1}$,

iii)A est inversible si et seulement si A.M est inversible,

iv)A est inversible si et seulement si les vecteurs colonnes de A sont linéairement indépendants.

Soit $f : R^n \longrightarrow R^n$ une application linéaire dont A est la matrice relativement à une base.Alors A est inversible si et seulement si f admet une application inverse f^{-1} . i.e vérifiant $f o f^{-1} = f^{-1} o f$ =l'identité de R^n :

$$\begin{tikzcd}
R^n \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f^{-1}"'] \arrow[dr, dashed, "id"] & R^n \arrow[d, "f^{-1}"] \\
R^n \arrow[r, "f"] & R^n
\end{tikzcd}$$

Donnons quelques exemples :

Soit $f : R^3 \longrightarrow R^3$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 \end{pmatrix}$$

Cette application a pour matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$ qui n'est pas inversible car f ne l'est pas. En effet f envoie les vecteurs distincts $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ sur le même vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Elle n'est donc pas injective et à fortiori n'est pas inversible.

Considérons maintenant l'application :

$$h : R^2 \longrightarrow R^2$$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2x_1+x_2 \\ x_1+x_2 \end{pmatrix}$$

qui a pour matrice par rapport à la base canonique :

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

La matrice inverse de B est :

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

qui n'est rien d'autre que la matrice relativement à la base canonique de l'application inverse h^{-1} de h.

Nous donnerons dans le chapitre qui suit une méthode d'inversion d'une matrice. Nous traiterons cependant ici en exercice quelques cas particuliers.

4-<u>Exercices.</u>

1-Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

a) Montrer que A vérifie la relation :

$$A^2 - (a + d).A + (ad - bc).I_2 = 0.$$

b) Montrer que si $(ad - bc)$ est non nul alors :

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

2-Soit $f : R^2 \longrightarrow R^2$ une application linéaire dont la la matrice par rapport à la base canonique de R^2 est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} .$$

a)Montrer qu'il y a exactement deux réels λ_1 et λ_2 pour lesquels il existe deux vecteurs u^1 et u^2 tous les deux non nuls et tels que :

$$f(u^1) = \lambda_1 u^1$$

$$f(u^2) = \lambda_2 u^2 \qquad .$$

b)Montrer que (u^1,u^2) est une base de R^2 et donner la matrice de f par rapport à cette base.

CHAPITRE III
INVERSION D'UNE MATRICE

Nous donnerons dans ce chapitre une méthode d'inversion dont le principe consiste à multiplier la matrice identité par une suite de matrices "simples" et que l'on obtient à partir de la matrice donnée.

Tout le long de ce chapitre les matrices considèrées seront carrées dont l'ordre sera noté n.

1-Matrices de travail.

1.1-Définitions.

Soient r un entier tel que $1 \leqslant r \leqslant n$ et x un nombre réel. On définit la matrice $T(x;r)$ comme étant la matrice dont les coéfficients t^i_j vérifient :

$$t^i_j = \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq j \\ 1 \text{ si } i = j \neq r \\ x \text{ si } i = j = r \end{cases}$$

Exemples.

i)On prend n=5 et $T(x;4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

ii)On prend n=2 et $T(\sqrt{2};1) = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Si r et s sont deux entiers distincts compris entre 1 et n on définit la matrice $T'(x;r,s) = (t'^i_j)$ par :

$$t'^i_j = \begin{cases} 1 \text{ si } i=j \\ x \text{ si } i=r \text{ et } j=s \\ 0 \text{ partout ailleurs} \end{cases}$$

Exemples.

i)On prend n=4 et $T'(x;3,2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

ii) " n=3 et :

$$T'(-11;2,1) = \begin{pmatrix} 1 & -11 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Toute matrice $T(x;r)$ (resp $T'(x;r,s)$) est appelée matrice de travail de type I (resp de type II).

1.2-Quelques propriétés.

1.2.1-Multiplication d'une matrice de travail par une matrice quelconque.

Soit $A = (a^i_j)$ une matrice.

i)Multiplication par une matrice de travail de type I.

$$\begin{pmatrix} a^1_1 \ldots\ldots a^n_1 \\ \ldots\ldots\ldots \\ a^1_n \ldots\ldots a^n_n \end{pmatrix} = A$$

$$T(x;r) = \begin{pmatrix} 1\ 0 & & \\ 0\ 1\ 0 \ldots & & \\ 0\ 0 \ldots\ldots x\ 0 \ldots & & \\ & & \\ 0\ 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a^1_1 \ldots\ldots a^n_1 \\ \ldots\ldots\ldots \\ xa^1_r \ldots xa^n_r \\ \ldots\ldots\ldots \\ a^1_n \ldots\ldots a^n_n \end{pmatrix} = T(x;r).A$$

Règle.

Pour multiplier une matrice A par une matrice de travail $T(x;r)$ on multiplie la $r^{\text{ème}}$ligne de A par x.

Exemple.

Si $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $T(x;2)$ est d'ordre 3 on aura :

$$T(x;2).A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3x & 4x & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ii) <u>Multiplication par une matrice de travail de type II.</u>

Soit $T'(x;r,s)$ une matrice de travail de type II.

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots\cdots\cdots & a_1^n \\ & \cdots\cdots\cdots & \\ a_n^1 & \cdots\cdots\cdots & a_n^n \end{pmatrix} = A$$

$r^{\text{ème}}$colonne

$$s^{\text{ème}}\text{ligne}\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \cdots & \cdots\cdots\cdots \\ & & \\ 0 \cdots & x & \cdots 1 \cdots\cdots \\ & \cdots\cdots\cdots & \\ 0 & \cdots\cdots\cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots\cdots\cdots & a_1^n \\ & \cdots\cdots\cdots & \\ a_s^1+xa_r^1 & \cdots\cdots\cdots & a_s^n+xa_r^n \\ & \cdots\cdots\cdots & \\ a_n^1 & \cdots\cdots\cdots & a_n^n \end{pmatrix} = T'(x;r,s).A$$

<u>Règle.</u>

Pour faire le produit $T'(x;r,s).A$, on rajoute à la $s^{\text{ème}}$ ligne de A x fois sa $r^{\text{ème}}$ligne.

<u>Exemple.</u>

Si $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $T'(x;2,1)$ d'ordre 3 on aura :

$$T'(x;2,1).A = \begin{pmatrix} 2+3x & -1+4x & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1.2.2-<u>Inversion d'une matrice de travail</u>.

On vérifie facilement les assertions suivantes :

i)$T(x;r)$ est inversible si et seulement si x est non nul. Son inverse est la matrice de travail $T(1/x;r)$

ii)$T'(x;r,s)$ est inversible pour tout x et a pour inverse la matrice de travail $T'(-x;r,s)$.

Le lecteur est invité à faire toutes les démonstrations.

Exemples.

Si $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ alors $T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$

$$T' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{alors } T'^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2-Inversion d'une matrice.

Considèrons maintenant une matrice A de rang maximum. Elle est donc inversible. On a alors le :

2.1-Théorème.

Il existe des matrices de travail (de type I ou II) M_1, $M_2, \ldots, M_k$ telles que :

$$M_k . M_{k-1} \ldots M_1 . A = I_n \; .$$

La démonstration de ce théorème est longue et assez téchnique. Nous nous contenterons de la faire sur quelques exemples.

i)Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Il est clair que A est inversible.

On veut donc transformer A en I_2 en la multipliant successivement par des matrices de travail convenablement choisies. Commençons par transformer la $1^{ère}$ colonne en $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. On multiplie A par :

$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix}$; on obtient $N_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$.

Ensuite on prend $M_2 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et on obtient :

$$N_2 = M_2.M_1.A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} .$$

Reste à transformer la $2^{\text{ème}}$ colonne en $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Pour cela on multiplie par :

$$M_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et on trouve :}$$

$$N_3 = M_3.M_2.M_1.A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \text{ et } N_4 = M_4.\ M_3.M_2.M_1.A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

ii)Prenons un autre exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Cette matrice est inversible.On procède comme précèdemment et on dispose les calculs de la façon suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = A = N_0$$

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = N_1$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = N_2$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = N_3$$

$$M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = N_4$$

$$M_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = N_5 = I_3$$

2.2-<u>Méthode d'inversion</u>.

Soit A une matrice carrée inversible d'ordre n et d'inverse A^{-1}.D'après le théorème 2.1 il existe des matrices de travail $M_1,\dots,M_k$ telles que $M_k.M_{k-1}\dots M_1.A = I_n$.On a donc nécéssairement $A^{-1} = M_k.M_{k-1}\dots M_1$.Pour déterminer cette matrice on disposera les calculs comme suit :

-Une $1^{\text{ère}}$colonne dans laquelle on mettra successivement $M_1,\dots,M_k$,

-une $2^{\text{ème}}$ colonne dans laquelle on mettra $A=N_0$,$N_1=M_1.A$, $N_2=M_2.N_1$,$N_3 = M_3.N_2,\dots,N_k=M_k.N_{k-1} = M_k.M_{k-1}\dots.M_1.A = I_n$,

-enfin une $3^{\text{ème}}$ colonne reservée aux matrices : $A_0 = I_n$, $A_1=M_1.I_n=M_1$,$A_2=M_2.M_1$,$A_3=M_3.M_2.M_1,\dots,A_k = M_k.M_{k-1}\dots.M_1 = A^{-1}$.

(Voir ci-dessus) :

$$\begin{array}{c|c|c}
 & \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} =A=N_0 & \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} =I_n=A_0 \\
M_1 = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} =N_1 & \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} =M_1.I_n=A_1 \\
M_2 = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} =N_2 & \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} =A_2 \\
\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots
\end{array}$$

Reprenons les exemples qui précèdent.

i) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = N_0 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A_0 = I_2$$

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} = N_1 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix} = A_1$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} = N_2 \qquad \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix} = A_2$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = N_3 \qquad \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = A_3$$

$$M_4 = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = N_4 \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = A_4 = A^{-1}$$

ii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = A = N_0 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A_0$$

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = N_1 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A_1$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = N_2 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = A_2$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = N_3 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = N_3$$

$$M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Bigg| \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = N_4 \quad \Bigg| \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = A_4$$

$$M_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Bigg| \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = N_5 \quad \Bigg| \quad \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = A_5 = A^{-1}$$

2.3-Quelques applications.

2.3.1-Resolution d'un système linéaire.

Soit le système linéaire à n équations à n inconnues :

$$\begin{cases} a_1^1 x_1 + \ldots . a_1^n x_n = b_1 \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_n^1 x_1 + \ldots . a_n^n x_n = b_n \end{cases}$$

On peut encore l'écrire sous la forme matricielle :

$$A.X = B \qquad (E)$$

où : $A = (a_j^i)$ $\qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $\qquad$ et $\quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$.

i)Si $rg(A) < n$,l'équation (E) a une infinité de solutions ou n'a pas de solution du tout.Exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

a une infinité de solutions (x_1 quelconque et $x_2 = 1 - x_1$).

Par contre :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

n'a pas de solution du tout.

ii)Si $rg(A) = n$, l'équation (E) a une solution unique donnée par : $X = A^{-1}.B$.

Pour connaître X il suffit donc de faire le produit $A^{-1}.B$ et d'après 2.2 cela revient à calculer successivement les matrices $M_1.B, M_2.M_1.B, \ldots, M_k.M_{k-1}.\ldots.M_1.B$.

Exemples.

i)Résoudre le système :

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$$

On a $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = A = N_0 \qquad \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = B = B_0$$

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} = N_1 \qquad \begin{pmatrix} 3 \\ 1/2 \end{pmatrix} = B_1$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} = N_2 \qquad \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = B_2$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = N_3 \qquad \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1 \end{pmatrix} = B_3$$

$$M_4 = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = N_4 \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = B_4 = X$$

La solution du système est donc : $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

ii)Résoudre le système :

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 2 \\ x_1 + X_2 = 4 \\ x_2 + x_3 = -2 \end{cases}$$

On a : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$

La matrice A est inversible.On multiplie B successivement par M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = A = N_0 \qquad \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = B = B_0$$

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = N_1 \qquad \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = B_1$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = N_2 \qquad \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = B_2$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = N_3 \qquad \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = B_3$$

$$M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = N_4 \qquad \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = B_4$$

$$M_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = N_5 \qquad \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = B_5 = X$$

La solution du système est donc :

$$A = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} .$$

2.2.3-Changement de base.

Soit u un vecteur de R^n dont la matrice A par rapport à la base $(A^1,\dots,A^n)$ est :

$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} .$$

Soit $(B^1,\dots,B^n)$ une autre base de R^n telle que pour tout $i=1,\dots,n$ levecteur B^i a pour matrice dans la base $(A^1,\dots,A^n)$:

$$B^i = \begin{pmatrix} b_1^i \\ \vdots \\ b_n^i \end{pmatrix} .$$

Problème.

Quelle est la matrice V de u dans la base $(B^1,\dots,B^n)$?

Soit $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ .On a :

$$u = \sum_{i=1}^{n} v_i B^i = \sum_{i=1}^{n} v_i \sum_{j=1}^{n} b_j^i A^j = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} b_j^i v_i \; A^j .$$

D'autre part : $u = \sum_{i=1}^{n} u_j A^j$ .D'où l'on déduit :

$$u_j = \sum_{i=1}^{n} b_j^i v_i$$ .Ceci signifie : $U = B.V$.

Or B est inversible car ses vecteurs colonnes forment une base.

On obtient donc $V = B^{-1}.U$.

Exemple.

Soit $u = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ dans la base canonique de R^2.Considérons les vecteurs $B^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $B^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (qui forment une base).Pour déterminer la matrice de u dans la base (B^1,B^2) on multiplie successivement la matrice $\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ par M_1,M_2,M_3,M_4 (qu'on a déjà considérées); on trouve $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

3-<u>Exercices</u>.

1-Pour quelles valeurs de t la matrice suivante est-elle inversible ?

$$A = \begin{pmatrix} t & 1 \\ 1 & t \end{pmatrix}$$

Donner la matrice inverse quand elle existe.

2-a) Inverser la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

b) Résoudre le système linéaire :

$$\begin{cases} 2x_1 - x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

et donner la matrice du vecteur $u = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ dans la base :

$$B^1 = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} \qquad B^2 = \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} \qquad B^3 = \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} .$$

CHAPITRE IV

REGIONNEMENT DU PLAN. CONVEXITE.

1-Repérage dans le plan.

1.1-Introduction.

Soient O un point fixe du plan et $(\vec{i},\vec{j})$ une base de l'espace vectoriel V_2 (Cf chp I). On choisira l'origine des representants de $\vec{i}$ et $\vec{j}$ en O :

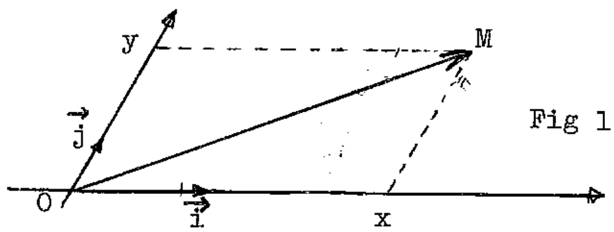


Fig 1.1

Le point O étant fixé, tout point M du plan définit un vecteur $\overrightarrow{OM}$ et un seul et inversement. Mais pour connaître $\overrightarrow{OM}$ il suffit de connaître son expression dans la base $(\vec{i},\vec{j})$ i.e le couple (x,y) tel que : $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

On dira que (x,y) sont les <u>coordonnées du point M</u> dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$. Bien-entendu (x,y) dépend à la fois de l'origine O et de la base $(\vec{i},\vec{j})$.

1.2-Changement de coordonnées.

On considère deux repères $(O;\vec{i},\vec{j})$ et $(O';\vec{i}',\vec{j}')$. On note (x,y) et (x',y') les coordonnées de M respectivement dans $(O;\vec{i},\vec{j})$ et $(O';\vec{i}',\vec{j}')$ et (x_o,y_o) celles de O' dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

<u>Problème.</u>

Calculer (x',y') en fonction de (x,y) et (x_o,y_o).

Ceci revient à donner l'expression du vecteur $\overrightarrow{O'M}$ dans la base $(\vec{i}',\vec{j}')$. On a :

$\overrightarrow{O'M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OO'}$ (R) qui donne :

$x'\vec{i}' + y'\vec{j}' = (x - x_o)\vec{i} + (y - y_o)\vec{j}$

Si $\vec{i}' = \vec{i}$ et $\vec{j}' = \vec{j}$ on aura :

$$\boxed{x' = x - x_o \quad \text{et} \quad y' = y - y_o}$$

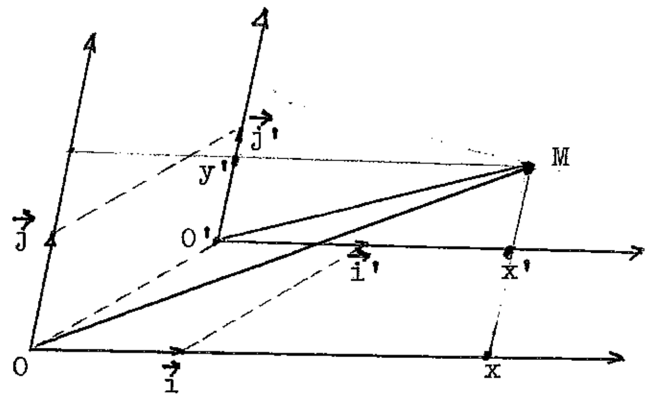


Fig 1.2

Dans ce cas les formules de changemnet de coordonnées sont simples parce que la base reste fixe.

Dans le cas général soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ la matrice de $(\vec{i}', \vec{j}')$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.La relation (R) s'écrit matriciellement :

$$A.\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_o \\ y_o \end{pmatrix}$$

dont la résolution donne :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} x - x_o \\ y - y_o \end{pmatrix} \qquad (R') .$$

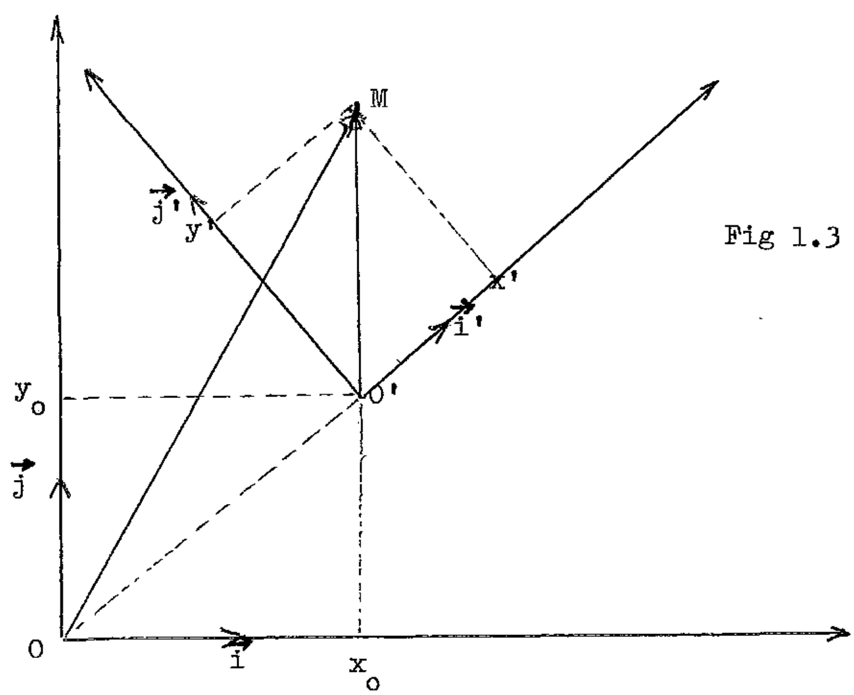


Fig 1.3

La relation (R') peut encore s'écrire sous la forme explicite suivante :

$$\boxed{x' = \frac{d(x - x_0) - b(y - y_0)}{ad - bc} \; ; \; y' = \frac{a(y - y_0) - c(x - x_0)}{ad - bc}}$$

<u>Exemple.</u>

Soit M le point de coordonnées (2,3) dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$. Donnons ses coordonnées dans le repère $(O';\vec{i'},\vec{j'})$ où O' a pour coordonnées (1,1) dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ et la matrice de $(\vec{i'},\vec{j'})$ dans la base $(\vec{i},\vec{j})$ est : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

D'après la relation (R') on a :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 2 - 1 \\ 3 - 1 \end{pmatrix} .$$

Or $\quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ et donc $\quad x' = -1 \quad$ et $\quad y' = 3$.

(voir Fig 1.4)

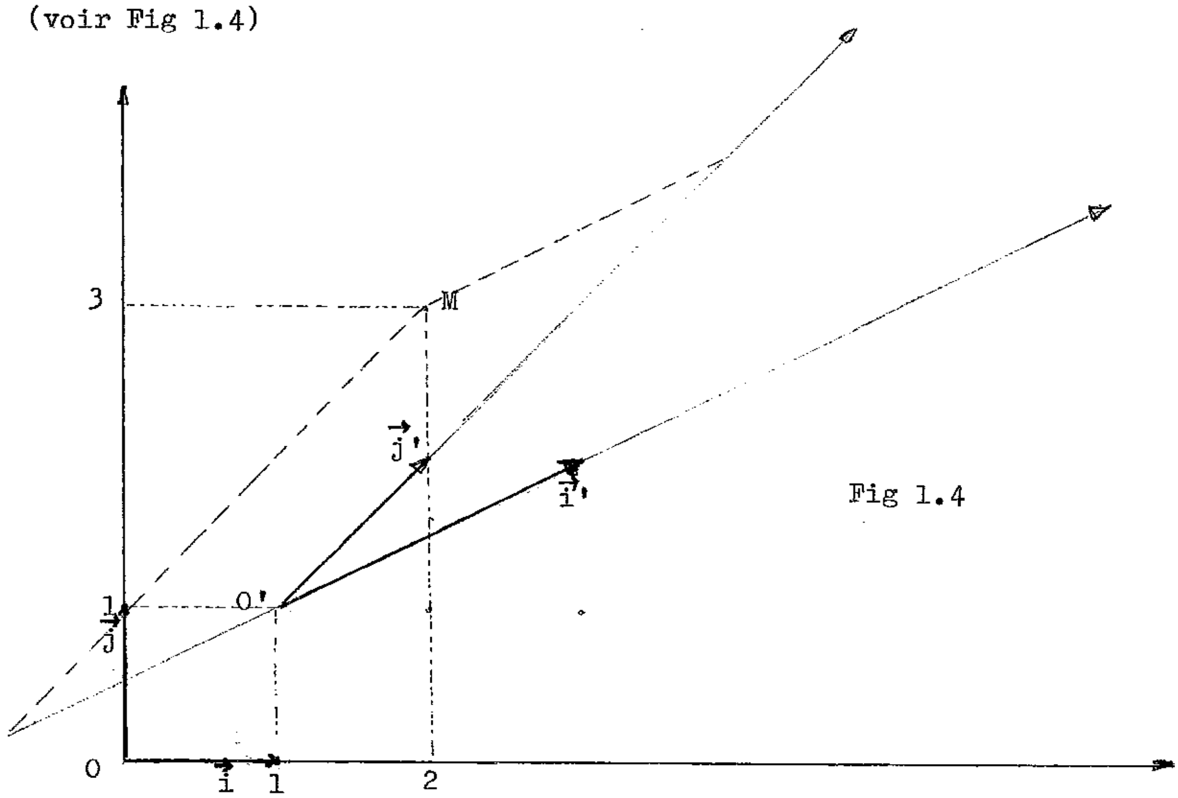


Fig 1.4

2-Régionnement du plan.

2.1-Equation d'une droite dans le plan.

Soient A un point et $\vec{u}$ un vecteur du plan. La droite passant par A et de direction $\vec{u}$ est l'ensemble des points M du plan vérifiant:

$\vec{AM} = t\vec{u}$ (E') où t est un réel

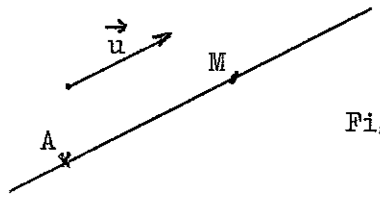


Fig 2.1

Si (x_o, y_o) sont les coordonnées de A dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ et $\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$ la matrice de $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i},\vec{j})$, l'égalité (E') devient :

$$\begin{cases} x - x_o = t\alpha & (1) \\ y - y_o = t\beta & (2) \end{cases}$$

En multipliant (1) par β et (2) par α et en faisant la différence membre à membre on obtinet :

$$\beta(x - x_o) - \alpha(y - y_o) = 0 \quad \text{c'est-à-dire :}$$

$$\beta x - \alpha y + \alpha y_o - \beta x_o = 0 .$$

On pose $a = \beta$, $b = -\alpha$ et $c = \alpha y_o - \beta x_o$; l'équation ci-dessus s'écrit alors :

$\boxed{ax + by + c = 0}$ (E) avec a ou b non nul car le vecteur $\vec{u}$ est non nul.

On dira que (E) est l'équation de cette droite, qu'on notera D, dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Inversement toute relation du type : $ax + by + c = 0$ avec a et b non tous nuls définit une droite D dans le plan.

Exemples.

i)L'équation $x = c$ définit une droite D_1 parallèle à $\vec{j}$.De même l'équation $y = c'$ définit une droite D_2 parallèle à $\vec{i}$.

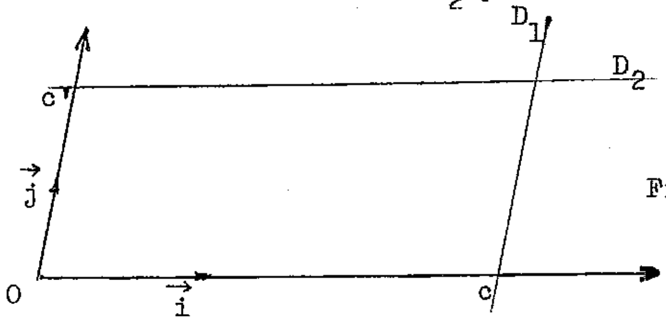


Fig 2.2

ii)L'équation $x + y - 2 = 0$ définit une droite D (voir Fig 2.3).

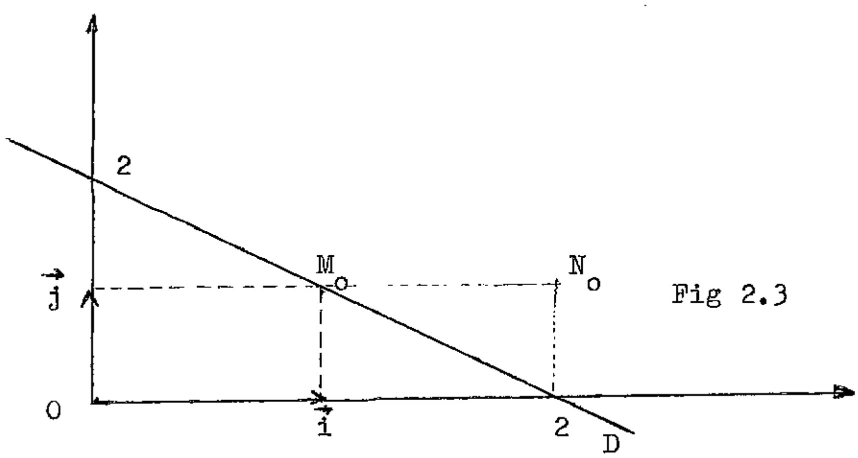


Fig 2.3

Tout point M sur D a ses coordonnées (x,y) liées par la relation : $x + y - 2 = 0$ par exemple le point $M_o(1,1)$.Par contre $N_o(2,1)$ n'est pas sur D car $2 + 1 - 2$ n'est pas égal à 0.

2.2-Partage du plan.

2.2.1-cas particulier.

La droite D_1 d'équation $x = c$ partage le plan en deux demi-plans (I) et (II) (fermés ou ouverts suivant qu'on y inclut D_1 ou non).Le demi-plan férmé (resp ouvert) (I) est défini par $x \geqslant c$ (resp $x > c$).De même le demi-plan férmé (resp ouvert) (II) est défini par $x \leqslant c$ (resp $x < c$).L'intersection des deux demi-plans férmés (I) et

(II) est bien-sûr la droite D_1.

Tout ce qu'on vient de voir pour la droite D_1 se fait de manière analogue pour D_2 .

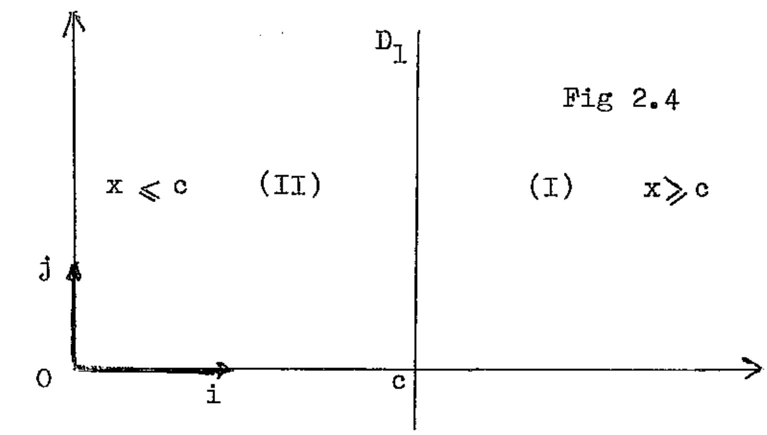


Fig 2.4

De manière générale toute droite D du plan définit deux demi-plans (I) et (II):

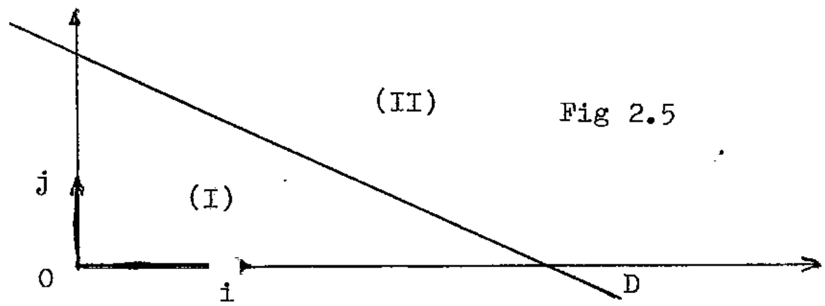


Fig 2.5

Soit $ax + by + c = 0$ l'équation de D.On a la :

2.2.2-<u>Proposition</u>.

L'expression $E = ax + by + c$ a un signe constant dans le demi-plan (I) et le signe contraire dans le demi-plan (II).

Pour démontrer cette proposition on fera un changement de repère de façon à se ramener au cas particulier de 2.2.1. On supposera que ni a ni b ne sont nuls et donc la droite D coupe l'axe Ox en un point O' de coordonnées $(-c/a,0)$ qu'on prendra comme origine du nouveau repère. La base $(\vec{i}\,',\vec{j}\,')$ sera choisie de telle sorte que $\vec{i}\,'$ soit porté par D; par exemple :

$$\vec{i}\,' = \begin{pmatrix} 1 \\ -a/b \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{j}\,' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$ dans la base $(\vec{i},\vec{j})$. Les coordonnées (x,y) d'un point M dans $(O;\vec{i},\vec{j})$ et celles (x',y') dans $(O';\vec{i}\,',\vec{j}\,')$ sont alors liées par la relation :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c/a \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -a/b & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

(voir 1.2 changement de repère). On a donc :

$$\boxed{\begin{aligned} x &= x' - c/a \\ y &= (-a/b)x' + y' \end{aligned}}$$

et en remplaçant dans l'expression E on obtient :

$$\boxed{E = by'.}$$

On voit donc que E est du signe de b pour $y' > 0$ et du signe contraire à b pour $y' < 0$. Ce qui montre bien que le fait d'être dans le demi-plan (I) ou le demi-plan (II) ne dépend que du signe de l'expression E.

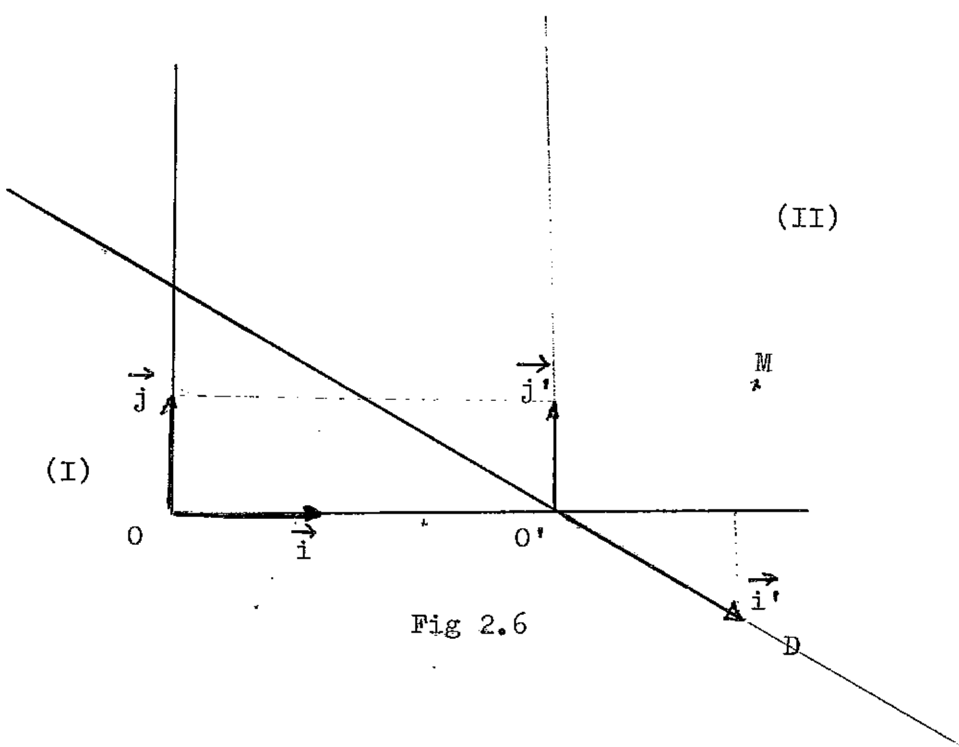


Fig 2.6

Exemple.

Soit D la droite d'équation $2x + y - 3 = 0$.

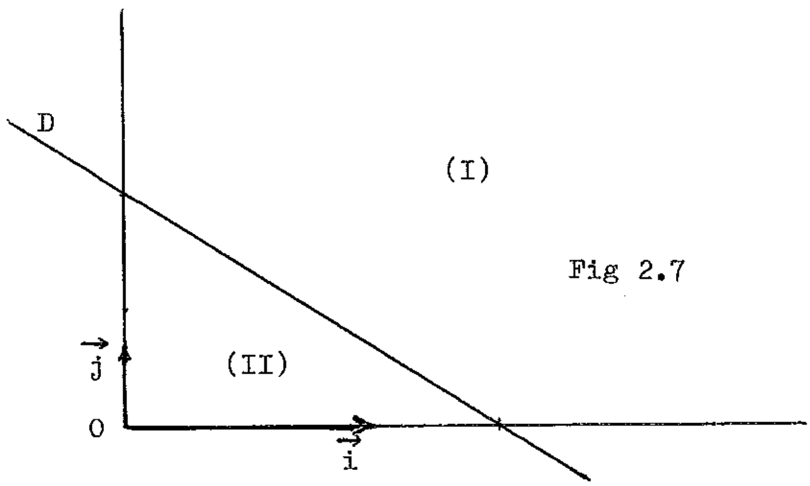


Fig 2.7

Cette droite partage le plan en deux demi-plans (I) et (II). Pour déterminer le signe de $E = 2x + y -3$, il suffit en vertu de la proposition 2.2.2 de voir quel est son signe quand le point M est confondu avec l'origine O des coordonnées. On trouve en remplaçant donc (x,y) par $(0,0)$: $E = -3$. D'où :

$2x + y - 3 < 0$ si $M(x,y)$ est dans le demi-plan (II),

$2x + y - 3 > 0$ si $M(x,y)$ est dans le demi-plan (I),

$2x + y - 3 = 0$ si $M(x,y)$ est sur la droite D.

Exercice.

Déterminer la partie du plan pour laquelle on a :

$x + y \leqslant 3$.

Solution.

Cette inégalité est équivalente à $x + y - 3 \leqslant 0$ qui est vérifiée quand on prend $x = 0$ et $y = 0$ i.e l'origine est dans la partie cherchée qui d'après la proposition 2.2.2 n'est rien d'autre que le demi-plan férmé contenant l'origine O. (voir Fig 2.8).

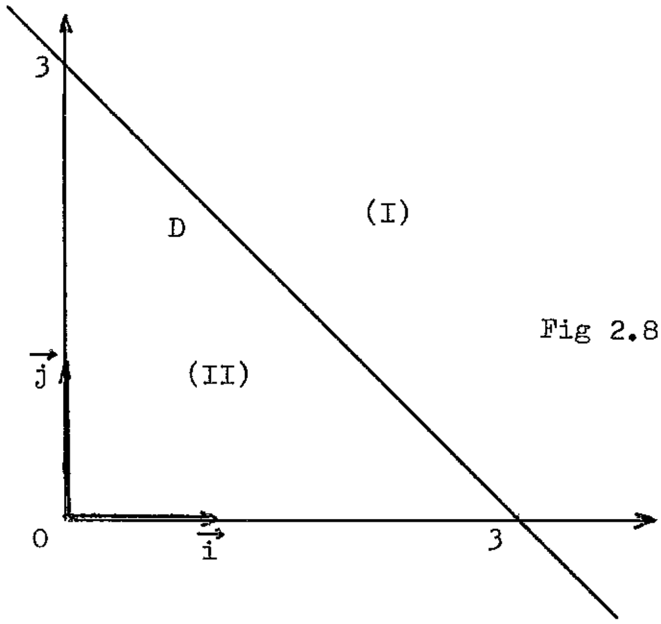


Fig 2.8

2.3-Régionnement.

Nous nous contenterons d'étudier cette partie sur un exemple.

Soit à déterminer les points du plan pour lesquels on a :

$$\begin{cases} y \leqslant 2 & (1) \\ x + y \leqslant 5 & (2) \\ -x + y + 1 \geqslant 0 & (3) \end{cases}$$

L'inégalité (1) donne le demi-plan férmé suivant (non hachuré) :

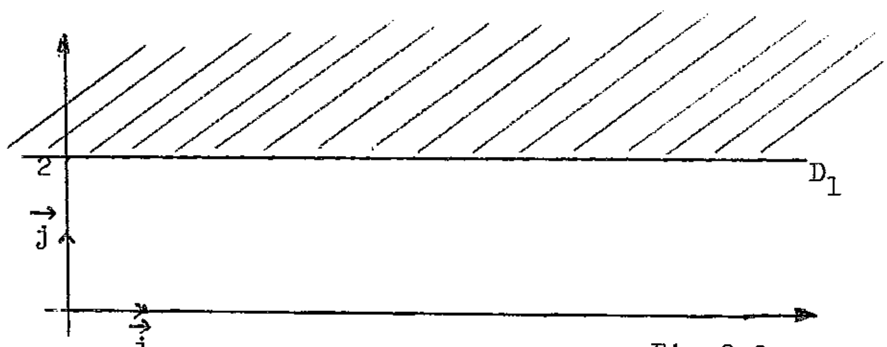


Fig 2.9

L'inégalité (2) donne :

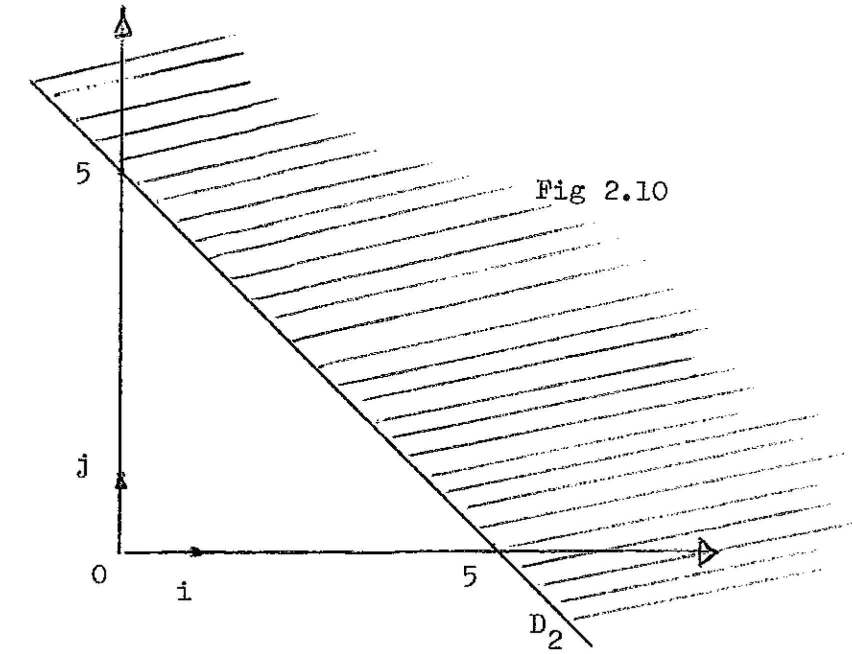


Fig 2.10

Et enfin l'inégalité (3) donne :

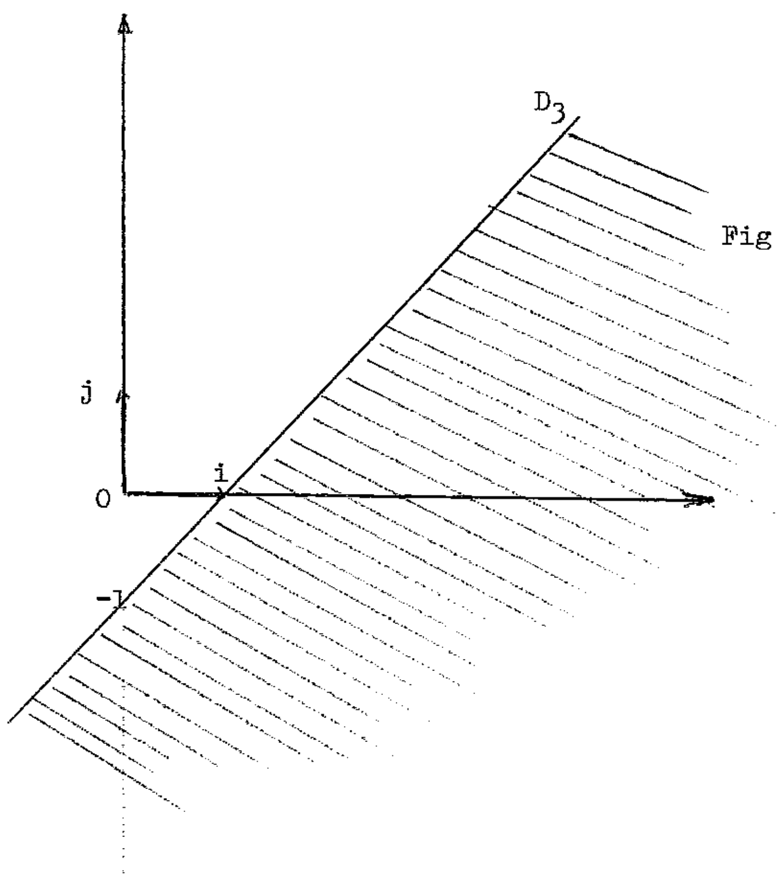


Fig 2.11

Mais les coordonnées (x,y) de M doivent satisfaire simultanément (1),(2) et (3).Le point M doit donc appartenir à l'intersection des 3 demi-plans que l'on vient de construire(Voir Fig 2.12).

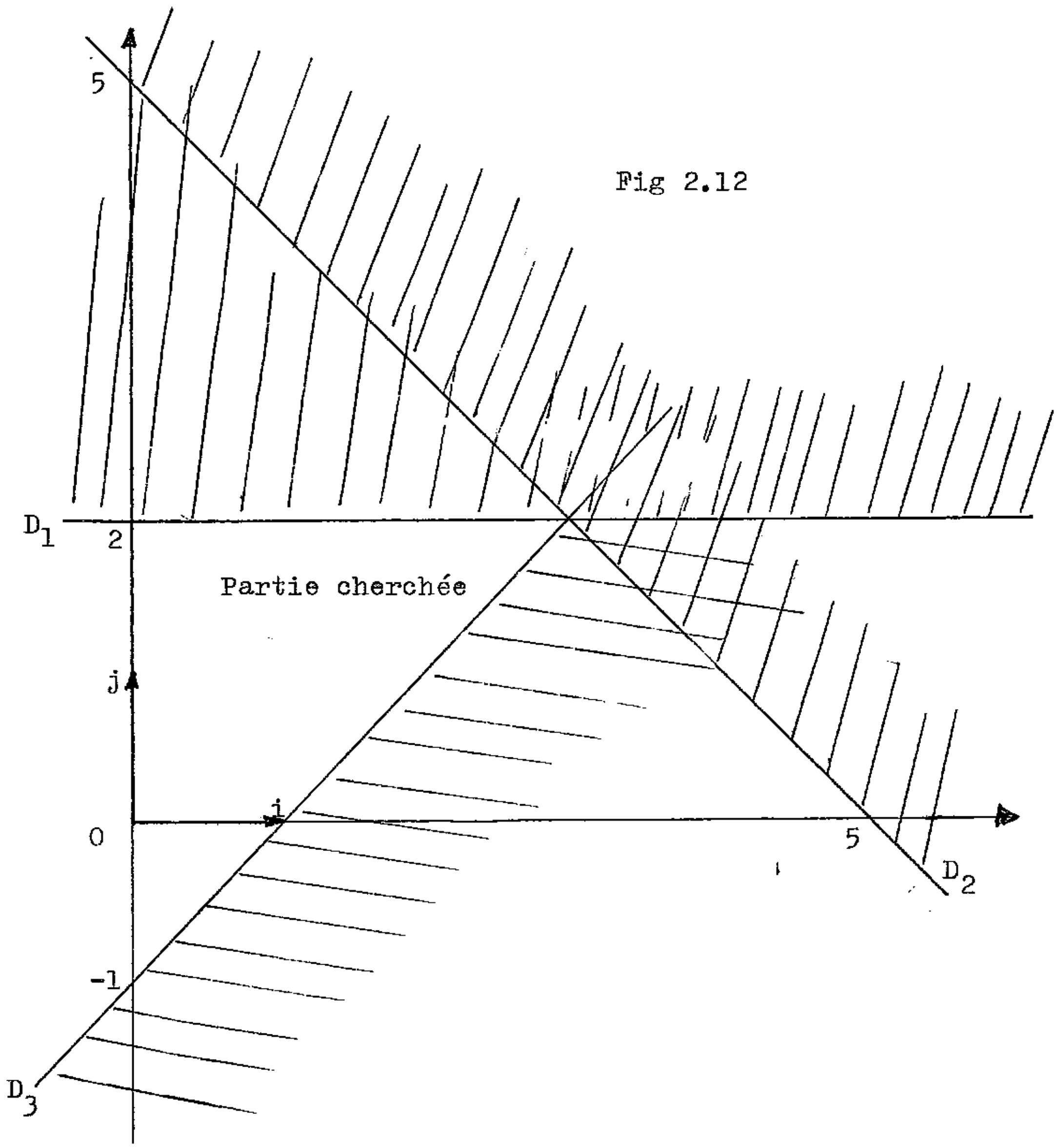


Fig 2.12

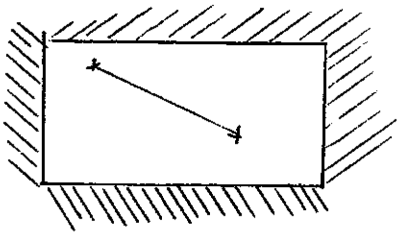
3-Convexité.

Soit C une partie du plan.

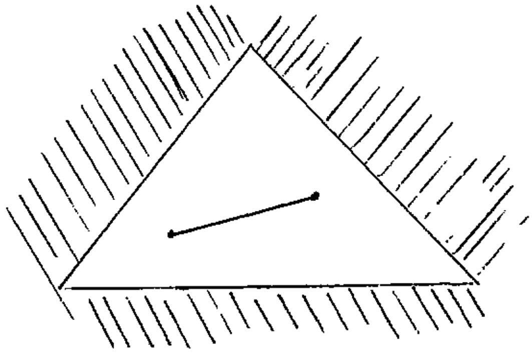
3.1-Définition.

On dira que C est convexe si pour tout couple de points M et N le segment MN est contenu tout entier dans C.

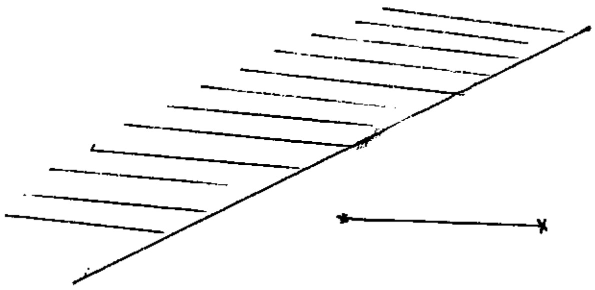
3.2-<u>Exemples</u>.



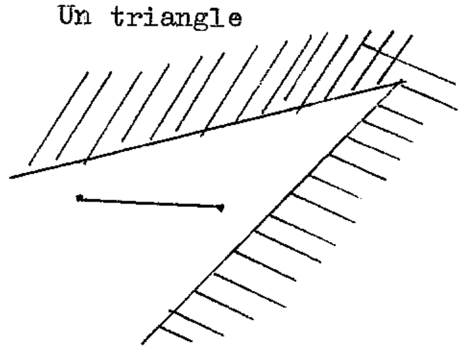
Un rectangle



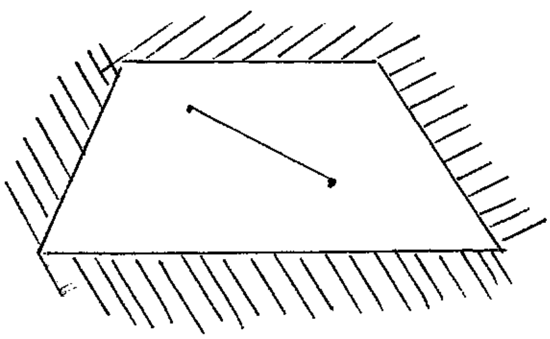
Un triangle



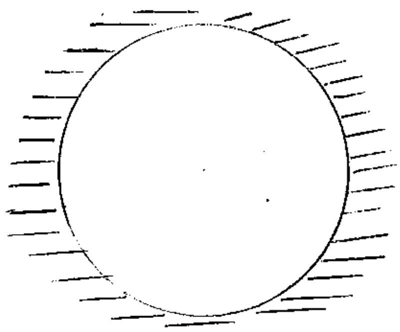
Un demi-plan



Un cône



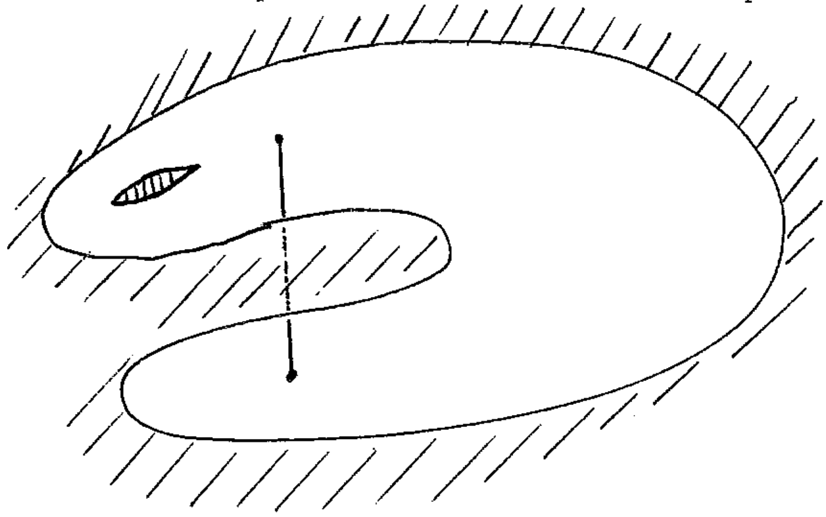
Un trapèze

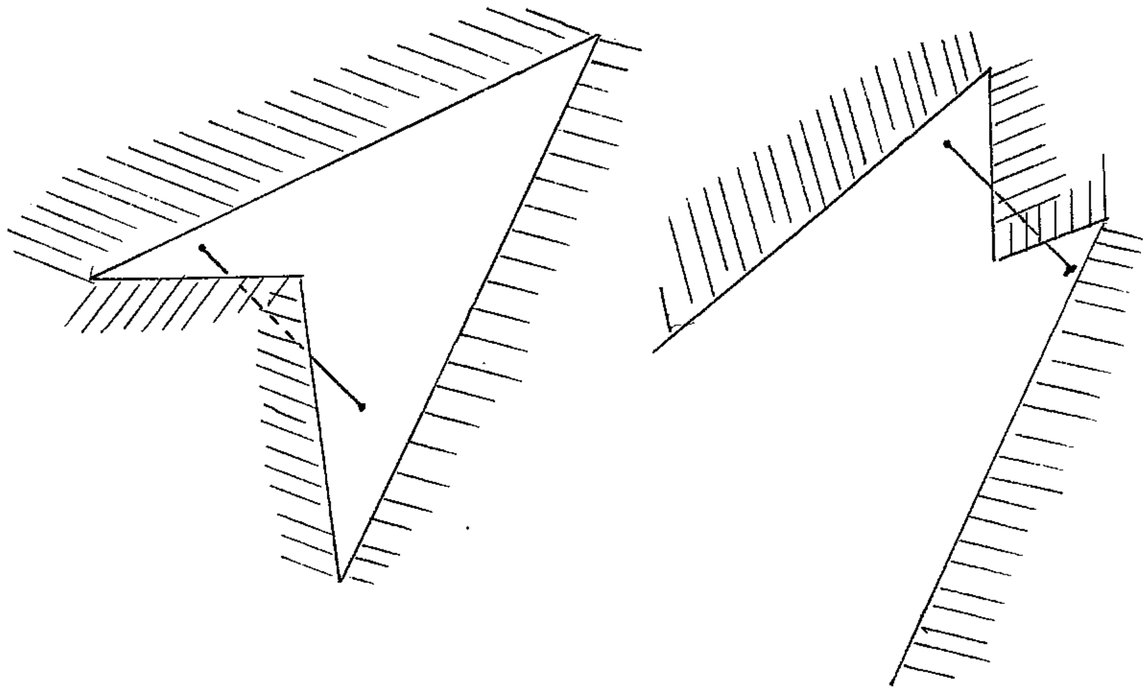


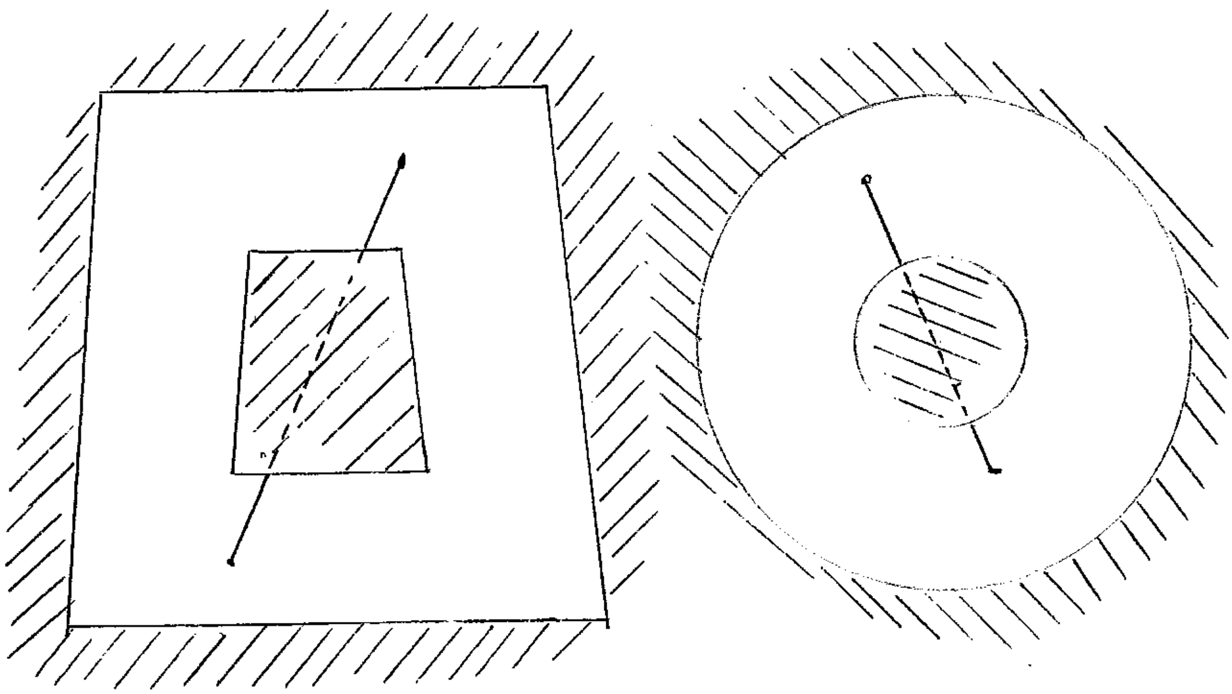
Un disque

sont des parties convexes du plan.

Par contre les parties suivantes ne le sont pas.





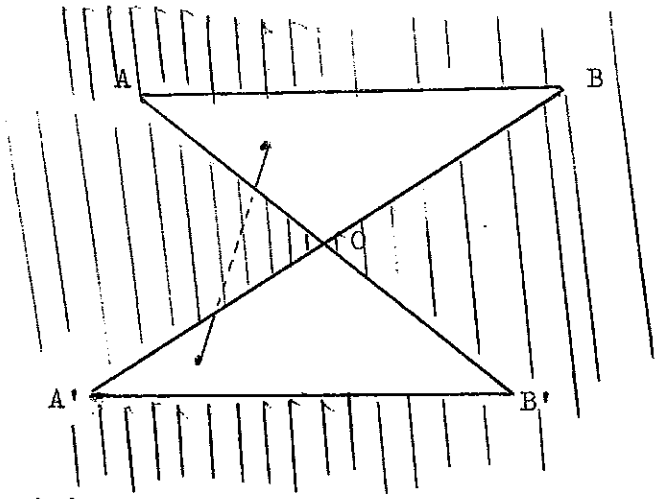


Il est facile de montrer la :

3.3-Proposition.

L'intersection d'un nombre fini de parties convexes est convexe.

Ce resultat ne reste pas vrai pour la réunion. En effet les triangles OAB et OA'B' sont convexes mais leur réunion ne l'est pas.



Soit $(O;\vec{i},\vec{j})$ un repère du plan. On sait que les coordonnées (x,y) d'un point M dans ce repère sont les coordonnées de $\overrightarrow{OM}$ dans la base $(\vec{i},\vec{j})$.

Soient $M_1,\dots,M_k$ k points du plan de coordonnées respectives $(x_1,y_1),\dots,(x_k,y_k)$.

3.4-Définition.

On appelle combinaison linéaire convexe des points $M_1,\dots,M_k$, tout point M défini par :

$$\overrightarrow{OM} = \alpha_1\overrightarrow{OM_1} + \alpha_2\overrightarrow{OM_2} + \dots + \alpha_k\overrightarrow{OM_k}$$

où $\alpha_1,\dots,\alpha_k$ sont des réels positifs vérifiant $\alpha_1 + \dots + \alpha_k = 1$.

L'ensemble de toutes les combinaisons linéaires convexes des points $M_1,\dots,M_k$ est une partie du plan appelée l'enveloppe convexe de ces points.On peut facilement montrer que l'enveloppe convexe de deux points est exactement le segment formé par ces deux points. Ce qui donne une :

3.5-Autre définition de la convexité.

On dira qu'une partie C du plan est convexe si toute combinaison linéaire convexe de deux points quelconques de C appartient à C.

Nous donnerons quelques exmples en exercices pour illustrer ça.

4-Exercices.

1-Tracer les droites du plan ayant pour équations dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$:

a) $x + y = 5$ D_1

b) $x - y = -5$ D_2

c) $2x - y = 3.$ D_3

2-Montrer que la région du plan définie par les inéquations:

$$\begin{cases} x + y \leqslant 5 & (1) \\ x - y \geqslant -5 & (2) \\ \quad y \geqslant 0 & (3) \end{cases}$$

est un triangle dont on déterminera les sommets.

CHAPITRE V

SOLUTIONS DES EXERCICES

proposés en fin de chapitre

Chapitre I.

a)En vertu de la proposition 2.4 il suffit de montrer que le système (u_1, u_2, u_3) est libre. Ceci revient à dire que le système linéaire :

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

n'a que la solution $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ .Ce qui est le cas.

b)On a :

$$u = 3e_1 + e_2 + 2e_3 \quad .$$

Or :

$$\begin{cases} u_1 = e_1 + e_2 \\ u_2 = e_2 + e_3 \\ u_3 = e_1 + e_3 \end{cases}$$

On en déduit :

$$\begin{cases} e_1 = \frac{1}{2}(u_1 - u_2 + u_3) \\ e_2 = \frac{1}{2}(u_1 + u_2 - u_3) \\ e_3 = \frac{1}{2}(-u_1 + u_2 + u_3) \end{cases}$$

D'où $\boxed{u = u_1 + 2u_3}$

2-Le système (u_1, u_2) est une base de R^2 si et seulement si le système linéaire :

$$\begin{cases} tx_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$$

n'a que la solution $x_1 = x_2 = 0$.

En multipliant la $1^{\text{ère}}$ équation par 2 et en faisant la différence des 2 équations membre à membre on obtient :

$$(2t - 1)x_1 = 1;$$

on voit donc que les vecteurs u_1 , u_2 sont linéairement indépendants si et seulement si t est différent de 1/2.

3-i)Soient u et v deux vecteurs de R^3 appartenant à E.On a :

$$u = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad v = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \qquad \text{avec } x_1 + x_2 + x_3 = 0 \text{ et } y_1 + y_2 + y_3 = 0.$$

Le vecteur u - v a pour composantes :

$$X_1 = x_1 - y_1 \ , \quad X_2 = x_2 - y_2 \text{ et } X_3 = x_3 - y_3 \quad .$$

Calculons :

$$\begin{aligned} X_1 + X_2 + X_3 &= (x_1 - y_1) + (x_2 - y_2) + (x_3 - y_3) \\ &= (x_1 + x_2 + x_3) - (y_1 + y_2 + y_3) = 0. \end{aligned}$$

Par définition de E on voit donc que u - v en est un élément.De la même manière on montre que si u appartient à E alors tu appartient encore à E pour tout réel t.

E est donc un sous-espace vectoriel de R^3.

ii)Il est clair que les vecteurs :

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \text{appartiennent à E.}$$

Montrons que tout vecteur de E s'exprime d'une façon unique comme combinaison linéaire de u_1 et u_2.Soit :

$$u = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \qquad \text{un vecteur de E.}$$

Il faut donc trouver x_1 et x_2 tels que $u = x_1u_1 + x_2u_2$ .Ceci revient à résoudre le système :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = a \\ \quad -x_1 = b \\ \quad -x_2 = c \end{cases}$$

dont la solution unique est $x_1 = -b$ et $x_2 = -c$.

Conclusion : E est un sous-espace vectoriel de dimension 2 et (u_1, u_2) en est une base.

Chapitre II.

1- a)On a :

$$A^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{pmatrix}$$

$$(a + d).A = \begin{pmatrix} a^2 + ad & ab + bd \\ ac + cd & ad + d^2 \end{pmatrix}$$

$$(ad - bc).I = \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix}$$

On voit alors qu'on a : $A^2 - (a + d).A + (ad - bc).I = 0.$

b)Si ad - bc n'est pas nul cette relation peut encore s'écrire :

$$\frac{1}{ad - bc}\left[(a + d).I - A\right] .A = I.$$

Cette relation montre que A est inversible et a pour inverse :

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\left[(a + d).I - A\right] .$$

Un calcul simple donne finalement :

$$A = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} .$$

2- a)Soit $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ .La relation $f(u) = \lambda u$ s'écrit matriciellement :

$$A.\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

i.e : $\begin{cases} (1-\lambda)x_1 + 2x_2 = 0 \\ 3x_1 + (2-\lambda)x_2 = 0 \end{cases}$

En multipliant la 1ère équation par $(2-\lambda)$,la 2ème par 2 et en faisant la différence membre à membre on obtient :

$$(\lambda+1)(\lambda-4)x_1 = 0.$$

Si $\lambda \neq -1$ et $\lambda \neq 4$ on a : $x_1 = 0$ et $x_2 = 0$.

Or on veut que x_1 et x_2 ne soient pas tous les deux nuls.Les valeurs de λ cherchées sont donc :

$$\lambda_1 = -1 \quad \text{et} \quad \lambda_2 = 4 .$$

Il suffit alors de prendre :

$$u^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad u^2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} .$$

b)Les vecteurs u^1 et u^2 ci-dessus sont bien linéairement indépendants car :

$$x_1u^1 + x_2u^2 = 0$$

implique :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ -x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases} .$$

Ce système donne $x_1 = x_2 = 0$.

Par construction on a $f(u^1) = -u^1$ et $f(u^2) = 4u^2$ .La matrice de f dans la base (u^1,u^2) est donc $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Chapitre III.

1-En utilisant les resultats de l'exercice 1 du chapitre II on voit que A est inversible si et seulement si $t^2 - 1$ est non nul, c'est-à-dire si t est différent de 1 et de -1.

L'inverse de A est la matrice : $A^{-1} = \frac{1}{t^2-1}\begin{pmatrix} t & -1 \\ -1 & t \end{pmatrix}$.

2-Pour inverser A nous allons choisir convenablement des matrices de travail. On procède comme d'habitude en disposant les calculs de la façon suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3/2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 2 & 3/2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 1/4 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 3/4 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1/4 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3/4 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1/4 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1/4 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_7 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

b)Le système à résoudre s'écrit matriciellement :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

i.e : $A. \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

En utilisant la question a) on obtient : $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

c'est-à-dire :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 9 \end{pmatrix} .$$

De là on déduit que la matrice de :

$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ dans la base (B^1, B^2, B^3) est $\begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 9 \end{pmatrix}$.

<u>Chapitre IV.</u>

1-Pour tracer une droite il suffit de connaître 2 de ses points.

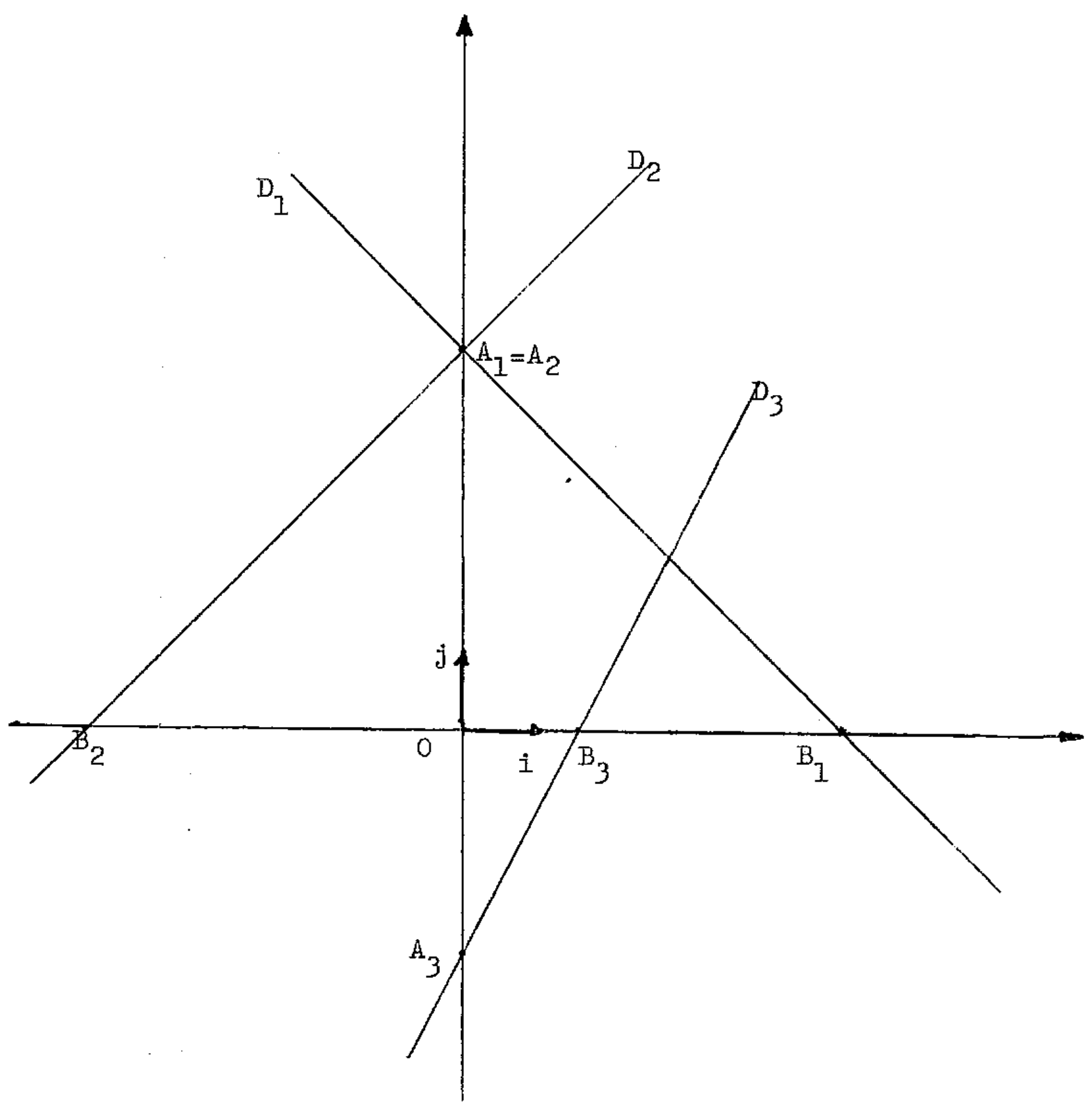
Il est clair que :

-D_1 passe par $A_1(0,5)$ et $B_1(5,0)$,

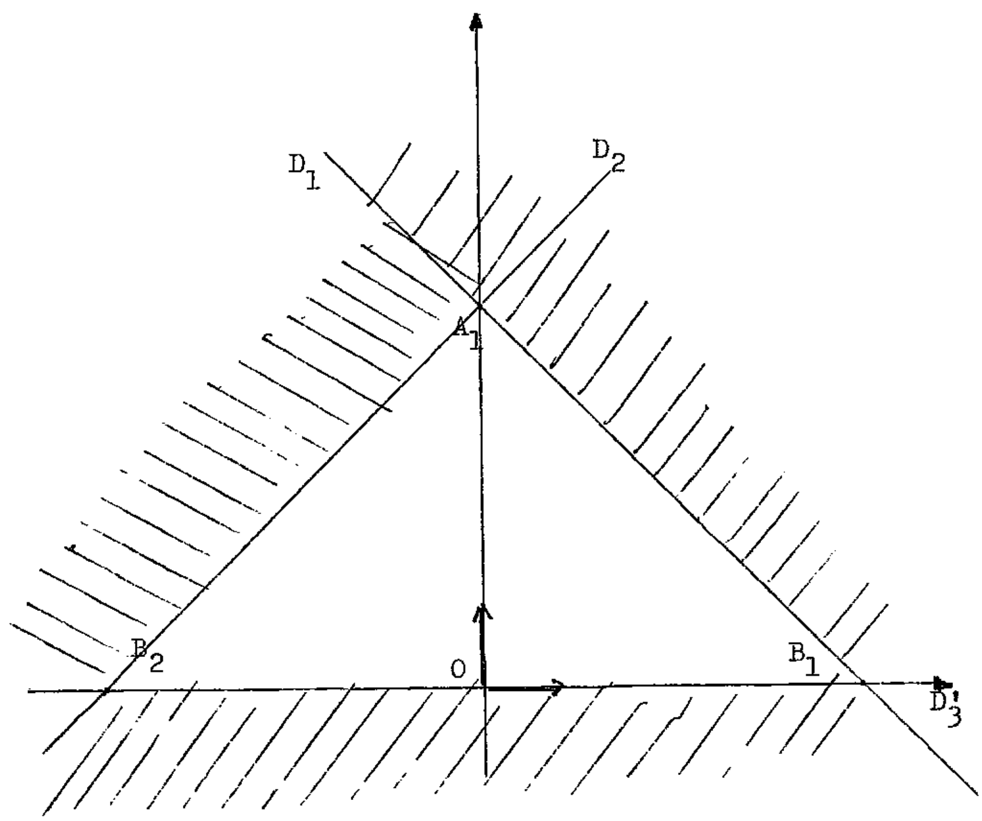
-D_2 " " $A_2(0,5)$ et $B_2(-5,0)$,

-D_3 " " $A_3(0,-3)$ et $B_3(3/2,0)$.

On repère alors ces différents points et on trace les droites .



2-Pour déterminer la région du plan définie par les inégalités (1), (2) et (3) traçons d'abord les droites D_1,D_2 et D'_3 dont les équations sont respectivement : $x + y = 5$,$x - y = -5$ et $y = 0$.Les deux premières sont celles que nous avons déjà tracées à l'exercice 1 .
La 3ème n'est rien d'autre que l'axe Ox.
D_1 partage le plan en deux parties.La partie qui nous convient est celle qui contient l'origine car ses coordonnées vérifient l'inégalité (1).De même l'origine a ses coordonnées qui vérifient l'inégalité (2).En faisant la même chose pour D'_3 on voit que la région que l'on cherche est exactement le triangle $A_1B_1B_2$:



DEUXIEME PARTIE

Problèmes résolus de

Programmation linéaire

RECHERCHE D'OPTIMUM PAR LA METHODE GRAPHIQUE

Problème de rations alimentaires

Un directeur de Zoo veut nourrir ses animaux au moindre coût en leur apportant cependant un minimum journalier de 120Kg de protides, 90Kg de lipides et 60Kg de glucides. Deux aliments tout préparés A et B lui sont proposés sur le marché. Leurs caractéristiques sont indiquées sur le tableau suivant :

	Protides	Lipides	Glucides	Prix
1 sac de A contient	3Kg	3Kg	1Kg	10F
1 sac de B contient	2Kg	1Kg	2Kg	5F

Combien de sacs de chaque aliment le directeur va-t-il commander chaque jour ? combien cela lui coûtera-t-il ?

Traduction mathématique du problème et résolution

-Fonction économique

Soient x et y respectivement le nombre de sacs de A et le nombre de sacs de B. Le coût qu'on notera f est une fonction de x et y qui s'écrit :

$f(x,y) = p_A x + p_B y$ où P_A et p_B sont les prix respectivement d'un sac de A et d'un sac de B. Dans le cas qui nous intéresse ici on a : $p_A = 10F$ et $p_B = 5F$ et donc $f(x,y) = 10x + 5y = 5(2x + y)$.

f est appelée la fonction économique du problème.

-Contraintes

Il faut un minimum journalier de 120Kg de protides. Ceci impose la condition :

$3x + 2y \geqslant 120$ (1) .

En raisonnant de la même manière pour les lipides et glucides on obtient les inégalités suivantes :

$$\begin{cases} 3x + y \geqslant 90 & (2) \\ x + 2y \geqslant 60 & (3) \end{cases} .$$

En résumé il s'agit de chercher x et y positifs satisfaisant les inégalités (1),(2) et (3) et tels que l'expression $10x + 5y$ soit <u>minimale</u>.Autrement dit cela revient à :

$$\begin{cases} \text{Minimiser} \quad f(x,y) = 5(2x + y) \\ \quad \text{sous les contraintes :} \\ 3x + 2y \geqslant 120 & (1) \\ 3x + y \geqslant 90 & (2) \\ x + 2y \geqslant 60 & (3) \\ x \geqslant 0 \quad , y \geqslant 0 & (4) \end{cases} .$$

-<u>Interpretation des contraintes</u>

On peut considérer le couple (x,y) comme les coordonnées d'un point M du plan.

Les inégalités (1),(2),(3) et (4) signifient que le point M se trouve sur l'intersection de 5 demi-plans délimités par les droites :

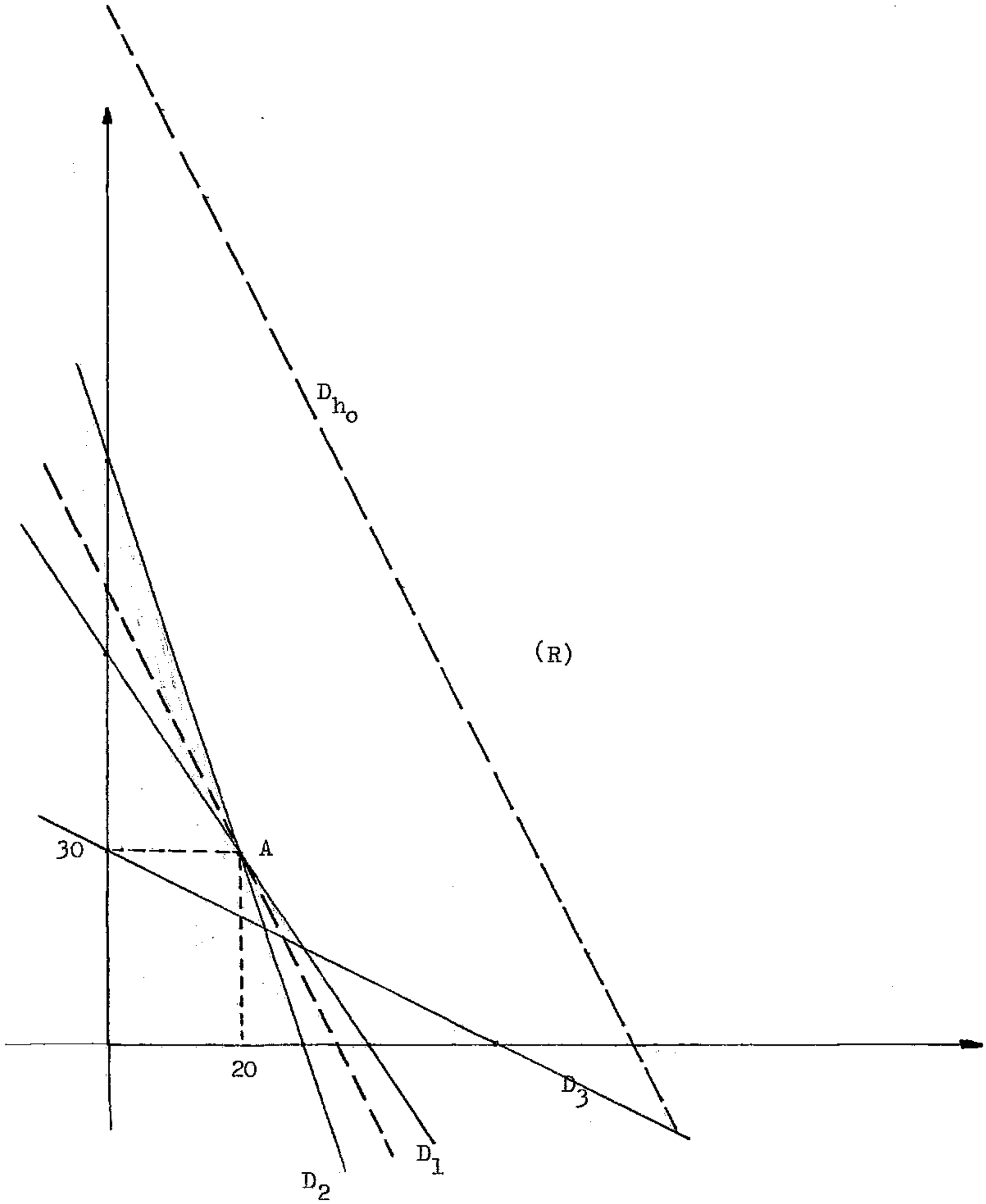
D_1 : $3x + 2y = 120$

D_2 : $3x + y = 90$

D_3 : $x + 2y = 60$

D_4' : $x = 0$ et D_4'' : $y = 0$ (voir Fig).

Le lecteur est invité à définir exactement la région cherchée et à donner des justifications.C'est la seule façon de vérifier s'il a compris et bien assimilé toutes ces notions.



Les seules valeurs permises pour x et y sont celles pour lesquelles le point M est dans la région (R).

-<u>Résolution</u>

Pour minimiser f il suffit de minimiser $g(x,y) = 2x + y$ et multiplier après par 5 pour obtenir le minimum de f.

Soit h un nombre positif et posons $2x + y = h$. On obtient ainsi l'équation d'une droite D_h qui varie avec h. Pour deux valeurs h_1 et h_2 de h les droites correspondantes sont parallèles.

Pour obtenir la solution il faut déplacer D_h parallèlement à une position fixe D_{h_o} de façon à ce que h décroisse et arrive à la limite de la région (R),c'est-à-dire au point A,intersection de D_1 et D_2.

Les coordonnées de A sont les solutions du problème des rations et s'obtiennent en résolvant le système linéaire :

$$\begin{cases} 3x + 2y = 120 \\ 3x + y = 90 \end{cases}$$

qui donne $\boxed{x = 20 \text{ et } y = 30}$

Le coût minimum est donc atteint pour 20 sacs de A et 30 sacs de B et est égal à :

$$\boxed{5(2.20 + 30) = 350F}$$

RECHERCHE D'OPTIMUM PAR LA METHODE DES TESTS

La fonction économique d'un P.L atteint son optimum en au moins un sommet du polyèdre des solutions réalisables.Pour avoir une solution il suffit donc de recenser tous les sommets et tester la valeur de la fonction en chacun d'eux.

Problème

Un atelier de confection fabrique en série deux modèles de chemises de luxe.Une chemise du premier modèle nécessite 1 mètre de tissu,4 heures de travail et rapporte 24 francs.Une chemise du second modèle exige 1,5 m de tissu,2 h de travail et rapporte 16 F.

Sachant que l'atelier dispose quotidiennement de 150m de tissu et de 400h de travail,et qu'il peut vendre toute sa fabrication,combien de chemises de chaque modèle faut-il fabriquer pour obtenir un bénéfice maximal?

Résolution du problème

Comme nous l'avons signalé en introduction,la méthode graphique n'est pas "applicable" en dimension superieure ou égale à 3.Nous utiliserons dans un premier temps la méthode des tests qui consiste à calculer les valeurs de la fonction économique en les differents sommets du polyèdre des solutions réalisables.Cette méthode est valable en toutes dimensions mais il n'est pas inutile de l'appliquer à ce problème à 2 variables qui évidemment peut être résolu graphiquement.

-Ecriture du programme

Soient x_1 et x_2 les nombres de chemises fabriquées en 1 jour respectivement des modèles 1 et 2.

La fonction économique represente un bénéfice.Notons la b.Elle s'écrit :

$$b(x_1,x_2) = 24x_1 + 16x_2 .$$

Il suffit de maximiser la fonction $b'(x_1,x_2) = 3x_1 + 2x_2$ et multiplier après par 8.

-Les contraintes

L'atelier ne dispose que de 150m de tissu.Ce qui donne la contrainte :

$x_1 + 1,5x_2 \leqslant 150$ ou $2x_1 + 3x_2 \leqslant 300$.

D'autre part le nombre d'heures de travail est limité à 400h.On aura donc :

$4x_1 + 2x_2 \leqslant 400$ ou $2x_1 + x_2 \leqslant 200$.

En résumé nous avons à résoudre le P.L suivant :

$$\begin{cases} \text{Maximiser } b'(x_1,x_2) = 3x_1 + 2x_2 \\ \text{sous les contraintes :} \\ 2x_1 + 3x_2 \leqslant 300 \qquad (1) \\ 2x_1 + x_2 \leqslant 200 \qquad (2) \\ x_1 \geqslant 0 \text{ et } x_2 \geqslant 0 \ . \end{cases}$$

-Programme canonique associé

La fonction économique change :au lieu de maximiser b' on minimisera $f(x_1,x_2) = -b'(x_1,x_2) = -3x_1 - 2x_2$.

On introduit 2 variables d'écart positives x_3 et x_4.Les contraintes (1) et (2) deviennent alors :

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 300 \qquad (1') \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 200 \qquad (2') \end{cases}$$

Cette fois-ci on peut considérer-pour des raisons de cohérence-que f dépend des 4 variables x_1,x_2,x_3 et x_4 .En définitive le P.L canonique s'écrit :

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Minimiser } f(x_1,x_2,x_3,x_4) = -3x_1 - 2x_2 \\ \text{sous les contraintes :} \\ \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 300 \\ 200 \end{pmatrix} \\ x_1 \geqslant 0 \ , \ x_2 \geqslant 0 \ , \ x_3 \geqslant 0 \ , \ x_4 \geqslant 0 \end{array}\right.$$

On note :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \qquad \text{et } a = \begin{pmatrix} 300 \\ 200 \end{pmatrix}.$$

<u>Recensement des sommets</u>

Ils sont au nombre de 4.Par exemple $x^1 = \begin{pmatrix} 75 \\ 50 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ en est un.

Pourquoi?

Parce que :

i)La $3^{\text{ème}}$ et la $4^{\text{ème}}$ composantes sont nulles.les autres sont positives.

ii)On a : $Ax^1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 75 \\ 50 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 300 \\ 200 \end{pmatrix}$

iii)La matrice carrée $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ constituée par la $1^{\text{ère}}$ et la $2^{\text{ème}}$ colonnes est d'ordre 2.

De la même manière on obtient les 3 autres sommets :

$$x^2 = \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \\ 100 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad x^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 100 \\ 0 \\ 100 \end{pmatrix} \qquad x^4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 300 \\ 200 \end{pmatrix} \quad .$$

On ne peut avoir de sommet de la forme : $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ 0 \\ 0 \\ u_4 \end{pmatrix}$.

La matrice extraite de A formée par la $1^{\text{ère}}$ et la $4^{\text{ème}}$ colonnes est de rang 2.Mais la condition A.u = a implique le système :

$$\begin{cases} 2u_1 = 300 \\ 2u_1 + u_4 = 200 \end{cases}$$

c'est-à-dire $u_1 = 150$ et $u_4 = -100$.Ceci ne convient pas parce que une des composantes est négative.De même on ne peut avoir de sommet de la forme :

$$v = \begin{pmatrix} 0 \\ v_2 \\ v_3 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Recherche de la solution du P.L

Calculons les valeurs que prend f respectivement en x^1, x^2, x^3 et x^4.On a :

$$f(x^1) = -325 \quad , \quad f(x^2) = -300 \ , \ f(x^3) = -200 \quad \text{et} \ f(x^4) = 0.$$

Le minimum de f est donc atteint en x^1.

Il suffit de fabriquer 75 chemises du modèle 1 et 50 chemises du modèle 2.

Le bénéfice réalisé est $\boxed{b = 8.(3.75 + 2.50) = 2600 \text{ F}}$.

LA METHODE SIMPLICIALE

Soit le P.L :

$$\begin{cases} \text{Minimiser } f.x \\ \text{sous les contraintes} \\ A.x = a \\ x \geqslant 0 \end{cases}$$

où A est une matrice à n lignes et p colonnes constituée par les p vecteurs $(A^1,\ldots,A^p)$, x une matrice unicolonne à p lignes et a une matrice unicolonne à n lignes.

Rapplelons qu'un sommet x du polygone des solutions réalisables est donné par un sous-ensemble à n indices $I = \{i_1,\ldots,i_n\}$ de $\{1,\ldots,p\}$ pour lequel on a :

i) $x_i = 0$ si $i \notin I$ et $x_i \geqslant 0$ si $i \in I$

ii) La matrice carrée formée des vecteurs $(A^{i_1},\ldots,A^{i_n})$ est de rang n.

iii) $A.x = a$.

Deux sommets x et y associés respectivement à $I = \{i_1,\ldots,i_n\}$ et $J = \{j_1,\ldots,j_n\}$ sont dits <u>voisins</u> si l'intersection $I \cap J$ a au moins n-1 éléments.

Souvent le polyèdre des s.r a un nombre relativement grand de sommets. Ce qui rend la méthode des tests un peu longue si on passe n'importe comment d'un sommet à un autre. Il est donc plus raisonnable de passer d'un sommet à un sommet voisin et mieux encore de façon à ce que la valeur de f soit plus petite.

Commençons d'abord par voir comment on passe à un sommet voisin.

Considèrons l'exemple de la page 7.

Fixons d'abord les idées en remarquant que p = 4 et n = 2. Le sommet

x^1 est associé à $I_1=\{1,2\}$ et x^2 est associé à $I_2=\{1,3\}$. On voit que l'intersection $I_1 \cap I_2 = \{1\}$ est constituée de 1=n-1 élément. Les sommets x^1 et x^2 sont donc voisins. Par contre x^2 et x^3 ne le sont pas car x^3 étant associé à $I_3=\{2,4\}$ on a $I_2 \cap I_3 = \emptyset$ et donc à fortiori a moins de 1 élément !

Partons par exemple de x^1 et essayons de le remplacer par un sommet voisin. On a :

$$x^1 = \begin{pmatrix} 75 \\ 50 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad A^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad A^2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad .$$

Le système (A^1,A^2) est une base de R^2; mais ce n'est pas la base dans laquelle le P.L est exprimé. Il faut donc transformer le P.L en un P.L équivalent et de façon à ce qu'il soit exprimé dans la base (A^1,A^2). Il suffit alors de faire les opérations suivantes :

-De la $1^{ère}$ ligne retrancher 3fois la $2^{ème}$ et après diviser par -4 ,

-de la $2^{ème}$ ligne retrancher la $1^{ère}$ et après diviser par -2.

On obtient alors un nouveau P.L de matrices :

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/4 & 3/4 \\ 0 & 1 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad a' = \begin{pmatrix} 75 \\ 50 \end{pmatrix} \quad .$$

<u>Passage de x^1 à un sommet voisin</u>

Supposons que l'on veuille remplacer l'un des vecteurs A^1,A^2 par A^3 pour obtenir un sommet voisin y. Comme on ne sait pas lequel il faut effectivement enlever on écrira a priori :

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Mais on est sûr qu'il n'y a pas de A^4.C'est pour cela qu'on a pris $y_4 = 0$.

On a d'une part :

$A'.x^1 = a'$;ce qui s'écrit $\quad x_1^1 A^1 + x_2^1 A^2 = a' \qquad (1)$

où $x_1^1 = 75$ et $x_2^1 = 50$ sont les deux premières composantes de x^1.

D'autre part on a : $A'y = a'$ i.e $\quad y_1 A^1 + y_2 A^2 + y_3 A^4 = a' \quad (2)$

Les relations (1) et (2) donnent :

$$x_1^1 A^1 + x_2^1 A^2 = y_1 A^1 + y_2 A^2 + y_3 A^3 \qquad (3).$$

Or : $A^3 = -1/4A^1 + 1/2A^2$.

La relation (3) s'écrit alors :

$$x_1^1 A^1 + x_2^1 A^2 = (y_1 - y_3/4)A^1 + (y_2 + y_3/2)A^2 \qquad (4) .$$

L'écriture d'un vecteur dans une base étant unique on obtient d'après la relation (4) :

$$\begin{cases} y_1 = 75 + y_3/4 \\ y_2 = 50 - y_3/2 \end{cases}$$

Si on choisit $y_3 = 0$ on aura $y_1 = 75$ et $y_2 = 50$; et donc $x^1 = y$ (sans intérêt).On ne peut annuler y_1 car y_3 étant positif ou nul $75 + y_3/4$ est strictement positif.On doit donc prendre obligatoirement $y_3 = 100$ pour annuler y_2.Ceci donne $y_1 = 100$; et donc

$$y = \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \\ 100 \\ 0 \end{pmatrix}$$ qui n'est rien d'autre que le sommet x^2.

A titre d'exercice le lecteur pourra remplacer x^2 par x^4; ce dernier par x^3 etc...

Nous allons maintenant voir comment on peut résoudre un P.L par la méthode simpliciale. Rappelons que le principe de cette méthode consiste à remplacer un sommet par un sommet voisin pour lequel la valeur de la fonction économique est plus petite.

Soit à résoudre le P.L :

$$\begin{cases} \text{Minimiser } fx = -2x_1 + 2x_2 + x_3 \\ \text{sous les contraintes} \\ \quad A.x = a \\ \quad x \geqslant 0 \end{cases}$$

où : $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $a = \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$

<u>Recherche d'un premier sommet</u>

Le meilleur candidat est de la forme :

$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix}$ qui est associé à l'ensemble d'indices :

$I = \{4,5,6\}$.

La matrice A^I formée des vecteurs colonnes (A^4, A^5, A^6) est de rang 3 puisque c'est la matrice identité. D'autre part la condition :

$A.x = a$ donne : $x_4 = 12$, $x_5 = 3$, $x_6 = 8$.

La valeur de la fonction en x est $f(x) = 0$.

Nous allons remplacer x par un sommet voisin qui "minimise encore plus" la fonction f.

Il faut donc faire 2 choses :

i) Déterminer le vecteur A^s qui "rentre",

ii) déterminer le vecteur A^k parmi A^4, A^5 et A^6 qui sera remplacé par A^s.

Pour cela on doit calculer la ligne de candidature i.e la quantité $Z^s - f^s$ pour $s=1,\dots,n$ où :

$$Z^s = a_1^s f^{i_1} + \dots + a_n^s f^{i_n} \quad .$$

Dans le cas qui nous intéresse ici on a :

$$Z^s = a_1^s f^4 + a_2^s f^5 + a_3^s f^6 \quad .$$

Mais $f^4 = f^5 = f^6 = 0$ et donc $Z^s - f^s = -f^s$.

On résume les calculs dans le tableau suivant :

f	-2	2	1	0	0	0	Valeur de f au sommet x
$Z^s - f^s$	2	-2	-1	0	0	0	0
	A^1	A^2	A^3	A^4	A^5	A^6	
A^4	3	-3	4	1	0	0	12
A^5	-1	1	1	0	1	0	3
A^6	-1	1	0	0	0	1	8

Le vecteur qui rentre est celui qui presente le plus grand gain marginal; ici A^1. Pour déterminer le vecteur A^k qui sort on recense d'abord les composantes de A^1 qui sont strictement positives. Il n'y en a qu'une : $a_1^1 = 3$.

Donc $A^k = A^4$.

Pour continuer il faut exprimer d'abord le P.L dans la nouvelle base (A^1, A^5, A^6). Ceci revient à multiplier la matrice :

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

par des matrices de travail convenablement choisies de façon à obtenir la matrice identité d'ordre 3.D'un point de vue pratique on procédera comme suit :

-On divise la première ligne par 3,

-on divise la première ligne par 3 et on la rajoute à la deuxième,

-on divise la première ligne par 3 et on la rajoute à la troisième.

On obtient alors le tableau :

f	-2	2	1	0	0	0	Valeur de f au sommet y
$z^s - f^s$	0	0	-11/3	-2/3	0	0	-8
	A^1	A^2	A^3	A^4	A^5	A^6	
A^1	1	-1	4/3	1/3	0	0	4
A^5	0	0	7/3	1/3	1	0	7
A^6	0	0	4/3	1/3	0	1	12

On constate que les gains marginaux sont tous négatifs ou nuls.Le minimum de f est donc atteint au sommet :

$$y = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 7 \\ 12 \end{pmatrix} \quad \text{et vaut } f(y) = -8 .$$

Problème

La société Toucolor produit des rouleaux de papier peint et des pots de peinture.Elle dispose de 360h de travail par jour et peut engager jusqu'à 75000F dans la production quotidienne.

La production d'un lot de 100 rouleaux de papier coûte 1500F, demande 12h de travail et rapporte 300F.La production d'un lot de 100 pots de peinture coûte 2000F,demande 8h de travail et rapporte aussi 300F.

Quelle est la production journalière qui assurera à Toucolor le bénéfice maximal ? Quel est ce bénéfice ?

Solution

Traduction mathématique du problème

Soient x_1 le nombre de lots de 100 rouleaux de papier peint et x_2 le nombre de lots de 100 pots de peinture que doit produire quotidiennement la société Toucolor.

Noton b le bénéfice cherché.C'est une fonction de x_1 et de x_2 qui s'écrit :

$$b(x_1,x_2) = 300x_1 + 300x_2 = 300f'(x_1,x_2)$$

avec $f'(x_1,x_2) = x_1 + x_2$.

Il y a deux contraintes :

-Sur le nombre d'heures de travail dont dispose la société,

-sur les frais qu'elle peut engager.

Ces contraintes s'écrivent :

$$1500x_1 + 2000x_2 \leqslant 75000$$

$$12x_1 + 8x_2 \leqslant 360$$

ou bien :

$$3x_1 + 4x_2 \leqslant 150$$

$$3x_1 + 2x_2 \leqslant 90 \quad .$$

Le P.L à résoudre s'écrit alors :

$$\begin{cases} \text{Maximiser } f'(x_1,x_2) = x_1 + x_2 \\ \text{sous les contraintes :} \\ 3x_1 + 4x_2 \leqslant 150 \\ 3x_1 + 2x_2 \leqslant 90 \\ x_1 \geqslant 0 \ , \ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

Si on introduit deux variables d'écart x_3 et x_4 et si on pose $f(x_1,x_2) = -f'(x_1,x_2)$,le P.L canonique associé s'écrit :

$$\begin{cases} \text{Minimiser } f(x_1,x_2) = -x_1 - x_2 \\ \text{sous les contraintes :} \\ \quad A.x = a \\ \quad x \geqslant 0 \end{cases}$$

où : $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ et $a = \begin{pmatrix} 150 \\ 90 \end{pmatrix}$.

<u>Résolution</u>

Il y a un sommet évident : $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 150 \\ 90 \end{pmatrix}$ en lequel f vaut 0.

Essayons d'améliorer la solution en remplaçant x par un sommet voisin y.Les calculs sont résumés dans le tableau suivant :

f	-1	-1	0	0	Valeur de f au sommet x
$z^s - f^s$	1	1	0	0	0
	A^1	A^2	A^3	A^4	
A^3	3	4	1	0	150
A^4	3	2	0	1	90

Les gains marginaux de A^1 et A^2 sont les mêmes.Choisissons alors de faire rentrer A^1 (on peut très bien choisir A^2).Le vecteur A^1a toutes ses composantes strictement positives.Pour savoir lequel des vecteurs A^3 et A^4 sort on divise les composantes du vecteur a respectivement par celles de A^1.On obtient :

$$\frac{150}{3} = 50 \quad \text{et} \quad \frac{90}{3} = 30 \;;$$

donc c'est A^4 qui sera remplacé par A^1.

Pour continuer il faut exprimer le P.L dans la base (A^3,A^1). On obtient le tableau :

f	-1	-1	0	0	Valeur de f au sommet y
$z^s - f^s$	0	1/3	0	-1/3	-30
	A^1	A^2	A^3	A^4	
A^3	0	2	1	-1	60
A^1	1	2/3	0	1/3	30

On voit donc que le vecteur A^2 remplace le vecteur A^3.Le nouveau tableau sera donc :

f	-1	-1	0	0	Valeur de f au sommet z
$z^s - f^s$	0	0	-1/6	-1/6	-40
	A^1	A^2	A^3	A^4	
A^2	0	1	1/2	-1/2	30
A^1	1	0	-1/3	2/3	10

Tous les gains marginaux sont négatifs ou nuls.L'optimum est donc atteint en :

$$z = \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et vaut} \quad : \quad f(z) = -40.$$

Il faut donc que la société Toucolor produise 10 lots de 100 rouleaux de papier peint et 30 lots de pots de peinture pour avoir un bénéfice maximal de :

$$\boxed{b = 12000F} \; .$$

Résolution d'un P.L par la méthode des deux phases.

Soit à résoudre le P.L :

$$\begin{cases} \text{Minimiser } fx = 3x_1 + x_2 \\ \text{sous les contraintes :} \\ x_1 - x_2 \geqslant 10 \\ 2x_1 + x_2 \geqslant 80 \\ x_1 \geqslant 0 \quad , \; x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

Solution

On introduit deux variables d'écart x_3 et x_4. Le P.L canonique associé s'écrit donc :

$$\begin{cases} \text{Minimiser } fx = 3x_1 + x_2 \\ \text{sous les contraintes :} \\ A.x = a \\ x \geqslant 0 \end{cases}$$

où : $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ et $a = \begin{pmatrix} 10 \\ 80 \end{pmatrix}$.

On ne remarque aucun sommet évident. On résout alors un P.L intermédiaire obtenu en introduisant deux variables artificielles x_5 et x_6. Ce P.L s'écrit :

$$\begin{cases} \text{Minimiser } gx = x_5 + x_6 \\ \text{sous les contraintes :} \\ A.x = a \\ x \geqslant 0 \end{cases}$$

où : $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix}$ et $a = \begin{pmatrix} 10 \\ 80 \end{pmatrix}$.

Ce P.L est exprimé dans la base (A^5,A^6) et il y a un sommet évident :

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 10 \\ 80 \end{pmatrix} .$$

Les calculs se font toujours de la même manière et sont résumés dans les tableaux qui suivent :

Vecteurs colonnes	A^1	A^2	A^3	A^4	A^4	A^5	Valeur de g
g	0	0	0	0	1	1	90
$z^s - g^s$	3	0	-1	-1	0	0	
A^5	1	-1	-1	0	1	0	10
A^6	2	1	0	-1	0	1	80
$z^s - g^s$	0	3	2	-1	-3	0	60
A^1	1	-1	-1	0	1	0	10
A^6	0	3	2	-1	-2	1	60
$z^s - g^s$	0	0	0	0	-1	-1	0
A^1	1	0	-1/3	-1/3	1/3	1/3	30
A^2	0	1	2/3	-1/3	-2/3	1/3	20

On constate que tous les gains marginaux sont négatifs ou nuls, que les vecteurs A^5 et A^6 sont hors base et que le P.L est exprimé dans la base (A^1,A^2).

On revient au P.L initial qui s'écrit cette fois-ci :

$$\begin{cases} \text{Minimiser } fx = 3x_1 + x_2 \\ \text{sous les contraintes :} \\ \quad A.x = a \\ \quad x \geqslant 0 \end{cases}$$

où : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ et $a = \begin{pmatrix} 30 \\ 20 \end{pmatrix}$.

On a le tableau suivant dans lequel on a rassemblé les derniers calculs :

Vecteurs colonnes	A^1	A^2	A^3	A^4	Valeur de f
f	3	1	0	0	110
$z^s - f^s$	0	0	-1/3	-4/3	
A^1	1	0	-1/3	-1/3	30
A^2	0	1	2/3	-1/3	20

Le minimum de f est donc atteint en :

$$x = \begin{pmatrix} 30 \\ 20 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et vaut } f(x) = 110 \quad .$$

Résoudre le P.L :

$$(\mathrm{I})\begin{cases}\text{Minimiser } fx = 2x_1 - x_2\\ \text{sous les contraintes :}\\ x_1 \geqslant 40\\ x_1 - x_2 \geqslant 20\\ x_1 + x_2 \geqslant 50\\ x_1 \geqslant 0 \quad , \; x_2 \geqslant 0\end{cases}$$

Solution

1-Programme canonique asscié

Notons x_3, x_4 et x_5 les variables d'écart.Le P.L canonique associé au P.L (I) s'écrit alors :

$$(\mathrm{II})\begin{cases}\text{Minimiser } fx = 2x_1 - x_2\\ \text{sous les contraintes :}\\ A.x = a\\ x \geqslant 0\end{cases}$$

où : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\end{pmatrix}$ et $a = \begin{pmatrix} 40\\ 20\\ 50\end{pmatrix}$.

Il n'y a aucun sommet apparent.On fait la résolution en passant par un $3^{\text{ème}}$ P.L qui s'obtient à partir du P.L (II) en modifiant la fonction économique et en introduisant 3 variables artificielles x_6, x_7 et x_8.On pose : $gx = x_6 + x_7 + x_8$.On obtient le P.L :

$$(\mathrm{III})\begin{cases}\text{Minimiser } gx = x_6 + x_7 + x_8\\ \text{sous les contraintes :}\\ B.x = a\\ x \geqslant 0\end{cases}$$

$$\text{où : } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} , \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad a = \begin{pmatrix} 40 \\ 20 \\ 50 \end{pmatrix} .$$

2-Résolution du P.L (III)

Il y a un sommet évident :

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 40 \\ 20 \\ 50 \end{pmatrix}$$

associé à la base (A^6, A^7, A^8) dans laquelle est exprimé le P.L (III). On cherchera donc un sommet du polyèdre des solutions réalisables de ce P.L pour lequel les vecteurs A^6, A^7 et A^8 sont hors base. On procède comme d'habitude sans grand mystère !

	A^1	A^2	A^3	A^4	A^5	A^6	A^7	A^8	Valeur de g
g	0	0	0	0	0	1	1	1	
$z^s - g^s$	3	0	-1	-1	-1	0	0	0	110
A^6	1	0	-1	0	0	1	0	0	40
A^7	1	-1	0	-1	0	0	1	0	20
A^8	1	1	0	0	-1	0	0	1	50

$z^s - g^s$	0	3	-1	2	-1	0	-3	0	50
A^6	0	1	-1	1	0	1	-1	0	20
A^1	1	-1	0	-1	0	0	1	0	20
A^8	0	2	0	1	-1	0	-1	1	30
$z^s - g^s$	0	0	-1	1/2	1/2	0	-3/2	-3/2	5
A^6	0	0	-1	1/2	1/2	1	-1/2	-1/2	5
A^1	1	0	0	-1/2	-1/2	0	1/2	1/2	35
A^2	0	1	0	1/2	-1/2	0	-1/2	1/2	15
$z^s - g^s$	0	0	0	0	0	-1	-1	-1	0
A^4	0	0	-2	1	1	2	-1	-1	10
A^1	1	0	-1	0	0	1	0	0	40
A^2	0	1	1	0	-1	-1	0	1	10

On obtient ainsi une solution du P.L (III) pour laquelle les vecteurs A^6,A^7 et A^8 sont hors base.On revient alors au P.L (I) qui cette fois-ci s'écrit :

$$(\mathrm{I}') \begin{cases} \text{Minimiser } fx = 2x_1 - x_2 \\ \text{sous les contraites :} \\ \quad A.x = a \\ \quad x \geqslant 0 \end{cases}$$

où : $$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \quad \text{et } a = \begin{pmatrix} 10 \\ 40 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Vecteurs	A^1	A^2	A^3	A^4	A^5	Valeur de f
f	2	-1	0	0	0	
$Z^s - f^s$	0	-1	-3	0	1	70
A^4	0	0	-2	1	1	10
A^1	1	0	-1	0	0	40
A^2	0	1	1	0	-1	10
$Z^s - f^s$	0	-1	-1	-1	0	60
A^5	0	0	-2	1	1	10
A^1	1	0	-1	0	0	40
A^2	0	1	-1	1	0	20

Le P.L (I) a donc pour solution : $\boxed{x_1 = 40 \quad \text{et} \quad x_2 = 20}$.

Ce minimum vaut = 60 .

Résolution d'un P.L par la méthode de la phase mixte

Soit à résoudre le P.L suivant :

$$
(\mathrm{I})\quad \begin{cases} \text{Maximiser } f'x = x_1 + x_2 \\ \text{sous les contraintes :} \\ x_1 + x_2 \geqslant 10 \\ 2x_1 + x_2 \leqslant 60 \\ \qquad x_2 \leqslant 30 \\ -x_1 + x_2 \leqslant 20 \\ x \geqslant 0 \quad , x \geqslant 0 \end{cases}
$$

Soient x_3, x_4, x_5 et x_6 les variables d'écart.Le P.L canonique associé à (I) est :

$$
(\mathrm{II})\quad \begin{cases} \text{Minimiser } f''x = -x_1 - x_2 \\ \text{sous les contraintes :} \\ A''.x = a \\ x \geqslant 0 \end{cases}
$$

$$
\text{où : } A'' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad a = \begin{pmatrix} 10 \\ 60 \\ 30 \\ 20 \end{pmatrix}.
$$

Aucun sommet n'est apparent.On introduit une variable artificielle x_7 et on modifie la fonction économique en posant :

$fx = f''x + x_7 = -x_1 - x_2 + x_7$.

On résout alors le P.L suivant :

$$\begin{cases} \text{Minimiser } fx = -x_1 - x_2 + x_7 \\ \text{sous les contraintes :} \\ A.x = a \\ x \quad 0 \end{cases}$$

où : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix}$ et $a = \begin{pmatrix} 10 \\ 60 \\ 30 \\ 20 \end{pmatrix}$.

On démarre les calculs avec le sommet :

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 60 \\ 30 \\ 20 \\ 10 \end{pmatrix} .$$

Vecteurs	A^1	A^2	A^3	A^4	A^5	A^6	A^7	
f	-1	-1	0	0	0	0	1	
$z^s - f^s$	2	2	-1	0	0	0	0	
A^7	1	1	-1	0	0	0	1	10
A^4	2	1	0	1	0	0	0	60
A^5	0	1	0	0	1	0	0	30
A^6	-1	1	0	0	0	1	0	20

$z^s - f^s$	0	0	1	0	0	0	-2	
A^1	1	1	-1	0	0	0	1	10
A^4	0	-1	2	1	0	0	-2	40
A^5	0	1	0	0	1	0	0	30
A^6	0	2	-1	0	0	1	1	30
$z^s - f^s$	0	1/2	0	-1/2	0	0	-1	
A^1	1	1/2	0	1/2	0	0	0	30
A^3	0	-1/2	1	1/2	0	0	-1	20
A^5	0	1	0	0	1	0	0	30
A^6	0	3/2	0	1/2	0	1	0	50
$z^s - f^s$	0	0	0	-1/2	-1/2	0	-1	
A^1	1	0	0	1/2	-1/2	0	0	15
A^3	0	0	1	1/2	1/2	0	-1	35
A^2	0	1	0	0	1	0	0	30
A^6	0	0	0	1/2	-2/3	1	0	5

La ligne de candidature est négative ou nulle.Le P.L (III) a donc pour solution :

$$x = \begin{pmatrix} 15 \\ 30 \\ 35 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et par conséquent le P.L (I) a pour solution $\boxed{x_1 = 15 \text{ et } x_2 = 30.}$

Un dernier pour la route!

Une entreprise de meubles fabrique des tables de salle à manger (T_1) et des tables de cuisine (T_2) en utilisant 3 machines M_1,M_2 et M_3.

Pour fabriquer une table T_1,il faut utiliser M_1 pendant 1h,M_2 pendant 1h et M_3 pendant 3h.Pour une table T_2 il faut 1h de M_1, 2h de M_2 et 1h de M_3.

Les seules contraintes sont que,pour la période à venir,les machines M_1,M_2 et M_3 ne sont respectivement disponibles que 60h, 90h et 150h.

Sachant qu'une table T_1 rapporte 200F et qu'une table T_2 rapporte 100F,déterminer ce que doit produire l'entreprise pour réaliser le bénéfice maximal.Que sera ce bénéfice ?

Solution

On donnera une résolution graphique et une résolution par la méthode simpliciale.

Résolution graphique

Notons x_1 et x_2 respectivement les nombres de tables T_1 et T_2 àfabriquer et b la fonction économique.On a :

$$b(x_1,x_2) = 200x_1 + 100x_2 = 100(2x_1 + x_2) \text{ .}$$

Le nombre d'heures d'utilisation de la machine M_1 est $x_1 + x_2$ car une table T_1 nécessite 1h ainsi qu'une table T_2.Mais M_1 n'est disponible que 60h.D'où la contrainte :

$$x_1 + x_2 \leqslant 60$$

En raisonnant de la même manière pour M_2 et M_3 on obtient les contraintes suivantes :

$$x_1 + 2x_2 \leqslant 60$$

$$3x_1 + x_2 \leqslant 150$$

Finalement le P.L à résoudre s'écrit :

$$\begin{cases} \text{Maximiser } b'(x_1,x_2) = 2x_1 + x_2 \\ \text{sous les contraintes :} \\ x_1 + x_2 \leqslant 60 \\ x_1 + 2x_2 \leqslant 90 \\ 3x_1 + x_2 \leqslant 150 \\ x_1 \geqslant 0 \quad , \quad x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

L'ensemble des solutions réalisables est la région du plan définie par les inégalités :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leqslant 60 & (1) \\ x_1 + 2x_2 \leqslant 90 & (2) \\ 3x_1 + x_2 \leqslant 150 & (3) \\ x_1 \geqslant 0 & (4) \\ x_2 \geqslant 0 & (5) \end{cases}$$

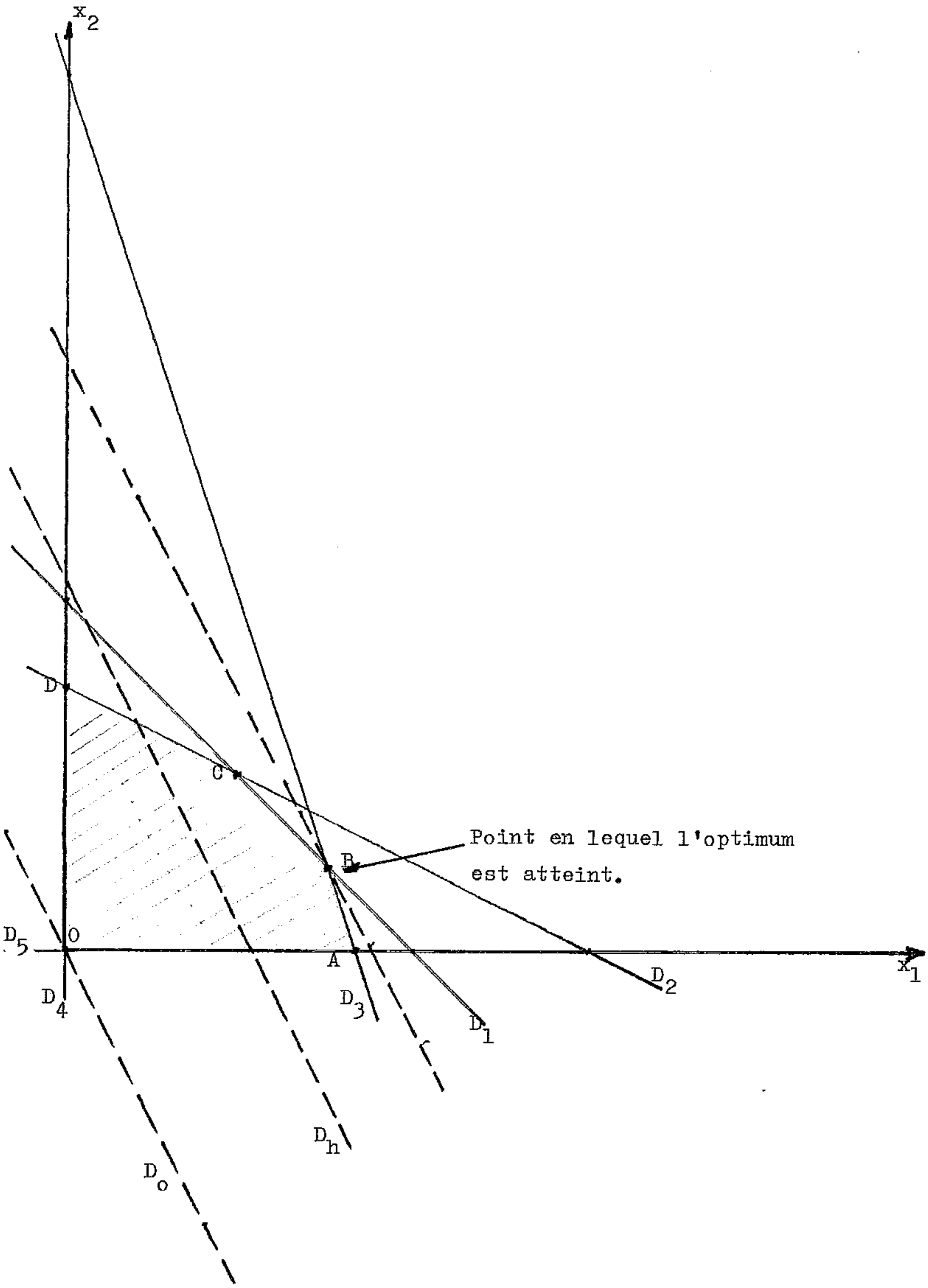
Cette région est délimitée par les droites :

$D_1 : x_1 + x_2 = 60$ $\qquad$ $D_2 : x_1 + 2x_2 = 90$

$D_3 : 3x_1 + x_2 = 150$ $\qquad$ $D_4 : x_1 = 0$ et $D_5 : x_2 = 0$.

Par exemple la droite D_1 partage le plan en deux demi-plans dont l'un contient l'origine des coordonnées et qui précisement constitue les solutions de l'inéquation (1).

Le reste se fait de manière analogue. Faisons un dessin (qui dit toujours plus que mille mots) :



x_2
D
C
B
Point en lequel l'optimum est atteint.
D_5
0
A
x_1
D_2
D_4
D_3
D_1
D_h
D_o

Considèrons la droite D_h d'équation : $2x_1 + x_2 = h$ où h est un nombre réel positif ou nul. Quand h varie la droite D_h varie en restant parallèle à la droite : $D_o : 2x_1 + x_2 = 0$.
On fait varier alors cette droite de façon à ce que h soit croissant jusqu'à la limite du polygone OABCD. On constate que la droite D_h sort de ce polygone exactement au point B, intersection des droites D_1 et D_3. Les coordonnées de cepoint sont donc les solutions du P.L (I) et sont données par le système :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 60 \\ 3x_1 + x_2 = 150 \end{cases}$$

i.e : $\boxed{x_1 = 45 \quad \text{et} \quad x_2 = 15}$.

Résolution par la méthode simpliciale

Ecrivons d'abord le P.L canonique associé en introduisant 3 variables d'écart x_3, x_4 et x_5 et en posant : $fx = -b'(x_1, x_2)$:

$$\begin{cases} \text{Minimiser } fx = -2x_1 - x_2 \\ \text{sous les contraintes :} \\ \qquad A.x = a \\ \qquad x \geqslant 0 \end{cases}$$

où : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$ et $a = \begin{pmatrix} 60 \\ 90 \\ 150 \end{pmatrix}$.

On remarque un sommet évident :

$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 60 \\ 90 \\ 150 \end{pmatrix}$ qui nous permet de démarrer les calculs.

Vecteurs	A^1	A^2	A^3	A^4	A^5	
f	-2	-1	0	0	0	
$z^s - f^s$	2	1	0	0	0	
A^3	1	1	1	0	0	60
A^4	1	2	0	1	0	90
A^5	3	1	0	0	1	150
$z^s - f^s$	0	2/3	0	0	-2/3	
A^3	0	2/3	1	0	-1/3	10
A^4	0	5/3	0	1	-1/3	40
A^1	1	1/3	0	0	1/3	50
$z^s - f^s$	0	0	-1/2	0	-5/6	
A^2	0	1	3/2	0	-1/2	15
A^4	0	0	-5/2	1	1/2	25
A^1	1	0	-1/2	0	2/3	45

Le P.L (II) a donc pour solution :

$$x = \begin{pmatrix} 45 \\ 15 \\ 0 \\ 25 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et par conséquent le P.L (I) a pour solution $x_1 = 45$ et $x_2 = 15$.

On retrouve les résultats obtenus par la méthode graphique.

Le bénéfice maximal est $\boxed{b = 100(2.45 + 15) \ = 10500F}$.