La beauté en mathématiques et le regard géométrique

Conférences aux colloques

Éduquer le regard : croisements entre art et mathématiques

(Sapienza Università di Roma, 11 et 12 mai 2018)

(Université de Lille, 1er, 2 et 3 juin 2022)

Aziz EL KACIMI ALAOUI

(Version septembre 2026)

Deux thèmes que j'ai légèrement survolés dans les conférences susmentionnées. Je les ai repris ici pour les développer un peu et les garnir de plus d'exemples mais sans détailler. Je n'ai pas fait de présentation générale, je me suis contenté d'un exorde spécifique à chacune des parties.

I. LA BEAUTÉ EN MATHÉMATIQUES

1. Préambule

Il est difficile de définir la *beauté* de façon intrinsèque. Chacun lui confère un sens au moment où il la perçoit le plus. Certains (et ils sont nombreux !) ne l'entrevoient que sous l'aspect physique, comme on peut le lire dans des textes littéraires, à l'instar de cette description d'Alicia qu'en fait Lord Ewald, un personnage du roman *L'Ève future* (∗) :

« Miss Alicia n'a que vingt ans à peu près. Elle est svelte comme le tremble argenté. Ses mouvements sont d'une lente et délicieuse harmonie ; son corps offre un ensemble de lignes à surprendre les plus grands statuaires. Une chaude pâleur de tubéreuse en revêt les plénitudes. C'est, en vérité, la splendeur de la Vénus Victrix humanisée. Ses pesants cheveux bruns ont l'éclat d'une nuit du sud. Souvent, au sortir du bain, elle marche sur cette étincelante chevelure que l'eau même ne désondule pas et en jette, devant elle, d'une épaule à l'autre, les luxuriantes ténèbres comme le pan d'un manteau. Son visage est de l'ovale le plus séduisant ; sa cruelle bouche s'y épanouit, comme un œillet sanglant ivre de rosée. »

Un style passionné pour décrire la beauté - supposée exceptionnelle - d'une femme !

Hormis cette vision restreinte de la beauté, qu'on retrouve dans beaucoup de cultures et civilisations, on peut citer d'autres dires sur la beauté en général - mathématique ou autre - notamment de ceux qui sont en première ligne dans la réflexion, ou considérés comme tels : les philosophes, les écrivains, les poètes, les artistes... les scientifiques dont, bien sûr, les mathématiciens.

« Est beau ce qui plaît dans le simple jugement (non dans la sensation ni par un concept) » écrivait Emmanuel Kant dans *Critique de la faculté de juger*.

Richard Jefferies (écrivain anglais du XIXème siècle) disait que « Les heures pendant lesquelles nous sommes absorbés par la beauté sont les seules où nous sommes vivants ».

La conviction qu'en avait le mathématicien français Henri Poincaré n'en était pas loin quand il parlait spécifiquement des mathématiques en disant que « Le mathématicien n'étudie pas les mathématiques pures parce qu'elles sont utiles ; il les étudie parce qu'il y prend plaisir, et il y prend plaisir parce qu'elles sont belles ».

(∗) Le texte cité est de Villiers de l'Isle-Adam, écrivain français du XIXème siècle et auteur de *L'Ève future*, un magnifique roman.

Ce à quoi - on pourrait le considérer ainsi - Armand Borel rajoute : « J'ai évoqué l'idée des mathématiques comme un art, une poésie des idées. Partant de là, on pourrait conclure que, pour apprécier les mathématiques et y prendre plaisir, il faut posséder une sensibilité particulière à l'élégance intellectuelle et à la beauté des idées au sein d'un univers de pensée bien singulier. »

Et c'est tout à fait proche de ce qu'en ressent Robert Langlands :

« Au départ, peut-être n'y a-t-il ni gangue ni même de problèmes, mais simplement un plaisir naturel, fruit de l'évolution, à pratiquer l'arithmétique élémentaire - la manipulation des nombres, même petits - ou à observer des formes géométriques simples : triangles, rectangles, polygones réguliers. »

J'adhère à cette idée ! car je suis persuadé que quelle que soit sa nature, la beauté est toujours la combinaison parfaite entre quelque chose de profond et la forme qu'elle peut prendre. C'est aussi ce que met en avant Gustave Flaubert, grand maître de l'esthétique littéraire :

« Où la Forme manque l'Idée n'est plus. Chercher l'un, c'est chercher l'autre. »

C'est sur cette beauté des mathématiques, décrite et mise en valeur d'une manière ou d'une autre par des mathématiciens de taille, à un âge où ils s'en sont bien abreuvés, que nous nous focaliserons dans cette première partie.

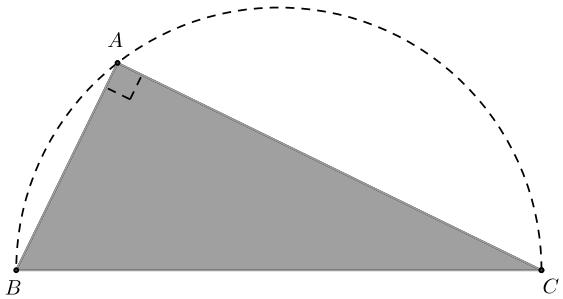
Alors : *Qu'y a-t-il de beau en mathématiques ? Les objets dont elles font usage ? Les théorèmes, les démonstrations ?* Sans doute un peu de tout : les objets mathématiques d'abord, ensuite la façon dont ils sont liés, celle dont les résultats sont démontrés... Et les exemples ne manquent pas à cet effet. Les formules par exemple dont raffole Don Zagier :

« J'aime les formules explicites et concrètes. À mes yeux, elles possèdent une beauté qui leur est propre. Elles peuvent être profondes ou non. »

Les résultats mathématiques sont abondants. On les retrouve en formules, théorèmes, lemmes... Beaucoup d'entre eux sont d'un intérêt fondamental, établis par des preuves simples, claires et bien structurées. C'est en ce sens que je juge qu'ils font la beauté de la discipline. J'ai fait le choix, extrêmement restreint, de ne présenter que quelques-uns parmi ceux que j'ai rencontrés dans mon parcours, et qui me plaisent personnellement. Quelqu'un d'autre écrivant sur le même sujet donnerait sûrement d'autres exemples.

2. Un premier panel

2.1. Le théorème de Pythagore. Sans doute ce qu'il y a de plus familier, connu par tout citoyen λ même s'il ne mesure pas toujours sa portée : *Dans un triangle rectangle le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des côtés de l'angle droit.*

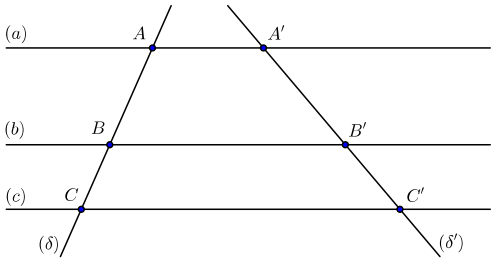


$$AB^2 + AC^2 = BC^2$$

Son importance ne se limite pas aux problèmes dits « élémentaires ». Il a largement débordé ce cadre et a permis un développement spectaculaire de l'analyse fonctionnelle, la

théorie des représentations des groupes, des ondelettes... par le biais des espaces de Hilbert qui en sont devenus un outil indispensable. Côté arithmétique, voir cette belle leçon [Za].

2.2. Le théorème de Thalès. Fameux et dans la même lignée que le précédent : *Soient* (a), (b) *et* (c) *trois droites du plan coupées par deux autres* (δ) *et* (δ') *respectivement en* A, B, C *et* A', B', C'. *Alors* (a), (b) *et* (c) *sont parallèles si, et seulement si, on a* $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}}$, *ou encore* $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$.

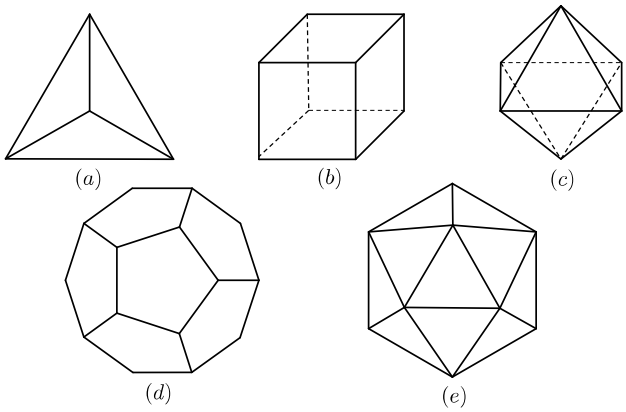


C'est la base géométrique de la théorie des proportions. Un beau théorème, toujours prêt à rendre service, et qui a bercé mon enfance ! Tant pis pour ceux qui pensent qu'il est trop élémentaire pour en être un.

2.3. La formule d'Euler. Pour un polyèdre dans l'espace euclidien de dimension trois dont l'intérieur est homéomorphe à une boule ouverte, on note F le nombre de ses faces, A le nombre de ses arêtes et S celui de ses sommets. Alors :

$$F - A + S = 2.$$

Elle n'est pas difficile à établir. On peut la vérifier par exemple sur les polyèdres réguliers dessinés ci-dessous qui portent le nom de *solides de Platon*.



(a) *Tétraèdre* : 4 triangles équilatéraux, 6 arêtes et 4 sommets.

(b) *Cube* : 6 carrés, 12 arêtes et 8 sommets.

(c) *Octaèdre* : 8 triangles équilatéraux, 12 arêtes et 6 sommets.

(d) *Dodécaèdre* : 12 pentagones réguliers, 30 arêtes et 20 sommets.

(e) *Icosaèdre* : 20 triangles équilatéraux, 30 arêtes et 12 sommets.

2.4. Le théorème des nombres premiers. C'est une merveille ! Rappelons qu'un *nombre premier* est un entier supérieur ou égal à 2 qui n'est divisible que par lui-même et l'unité. Pour recenser ces nombres petit à petit, on utilise le *crible d'Ératosthène* : 2 est premier ; on le garde et on élimine tous ceux qu'il divisent ; 3 est premier ; on le garde et on élimine tous ceux qu'il divisent (parmi ceux qui restent bien sûr) ; on continue ainsi... Voici la liste des premiers jusqu'à 100 (indiqués en rouge) obtenus par ce procédé.

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

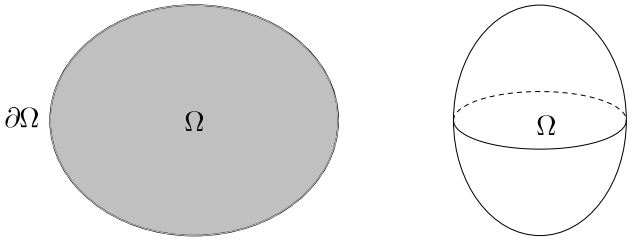
À défaut de prévoir leur rencontre en remontant la liste infinie des entiers (ils sont par-ci par-là, distribués au hasard) on peut mesurer approximativement leur présence. À cet effet, on définit la fonction $\pi : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}$ qui à x associe le cardinal de l'ensemble $\{k \in \mathbb{N}^* : k \text{ premier} \leq x\}$. On a alors l'estimation suivante qui porte le nom de *théorème des nombres premiers* :

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ell n(x)} \qquad \text{lorsque } x \text{ tend vers } +\infty.$$

Cette équivalence a été conjecturée par Carl Friedrich Gauss en 1790 et par Adrien-Marie Legendre quelques années plus tard. Des résultats partiels ont été obtenus par Pafnouti Lvovitch Tchebychev au milieu du XIXème siécle. La démonstration complète a été donnée à la fin du XIXème siècle indépendamment par Jacques Hadamard et Charles-Jean de La Vallée Poussin, en usant tous les deux des fonctions d'une variable complexe. Des démonstrations, jugées plus élémentaires, ont été apportées vers 1948 presque en même temps par Paul Erdös et Atle Selberg. La dernière preuve fut celle de Hédi Daboussi en 1983 (exposée par exemple dans [TM]).

2.5. La formule de Stokes. René Thom la considérait comme le plus beau résultat en géométrie différentielle. C'est un outil abondamment utilisé, central par exemple pour mettre en dualité la cohomologie et l'homologie d'une variété différentiable compacte. Nous allons donner son énoncé dans une situation simple mais assez générique. Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ (avec $n \geq 2$), de bord $\partial\Omega$ lisse et ω une forme différentielle de degré $n-1$ (sur $\mathbb{R}^n$ pour simplifier) de différentielle extérieure $d\omega$. On a alors :

$$\int_\Omega d\omega = \int_{\partial\Omega} \omega.$$



Un solide dans l'espace dont le bord $\partial\Omega$ est sa surface latérale.

Comme exemple explicite, on prend la boule $\Omega = \mathbb{B}_n(r)$ (de centre l'origine et de rayon $r > 0$) de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$, de bord $\partial\Omega$ la sphère $\mathbb{S}^{n-1}(r)$, et on considère la $(n-1)$-forme différentielle $\omega = \frac{1}{r}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}x_j dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \cdots \wedge dx_n$. C'est la forme volume sur la sphère $\mathbb{S}^{n-1}(r)$. Elle a pour différentielle la n-forme volume sur $\mathbb{B}_n(r)$ $d\omega = \frac{n}{r}dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ En intégrant ω sur $\partial\Omega$ et en utilisant la formule de Stokes, on obtient l'égalité :

$$\mathrm{Vol}(\mathbb{S}^{n-1}(r)) = \int_{\partial\Omega}\omega = \int_{\Omega} d\omega = \frac{n}{r}\int_{\mathbb{B}_n(r)} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n = \frac{n}{r}\mathrm{Vol}(\mathbb{B}_n(r)).$$

Une relation explicite entre le volume de la boule de rayon r et celui de la sphère qui la borde. Connaissant l'un on peut déterminer l'autre. On a (*cf.* [E1] pour le calcul) :

$$\mathrm{Vol}(\mathbb{B}_n(r)) = \begin{cases} \frac{\pi^k}{k!}r^{2k} & \text{si } n = 2k \\ \\ \frac{2^{k+1}\pi^k}{1\cdots 3\cdot 5\cdots(2k+1)}r^{2k+1} & \text{si } n = 2k+1 \end{cases}$$

qui permet de donner le volume de la sphère $\mathbb{S}^n(r)$ (selon la parité de n) :

$$\mathrm{Vol}(\mathbb{S}^{2k}(r)) = \frac{2^{k+1}\pi^k}{1\cdots 3\cdot 5\cdots(2k-1)}r^{2k} \quad \text{et} \quad \mathrm{Vol}(\mathbb{S}^{2k+1}(r)) = \frac{2\pi^{k+1}}{k!}r^{2k+1}.$$

Évidemment, la version la plus simple de la Formule de Stokes est celle qu'on nous enseigne dans le secondaire juste après l'introduction des notions de dérivée et d'intégrale. *Soit f une fonction réelle dérivable sur un intervalle $[a,b]$. Alors $\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$.* C'est considéré comme un théorème fondamental de l'analyse. Voici un beau billet [Au] par Michèle Audin sur la formule de Stokes.

2.6. Les polygones réguliers. Un polygone $\mathfrak{P}_n$ à n côtés ($n \geq 3$) est *régulier* s'il est convexe et s'il a tous ses côtés égaux et tous ses angles égaux.

Question. *Pour quel entier n un polygone régulier $\mathfrak{P}_n$ est-il constructible ?*

Comme on peut toujours inscrire un tel polygone régulier dans un cercle, cela revient à construire l'angle au centre qui intercèpte le côté commun et qui vaut $\theta_n = \frac{2\pi}{n}$. Et ce n'est pas toujours possible : cela dépend de la nature des facteurs premiers de n. Avant de voir ce qu'il en est, le lecteur peut d'abord se convaincre des faits qui suivent :

i) On peut construire facilement θ_3, θ_4, θ_6, θ_n pour $n = 2^p$... Et si on sait construire θ_n, on sait aussi construire θ_{2n} (par bissection).

ii) Si θ_n est constructible, $\theta_{\frac{n}{d}}$ l'est aussi pour tout diviseur d de n.

iii) Si θ_n et θ_m sont constructibles et que n et m sont premiers entre eux, alors θ_{nm} est constructible. En effet, il existe $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $an + bm = 1$ (théorème de Bézout). D'où $2\pi an + 2\pi bm = 2\pi$. En divisant les deux membres de légalité par nm on obtient $\theta_{nm} = a\theta_m + b\theta_n$. Ce qui nous permet de faire la construction de θ_{nm}.

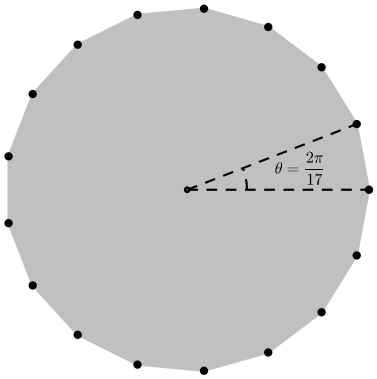
La constructibilté de $\mathfrak{P}_n$ est donnée par le théorème qui suit dont on peut trouver la démonstration dans [Kl].

Théorème (Gauss & Wantzel). *Un polygone régulier à n côtés est constructible si, et seulement si, n est un produit d'une puissance de 2 et d'entiers premiers de la forme $2^p + 1$ deux à deux distincts.*

La preuve de ce résultat purement géométrique, n'utilise que des méthodes d'algèbre et d'arithmétique (théorie de Galois). Ce qui montre qu'il y a une certaine unité dans les mathématiques, qui les rend encore plus belles.

Les nombres premiers de la forme $n = 2^p+1$ sont appelés *premiers de Fermat.* (L'entier p est nécessairement de la forme 2^h avec $h \in \mathbb{N}$.)

Le polygone régulier $\mathfrak{P}_n$ est constructible pour $n = 5 = 2^2 + 1$, $n = 17 = 2^4 + 1$, $n = 257 = 2^8 + 1$, $n = 2^{2^4} + 1 = 65537$... Et qu'en est-il de sa construction effective ? Elle est loin d'être triviale. Gauss l'a faite pour $n = 17$ en 1796 (*cf.* [Kl]) (il avait 19 ans) et c'était déjà un exploit. Des constructions un peu plus simples ont été données des années plus tard par K. Von Staudt en 1842 et H. W. Richmond en 1893 (*cf.* [Ca]).

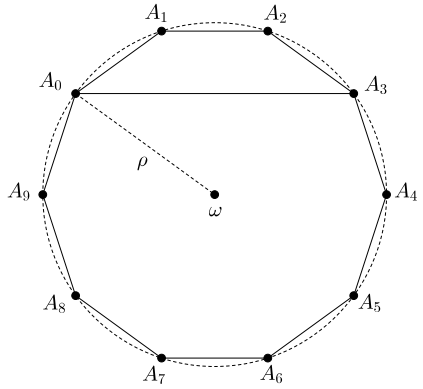


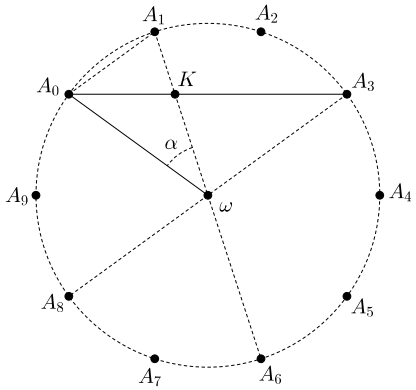
Il est dit dans la littérature [Bo] que F.J. Richelot a construit θ_{257} en 1832, et qu'en 1894, J.G. Hermes est parvenu à construire l'angle θ_{65537} mais, semble-t-il, il n'y pas de trace écrite de ce travail.

Jusqu'à présent, on ne connaît aucun premier de Fermat autre que $n = 3 = 2^1 + 1$, $n = 5 = 2^2 + 1$, $n = 17 = 2^4 + 1$, $n = 257 = 2^8 + 1$, $n = 2^{16} + 1 = 65537$, et il est même conjecturé que ce sont les seuls.

Construction de θ_5 et θ_{10}

On se donne un cercle Γ de centre ω et de rayon $\rho > 0$ exinscit à un décagone régulier $A_0A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8A_9$. On pose $x = A_0A_1$ et $y = A_0A_3$; x est la mesure du côté du décagone régulier convexe et y celle du décagone croisé (*cf.* les dessins ci-dessous).





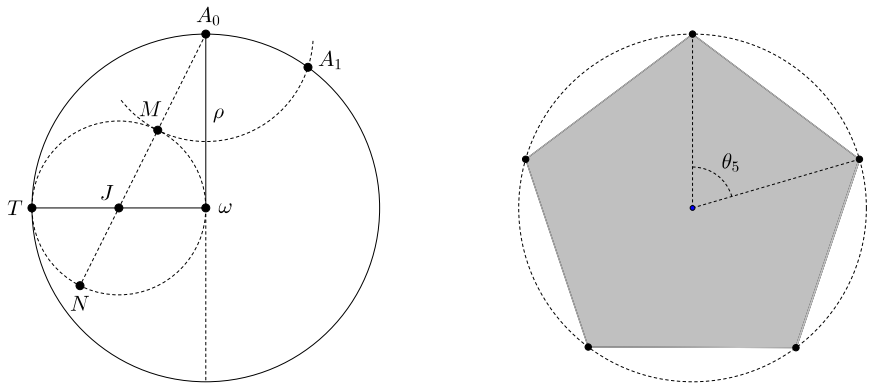
Posons $\alpha = \theta_{10}$. En examinant le dessin de droite de la figure ci-dessus, le lecteur peut constater facilement qu'on a les égalités qui suivent :

$$\begin{cases} \widehat{KA_1A_0} = 2\alpha = \widehat{A_1KA_0} \\ \\ \widehat{A_1A_0K} = \alpha = \widehat{\omega A_3K} \end{cases}$$

On en déduit que les deux triangles $\omega A_3 K$ et $A_1 A_0 K$ sont isocèles de bases respectives ωK et $A_1 K$. D'où $KA_3 = \omega A_3 = \rho$ et $KA_0 = A_0 A_1 = x$. Par suite $y - x = \rho$.

Les deux triangles $A_0 \omega K$ et $A_0 A_3 \omega$ ont l'angle $\widehat{\omega A_0 K} = \alpha$ en commun et les deux angles $\widehat{K\omega A_0}$ et $\widehat{\omega A_3 A_0}$ sont égaux à α. Ils sont donc isocèles et semblables. D'où la suite d'égalités $\frac{\rho}{y} = \frac{\omega A_0}{A_0 A_3} = \frac{A_0 K}{A_0 \omega} = \frac{x}{\rho}$. On en tire $xy = \rho^2$. Nous avons donc à construire deux segments $A_0 A_1$ et $A_0 A_3$ de longueurs respectives x et y vérifiant les deux conditions $y - x = \rho$ et $xy = \rho^2$.

Évidemment, pour avoir A_3, il suffit de construire A_1. Soit Γ un cercle de centre ω et de rayon $\rho > 0$. Sur Γ on choisit un point A_0 quelconque et un point T tel que l'angle $\widehat{A_0 \omega T}$ soit droit. On trace le cercle γ de diamètre ωT. Ce cercle est tangent en ω à la droite (ωA_0). Soit J le centre de γ ; la droite $(A_0 J)$ coupe γ en deux points M et N. On a alors Puissance de A_0 par rapport à $\gamma = A_0 M \cdot A_0 N = A_0 \omega^2$ d'une part, et d'autre part $A_0 N - A_0 M = MN = \rho$. On voit donc que $A_0 M = x$ et $A_0 N = y$. Le point A_1 est alors l'une des intersections du cercle centré en A_0 et passant par M. Ce qui termine la construction de l'angle θ_{10}. On a en même temps l'angle θ_5. □



Maintenant comme $15 = 3 \times 5$ et que 3 et 5 sont premiers entre eux (ils sont premiers) on peut déduire de ce qui précède la construction de θ_{15}.

Tous les exemples que je viens d'évoquer dans ce premier panel sont connus par ceux qui ont plus ou moins pratiqué les mathématiques jusqu'à un certain niveau. Voici un :

3. Deuxième panel

3.1. On pense toujours, à tort ou à raison, qu'est beau, ou est d'un certain intérêt, tout ce qui a un *caractère singulier*. Par exemple :

(i) Par deux points passe une droite et une seule. C'est une « vertu » pour trois points d'être alignés, de former un triangle équilatéral !...

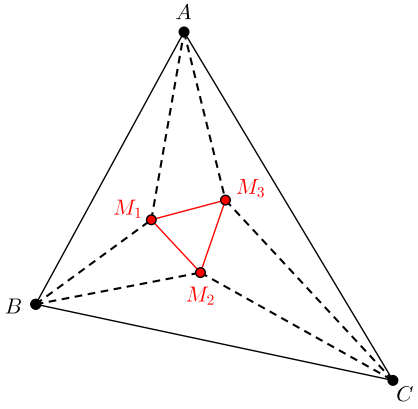
(ii) Par trois points non alignés passe un cercle et un seul. C'est aussi une « vertu » pour quatre points d'être cocycliques, de former un carré !...

(iii) Beaucoup de théorèmes ont pour conclusion :
- ...alors les trois points A, B, C sont alignés.
- ...alors le triangle ABC est équilatéral.
- ...alors les trois droites Δ_1, Δ_2 et Δ_3 sont concourantes.
- ...alors les quatre points A, B, C, D sont cocycliques.
- ...alors les quatre points A, B, C, D forment un carré.

3.2. On voit aussi la beauté dans une certaine régularité générée à partir de l'irrégularité - qui est son strict opposé. Voici un exemple, et pas des moindres.

Le théorème de Morley.

Soient ABC un triangle, (AM_1) et (AM_3) les trisectrices de l'angle $\widehat{BAC}$, (BM_1) et (BM_2) les trisectrices de l'angle $\widehat{ABC}$ et (CM_2) et (CM_3) celles de l'angle $\widehat{ACB}$. Alors le triangle $M_1M_2M_3$ est équilatéral.

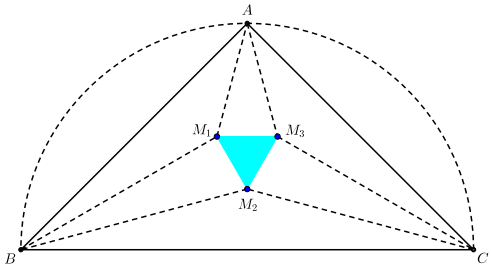


Une démonstration se trouve dans le livre [CG] de H.S.M. Coxeter et S.L. Greitzer. Comme commentaire d'introduction à ce théorème, je ne saurais faire mieux que celui des deux auteurs.

« Vers 1904 Franck Morley démontra l'un des théorèmes les plus extraordinaires de la géométrie élémentaire. Il le signala à des amis anglais de Cambridge, et, vingt ans plus tard, le publia au Japon. Entre temps le théorème avait été découvert à nouveau et proposé à titre de problème par la revue *Educational Times* qui reçut deux solutions : l'une de celles-ci, due à M. T. Naraniengar, est plus élégante que la douzaine d'autres élaborées depuis lors, nous la donnons ici.»

Les nombres complexes (on en dira un mot) sont un outil puissant en géométrie plane auquel on peut faire appel pour résoudre un problème. Alain Connes en a fait usage pour donner une nouvelle démonstration du théorème de Morley. Belle de surcroit ! On peut la trouver via ce lien https://denisevellachemla.eu/Alain-Connes-Theoreme-Morley.pdf Un beau texte dans lequel il raconte en plus l'histoire de sa rencontre avec ce théorème. Dans cette vidéo [Co] il explique aussi comment ce théorème reste vrai dans les corps possèdant une racine cubiques de l'unité.

Le triangle $M_1M_2M_3$ est appelé *Triangle de Morley* associé au triangle ABC. Il n'est malheureusement pas toujours constructible - à la règle et au compas - en raison de l'impossibilité de trisecter un angle de façon générale. C'est le cas, en particulier, lorsque ABC est équilatéral car l'angle de mesure 60^o est non trisectable. Par contre, il est facile de construire le triangle de Morley lorsque ABC est à la fois rectangle et isocèle (job laissé au lecteur).



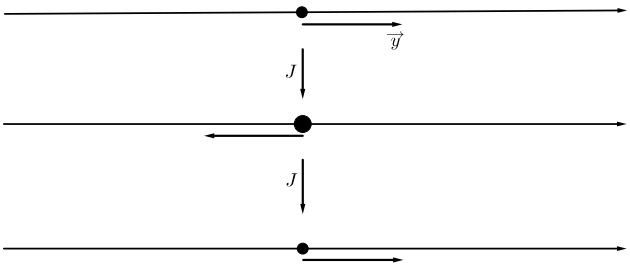
Les *nombres complexes* tiennent une place centrale parmi tout ce qu'il y a de beau en mathématiques. Ils ont permis la résolution d'équations algébriques (qui n'ont pas de

solutions dans $\mathbb{R}$) et ont largement contribué au développement de la géométrie. Leur impact s'est étendu par la suite et a donné lieu à un vaste champ d'investigation tel que l'analyse complexe, la géométrie complexe... et bien plus. Nous allons montrer au moins comment ils sont construits.

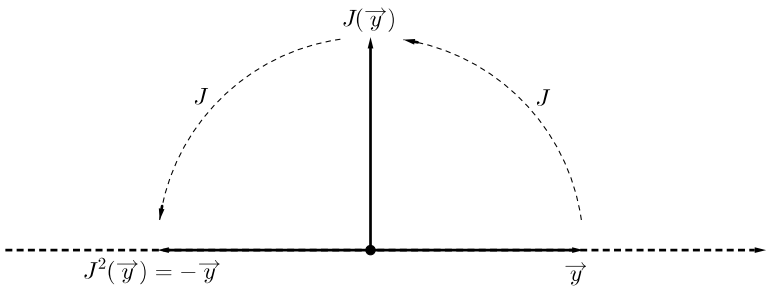
3.4. Nombres complexes. La hiérarchie numérique débute par les nombres entiers naturels qui comptent les éléments des ensembles finis. Leur ensemble, noté $\mathbb{N}$, est muni d'une addition $m + n$ et d'une multiplication mn. Le besoin de résoudre les équations $x + m = n$ et $mx = n$ a amené à l'élargir et à introduire l'anneau des entiers relatifs $(\mathbb{Z}, +, \times)$ et le corps des nombres rationnels $(\mathbb{Q}, +, \times)$. Les nombres réels sont arrivés pour des besoins géométriques ou autres (on pourrait à cet effet évoquer simplement le nombre $\sqrt{2}$ à partir du théorème de Pythagore) et leur construction est un peu plus compliquée. Ces derniers forment un corps $(\mathbb{R}, +, \times)$ possédant beaucoup de propriétés intéressantes, entre autres la *complétude*, fondamentale en analyse : toute suite de Cauchy y converge. On dit que $\mathbb{R}$ est un espace normé *complet*. (La norme est la valeur absolue $|x|$.)

Malgré toutes les belles propriétés du corps $(\mathbb{R}, +, \times)$, un problème se pose : on ne peut pas y résoudre l'équation $x^2 + 1 = 0$. Il est donc nécessaire de l'agrandir en le plongeant dans un corps commutatif $\mathcal{K}$ (le plus petit) dans lequel cela sera possible. C'est ce que nous allons expliquer rapidement.

Soient x et y deux nombres réels. On sait ce qu'est leur produit xy qui est aussi un nombre réel. Mais on peut voir les choses géométriquement : on considère y comme un vecteur $\overrightarrow{y}$ sur lequel on fait opérer le nombre x (qu'on suppose non nul). On a donc une *action* : $(x, \overrightarrow{y}) \in \mathbb{R}^* \times \overrightarrow{\mathbb{R}} \longmapsto x \cdot \overrightarrow{y} \in \overrightarrow{\mathbb{R}}$ du groupe multiplicatif $\mathbb{R}^*$ sur le groupe additif $\mathbb{R}$. Si on prend $x = -1$ et on note J l'opérateur qui lui correspond par cette action, on voit donc que l'équation $J^2(\overrightarrow{y}) = -\overrightarrow{y}$ n'a jamais de solution non nulle : il est impossible, en restant dans $\mathbb{R}$ d'appliquer deux fois de suite J et de ramener $\overrightarrow{y}$ vers son opposé $-\overrightarrow{y}$.



Il n'y a pas assez d'espace pour permettre à l'opérateur J de tourner deux fois et inverser le sens du vecteur $\overrightarrow{y}$. D'où l'idée de plonger la droite vectorielle $\overrightarrow{\mathbb{R}}$ dans un espace plus grand où cette opération sera possible. Le plus « proche » est évidemment le plan vectoriel $\mathbb{R}^2$.



Dans $\mathbb{R}^2$, l'opérateur J (décrit ci-dessus) a la possibilité de s'appliquer d'abord une

fois, puis une deuxième fois pour ramener le vecteur $\overrightarrow{y}$ de $\mathbb{R}$ vers son opposé $-\overrightarrow{y}$; J sera donc le « nombre » i (i comme *imaginaire*) dont le carré vaut -1.

Le surcorps $\mathcal{K}$ dans lequel on pourrait résoudre notre équation $z^2 = -1$ devrait donc être tel que :

- s'il contient x et y réels, il doit contenir $x + y$;
- s'il contient y réel, il doit contenir iy ;
- s'il contient x et y réels, il doit contenir $x + iy$;

Il est donc tout à fait clair que $\mathcal{K}$ est constitué des éléments de la forme $z = x + iy$ se composant comme suit :

- somme $(x + iy) + (x' + iy') = (x + x') + i(y + y')$;
- produit $(x + iy) \cdot (x' + iy') = (xx' - yy') + i(xy' + x'y)$.

Le corps $\mathcal{K}$ ainsi construit est le plus petit dans lequel l'équation $z^2 + 1 = 0$ admet une solution. On le note $\mathbb{C}$ et on l'appelle *corps des nombres complexes*. Le corps des réels $\mathbb{R}$ s'y plonge par le morphisme injectif : $x \in \mathbb{R} \longmapsto (x, 0) = x + i0 \in \mathbb{C}$.

La représentation $x + iy$ est unique. En effet l'égalité $z = x + iy = x' + iy'$ s'écrit $x - x' = i(y' - y)$; donc $(x - x')^2 = -(y' - y)^2$, ce qui n'est possible que si $x = x'$ et $y = y'$.

Je m'arrête à ce niveau. Pour les propriétés géométriques des nombres complexes, je renvoie au premier chapitre de [E2]. Mais je ne saurais continuer sans au moins donner l'énoncé et une preuve rapide du fameux :

Théorème fondamental de l'algèbre. *Tout polynôme $P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ à coefficients complexes de degré $n > 0$ admet une racine dans $\mathbb{C}$.*

Beaucoup de démonstrations existent. Curieusement, la plus « courte » est analytique et passe par une propriété remarquable des fonctions holomorphes sur le plan complexe $\mathbb{C}$ tout entier.

3.4. Une autre formule d'Euler. La fonction *exponentielle* $f : x \in \mathbb{R} \longrightarrow e^x \in \mathbb{R}$ est la réciproque de la fonction *logarithme* (notée ℓn) dont on connaît la vertu de transformer l'opération produit en l'opération somme. Elle est à la base du fonctionnement de la bonne règle à calcul d'antan. C'est une fonction indéfiniment dérivale et qui se développe en série entière $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ convergente pour tout $x \in \mathbb{R}$. Si on remplace formellement x par $z = ix$, la série reste convergente et s'écrit :

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} = \left(\sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!} \right) + i \left(\sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} \right) = \cos x + i \sin x.$$

En particuler si $x = \pi$, on obtient $e^{i\pi} = -1$ ou encore $e^{i\pi} + 1 = 0$. C'est la fameuse *formule d'Euler* reliant les cinq constantes mathématiques universelles : 0 élement neutre de l'addition, 1 celui de la multiplication, π la longueur du demi-cercle unité, le nombre complexe imaginaire i et e la base du logarithme népérien.

3.5. Un résultat en théorie de la mesure. Je l'avais découvert en dispensant le cours de *Mesure-Intégration* en Licence de mathématiques.

Notons λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$: sur chaque intervalle $J = |a, b|$ elle vaut $\lambda(J) = b - a$. Cela suffit à la définir de manière unique sur la tribu borélienne $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ de $\mathbb{R}$. (On verra que λ ne s'étend pas à la tribu de toutes les parties de $\mathbb{R}$.)

Assertion. *Soit A un borélien de $\mathbb{R}$ (un élément de $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$) tel que $0 < \lambda(A) \leq +\infty$. Alors l'ensemble $E = A - A = \{a - b : a, b \in A\}$ est un voisinage de 0.*

Par exemple, en vidant l'intervalle $[0, 1]$ de tous ses rationnels, on obtient un borélien A de $\mathbb{R}$ de mesure (de Lebesgue) 1. Il est d'intérieur vide et, curieusement, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]-\varepsilon, \varepsilon[\subset E = A - A$. Un peu surprenant !

Une belle application

J'ai été très surpris par la teneur de cette assertion, et je lui ai trouvé une certaine beauté ! D'autant plus qu'on peut en faire usage pour construire facilement une partie de $\mathbb{R}$ non mesurable au sens de Lebesgue. Ça se passe comme suit.

Dans $\mathbb{R}$ on définit la relation d'équivalence $(\mathcal{R})$: x et y sont équivalents si, et seulement si, $x - y$ est rationnel. Dans chaque classe d'équivalence on choisit un et un seul élément (ceci est possible grâce à l'axiome du choix) et on note B l'ensemble de ces éléments.

(i) L'ensemble $F = B - B = \{x - y : x, y \in B\}$ n'est pas un voisinage de 0 parce qu'il ne contient aucun rationnel. En effet, s'il en contenait un, il serait de la forme $r = x - y$ avec $x \in B$ et $y \in B$; x et y seraient donc équivalents et différents. Ceci contredit le fait que B contient un et un seul élément de chaque classe d'équivalence.

(ii) Pour $r, r' \in \mathbb{Q}$ distincts, les ensembles $(r + B)$ et $(r' + B)$ sont disjoints. Sinon il existe $x, y \in B$ tels que $r + x = r' + y$; d'où $x - y = r' - r$. Ce qui implique que $x \neq y$ et x équivalent à y. Contradiction puisque B contient au plus un élément de chaque classe d'équivalence ; par suite $(r + B) \cap (r' + B) = \emptyset$.

(iii) Tout élément $z \in \mathbb{R}$ est dans une classe d'équivalence et une seule *i.e.* il existe un et un seul élément $x \in B$ tel que $z - x = r \in \mathbb{Q}$ c'est-à-dire $z \in r + B$. Donc $\mathbb{R} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} (r + B)$.

(iv) Supposons que B est dans la tribu borélienne $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$. Alors $r + B$ est dans $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ pour tout $r \in \mathbb{Q}$ car comme l'application $x \longmapsto x + r$ est continue, elle est mesurable ; d'où, d'après (ii) $\sum_{r \in \mathbb{Q}} \lambda(r + B) = \lambda(\mathbb{R}) = +\infty$. Il existe donc $r \in \mathbb{Q}$ tel que $\lambda(r + B) > 0$.

Comme λ est invariante par translation on a $\lambda(r + B) = \lambda(B)$; donc $\lambda(B) > 0$. Par suite $F = B - B$ est un voisinage de 0 d'après l'assertion. Ce qui contredit (i).

Conclusion : L'ensemble B n'est pas mesurable au sens de la mesure λ. □

3.6. L'approximation diophantienne. Dans un passé un peu lointain, j'ai eu à m'intéresser à la convergence de certaines séries, liée à comment les rationnels approchent certains réels irrationnels. J'y ai été amené par des problèmes en théorie des *feuilletages* (étude qualitative des équations différentielles). C'est un beau thème en théorie analytique des nombres.

L'ensemble des nombres réels est constitué des rationnels et des irrationnels. Les premiers se comprennent bien car ils se fabriquent, par différents procédés, à partir des nombres entiers dont on sait exactement comment ils ont été introduits. Tout réel se laisse approcher avec n'importe quelle précision par des rationnels. Si le développement de toutes les techniques a été spectaculaire, c'est bien entendu grâce à cela : l'homme ne sait faire que les quatre opérations élémentaires (addition, soustraction, multiplication, division) sur les rationnels et tout le reste n'est que de l'approximation. À l'heure actuelle, aucun ordinateur sur terre n'accepte qu'on lui injecte des données irrationnelles ; ceux qui font semblant n'en prennent en réalité que les approches rationnelles pour lesquelles on les

a programmés. C'est en ce sens que l'on peut dire - si on veut rester optimiste - que le « monde est rationnel ». Au sein même des irrationnels il y a des classes (pas forcément disjointes). Expliquons cela. Soit θ un irrationnel.

• On dira que θ est *algébrique* s'il existe un polynôme P à coefficients entiers tels que $P(\theta) = 0$. Autrement, θ est dit *transcendant*. Par exemple $\theta_1 = \sqrt{2}$ et $\theta_2 = \sqrt{3+\sqrt{2}}$ sont algébriques puisque $P_1(\theta_1) = 0$ et $P_2(\theta_2) = 0$ avec $P_1(x) = x^2 - 2$ et $P_2(x) = x^4 - 6x^2 + 7$. Hermite a montré en 1873 que e (base du logarithme népérien) est transcendant ; en 1882 Lindemann a établi la transcendance de π et a mis ainsi un terme au problème de la *quadrature du cercle*. Les algébriques sont peu nombreux : ils forment un ensemble dénombrable. (Notons que tout rationnel $r = \frac{p}{q}$, où $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$, est algébrique puisque racine du polynôme $qx - p$.)

• Tout nombre irrationnel θ est limite d'une suite de rationnels $r = \frac{p}{q}$. Et on peut même préciser beaucoup plus dans le théorème qui suit, dû à L. Dirichlet.

Théorème. *Il existe une infinité de paires d'entiers (p, q) premiers entre eux et tels qu'on ait l'inégalité* :

$$\left|\theta - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}.$$

En 1891, A. Hurwitz a amélioré cette inégalité en $\left|\theta - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}q^2}$ et a montré que la constante $\sqrt{5}$ est optimale (*cf.* [Sc]).

L'estimation de réels θ par les rationnels dépendent de leur « nature arithmétique ». Outre le fait que les irrationnels se partagent en les algébriques et les transcendants, ils se distinguent aussi par la manière dont ils sont limites de suites ou de séries de rationnels.

Définition. *On dira que θ est* ***diophantien*** *s'il existe des constantes $A > 0$ et $\delta \geq 2$ telles que, pour tout $p \in \mathbb{Z}$ et tout $q \in \mathbb{Z}^*$ on ait* :

$$\left|\theta - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{A}{|q|^\delta}.$$

De tels nombres sont « mal approchés » par les rationnels. Si $\delta = 2$, d'après le théorème de Hurwitz, la constante A doit nécessairement satisfaire l'inégalité $A < \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Définition. *On dira que θ est* ***de Liouville*** *s'il existe une constante $A > 0$ telle que, pour tout $s \in \mathbb{N}$, il existe des entiers $p_s \in \mathbb{Z}$ et $q_s \in \mathbb{Z}^*$ vérifiant* :

$$\left|\theta - \frac{p_s}{q_s}\right| \leq \frac{A}{|q_s|^s}.$$

Les nombres de Liouville sont des irrationnels « très bien approchés » par les rationnels. Ils sont tous transcendants. On peut en construire en prenant des sommes de séries de nombres rationnels à décroissance très rapide, par exemple $\theta = \sum_{s=1}^{\infty} 2^{-s!}$ (dont Liouville a démontré la transcendance).

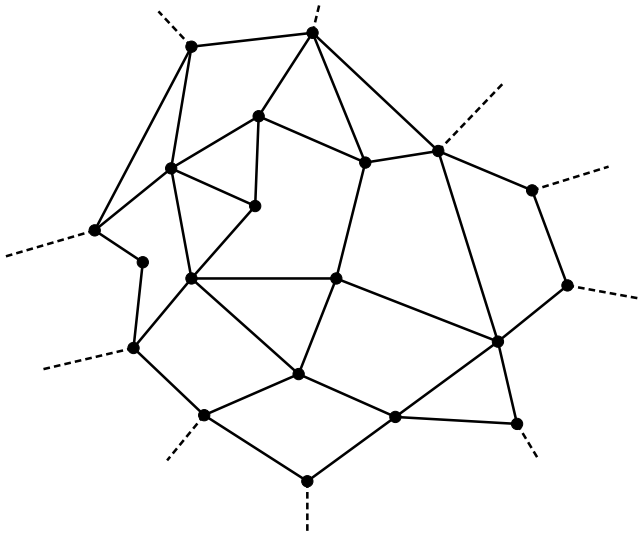
Facile mais pas immédiat. *Tout nombre algébrique est diophantien.*

Revenons maintenant à la géométrie où la beauté peut être toujours illustrée par des dessins indépendamment de ce qu'elle pourrait avoir comme contenu. Le thème par lequel nous terminerons cette section est celui des :

4. Pavages

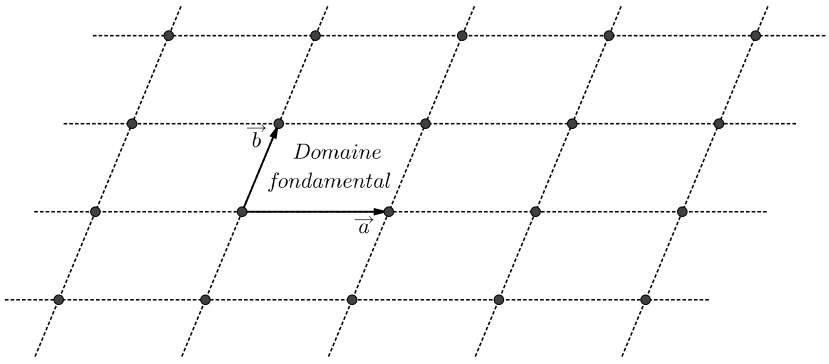
Le thème des *Pavages* est central aussi bien dans le domaine des mathématiques que dans celui des arts. Il a beaucoup intéressé les géomètres, les artistes, les artisans... à travers la symétrie et la beauté des objets dont il fait usage. Il est aussi très ancien et de caractère universel. Les décors somptueux qu'on peut admirer dans le palais de l'Alhambra à Grenade montre à quel point l'art islamique a été à la fois précurseur, bâtisseur et porteur d'excellence dans ce domaine.

4.1. Généralités. D'un point de vue général, un *pavage* du plan $\mathbb{E}$ est la décomposition de $\mathbb{E}$ en parties toutes homéomorphes à un disque et telles que deux d'entre elles ont leurs intérieurs disjoints. *Paver* un plan, c'est par exemple le couvrir par des polygones qui n'ont en commun que leurs arêtes. On pourrait en obtenir à partir d'une distribution discrète de points du plan qu'on joint par des segments de telle sorte que deux quelconques d'entre eux ne se coupent pas (*cf.* dessin ci-dessous). Chacun d'eux est appelé *pavé* (on dit aussi *tuile* ou *brique*). Leur ensemble sera noté $\mathcal{P}$ et on parlera donc du pavage $\mathcal{P}$.

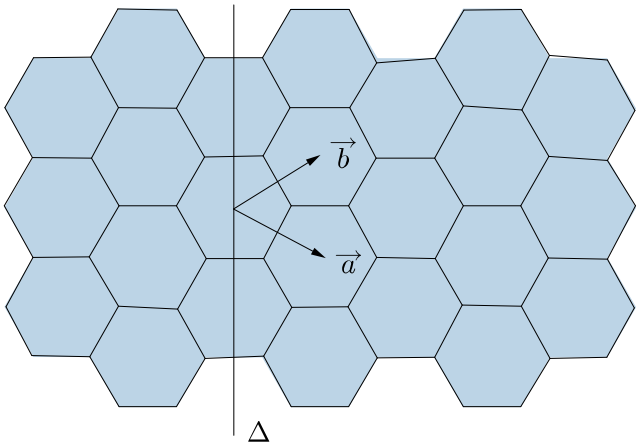


Un *automorphisme* d'un pavage $\mathcal{P}$ est une isométrie du plan qui envoie un pavé sur un autre pavé. Les automorphismes de $\mathcal{P}$ forment un groupe qu'on note $\mathrm{Aut}(\mathcal{P})$.

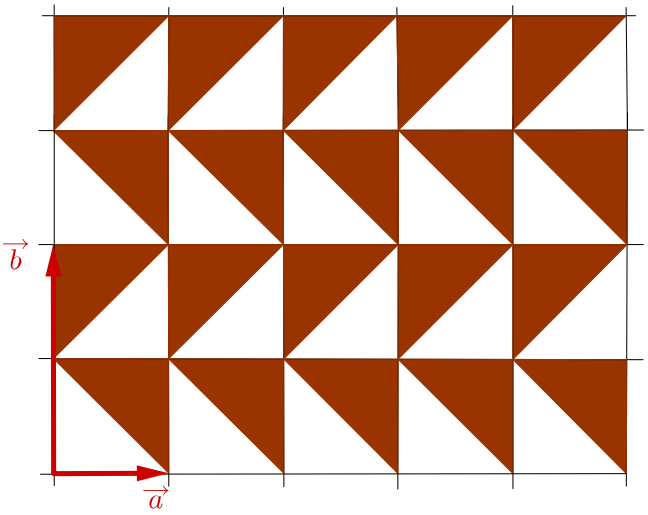
Le pavage $\mathcal{P}$ est dit *périodique* si $\mathrm{Aut}(\mathcal{P})$ contient deux translations linéairement indépendantes. Les vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ de plus petite « longueur » associés respectivement à ces translations engendrent un *réseau* Γ dans le plan. Le parallélogramme défini par le couple $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$ en est son *domaine fondamental*.



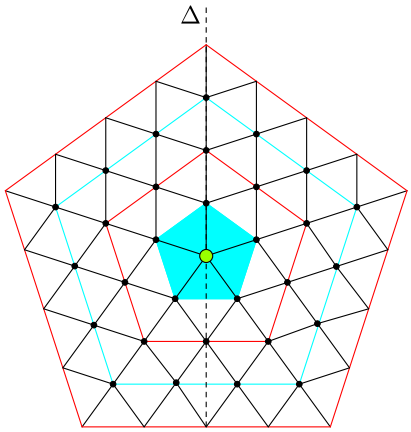
Dans un pavage périodique le motif essentiel se trouve dans le domaine fondamental du réseau. Celui-ci peut aussi posséder une certaine symétrie interne. Le groupe des automorphismes du pavage est une extension du réseau Γ par un groupe fini G constitué de réflexions et de rotations. On a donc une suite exacte : $0 \longrightarrow \Gamma \hookrightarrow \mathrm{Aut}(\mathcal{P}) \xrightarrow{\pi} G \longrightarrow 1$ où π est l'application qui à un automorphisme affine associe sa direction (*cf.* Partie III. Compléments).



Ici $\mathrm{Aut}(\mathcal{P})$ est engendré par $\Gamma = \mathbb{Z}\vec{a} \oplus \mathbb{Z}\vec{b}$, la réflexion σ d'axe Δ et la rotation de centre l'origine et d'angle $\theta = \frac{\pi}{3}$. On a une suite exacte $0 \longrightarrow \Gamma \hookrightarrow \mathrm{Aut}(\mathcal{P}) \xrightarrow{\pi} D_6 \longrightarrow 1$. Cette suite est scindée : il existe un morphisme section du groupe D_6 dans $\mathrm{Aut}(\mathcal{P})$; il a pour image le sous-groupe de ce dernier engendré par la rotation ρ et la symétrie d'axe Δ.



Ici $\mathrm{Aut}(\mathcal{P})$ est engendré par la translation $\tau_1(x, y) = (x + 1, y)$ et la symétrie glissée $\tau_2'(x, y) = (-x, y + 1)$. Le réseau Γ l'est par la translation τ_1 et la translation $\tau_2 = \tau_2' \circ \tau_2'$ de vecteur $\vec{b} = (0, 2)$. Le groupe $G = \pi(\mathrm{Aut}(\mathcal{P}))$ se réduit à la réflexion $\sigma(x, y) = (-x, y)$. On a ainsi une suite exacte $0 \longrightarrow \Gamma \hookrightarrow \mathrm{Aut}(\mathcal{P}) \xrightarrow{\pi} \{1, -1\} \longrightarrow 1$. Mais elle n'est pas scindée : il n'existe aucune copie du groupe $\{1, -1\}$ dans $\mathrm{Aut}(\mathcal{P})$ dont tous les éléments sont d'ordre infini.

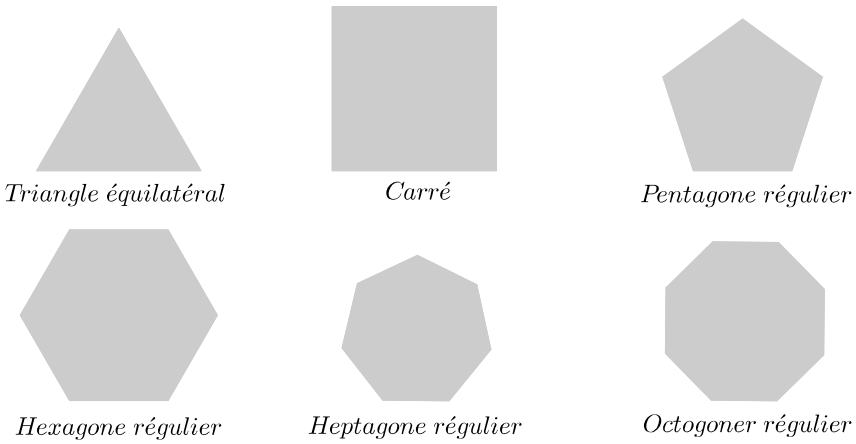


Ceci est un pavage non périodique. Son groupe d'automorphismes est isomorphe au groupe diédral D_5 engendré par la symétrie d'axe Δ et la rotation d'angle $\frac{2\pi}{5}$.

4.2. Un pavage $\mathcal{P}$ est dit *monoiédral* si tous les polygones qui le forment sont isométriques. C'est ce qu'on voit souvent dans les carrelages par exemple. Dans toute la suite nous nous restreindrons à cette catégorie (il y a déjà beaucoup à dire dessus). On peut alors se poser la question : tout polygone pave-t-il ? La réponse est non et est donnée par le :

Théorème [Ni]. *Un polygone convexe ayant un nombre de côtés supérieur ou égal à 7 ne pave pas le plan. Il faut donc se limiter au triangle, au quadrilatère, au pentagone et l'hexagone.*

Un pavage monoiédral est dit *régulier* si le pavé qui le génère est un polygone régulier. Question : *Quels sont les polygones réguliers qui pavent ?*



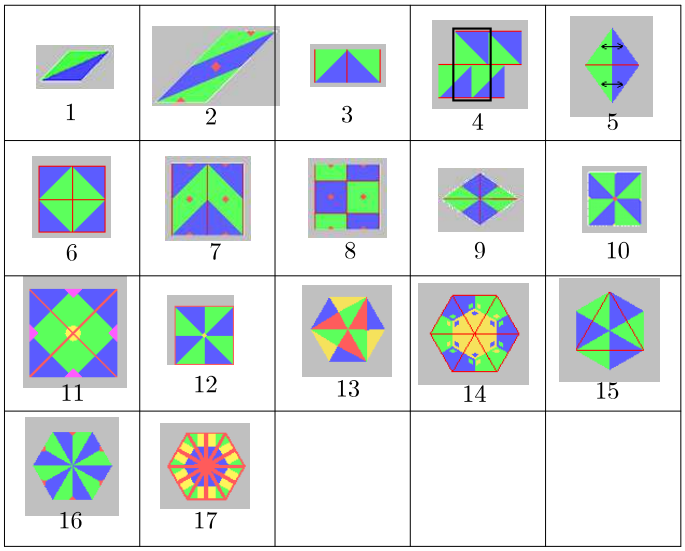
La réponse est : seuls le triangle équilatéral, le carré et l'hexagone régulier donnent un pavage régulier du plan (voir les dessins ci-dessous).

La nature nous offre parfois de tels pavages. En voici un construit pour les besoins de la cause par nos amies les abeilles. Ce n'est pas pour rien qu'elles ont choisi cette forme géométrique pour leurs bâtisses : parmi les pavages du plan, le pavage hexagonal régulier est celui dont la brique est de périmètre minimal. Comprenez donc chers lecteurs : les temps sont durs, il faut économiser de la cire !

4.3. Groupes paveurs. On rappelle qu'un groupe d'isométries du plan est exactement un ensemble de mouvements (y compris celui qui est sans effet) stable par compositions successives et par passage à leurs inverses :

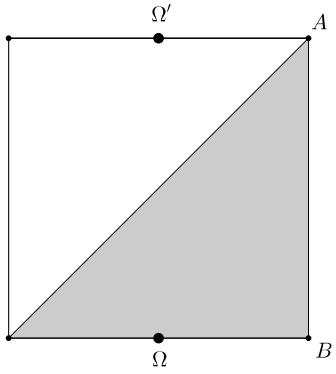
– Les translations poussent ;
– les rotations font tourner ;
– les réflexions symétrisent par rapport à des axes.

Quand on prend un pavé avec un motif dedans, qu'on lui applique de toutes les manières possibles les mouvements du groupe et qu'on arrive à paver le plan, on dit que le groupe en question est *paveur*.

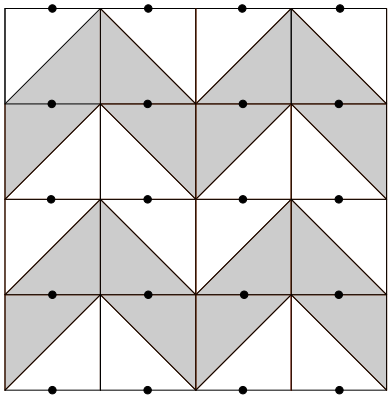


Les 17 groupes paveurs.
http://www.scienceu.com/geometry/articles/tiling/wallpaper.html

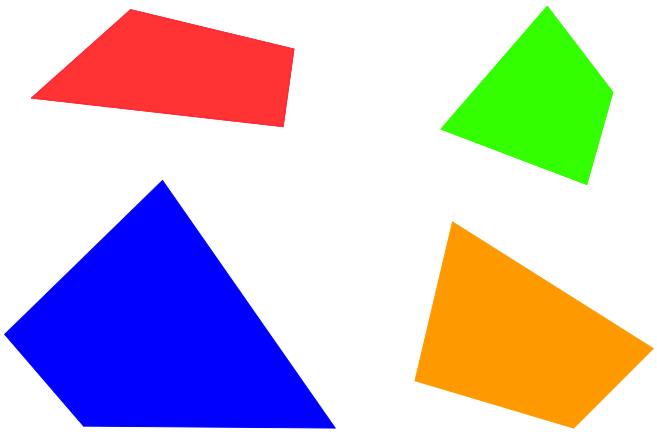
Regardons en détail un exemple. La brique de départ est celle du pavage numéro 7 sur laquelle on opère les mouvements qui suivent : on symétrise par rapport au point Ω et tous ses translatés horizontaux et verticaux par un carreau ; ensuite on symétrise par rapport aux axes horizontaux et verticaux.



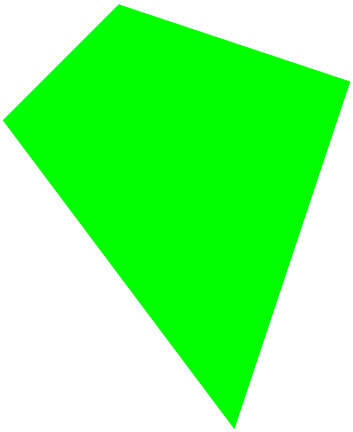
On obtient alors le pavage qui suit. Le groupe paveur est engendré par le réseau Γ dont les translations sont données par un vecteur horizotal et un vecteur vertical de deux carreaux chacun, de la symétrie centrée en Ω et la réflexion d'axe la droite (AB).



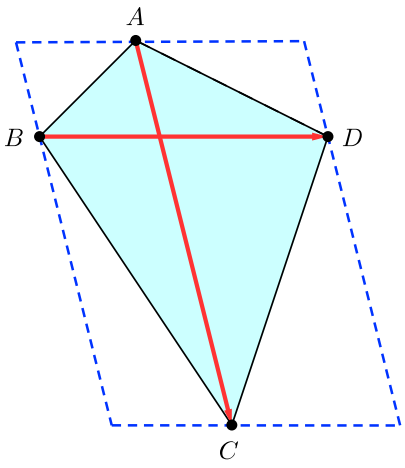
4.4. Quadrilatères paveurs. *Peut-on paver le plan avec des quadrilatères directement isométriques et ayant une forme quelconque ?*



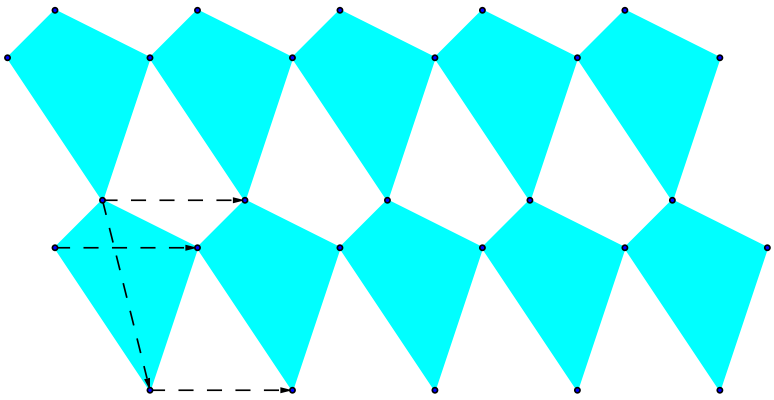
La réponse est oui. Prenons le quadrilatère ci-dessous (qui est tout à fait quelconque) et montrons comment on peut paver le plan avec. (Nous l'avons pris convexe mais ce n'est pas une restriction.)

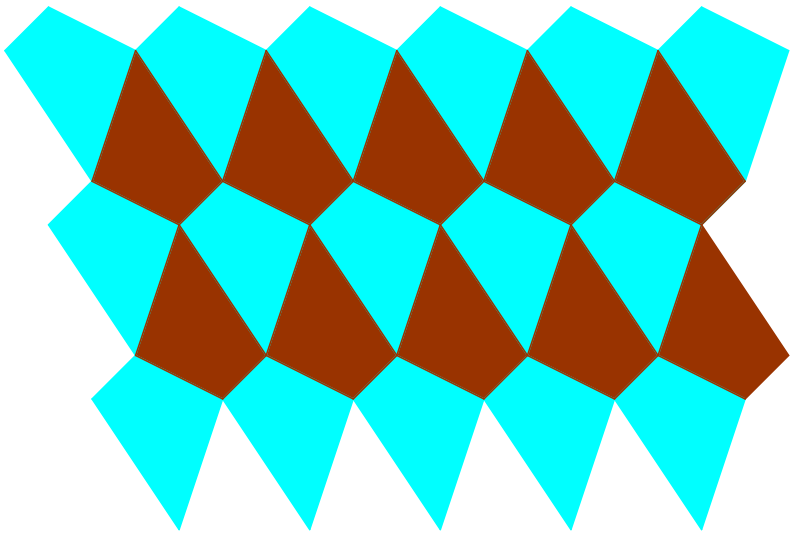


Les deux diagonales AC et BD déterminent un parallélogramme, qu'on prendra comme domaine fondametal. Les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont la base du réseau Γ décrivant la périodicité du pavage.



En poussant indéfiniment le carreau de départ par les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$ et leurs opposés ($\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{DB}$), on remplit ainsi le plan pour obtenir un pavage périodique.



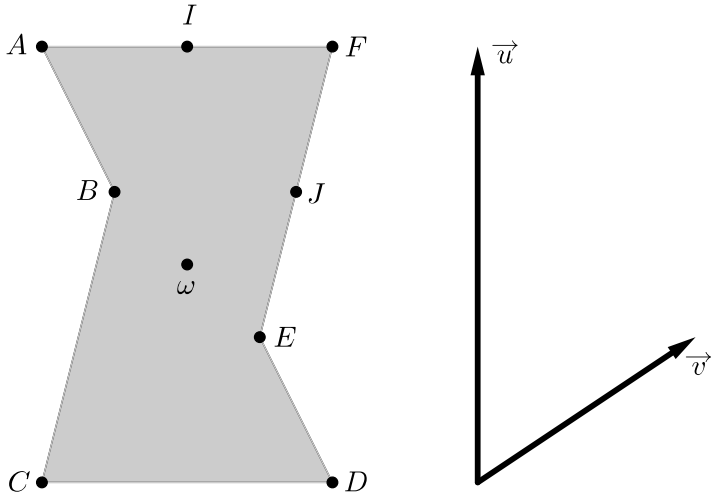


4.5. Question. *Existe-t-il des hexagones non réguliers qui pavent ? Si oui, donnent-ils des pavages périodiques comme dans le cas régulier ?*

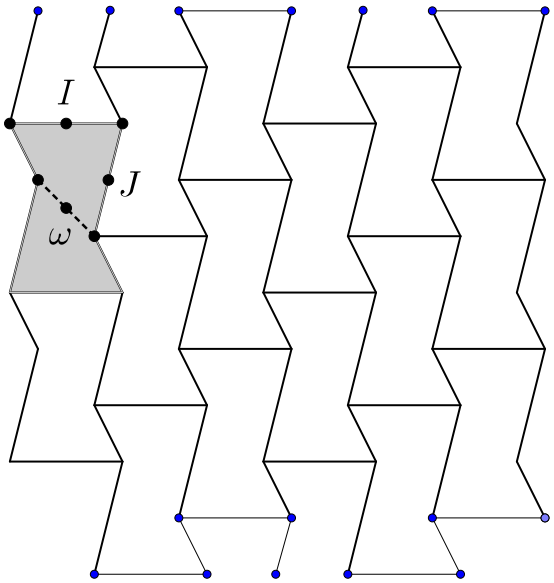
En général un hexagone quelconque ne pave pas : on peut construire des exemples à cet effet. Mais il en existe qui pavent même périodiquement. Ceux-là ont bien entendu une certaine particularité. Nous allons en voir un exemple.

Théorème. *Soit $\Delta = ABCDEF$ un hexagone ayant un centre de symétrie ω. Alors Δ pave périodiquement le plan.*

Démonstration. Elle est presque immédiate. Soient I et J les milieux respectifs des segments $[AF]$ et $[FE]$, posons $\vec{u} = 2\overrightarrow{\omega I}$ et $\vec{v} = 2\overrightarrow{\omega J}$ et notons τ_1 et τ_2 les translations associées respectivement à $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Si σ_ω, σ_I et σ_J sont les symétries de centres respectifs ω, I et J alors $\tau_1 = \sigma_I \circ \sigma_\omega$ et $\tau_2 = \sigma_J \circ \sigma_\omega$.



Nous laissons alors au lecteur le soin de voir que les translatés de Δ par le groupe Γ engendré par les translations τ_1 et τ_2 forment un pavage $\mathcal{P}$ du plan dont le groupe des automorphismes $\mathrm{Aut}(\mathcal{P})$ contient (par construction même) le réseau Γ, donc $\mathcal{P}$ est périodique (*cf.* dessin ci-dessous). □

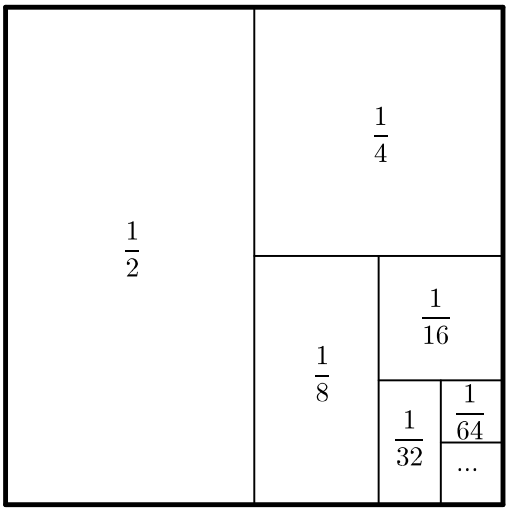


En guise d'épilogue

Il y a de belles choses en mathématiques. Nous en avons vu des exemples à travers des thèmes variés de la discipline. Nous les avons vus avec nos yeux et, surtout, en y jetant notre regard, qui peut être plus pertinent quand il est *géométrique*. Considérons la formule qui suit (bien connue) :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \ldots = 1.$$

C'est la traduction mathématique exacte du célèbre *paradoxe d'Achile*. Elle a une très belle représentation géométrique : le carré ci-dessus (dont le côté vaut 1) et qu'on divise indéfiniment en deux parties égales à chaque étape pour reconstituer son aire totale.



La formule est belle mais le regard qu'on jette sur le dessin qui l'illustre (de façon exacte) est plus parlant. C'est un exemple élémentaire de ce qu'on appelle *regard géométrique* et auquel nous consacrons la deuxième partie de cet exposé.

II. LE REGARD GÉOMÉTRIQUE

« La façon la plus courante de montrer que l'on a compris une explication est de dire *je vois*. Cela témoigne de l'immense pouvoir de la vision dans les processus mentaux, ainsi que de la manière dont le cerveau analyse et trie ce que l'œil perçoit. » [At].

« ...que de charme possède le regard qui saisit chaque signe. » [Ki].

Regarder la figure, bien l'observer... et aller peut-être jusqu'à la contemplation pour espérer que le tilt se produise. Tel est le rôle de notre démarche !

Mon œil reçoit de la lumière et je vois, à des degrés divers et de différentes manières. Je l'ai *aperçu* : je l'ai juste vu, j'ai constaté qu'il est là, qu'il est passé par là. Je l'ai *entrevu* : je l'ai vu rapidement, je l'ai croisé. Je l'ai *regardé* : je l'ai vu de façon volontaire. Tu as vu ce film ? Oui, je l'ai vu. Cela signifie que j'en ai *regardé* les scènes, *écouté* ce qui s'y disait, *suivi* le déroulement de l'histoire... et tout cela avec attention.

Je suis au musée. Mon ami m'interpelle :

- Tu as vu ce tableau ?
- Oui, je l'ai vu en passant devant tout à l'heure.
- Tu l'as bien regardé ?
- Non, j'ai juste jeté un coup d'œil dessus.
- Alors, prends un peu de ton temps, regarde-le bien et nous en parlerons.

Je m'assieds sur un banc, en face du tableau et me mets à le regarder. En fait, j'observe, c'est-à-dire je regarde avec attention. Que vois-je alors ? Des détails que je n'aurais pas vus si je ne m'étais pas attelé à regarder de près. La suite ? Elle est passionnante ! mais ce n'est pas tout à fait le propos pour le moment.

C'est ce qui se passe quand on regarde plus généralement une figure géométrique, spécialement lorsqu'on essaie de résoudre un problème en basse dimension où il est possible de dessiner et donc de visualiser. C'est de cela dont il s'agit dans cette partie : le ***regard géométrique***. J'y livre un peu les impressions que j'en ai, mais seulement sur des exemples et à travers quelques expériences personnelles, sans nullement prétendre y développer un essai sur le langage sensoriel ou autre. J'y décris un certain nombre d'exemples où l'observation d'une figure intervient de manière fondamentale et montre quand le regard :

- est nécessaire,
- trompe,
- est dynamique,
- fait un clin d'œil à l'algèbre,
- met en parallèle graphe et expression analytique,
- est enfin jeté sur une peinture ou un dessin.

Ce dernier point fait apparaître une différence entre le regard du géomètre et celui de l'artiste observateur ou l'historien de l'art comme on le verra.

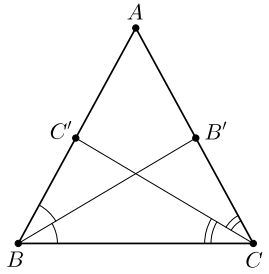
Faire des mathématiques demande à réfléchir et souvent de façon intense : on cherche une idée qui mènerait vers une méthode d'attaque pour arriver à la solution du problème qu'on se pose. Si c'est un problème de géométrie élémentaire par exemple, on commence par dessiner une figure, on y rajoute éventuellement des éléments (des points, des droites, des cercles...) pour faire sortir une idée, quelque chose qui puisse conduire à une solution ou, du moins, vers une bonne approche de celle-ci. Le dessin est donc fondamental : c'est

un guide. Certains pensent que son rôle se limite à la géométrie. C'est une erreur, peut-être innocente mais qui tient un peu du manque d'ouverture. Il déborde ce champ et peut être d'une grande efficacité dans presque toutes les branches des mathématiques. Les exemples appuyant ce point de vue abondent : je pense que tout le monde peut s'accorder pour dire qu'il est souvent plus facile de chercher une fonction réelle vérifiant une certaine propriété d'abord en imaginant son graphe plutôt que passer du temps pour en donner une expression analytique !

5. Regards divers

5.1. Un premier exemple. On prendra comme support le théorème qui suit dont l'énoncé a été formulé en 1840 par C.L. Lehmus et soumis à J. Steiner (éminent géomètre suisse de l'époque). Ce dernier en donna une solution et le théorème porte désormais son nom. Il y a eu d'autres démonstrations depuis lors, parmi lesquelles celle que je vais exposer.

Soit ABC un triangle ; on note BB' le segment bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$ et CC' celui de l'angle $\widehat{ACB}$. On suppose $BB' = CC'$; alors ABC est isocèle de base BC.



(Fig.II.1)

Avant de savoir que c'est un théorème « important » de la géométrie plane (et qu'il porte un nom), j'ai découvert son énoncé dans les années 1980 : un des membres de notre équipe *Feuilletages* (notre ami Étienne Ghys) à Lille 1 nous l'a posé comme exercice. Nous n'avons pas su le faire ; Étienne non plus, qui nous a même appris qu'un de ses camarades à l'ENS l'avait soumis à son Tonton (un brillant mathématicien du XXème siècle) qui a séché dessus. Ce qui m'a beaucoup intrigué (j'étais pleinement naïf ces années-là) : un problème de formulation si simple sur lequel calent de si grosses têtes ! Mais oui ! des casse-tête du genre peuvent donner du fil à retordre à n'importe qui ! Bref... j'ai passé quelques jours à chercher une démonstration mais sans succès.

Quelques années plus tard, j'ai eu à faire un cours de géométrie élémentaire à des élèves « futurs enseignants ». Là, j'ai été obligé d'aller jusqu'au bout - dans la mesure de mes possibilités bien sûr ! - de tout problème que je commençais. Normal, il faut savoir résoudre soi-même un exercice avant de le soumettre à ses étudiants ! Je me suis souvenu de l'exercice sur les bissectrices et je me suis dit que ce serait une bonne idée de le traiter en séance de travaux dirigés. Il fallait donc avoir une preuve sous la main. J'ai fini par en dénicher une dans [CG]. Je l'ai trouvée simple et sympathique mais le fait qu'elle ne soit pas la mienne me gênait. Je me suis alors mis dans la tête l'idée d'en trouver une (autre) du même acabit. J'y suis arrivé même si cela m'a pris beaucoup de temps. C'est un bel exemple sur lequel on peut commenter un aspect de l'usage du ***regard géométrique***.

Comme on ne voit pas a priori comment donner une preuve directe du théorème, on use d'un raisonnement par l'absurde : on suppose que le triangle ABC n'est pas isocèle

(de base BC) et on montre que $BB' \neq CC'$. Dans ce genre de tâche, on part d'un dessin de base (voir (Fig.II.1)) où ne figurent que les données du problème.

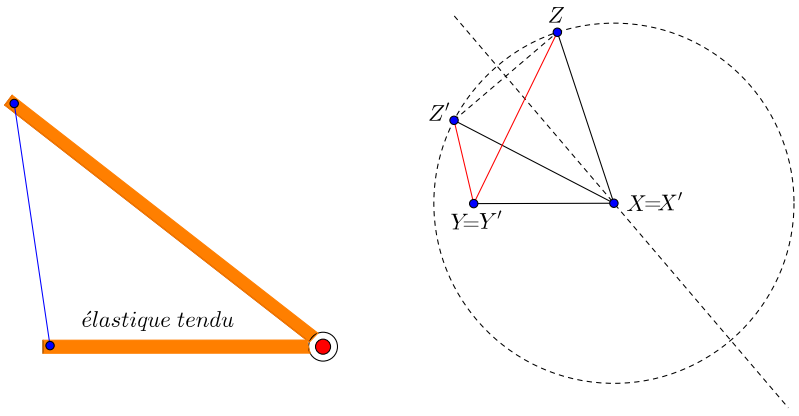
On suppose $\widehat{ABC} > \widehat{ACB}$ par exemple et on essaie d'arriver à $BB' \neq CC'$ comme conclusion, ce qui contredit l'hypothèse. Mais la (Fig.II.1) ne donne pas suffisamment de renseignements et on n'y voit pas grand chose ; il faut rajouter des éléments pour retrouver la grandeur BB', l'angle $\widehat{ABC}$ ou $\frac{\widehat{ABC}}{2}$... par exemple, un parallélogramme dont l'un des côtés est BB' et l'un des angles est $\frac{\widehat{ABC}}{2}$ (comme dans la (Fig.II.3)). Une première chose est sûre : l'inégalité $\widehat{ABC} > \widehat{ACB}$ donne $\frac{\widehat{ABC}}{2} > \frac{\widehat{ACB}}{2}$; cette dernière combinée à l'hypothèse $BB' = CC'$ fournit l'inégalité $B'C > BC'$ qui nous sera utile dans la preuve. Pour justifier cette dernière, on utilise une propriété élémentaire en géométrie plane :

Si deux triangles XYZ et $X'Y'Z'$ sont tels que $XY = X'Y'$ et $XZ = X'Z'$, alors $\widehat{YXZ} > \widehat{Y'X'Z'}$ si, et seulement si, $YZ > Y'Z'$.

On peut voir cela assez facilement et même de façon dynamique, pour « sentir » l'idée (c'est le cas de le dire !) que plus l'angle est grand plus le côté opposé l'est.

On prend deux tiges rectilignes ayant pour longueurs respectives $XY = X'Y'$ et $XZ = X'Z'$; on colle une extrémité de l'une sur une extrémité de l'autre de façon à ce qu'on puisse les faire pivoter autour du point où elles ont été collées. Pour simplifier, on maintient fixe l'une de ces tiges, qui représente par exemple les segments XY et $X'Y'$ (on a superposé le point X' sur X et le point Y' sur Y). Une position de la deuxième tige donne le triangle XYZ et une autre le triangle $X'Y'Z'$.

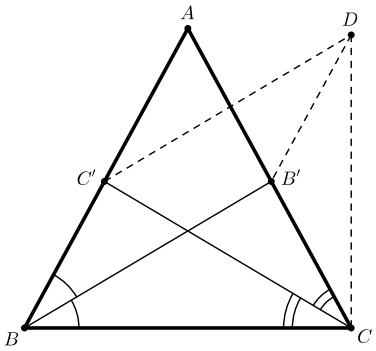
Jetons maintenant un ***regard géométrique*** sur le dessin de droite de (Fig.II.2). La médiatrice du segment $[ZZ']$ passe par le point X ; elle partage son complémentaire dans le plan en deux demi-plans ouverts dont l'un contient les points $Y = Y'$ et Z', donc $Y' = Y$ est plus proche de Z' que ne l'est $Y = Y'$ du symétrique Z de Z', c'est-à-dire qu'on a $YZ > Y'Z'$.



(Fig.II.2)

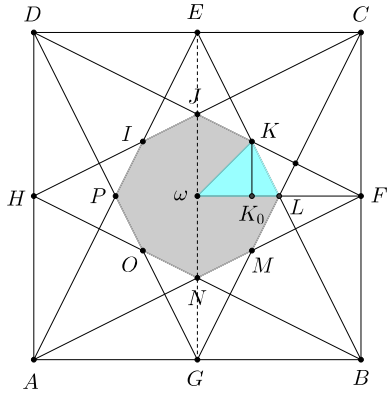
Un éclaircissement apparaît mais les choses restent encore opaques, comme derrière une vitre couverte de buée : il faut nettoyer pour voir plus clairement. Continuons notre démarche. Quand on nie une conclusion, c'est pour arriver à la négation de l'hypothèse, en l'occurrence celle de l'égalité $BB' = CC'$.

L'égalité $BB' = C'D$ et l'inégalité $B'C > BC' = B'D$ suggèrent de s'intéresser aux deux angles $\widehat{B'DC}$ et $\widehat{B'CD}$. Ils vont être alors tels que $\widehat{B'DC} > \widehat{B'CD}$; d'où $\widehat{C'DC} > \widehat{C'CD}$ qui implique $C'C > C'D = BB'$ et qui amène à la contradiction de l'hypothèse $BB' = CC'$. Fin de la preuve !



(Fig.II.3))

5.2. Le regard qui trompe. *Soient $ABCD$ un carré de côté mesurant 1 et E, F, G et H les milieux respectifs des côtés DC, CB, BA et AD. Quelle est l'aire de l'octogone $\mathcal{O} = IJKLMNOP$?*



(Fig.II.4)

Beau dessin avec le même décor sous toutes les coutures. Vu qu'on part d'un carré, qu'on considère les milieux de ses côtés et qu'on joint chacun d'eux aux extrémités du côté opposé, notre octogone naît de façon apparente avec beaucoup de symétrie. On le prend pour un octogone régulier. J'ai pensé cela pendant un moment, et je ne sais pas pourquoi auparavant je n'ai pas eu le réflexe de vérifier si c'est vrai ou pas.

• Il y a huit petits triangles constituant l'octogone $\mathcal{O}$: ωIJ, ωJK, ωKL, ωLM, ωMN, ωNO, ωOP et ωPI. Le premier regard suggère qu'ils sont tous isométriques. Ils le sont effectivement. D'abord les deux triangles ωIJ et ωJK sont symétriques par rapport à la droite (ωJ) ; ensuite ωJK et ωKL sont symétriques par rapport à la droite (ωK). Ces trois triangles sont donc isométriques. En répétant ce raisonnement, on montre que les huit triangles évoqués le sont aussi. Pour calculer l'aire de l'octogone $\mathcal{O}$, il suffit donc d'avoir celle de l'un de ces huit triangles, par exemple ωKL. C'est le deuxième regard, qui nous recommande de ramener le calcul de l'aire de notre octogone à celui de figures plus simples.

• Le triangle KDE se déduit du triangle KFL par l'homothétie de centre K et de rapport $-\frac{DE}{FL} = -2$. Donc $\frac{KF}{FD} = \frac{1}{3}$; par suite $\frac{FK_0}{FH} = \frac{FK}{FD} = \frac{1}{3}$. On en déduit $FK_0 = \frac{1}{3}$ qui donne $\omega K_0 = \omega F - FK_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$. ($K_0$ est le pied de la hauteur issue de K du triangle ωKL.) Comme le triangle $\omega K_0 K$ est rectangle en K_0 et son angle $\widehat{K\omega K_0}$ vaut $\frac{\pi}{4}$, il est isocèle de base ωK, donc $KK_0 = \omega K_0 = \frac{1}{6}$.

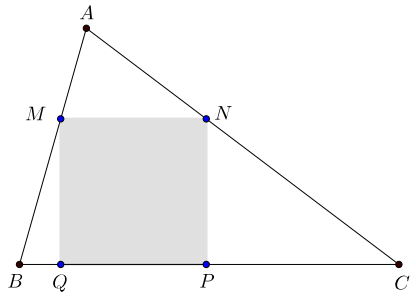
• L'aire de l'octogone $\mathcal{O}$ est donc : $\mathcal{A}(\mathcal{O}) = 8 \cdot \mathcal{A}(\omega KL) = 8 \cdot \frac{\omega L \cdot KK_0}{2} = 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$.

Revenons un peu sur l'erreur éventuelle qu'on pourrait commettre sur la nature de l'octogone $\mathcal{O}$. Sa régularité supposée impose aux huit triangles ωIJ, ωJK, ωKL, ωLM, ωMN, ωNO, ωOP et ωPI d'être isocèles de bases respectives les côtés opposés au sommet commun ω. Or un examen précis, usant du théorème de Thalès, montre que les rapports $\frac{\omega K_0}{\omega F}$ et $\frac{\omega K}{\omega C}$ sont égaux. Donc $\omega K = \frac{1}{3}\omega C = \frac{\sqrt{2}}{6}$ qui est différent de $\frac{1}{4} = \omega L$. Par suite le triangle ωKL n'est pas isocèle. Mais comme $\frac{1}{4}$ est « voisin » de $\frac{\sqrt{2}}{6}$, sur la figure, on n'arrive pas à voir à l'œil nu cette différence, ce qui la rend trompeuse et laisse penser que l'octogone $\mathcal{O}$ est régulier, et amènerait donc à une fausse valeur de $\mathcal{A}(\mathcal{O})$.

Cet exemple met en garde : quand on use du regard géométrique, il ne faut jamais omettre d'aller jusqu'au bout pour être certain de ce qu'on serait tenté d'affirmer.

5.3. Le regard dynamique. Est-ce la figure qui se meut ou le regard qui cherche où elle se trouve ? Peu importe, toute réponse qu'on donnerait serait bonne. Essayons plutôt de comprendre sur un exemple ce que cela signifie.

Soit ABC un triangle non dégénéré. Construire géométriquement un carré $MNPQ$ inscrit dans ce triangle. Cela signifie, par exemple, que le point M est sur le segment $[AB]$, N sur $[AC]$ et P et Q sur $[BC]$ (cf. (Fig.II.5)).



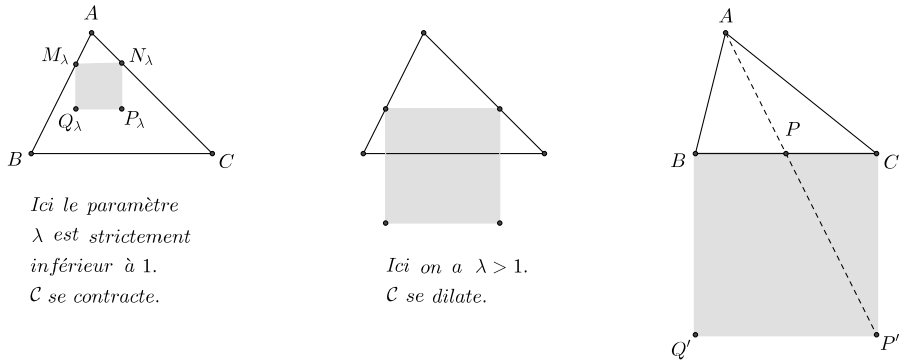
(Fig.II.5)

Comme tout problème de construction géométrique, une bonne manière de le résoudre est de supposer que la construction est faite. À cet effet, on commence par faire un dessin pour voir des éléments dedans. On part d'un carré $MNPQ$. Sur la droite (PQ) en dehors du segmet ouvert $]QP[$, on choisit un point B du côté de Q et un point C du côté de P de telle sorte que les droites (BM) et (CN) se coupent en un point A. C'est à une telle figure qu'on veut arriver mais en partant du triangle ABC qui est donné. On constate un certain nombre de choses :

(i) Les deux angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$ doivent être aigus (inférieur ou égaux à un droit) si on veut que le côté BC du triangle porte le côté PQ du carré.

(ii) Pour déterminer le carré, il suffit de connaître par exemple P. En effet, N sera l'intersection de $[AC]$ avec la perpendiculaire à $[BC]$ en P, M l'intersection de la parallèle passant par N au côté BC et le côté AB et enfin Q la projection orthogonale de M sur $[BC]$.

(iii) On se donne $\lambda \in \mathbb{R}_+$. L'homothétie h de centre A et de rapport λ transforme le carré $\mathcal{C} = MNPQ$ en un carré $\mathcal{C}_\lambda = M_\lambda N_\lambda P_\lambda Q_\lambda$ dont le côté $M_\lambda N_\lambda$ reste constamment parallèle au segment $[BC]$. Pour $\lambda < 1$, le carré $\mathcal{C}$ se contracte et se réduit au point A lorsqu'on arrive à $\lambda = 0$; pour $\lambda > 1$, il se dilate et à un certain moment son côté $M_\lambda N_\lambda$ se confond avec la base BC du triangle ABC. On peut voir tout cela dans les trois dessins de la (Fig.II.6).



(Fig.II.6)

(iv) Comme h envoie $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{C}_\lambda$, l'inverse h^{-1} va envoyer $\mathcal{C}_\lambda$ sur $\mathcal{C}$. L'avantage est que la construction de $\mathcal{C}_\lambda$ est soumise à moins de contraintes que celle de $\mathcal{C}$. Et c'est la construction de l'un des $\mathcal{C}_\lambda$ qu'on va faire effectivement.

(v) On construit n'importe lequel des carrés $\mathcal{C}_\lambda$ en question. Par exemple $BCP'Q'$ (dessin de droite sur la (Fig.II.6)). L'homothétie qui le ramène vers l'un des carrés $MNPQ$ cherchés (a priori il n'est pas le seul) envoie le point P' sur le point P ; donc P est l'intersection de la droite (AP') avec le segment $[BC]$. Comme on l'a déjà remarqué au point (ii), la connaissance de ce point P suffit à avoir le carré $MNPQ$.

(vi) On a en même temps montré l'unicité du carré qu'on cherche lorsque on décide de mettre les points P et Q sur BC. En fait, si les trois angles sont strictement aigus, il y a trois solutions : chaque côté du triangle peut héberger un côté du carré. Deux solutions si l'un des angles est droit. Si l'un des angles est strictement obtus (strictement plus grand qu'un droit), seul son côté opposé peut héberger un côté du carré, donc il n'y a qu'une seule solution.

Notre carré $MNPQ$ ne peut pas être construit directement sur le triangle ABC. Nous avons dû chercher ailleurs un autre carré $BCP'Q'$ que nous avons transformé en celui qui nous intéresse : nous l'avons mis en mouvement dans l'espace et son homogénéité. Signalons en passant que la notion d'homogénéité est très importante en mathématiques. Elle l'est aussi en philosophie ! Voici ce qu'en disait Sartre par exemple dans [Sa] :

> « ***Le mouvement est pur changement de lieu d'un ceci demeurant par ailleurs inaltéré, comme le montre assez le postulat de l'homogénéité de l'espace.*** »

C'est l'inaltération de la forme : dans notre exemple, le carré a beau changer de taille mais reste toujours un carré. C'est même sûrement le « même carré » vu à travers des lunettes différentes !

La géométrie nourrit nos yeux tous les jours : elle est présente dans tous les coins de notre espace de vie. C'est certainement (ou c'était !) la partie la plus plaisante par laquelle on débute l'apprentissage des mathématiques à l'école (c'est le souvenir que j'en ai personnellement). Pendant longtemps, elle avait une place de choix aussi bien dans le secondaire que dans le supérieur, et c'était plus que légitime. Mais, ces dernières années, pour des raisons laissées tout le temps sombres (délibérément ou par ignorance), un bon nombre de décideurs l'ont amputée. Le pire : beaucoup de membres de la communauté mathématique applaudissent un tel acte. J'en étonnerais plus d'un si je disais que certains d'entre eux vont jusqu'à interdire à leurs étudiants de faire des dessins en cours d'algèbre linéaire :

- Je ne veux rien savoir, ne me dites pas qu'un noyau est un plan !

- Eh...comment ça, Professeur !

- Non ! non ! et non ! je ne veux pas entendre ça, je vous l'interdis !

Vampirisés, les pauvres. Petite histoire (rien ne vaut les faits réels) qui montre que ces étudiants étaient obligés de rester dans les rangs impartis et ne rien tenter d'autre.

5.4. Clin d'œil à l'algèbre. J'ai cette « sale habitude » de commencer de temps en temps une séance de travaux dirigés par un petit test. Je pose la question aux étudiants :

- Est-il possible de diagonaliser la matrice A d'une rotation du plan euclidien de centre l'origine et d'angle 90 degrés ?

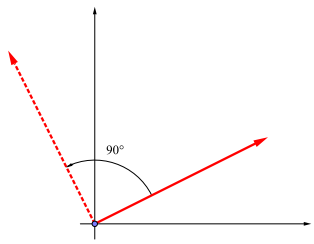
Je m'attendais à une réponse rapide (géométrique bien entendu) ; rien de tout cela, on n'y pense même pas. Mais on sort la bonne recette du chef : on retranche λ de tous les termes diagonaux, on calcule le déterminant, puis le discriminant (il le faut absolument ?) et paf, celui-ci est négatif.

- Monsieur, pas de solutions réelles, on ne peut donc pas diagonaliser A.

- C'est parfait ! mais que signifie cela du point de vue géométrique ? leur dis-je.

- On ne sait pas ! On ne nous a jamais rien dit là-dessus et on nous déconseille de faire des dessins. On doit se contenter de calculer.

Oui, en effet, seul le calcul convainc. Tout s'arrête là. Je n'étais pas étonné de cette réaction et j'avais du mal à comprendre pour quelle raison on ne peut pas (ou on ne doit pas) leur expliquer l'aspect géométrique qu'il y a derrière. Je décide de réparer (ce que je n'ai jamais cassé). C'est alors tout le tralala « valeur propre, vecteur propre... » qu'il fallait reprendre, mais je passe par dessus tout pour ne retenir que le fait (sur lequel finalement on s'est mis d'accord) que l'existence d'une valeur propre non nulle implique celle d'un vecteur non nul dont la direction (c'est-à-dire la droite qui le « porte ») reste la même sous l'effet de l'application linéaire. Je leur demande de dessiner le plan euclidien (celui de tout le monde : deux axes perpendiculaires portant chacun un vecteur de longueur 1 d'origine le point d'intersection) ; ils le font ; ensuite de prendre un vecteur non nul et lui appliquer la rotation ; ils le font.



(Fig.II.7)

- Ah oui, tous les vecteurs tournent d'un quart de tour, s'écrient-ils ; aucune direction ne reste la même.

- Et donc ?

- Il n'y a pas de valeur propre réelle, A n'est pas diagonalisable, s'empressent-ils de conclure.

Leur joie fut immense de découvrir en « voyant avec leurs yeux » (au sens propre du terme) le « phénomène valeur propre et vecteur propre ». Ils en connaissent la définition, par la simple phrase habituelle (qu'ils récitent) : *On dit que λ est valeur propre de l'endomorphisme f s'il existe un vecteur non nul u tel que $f(u) = \lambda u$; on dit alors que u*

est un vecteur propre associé à λ. Et tout reste là. Dommage ! ça laisse l'enseignement qu'ils subissent totalement incomplet.

Continuons ! Nous allons voir qu'il n'y a pas que l'algèbre linéaire à qui le ***regard géométrique*** fait des clins d'œil.

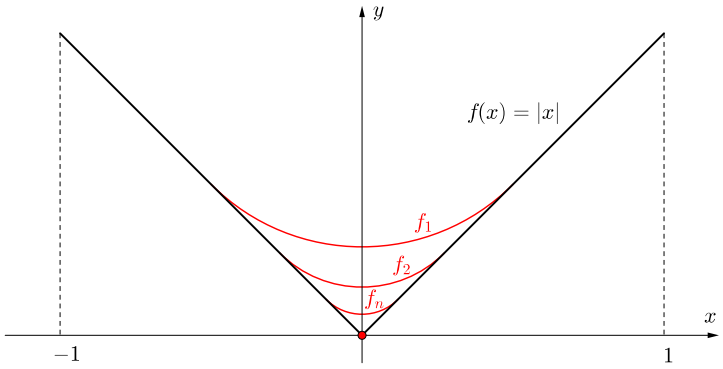
5.5. Graphe ou expression analytique ? Plus précisément : *Faut-il penser à une fonction par son expression analytique ou par son graphe* ? Examinons cela sur un problème plus concret : *Exhiber une suite de fonctions continûment dérivables sur l'intervalle* $[-1, 1]$ *qui converge uniformément vers* f *continue non dérivable* (histoire de montrer que l'espace des fonctions continûment dérivables sur $[-1, 1]$ n'est pas complet pour la norme uniforme).

J'ai souvent posé cette question en Master et, toujours, les étudiants ne sont tentés que par la forme analytique de chacune des fonctions. Ils y passent du temps, et en vain.

- Pourquoi vous n'essayez pas géométriquement ? leur dis-je à chaque fois.

- Comment ça, géométriquement, Monsieur ? c'est de l'analyse ? rétorquent-ils.

Je leur suggère alors de bien se rappeler pourquoi la fonction $f(x) = |x|$ n'est pas dérivable en 0, de tracer son graphe et de le considérer comme un petit ravin dans lequel on jette un cerceau (cercle) de diamètre $\frac{1}{n}$. Ensuite, faire varier $n = 1, 2, ...$ et laisser le reste à l'imagination. Ils se demandent pourquoi tout cela. Mais quand je les invite à bien regarder la figure et après quelques échanges, ils finissent par comprendre et arriver à construire la suite cherchée.



(Fig.II.8)

Même s'il faut encore travailler afin de les dissuader de faire des calculs compliqués pour montrer qu'effectivement la suite f_n converge uniformément vers f, ils ne tardent pas à réaliser et à se convaincre que c'est le moyen le plus intuitif et le plus facile pour répondre à une question de ce genre. Ainsi, ils découvrent la vertu et la force du ***regard géométrique***.

Je peux conter mille histoires du même genre. Toutes amènent à se demander pourquoi on va de façon aveugle vers la privation de l'enseignement des mathématiques de tous ces services que lui rend la géométrie. Car le vider de celle-ci, c'est y mettre fin une fois pour toutes.

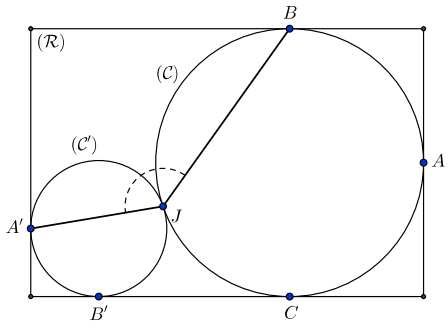
On peut noter que toutes les démonstrations qu'on vient de donner, même quelquefois avec du calcul, restent géométriques ou impulsées par le regard géométrique qu'on porte sur la figure et ses éléments. Mais ce regard à lui seul est insuffisant sans les connaissances préalables pour pouvoir mener le raisonnement qui doit impérativement l'accompagner (par exemple, dans un triangle le plus grand angle est opposé au plus grand côté, argument dont nous avons déjà usé).

6. Un dessin et une question

Il n'est pas rare de tomber sur des exercices de géométrie élémentaire plane dans lesquels l'énoncé est juste un dessin suivi immédiatement de questions. On s'y met sans se demander si la figure est possible et encore moins comment elle a été exécutée. Mais quand on se pique de curiosité et qu'on regarde de près, on se rend compte qu'elle n'a été dessinée qu'approximativement, à la main, sans suivre les règles géométriques qui s'imposent. Ce regard scrutateur s'avère souvent bien utile : quand il est insistant, il amène à se poser d'autres questions intéressantes et, de la figure même, donne à apprendre plus que ce qu'en dit son contenu apparent.

C'est le petit exercice qui suit - que mes amis François et Valerio m'ont soumis - qui est à l'origine de cette section 6.

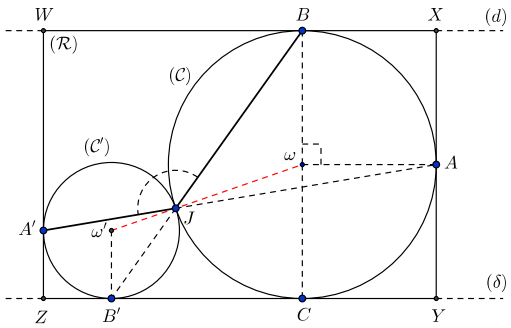
6.1. Exercice. Son énoncé consiste en la figure ci-dessous accompagnée de l'unique question toute simple : *Quelle est la mesure de l'angle* $\widehat{A'JB}$ *?*



(Fig.II.9)

Pour y répondre mon premier réflexe a été de (bien) *regarder* la figure, comme je le fais habituellement dans de telles situations. J'y ai vu un rectangle $(\mathcal{R})$ à l'intérieur duquel se trouvent un cercle $(\mathcal{C})$ tangent à trois de ses côtés et un autre cercle plus petit $(\mathcal{C}')$ tangent extérieurement à $(\mathcal{C})$ et à deux côtés du rectangle en question.

Même si la figure qui m'a été livrée n'était qu'approximative, je suspectais déjà que les trois points A, J et A' pouvaient être alignés. Ceci me paraissait encore plus vrai lorsque j'ai refait le dessin (ci-dessous) avec un peu plus de précision. Je me suis aussi rappelé que le point de tangence extérieure de deux cercles est le centre de l'*homothétie négative h* qui envoie le grand sur le petit. Tout est alors devenu clair !



(Fig.II.10)

Ici, l'homothétie h est centrée en J. Elle envoie la tangente en A à $(\mathcal{C})$ en une droite tangente à $(\mathcal{C}')$; celle-ci lui est parallèle, donc elle passe forcément par le point A'. Il

s'ensuit que h envoie A sur A' ; par suite les trois points A, J et A' sont alignés. Ce qui permet de donner de façon immédiate la réponse à la question posée :

$$\widehat{A'JB} = \widehat{A'JA} - \widehat{AJB} = \pi - \frac{1}{2}\widehat{A\omega B} = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} = 135 \text{ degrés.}$$

C'est à peu près la valeur à laquelle on s'attend si on regarde bien la configuration brute de départ. (L'égalité $\widehat{AJB} = \frac{1}{2}\widehat{A\omega B} = \frac{\pi}{4}$ vient du fait que l'angle inscrit $\widehat{AJB}$ intercèpte le même arc que l'angle au centre $\widehat{A\omega B}$ qui est droit.) □

L'unique question posée dans cet exercice a donc une réponse presque immédiate. Mais l'énoncé sous forme de dessin m'a amené à m'en poser d'autres beaucoup plus substantielles et auxquelles, en général, on ne fait pas toujours attention. Jules Renard (∗) disait « Regarde le vide, tu y trouveras des trésors ! » Et ce n'est pas tombé dans l'oreille d'un sourd !

6.2. Existence de la configuration. J'ai dit que j'ai refait la figure avec plus de précision. En fait, je l'ai construite à la règle et au compas de la façon qui m'a semblé la plus facile puisque je n'avais aucune contrainte à prendre en compte. Voici comment j'ai procédé (suivre la construction sur (Fig.II.10)).

- J'ai tracé une droite (δ) et j'y ai choisi un point C.
- J'ai tracé un cercle $(\mathcal{C})$ tangent à (δ) en C.
- La perpendiculaire à (δ) en ce point coupe $(\mathcal{C})$ en un point B.
- J'ai choisi un point J sur $(\mathcal{C})$ tel que $\widehat{C\omega J} < \frac{\pi}{2}$.
- La droite (BJ) coupe (δ) en un point B'.
- La perpendiculaire en B' à (δ) coupe la droite (ωJ) en un point ω'.
- Le cercle $(\mathcal{C}')$ de centre ω' et passant par B' est tangent extérieurement au cercle $(\mathcal{C})$ en J et à la droite (δ) en B'.
- Par B on mène la parallèle (d) à (δ) ; de même, par ω on mène la parallèle à (δ) qui coupe $(\mathcal{C})$ en A.
- La perpendiculaire à (δ) passant par A coupe celle-ci en Y et (d) en X. On a ainsi le côté XY du rectangle $(\mathcal{R})$.
- On procède de la même manière pour construire le côté ZW.

Cette construction n'aurait pas été si facile si certains de ses éléments étaient imposés à l'avance : le *rectangle* ou les deux *cercles tangents* par exemple. C'est ce je me propose d'examiner dans la suite de ce texte. Pour moi, ceci donne de la consistance à l'exercice et le rend plus intéressant du point de vue de ce qu'on pourrait qualifier - sans aucune exagération ! - de « *recherche élémentaire* »

6.3. La configuration avec contraintes. Celui qui a posé le problème initial a-t-il naïvement fait un dessin à la main ? Ou avait-il en tête une construction géométrique précise ?

La figure brute de départ me fait penser à Don Cesaro, un collectionneur de pièces de monnaie qui passe son temps à veiller jalousement sur son trésor en ne cessant de jouer avec. Un de ses jeux favoris est d'encastrer ses pièces dans de petits cadres rectangulaires. Et à force il a commencé à penser exactement comme un vrai géomètre, en se posant par exemple des questions théoriques du genre : *étant donné un rectangle, existe-t-il deux*

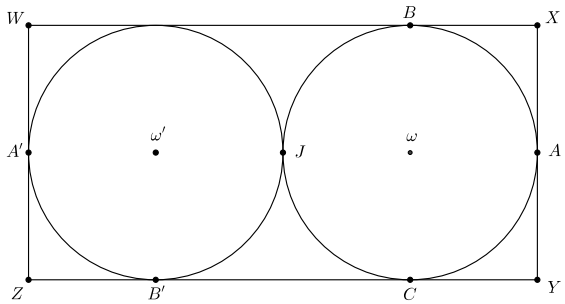
(∗) Jules Renard est un écrivain français (1864-1910). Il est l'auteur du célèbre roman (autobiographique) *Poil de carotte*.

pièces de monnaie qu'il pourrait y mettre (comme celui ci-dessous) ? C'est exactement l'une des deux contraintes qui suivent et qu'on peut traduire bien évidemment en termes géométriques. C'est ce qu'on va examiner en détail.

(Fig.II.11)

Les notations seront en partie celles qu'on a déjà utilisées dans (Fig.II.10). On désignera par a la longeur du rectangle $(\mathcal{R})$ et b sa largeur. La terminologie (longueur, largeur) - que tout le monde a en tête - impose bien entendu $b \leq a$. Et on peut vérifier facilement que la *condition nécessaire* de l'existence de la configuration en question est $b \leq a \leq 2b$. On verra qu'elle sera suffisante.

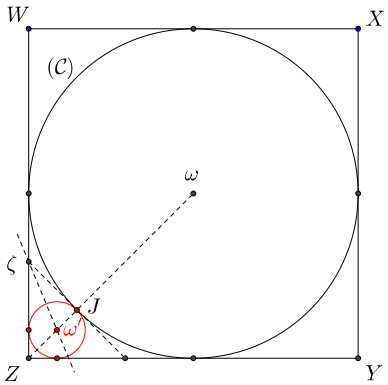
6.4. Cas extrême $a = 2b$. Dans (Fig.II.12) on voit immédiatement que les deux cercles sont égaux et jouent le «même rôle». Je ne fais donc aucun autre commentaire.



(Fig.II.12)

6.5. Cas extrême $a = b$ Le rectangle $(\mathcal{R})$ est un carré. Le cercle $(\mathcal{C})$ est donc complètement inscrit dans $(\mathcal{R})$. Pour le cercle $(\mathcal{C}')$ il ne reste que le petit coin du côté du point Z. Pour le construire, on procède comme suit.

Soit J le point d'intersection de la droite (ωZ) avec le cercle $(\mathcal{C})$. Par J on mène la perpendiculaire à (ωZ) ; elle coupe le côté ZW en un point ζ. La bissectrice de l'angle $\widehat{Z\zeta J}$ coupe (ωZ) en un point ω' qui sera le centre du cercle $(\mathcal{C}')$ cherché. □



(Fig.II.13)

Désormais, on se met dans la situation générale $\mathbf{b < a < 2b}$.

6.6. Première contrainte. *Don Cesaro a deux pièces de monnaie disposées tangentiellement sur le plan. Il souhaite les encastrer dans un cadre rectangulaire. Géométriquement, cela signifie qu'on se donne deux cercles $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ de centres respectifs ω et ω', de rayons respectifs r et r' avec $r > r'$, tangents extérieurement en un point J et qu'on cherche à encadrer par un rectangle $(\mathcal{R}) = XYZW$ (comme dans* (Fig.II.11)).

- On commence par construire la tangente commune (YZ). C'est en fait l'étape la plus importante. Le point de tangence J est le centre de l'homothétie négative h qui envoie $(\mathcal{C})$ sur $(\mathcal{C}')$ donc de rapport $\frac{r'}{r}$ (en valeur absolue). Son conjugué harmonique S par rapport aux points ω et ω' est le centre de homothétie positive (de même rapport) qui envoie $(\mathcal{C})$ sur $(\mathcal{C}')$. Il est déterminé par la relation $\frac{S\omega'}{S\omega} = \frac{r'}{r}$.
- L'égalité $\frac{S\omega'}{S\omega} = \frac{r'}{r}$ est équivalente à $\frac{S\omega}{r} = \frac{S\omega'}{r'}$. Ce qui donne :

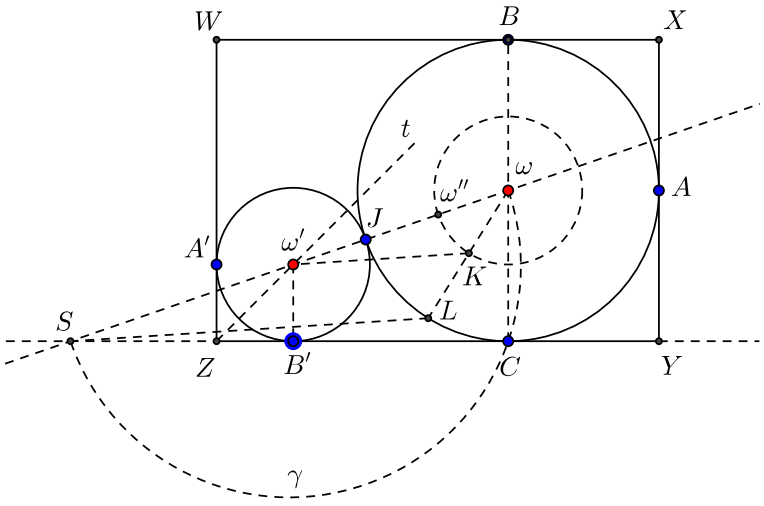
$$\frac{S\omega}{r} = \frac{S\omega'}{r'} = \frac{S\omega - S\omega'}{r - r'},$$

  c'est-à-dire $\frac{S\omega}{\omega\omega'} = \frac{r}{r-r'}$.
- Pour construire le point S tel que $\frac{S\omega}{\omega\omega'} = \frac{r}{r-r'}$, on procède comme suit.
- On symétrise ω' par rapport à J pour obtenir le point ω'' tel que $\omega\omega'' = r - r'$.
- Sur le cercle $(\mathcal{C})$ on choisit un point L ; le segment ωL coupe le cercle de centre ω et de rayon $r - r'$ en K.
- La parallèle passant par L à la droite $(\omega' K)$ coupe alors la droite des centres $(\omega\omega')$ en le point S cherché.
- On trace le demi-cercle γ de diamètre $S\omega$; celui-ci coupe $(\mathcal{C})$ en un point C en lequel la droite (SC) lui est tangente.
- De façon évidente, la droite (SC) est aussi tangente au cercle $(\mathcal{C}')$ en un point B'.

On a maintenant la droite qui porte le côté YZ du rectangle cherché. Pour les autres, on procède de la même manière que dans la fin de la section 2.

- Du centre ω on mène la parallèle à (YZ) qui coupe le cercle $(\mathcal{C})$ en un point A. De celui-ci on mène la perpendiculaire à (SC) qui coupe cette dernière en un point Y.
- La construction des points X, Z et W se fait de manière similaire.

Conclusion : Le rectangle $XYZW$ encadre les cercles tangents $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$. □



(Fig.II.14)

6.7. Deuxième contrainte. *Don Cesaro a un cadre rectangulaire et souhaite y encastrer deux pièces de monnaie disposées tangentiellement. Géométriquement, cela signifie qu'on se donne un rectangle* $(\mathcal{R}) = XYZW$ *et on veut y inscrire deux cercles* $(\mathcal{C})$ *et* $(\mathcal{C}')$ *comme dans* (Fig.II.11).

La construction dans ce cas-là est plus laborieuse et un peu longue. Mais en usant d'un bon *regard géométrique* on y arrive de façon élégante. Allons-y !

- On commence par construire le cercle $(\mathcal{C})$, c'est plus facile. On repère le milieu A du côté XY puis le point C sur YZ tel que $YC = YA$. Le centre ω de $(\mathcal{C})$ est alors l'intersection de la parallèle à YZ passant par A et celle à XY passant par C.

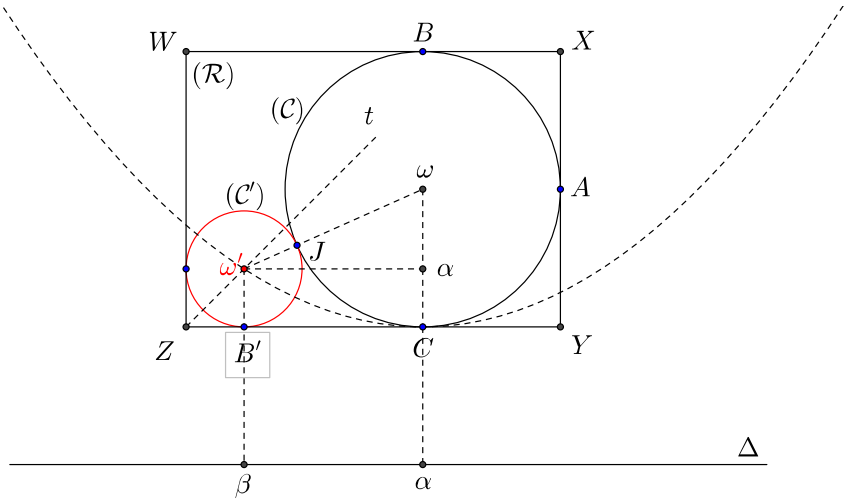
Pour le cercle $(\mathcal{C}')$, c'est un peu plus délicat : il doit être à la fois tangent à $(\mathcal{C})$ et aux deux côtés YZ et ZW du carré.

- La connaissance de son centre ω' suffit à le déterminer complètement. Le dessin (Fig.II.10) dit qu'il doit être sur la bissectrice (Zt) de l'angle $\widehat{YZW}$.
- On note Δ la parallèle à (YZ) passant par le symétrique α de ω par rapport à (YZ). Alors ω' est à égale distance de ω et de Δ ; il est donc sur la *parabole* $(\mathcal{P})$ de *foyer* ω et de *directrice* Δ.

Le centre ω' du cercle $(\mathcal{C}')$ est donc le point d'intersection de la demi-droite (Zt) et de la parbole $(\mathcal{P})$. On pose $\overrightarrow{u} = \dfrac{\overrightarrow{CY}}{||\overrightarrow{CY}||}$ et $\overrightarrow{v} = \dfrac{\overrightarrow{C\omega}}{||\overrightarrow{C\omega}||}$. Le triplet $(C; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est alors un repère orthonormé du plan. On y notera x et y les coordonnées du point ω'.

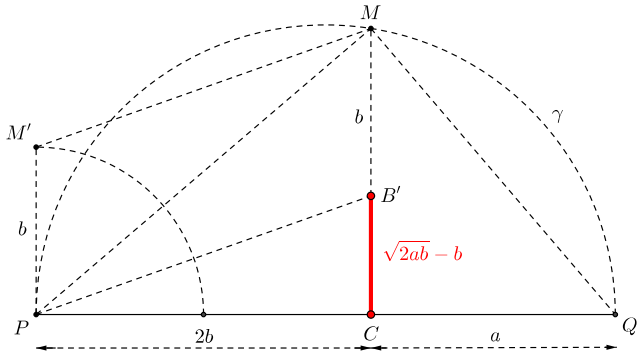
- Un calcul facile à mener montre que, dans le repère $(C; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, la droite (Zt) et la parabole $(\mathcal{P})$ ont respectivement pour équations $y = x + a - \frac{b}{2}$ et $y = \frac{x^2}{2b}$
- Si on impose à ω' d'être à la fois sur $(\mathcal{P})$ et la droite (Zt) les coordonnées x et y doivent vérifier simultanément les relations : $y = x + a - \frac{b}{2}$ et $y = \frac{x^2}{2b}$. Ce qui donne, après résolution, $x = b - \sqrt{2ab}$.

On doit donc repérer le point B' sur (YZ) tel que $CB' = \left|b - \sqrt{2ab}\right| = \sqrt{2ab} - b$. Ce nombre est constructible à partir de a et b qui sont donnés. Pour ce faire, on construira géométriquement la grandeur $\sqrt{2ab} - b$ et on la reportera ensuite sur la droite (YZ) (du côté gauche du point C). On le fera sur une figure à part pour ne pas trop charger celle qu'on vient d'utiliser (celle ci-dessous).



(Fig.II.15)

- Sur un segment PQ de longueur $a+2b$, on prend un point C et tel que $PC = 2b$ et $CQ = a$. Par C on mène la perpendiculaire à la doite (PQ) ; celle-ci coupe le demi-cercle γ de diamètre PQ en un point M. Comme MC est la hauteur issue de l'angle droit du triangle rectangle PMQ, on a $MC^2 = CP \cdot CQ$, d'où $MC = \sqrt{2ab}$.
- Sur la perpendiculaire à (PQ) passant par P on repère un point M' tel que $PM' = b$.
- On construit le point B', quatrième sommet du parallélogramme $PM'MB'$, qui est donc tel que $MB' = b$.
- On a finalement $CB' = CM - B'M = \sqrt{2ab} - b$. □

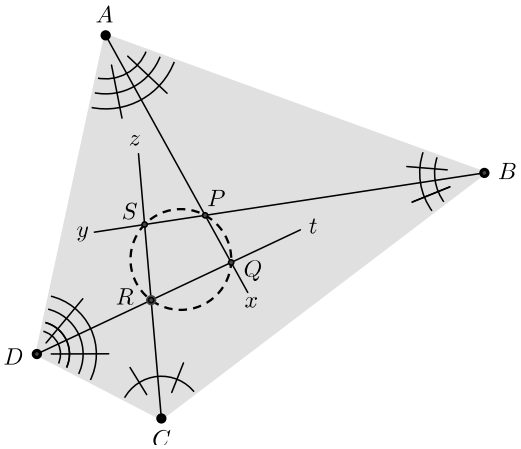


(Fig.II.16)

7. Juste un dessin !

Faire d'un dessin seul un énoncé complet est une bonne idée ! C'est ce que propose l'auteur de ce livre [Ak].

Le site https://images.math.cnrs.fr/ propose à son lectorat un exercice par semaine - tiré de cet ouvrage - dans une rubrique intitulée *Figures sans paroles*. Chacun des exercices qu'il soumet au lecteur est donné juste par une figure géométrique. Au lecteur d'y jeter son bon regard, de constituer l'énoncé et de résoudre ensuite. Voici un exemple, assez simple ; il montre bien le principe de la démarche.



(Fig.II.17)

Ce qui est en trait continu est *donné* et ce qui est *demandé à établir* est en trait interrompu. Le lecteur voit donc un quadrilatère convexe $ABCD$. Les demi-droites Ax, By, Cz et Dt sont les bissectrices respetivement des angles $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ et $\widehat{D}$. Les points P, Q, R et S sont définis par : $P = Ax \cap By$, $Q = Ax \cap Dt$, $R = Cz \cap Dt$ et $S = Cz \cap By$.

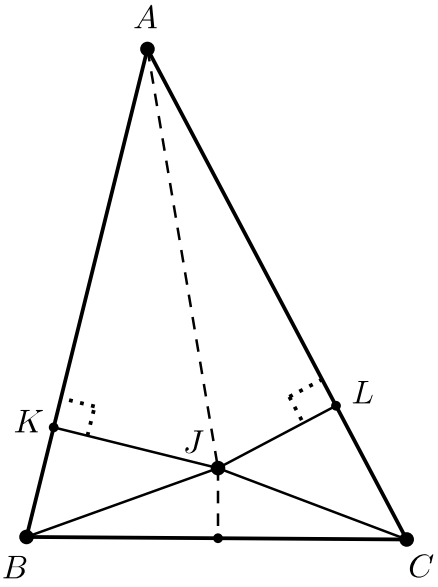
Question : *Montrer que les quatre points P, Q, R et S sont sur un même cercle.*

Solution : Il suffit de démontrer que deux angles opposés du quadrilatère $PQRS$ sont supplémentaires. Prenons par exemple $\widehat{RSP}$ et $\widehat{RQP}$. On a $\widehat{RSP} = \widehat{CSB} = \pi - \frac{1}{2}(\widehat{B}+\widehat{C})$ et $\widehat{RQP} = \widehat{AQD} = \pi - \frac{1}{2}(\widehat{A}+\widehat{D})$. D'où : $\widehat{RSP} + \widehat{RQP} = 2\pi - \frac{1}{2}\left(\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}+\widehat{D}\right) = \pi$.

Petit commentaire. On pourrait percevoir cela comme une forte contrainte à laquelle on soumet le candidat : bien regarder la figure, chercher un énoncé cohérent, le formuler correctement... Ensuite, s'atteler à la corvée habituelle : résoudre l'exercice. Oui, c'est fortement contraignant mais c'est formateur !

7. Regard sur une figure fausse

Une parès-midi du printemps 2004, dans une salle de travail à la Technische Universität Berlin. Hans-Christian Hege, Konrad Polthier, Francis Trincaretto, Cédric Rousseau (∗) et moi discutions de l'organisation d'une école internationale de visualisation à la *Cité des Géométries de Maubeuge*. À un moment de détente, nous avons changé de sujet et parlions de choses et d'autres ; et la géométrie élémentaire n'y manquait pas. Remarquant mon intérêt passionné pour le sujet, Konrad me dit « Sais-tu que tout triangle est isocèle ? » Un peu interloqué, j'ai répondu « Oui bien sûr, Konrad ! » allant dans son sens, persuadé qu'il palaisantait. Mais il maintient ce qu'il a dit et se propose de me donner une preuve. Il dessine alors la figure ci-dessous.



(Fig.II.18)

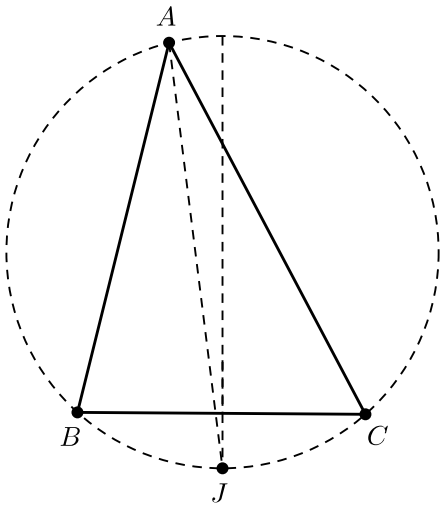
Le triangle ABC est quelconque et J est le point d'intersection de la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ et de la médiatrice du côté BC. La figure, dessinée approximativement à la main, ne me semblait pas suspecte, je n'y ai donc fait aucune attention. Je ne me rappelle plus quelle preuve il m'avait donnée mais en voici une qui montre qu'en raisonnant sur ce dessin on arrive à prouver que l'assertion est « vraie ».

(∗) Hans-Christian et Konrad étaient professeurs respectivement à Freie Universität Berlin et Technische Universität Berlin, deux spécialistes de la visualisation géométrique. (Konrad est l'un des auteurs du beau livre [GP].) Francis était médecin, chirurgien-traumatologue et assurait parallèlement la présidence de la Cité des Géométries de Maubeuge. Cédric était mon étudiant en thèse à cette époque.

Soient K et L les projections orthogonales de J respectivement sur les côtés AB et AC. Les deux triangles JAB et JAC sont rectangles et ont AJ comme hypoténuse commune. D'autre part, J étant sur la bissetrice de $\widehat{BAC}$ on a $JK = JL$. On en déduit par Pythagore que $AK = AL$. De la même manière, en considérant les triangles JKB et JLC on montre que $KB = LC$. Par suite $AB = AK + KB = AL + AC = AC$. □

Bien sûr, j'étais convaincu que cela ne pouvait pas être vrai, tout en étant incapable de localiser la faille du raisonnement. Cela faisait sourire Konrad : il savait que son assertion était fausse et que la blague avait touché son but. Je suis resté un moment à regarder la figure, mais je n'ai rien vu de particulier. Francis regardait aussi et écoutait notre conversation, et finit par dire « Le point J n'est peut-être pas à l'intérieur du triangle. » Bingo ! c'est probablement de ce côté-là qu'il faut pencher. Mais nous n'avions pas eu le temps de continuer.

Comme d'habitude, je n'ai pas arrêté de penser à la question : je gardais l'image de cette figure géométrique en tête. Je suis finalement arrivé à voir que le point J est sur le cercle circonscrit au triangle, au milieu de l'arc BC, donc à l'extérieur. Et là, je me suis convaincu qu'aucune démonstration de cette fausse assertion ne pouvait tenir la route car « J à l'intérieur » en serait l'unique pivot.



(Fig.II.19)

Pour flouer, celui qui pose cet exercice joue toujours sur la figure. Comme on peut le voir sur (Fig.II.18), le triangle est presque isocèle de base BC (à l'aide de GeoGebra je l'ai dessiné exprès à cet effet). Ainsi on ne peut pas se douter assez facilement que la droite AJ n'est pas la bissectrice (intérieure bien sûr) de l'angle $\widehat{BAC}$. On voit l'importance d'avoir une figure précise. Mais surtout le *regard géométrique* doit être vigilant et sévère pour ne pas amener à commettre des erreurs grossières et donc à des conclusions fausses. Une chose à laquelle il faut éduquer les élèves dès qu'ils accèdent à l'enseignement secondaire.

8. Regard sur peintures et dessins

8.1. Qu'évoque le mot « art » au sens le plus ordinaire ? Quidam ne donnera pas de réponse intrinsèque, il dira simplement que cela le fait penser à la peinture, le dessin, la sculpture, la musique, le chant, la danse !... C'est aussi dans ce sens que nous l'entendrons.

Nous laisserons de côté la musique, le chant, la danse... dont le traitement se verrait autrement. La peinture et le dessin sont plus en rapport avec ce que nous avons vu

précédemment en géométrie plane. Une peinture est une œuvre d'art plate : c'est la section plane du temps, du mouvement d'un paysage, d'un visage, d'une impression. Quant à la sculpture elle a besoin de la dimension trois et ne se réalise que dans l'espace. On n'en voit pas tout sans en faire le tour pour en examiner tous les recoins. L'objet de la représentation peut donc être caché ou, du moins, n'est pas immédiatement perceptible. Il faudrait à cet effet en faire des projections dans le plan, et revenir ainsi à une peinture ou un dessin.

Alors le regard géométrique est-il le même que celui sur un tableau de peinture ou un dessin ? Pour donner des éléments de réponse - qui seront toutefois nuancés - nous avons choisi trois exemples : deux peintures et un dessin.

8.2. Les Menines. Tableau peint en 1656 par Diego Velasquez, exposé actuellement au Musée du Prado à Madrid. Il représente la famille du roi Philippe IV. Pour plus, consulter le texte donné par ce lien https://panoramadelart.com/analyse/les-menines où on trouve la description de chacun des personnages ainsi que les éléments de la scène - qu'un non spécialiste ne saura pas discerner.

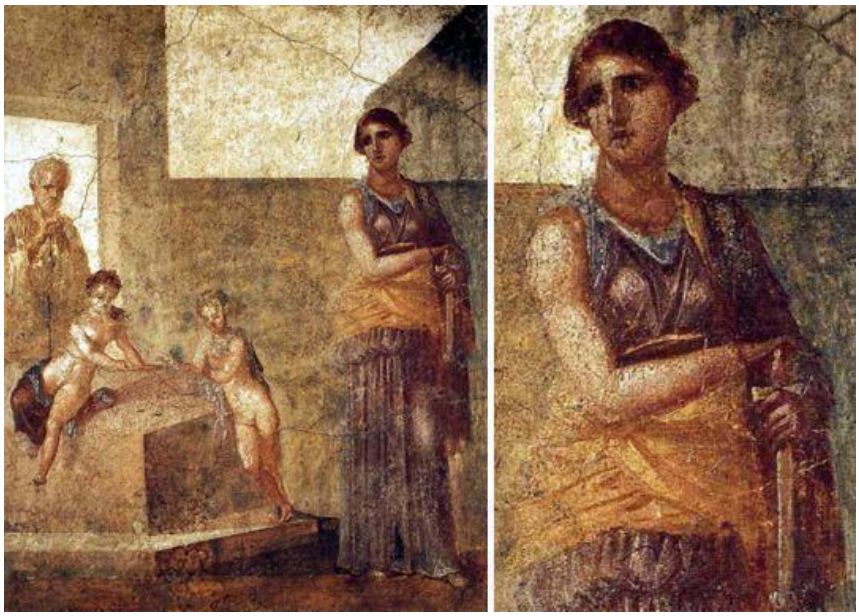
Les regards de ces personnages s'entremêlent, et sont dirigés les uns sur les autres. Dans *Les mots et les choses* [Fo], Michel Foucault analyse cette situation dans le premier chapitre. Une analyse détaillée mais complexe dont je ne livre que le passage qui suit et conseille vivement la lecture complète (de ce chapitre) à celui qui en veut plus.

« Quel est ce spectacle, qui sont ces visages qui se reflètent d'abord au fond des prunelles de l'infante, puis des courtisans et du peintre, et finalement dans la clarté lointaine du miroir ? Mais la question aussitôt se dédouble : le visage que réfléchit le miroir, c'est également celui qui le contemple ; ce que regardent tous les personnages du tableau, ce sont aussi les personnages aux yeux de qui ils sont offerts comme une scène à contempler. »

Un tableau difficile à disséquer pour bien comprendre ce qui s'y joue et pouvoir faire un parallèle immédiat avec une situation géométrique. En voici un, un peu plus accessible

parce qu'il représente la saisie d'un instant d'une histoire sortant d'un mythe mais qu'on sait parfaitement conter.

8.3. Médée. Le tableau ci-dessous (de Timonaque de Byzance) est exposé au *Museo Archeologico Nazionale* à Naples mais provenant de la *Maison des Dioscures* à Pompéi.



On y voit une femme debout, regardant à sa droite et tenant un sabre à la main. Elle tourne le dos à deux enfants en train de jouer sous l'œil attentif d'un homme au fond de la salle. Qui est cette femme ? qui sont ces enfants ? qui est cet homme ? Que signifie cette scène ? La réponse à chacune de ces questions se trouve dans l'histoire de Médée. La voici donnée de façon brève.

Éeson était roi d'Iolcos en Thessalie mais fut chassé de son royaume par son frère Pélias. Son fils Jason fut recueilli par le centaure Chiron qui lui apprit non seulement la sagesse mais aussi l'art du combat. À l'âge adulte, il décida de revenir dans son pays pour aider son père à récupérer son trône. Pélias, ayant rencontré une vieille femme qui lui prédit sa mort par un vagabond, craignait ce retour. Il accepta alors de se démettre à condition que Jason ramène la Toison d'or qui se trouve en Colchide chez le roi Éetès, pendue à un chêne et gardée par un dragon, pensant ainsi qu'il ne pourra jamais y arriver. Jason se rendit chez Éetès. Celui-ci consentit à lui céder la Toison d'or s'il arrive à surmonter certaines épreuves difficiles. Médée, fille du roi, et connue par ses pouvoirs de sorcellerie, tomba amoureuse de Jason et l'aida à décrocher cette toison. À son départ de Colchide, Ascylros, le frère de Médée, menaça Jason. Médée le tua, s'enfuit avec Jason et se donna à lui. Ils eurent deux enfants, Merméros et Phérès. À leur retour à Iolcos, Pélias n'a pas tenu sa promesse et Médée le tua en le faisant bouillir dans une cuve. Médée et Jason se réfugièrent alors chez le roi Créon de Corinthe. Mais ce dernier ignora l'existence de Médée et offrit sa fille Creüse à Jason, celui-ci répudia Médée et épousa Creüse dont il fut épris et parce qu'elle était grecque comme lui. Médée, foudroyée par ce qui lui arriva et complètement rattrapée par ses instincts meurtriers, tua sa rivale et égorgea ses deux enfants pour se venger de Jason.

C'est ce dernier instant précis que décrit le peintre : les enfants jouent sous le regard de leur éducateur qui ne se doute de rien ; Médée se tient devant, un sabre à la main et

dans un mouvement de rotation qui l'amène vers eux pour accomplir son geste. Voici ce qu'en dit Pascal Quignard dans [Qu] :

> « ***Dans la fresque de la maison de Jason, les regards des enfants et de leur mère sont croisés. Le pédagogue regarde Merméros et Phérès. Il y a deux interprétations possibles de l'attitude et du regard de Médée. Ou bien, se recueillant avant le crime, elle est partagée entre deux sentiments qui sont contraires : la pitié et la vengeance ; en elle la mère et la femme s'opposent ; elle hésite entre l'abstention de l'acte et la férocité d'un double infanticide. Ou bien, se recueillant devant le crime, monte en elle l'irrésistible colère, l'irrésistible acte, l'irréstible instant de mort. La première interprétation est psychologique. La seconde est non psychologique, physiologique, tragique. C'est la seule interprétation possible parce que c'est celle du texte que les fresques condensent. Parce que c'est celle d'Euripide.*** »

Pour l'observateur λ, il est impossible de deviner cela s'il ne connaît pas l'histoire de Médée. Il y a donc une différence fondamentale entre le regard que jette le géomètre sur une figure et celui de l'historien de l'art sur un tableau : le premier dispose de règles d'observation qui lui permettent d'examiner chaque figure dans un cadre assez général, le deuxième a besoin de connaître l'histoire des objets, des personnages... dans chaque tableau pris individuellement. Libre à lui d'y voir ce qui l'inspire et faire ensuite son propre commentaire.

Ce dernier acte de Médée est raconté dans [An] (en version moderne). Un texte bien écrit et passionnant à la lecture.

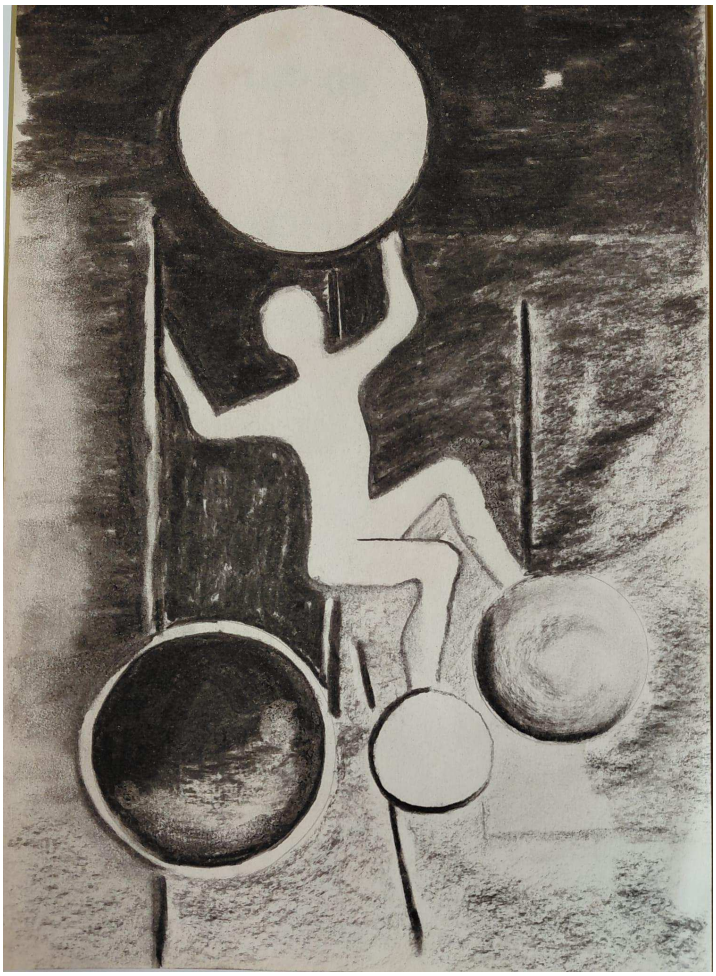
8.4. Un dessin. Le dessin qui suit a été exécuté par une amie. Comme sur les peintures de Diego Velasquez et Timonaque de Byzance, il pourrait être utilisé pour illustrer le sens que pourrait avoir le regard sur un dessin en comparaison au regard géométrique.

Peindre un tableau exige beaucoup de conditions. D'abord et avant tout, il faut avoir pensé le thème à l'avance pour en déterminer les éléments qui le composeront ; du temps aussi pour la réalisation : par exemple, il a fallu toute l'année 1656 à Diego Velasquez pour peindre *Les Menines* ; et beaucoup plus d'années à d'autres peintres pour certaines œuvres célèbres. En plus, c'est un travail qui se fait de jour en jour avec de la réflexion, appelée à se modifier au fur et à mesure de l'avancement.

Un dessin demande aussi du temps mais beaucoup moins. C'est la saisie à un instant donné d'un paysage, d'un lieu de vie, d'une brève imagination... C'est une transposition rapide de ce qui passe dans la tête du dessinateur au moment de l'exécution. Ce qui rend difficile toute interprétation extérieure, surtout quand ce qui apparaît sur la feuille n'est pas explicite, ou donne la possibilté à une multitude d'interprétations associées aux divers regards qu'on jette dessus.

Je ne dirai pas ce qu'est mon regard sur ce dessin. Au lecteur d'y jeter le sien et l'intepréter à sa manière. Il y a sûrement une histoire inspirante derrière, et dont seule l'autrice reste détentrice !

Tout dessinateur a sa propre perfection, indépendamment du fait qu'il soit célèbre ou pas. L'essentiel est l'expression de l'émotion, le sentiment, l'image... qu'il couche sur papier. Toutefois, je ne nie pas le talent que peuvent avoir certains dans leur travail de finition pour donner encore de l'esthétique à l'œuvre.



Dessin : *Judith Nicole*

III. COMPLÉMENTS

Certaines notions mathématiques évoquées dans ce texte (par exemple en géométrie affine et théorie de la mesure) peuvent paraître non habituelles pour des lecteurs. Nous avons jugé utile d'en donner au moins les définitions. La section **1** est en partie extraite de [E3] ; ceux qui souhaitent en savoir plus y trouveront un développement assez fourni sur le sujet.

1. Isométries du plan euclidien

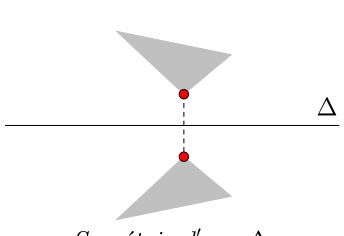
1.1. Dans le plan vectoriel $\mathbb{E} = \mathbb{R}^2$, muni de sa *structure affine canonique*, on note $O = (0,0)$ l'origine et $\vec{i} = (1,0)$ et $\vec{j} = (0,1)$ les vecteurs de la base canonique. À tout point $M = (x,y)$ est associé l'unique vecteur $\overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$; cette correspondance est une bijection. (Même si c'est évident, répétons-le : les réels x et y du couple (x,y) représentent les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ et celles du point M dans le repère $(0; \vec{i}, \vec{j})$.)

Une application $\vec{f} : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}$ est *linéaire* si, pour tous $\vec{u}, \vec{v}$ dans $\mathbb{E}$ et tous réels λ et μ on a $\vec{f}(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) = \lambda\vec{f}(\vec{u}) + \mu\vec{f}(\vec{v})$.

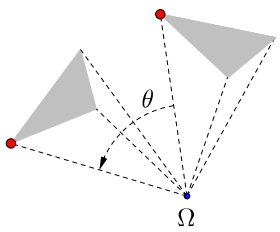
On dira qu'une application $f : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}$ est *affine* si, pour tout $M \in \mathbb{R}$, elle est de la forme $f(M) = f(O) + \vec{f}(\overrightarrow{OM})$ où $\vec{f}$ est l'application définie par $\vec{f}(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{f(O)f(M)}$; f est linéaire et est appelée *direction* de f.

1.2. On munit $\mathbb{E}$ de son produit scalaire usuel $\langle (x,y),(x',y')\rangle = xx' + yy'$. La *norme* associée est $|(x,y)| = \sqrt{x^2+y^2}$ et la *distance euclidienne* $d(M,M')$ entre deux points M et M' n'est rien d'autre que la norme $\left|\overrightarrow{MM'}\right|$ du vecteur $\overrightarrow{MM'}$.

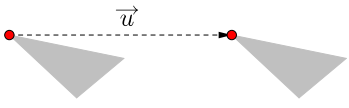
Une application $f : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}$ est une *isométrie* si, pour tous points M et M' de $\mathbb{E}$ on a $d(f(M),f(M')) = \left|\overrightarrow{f(M)f(M')}\right| = |\overrightarrow{MM'}| = d(M,M')$. On peut montrer qu'une telle application est forcément une bijection affine et que sa partie linéaire $\vec{f}$ préserve le produit scalaire, c'est-à-dire vérifie la propriété : *pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ on a* $\langle \vec{f}(\vec{u}), \vec{f}(\vec{v})\rangle = \langle \vec{u}, \vec{v}\rangle$. L'identité est une isométrie ; la composée de deux isométries est une isométrie, et l'inverse d'une isométrie est aussi une isométrie. Ainsi, l'ensemble $\mathrm{Isom}(\mathbb{E})$ des isométries de $\mathbb{E}$ muni de la composition des applications est un groupe. Un élément du groupe $\mathrm{Isom}(\mathbb{E})$ est aussi ce qu'on peut dénommer *mouvement euclidien*. C'est une *translation*, une *rotation*, une *symétrie axiale* ou une *symétrie glissée* (composée d'une symétrie axiale et d'une translation de vecteur parallèle à l'axe de cette symétrie). Ci-dessous sont dessinées toutes les isométries « élémentaires » du plan euclidien $(\mathbb{E}, \langle\,,\,\rangle)$.



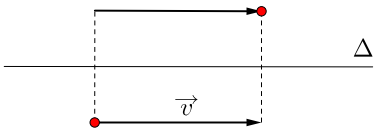
Symétrie d'axe Δ



Rotation de centre Ω et d'angle θ



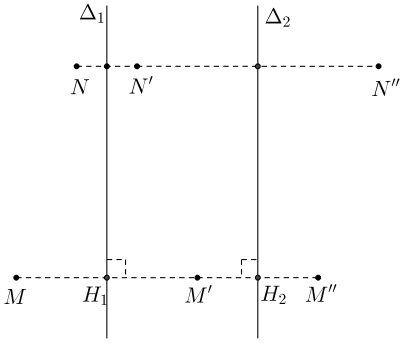
Translation de vecteur $\vec{u}$

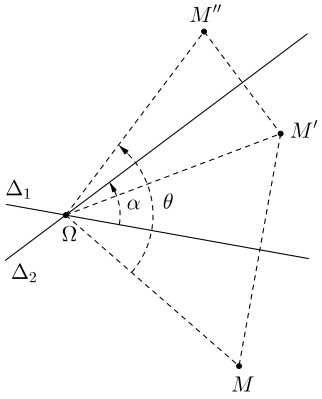


Symétrie glissée d'axe Δ et de vecteur $\vec{v}$

1.3. Le groupe Isom($\mathbb{E}$) est engendré par les symétries axiales. Nous allons indiquer comment cela se passe.

Soient s_1 et s_2 deux symétries axiales d'axes respectifs Δ_1 et Δ_2. Leur composée $f = s_2 \circ s_1$ est une isométrie ; mais qu'est-elle exactement ? La réponse précise dépend de la position relative des droites Δ_1 et Δ_2. Nous nous contenterons d'indiquer cela par les dessins qui suivent en laissant au lecteur le soin de démontrer lui-même les affirmations que nous avançons.





Comme on le voit sur le dessin ci-dessus, si les droites Δ_1 et Δ_2 sont parallèles, alors f est la translation de vecteur $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{H_1H_2}$; c'est la rotation d'angle $\theta = 2\alpha$ et de centre Ω si ces droites s'intersectent au point Ω.

Réciproquement, on montre facilement que toute translation (et toute rotation) se décompose (d'une infinité de manières) en deux symétries axiales. Ces propriétés des symétries axiales nous permettent de déterminer les composées de toutes les isométries du plan euclidien. Par exemple :

• La composée de deux translations τ_1 et τ_2 de vecteurs respectifs $\overrightarrow{u}_1$ et $\overrightarrow{u}_2$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{u}_1 + \overrightarrow{u}_2$.

• La composée de deux rotations r_1 et r_2 de même centre Ω et d'angles respectifs θ_1 et θ_2 est la rotation de centre Ω et d'angle $\theta_1 + \theta_2$.

• Nous laissons en exercice l'examen de la composée de deux rotations n'ayant pas le même centre.

1.4. Structure algébrique de Isom($\mathbb{E}$). Ce groupe est constitué des translations qui en forment un sous-groupe qu'on notera $\mathcal{T}$ (ce n'est rien d'autre que le groupe additif $\mathbb{E}$). À toute isométrie f de $\mathbb{E}$ on associe sa direction $\overrightarrow{f}$, qui est une isométrie linéaire, c'est-à-dire un élément du groupe orthogonal O(2). On a $\overrightarrow{g \circ f} = \overrightarrow{g} \circ \overrightarrow{f}$ qui montre que l'application $\pi : f \in \mathrm{Isom}(\mathbb{E}) \longmapsto \overrightarrow{f} \in \mathrm{O}(2)$ est un morphisme de groupes. Il est surjectif, son noyau est le groupe des translations $\mathcal{T}$ et la suite ci-dessous est exacte :

$$0 \longrightarrow \mathcal{T} \hookrightarrow \mathrm{Isom}(\mathbb{E}) \xrightarrow{\pi} \mathrm{O}(2) \longrightarrow 1.$$

En plus cette suite est scindée, c'est-à-dire, il existe un morphisme $\sigma : \mathrm{O}(2) \longrightarrow \mathrm{Isom}(\mathbb{E})$ tel que $\pi \circ \sigma$ est l'identité de O(2). La suite est donc un produit semi-direct de $\mathcal{T}$ par O(2). Les éléments du groupe O(2) peuvent ainsi être vus comme les isométries linéaires de $\mathbb{E}$, de façon équivalente celles qui fixent l'origine.

Les sous-groupes de Isom($\mathbb{E}$) sont tous connus ; notamment ceux qui sont finis, sont donnés par le théorème qui suit.

1.5. Théorème de Leonardo. *Tout groupe fini G d'isométries de $\mathbb{E}$ est isomorphe au groupe cyclique $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ou au groupe diédral D_n avec $p = 2n$ (où p est l'ordre de G).*

Preuve. Il s'agit évidemment de Léonard de Vinci (∗). Il a été le premier à avoir remarqué les symétries possibles d'un bâtiment central et comment y attacher des chapelles et des niches sans détruire les symétries du noyau. C'est la raison pour laquelle ce théorème lui revient. Sa démonstration est assez élégante ; en voici les différentes étapes :

(i) G ne contient ni translation ni symétrie glissée (la composée d'une translation et d'une réflexion d'axe parallèle au vecteur de translation) ; ces éléments sont d'ordre infini. Et si G en contenait, cela contredirait le fait qu'il est fini.

(ii) On suppose que G préserve l'orientation. Il ne contient donc que des rotations. Si deux rotations ρ_1 et ρ_2 avaient des centres différents, le commutateur $\rho_2^{-1}\rho_1^{-1}\rho_2\rho_1$ serait une translation non triviale, ce qui n'est pas possible, donc tous les éléments de G sont des rotations de même centre et par suite G est isomorphe à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (ici p est l'ordre de G).

(iii) Supposons que G contient une réflexion. Les éléments qui présevent l'orientation forment un sous-groupe H non trivial isomorphe à C_n d'après ce qui précède. C'est le noyau du morphisme signature $\varepsilon : G \longrightarrow \{1, -1\}$ qui est non trivial et donc surjectif ; il est donc d'indice 2 dans G et par suite normal ; G s'identifie à un produit semi-direct $H \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ qui est isomorphe au groupe diédral D_n. □

2. Théorie de la mesure

Dans toute la suite Ω sera un ensemble non vide et $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble de toutes ses parties. Si A est un sous-ensemble de Ω, A^c sera son complémentaire.

2.1. La notion de tribu. On appelle *tribu* sur Ω une partie $\mathcal{A}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$ vérifiant les propriétés qui suivent :

(i) $\Omega \in \mathcal{A}$;

(ii) $A \in \mathcal{A} \Longrightarrow A^c \in \mathcal{A}$;

(iii) si $(A_n)_{n\geq 1}$ est une suite dans $\mathcal{A}$, alors la réunion $A = \bigcup_{n\geq 1} A_n$ est encore dans $\mathcal{A}$.

Ces axiomes définissant $\mathcal{A}$ montrent aussi que $\emptyset$ est dans $\mathcal{A}$ et que $\mathcal{A}$ est aussi stable par intersection dénombrable.

Le couple $(\Omega, \mathcal{A})$ où Ω est un ensemble non vide et $\mathcal{A}$ est une tribu est appelé *espace mesurable* (espace censé supporter une mesure).

Exemples de tribus

(iv) De manière évidente $\mathcal{P}(\Omega)$ est une tribu sur Ω ; c'est la plus grande (au sens de l'inclusion) et elle est trop grosse quand Ω n'est ni fini, ni dénombrable.

(v) De même $\{\emptyset, \Omega\}$ est la plus petite tribu sur Ω ; et elle n'est pas d'un grand intérêt et n'est presque jamais utilisée.

(vi) Soit $A \in \mathcal{P}(\Omega)$. Alors $\mathcal{A} = \{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$ est une tribu sur Ω.

(∗) Léonard de Vinci. Italien, né en 1452 et mort en 1519. Esprit universel : grand scientifique, ingénieur, anatomiste... Et aussi grand peintre : on lui doit, entre autres, le tableau *La Joconde* et la peinture murale *La Cène*.

(vii) Une intersection quelconque de tribus sur Ω est encore une tribu. Si $\mathcal{C}$ est une partie de $\mathcal{P}(\Omega)$, alors l'intersection de toutes les tribus contenant $\mathcal{C}$ (il y en a au moins une qui est $\mathcal{P}(\Omega)$) est appelée *tribu engendrée* par $\mathcal{C}$ et sera notée $\sigma(\mathcal{C})$.

Tribu borélienne

Supposons que Ω soit un espace topologique et notons $\mathcal{T}$ l'ensemble de ses ouverts. La tribu $\sigma(\mathcal{T})$ engendrée par $\mathcal{T}$ est appelée *tribu borélienne* de Ω. On la note $\mathcal{B}_\Omega$. Elle est aussi engendrée par les fermés de Ω. Par exemple, pour $\mathbb{R}^n$, on peut vérifier que $\mathcal{B}_\Omega$ est engendrée par l'une quelconque des familles suivantes :

- les produits d'intervalles ouverts ou fermés de $\mathbb{R}$;
- les boules ouvertes ou fermées de $\mathbb{R}^n$;
- les produits d'intervalles ouverts, semi-ouverts ou fermés de $\mathbb{R}$ dont les extrémités sont rationnelles ;
- les boules ouvertes ou fermées de $\mathbb{R}^n$ de rayon rationnel et centrées sur les points rationnels.

2.2. La notion de mesure. On appelle *mesure* sur un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{A})$ toute fonction d'ensemble $\mu : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ non constante avec la valeur $+\infty$ et σ-*additive*, c'est-à-dire que, pour toute suite (A_n) dans $\mathcal{A}$ avec $A_n \cap A_p = \emptyset$ pour $n \neq p$, on a :

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Une *probabilité* sur $(\Omega, \mathcal{A})$ est une mesure μ telle que $\mu(\Omega) = 1$.

Le triplet $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ où $(\Omega, \mathcal{A})$ est un espace mesurable et μ une mesure est appelé *espace mesuré* (*espace probabilisé* si μ est une probabilité).

Exemples de mesures

(vii) Supposons Ω fini de cardinal n et $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$. Pour tout $A \in \mathcal{A}$ on note $|A|$ le cardinal de A. On pose $\mu(A) = \frac{|A|}{n}$. On obtient ainsi une mesure (une probabilté) sur Ω.

(viii) Supposons Ω quelconque et $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$. Pour $A \in \mathcal{A}$ on définit $m(A)$ comme le cardinal de A si A est fini et $+\infty$ sinon. Il est facile de voir que m ainsi définie est une mesure sur $(\Omega, \mathcal{A})$ appelée *mesure de comptage*.

(ix) Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace mesurable. Si ω est un point, on définit la mesure δ_ω par $\delta_\omega(A) = 1_A(\omega)$ où A est la fonction indicatrice de A (elle vaut 1 sur A et 0 sur A^c). On dira que δ_A est la *mesure de Dirac* au point ω. C'est une probabilité en fait.

(x) Si (ω_n) est une suite dans Ω et p_n une suite de réels strictement positifs telle que la série $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ converge, alors $\mu = \sum_{n=1}^{\infty} p_n \delta_{\omega_n}$ est une mesure sur $(\Omega, \mathcal{A})$; c'est une probabilité si la série en question a pour somme 1.

(xi) L'introduction de mesures dites « intéressantes » sur les ensembles non dénombrables nécessite un peu plus de matériel. Par exemple la mesure de Lebesgue λ sur $\mathbb{R}$ muni de sa tribu borélienne $\mathcal{B}_\mathbb{R}$ est d'abord définie par $\lambda(|a, b|) = b - a$ sur les intervalles $|a, b|$ et étendue ensuite (par un théorème de prolongement) à la tribu $\mathcal{B}_\mathbb{R}$ (engendrée par les intervalles).

Références

[Ak] Akopyan, A. *Geometry in Figures.* https://www.amazon.com/Geometry-Figures-Second-Arseniy-Akopyan/dp/1548710784

[An] Anouilh, J. *Médée*, Collection La petite Vermillon, Éditions La table ronde (1997).

[At] Atiyah, M. *What is Geometry ?* in "The Changing Shape of Geometry", Cambrige University Press (2003), 24-29.

[Au] Audin, M. https://images.math.cnrs.fr/billets/de-la-beaute-la-formule-de-stokes/

[Bo] Bold, B. *Famous Problems of Geometry and How to Solve Them*, Dover (1969).

[Ca] Carrega, J.C. *Théorie des corps. La règle et le compas.* Hermann, Paris (1981).

[Co] Connes, A. https://www.youtube.com/watch?v=zmT8MHMIOLg.

[CG] Coxeter, H.S.M. & Greitzer, S.L. *Redécouvrons la géométrie.* Dunod (1971).

[E1] El Kacimi Alaoui, A. *Éléments d'intégration et d'analyse fonctionnelle*, Collection Mathématiques 2ème cycle, Ellipses (1999), 174-179.

[E2] El Kacimi Alaoui, A. *Variable complexe et surfaces riemanniennes.* Collection Références Sciences, éditions Ellipses (2021), 11-18.

[E3] El Kacimi Alaoui, A. *Géométrie euclidienne élémentaire*, Collection Références Sciences, éditions Ellipses (2012).

[Fo] Foucault, M. *Les mots et les choses.* Éditions Gallimard, Paris (1966).

[GP] Gleaser, G. & Polthier, K. *Surprenantes images des mathématiques.* Belin, Pour la Science (2015).

[Ki] Kierkegaard, S. *Lettres des fiançailles.* Éditions Falaize, Paris (1956).

[Kl] Klein, F. *Leçons sur certaines questions de géométrie élémentaire.* Collection La règle et le compas, Diderot Éditeur Arts et Sciences (1998).

[Ni] Niven, I. *Convex polygons that cannot tile the plane.* American Math. Monthly, Vol. 85 (1978), 785-792.

[Pi] Pickover, C.A. *Le beau livre des maths. De Pythagore à la* $57^{ème}$ *dimension.* Dunod (2010).

[Qu] Quignard, P. *Le sexe et l'effroi.* Collection Folio, numéro 2839, (page 189).

[Sa] Sartre, J-P. *L'être et le néant.* Collection Tel, Gallimard, (Page 251).

[Sc] Schmidt, W. M. *Diophantine approximation.* Lecture Notes in Math. 785, (1980).

[TM] Tenenbaum, G. & Mendès France, M. : *Les nombres premiers.* Collection Que sais-je ? Numéro 571 (1997).

[Za] Zagier, D. *Leçon inaugurale.* Collège de France (mai 2001).

Aziz EL KACIMI ALAOUI

Professeur émérite

Université Polytechnique Hauts-de-France

aziz.elkacimi@yahoo.fr

https://www.elkacimi.fr/