Cohomologie, champs hypoelliptiques, approximation diophantienne...

Une promenade à travers les mathématiques !

Aziz El Kacimi

CERAMATHS, UPHF

Exposé au

Séminaire de Mathématiques de Valenciennes
Jeudi 10 février 2022

RÉSUMÉ

La cohomologie $H^*(\Gamma, E)$ d'un groupe discret Γ à valeurs dans un Γ-module E se définit habituellement de manière algébrique. On peut alors penser que l'algèbre est son unique terrain de jeu. Il n'en est pas toujours ainsi.

Cet exposé est une petite promenade à travers quelques branches des mathématiques (analyse réelle et complexe, géométrie, systèmes dynamiques...) dans lesquelles on rencontre, sous une forme ou une autre, l'espace vectoriel $H^1(\mathbb{Z}, E)$. Nous verrons, sur des exemple simples, comment cet objet apparaît comme un outil permettant quelquefois de reformuler différemment certains problèmes pour éventuellement les aborder plus aisément.

0. Variétés

Un objet important en mathématiques est l'espace euclidien $\mathbb{R}^d$. Le fait qu'il existe dessus un système de coordonnées globales facilite la formulation des problèmes d'analyse. Mais beaucoup d'entre eux sont sous contraintes, par exemple :

Résoudre le probème (P) dans $\mathbb{R}^d$
sous la contrainte $x_1^2 + \cdots + x_d^2 = 1$.

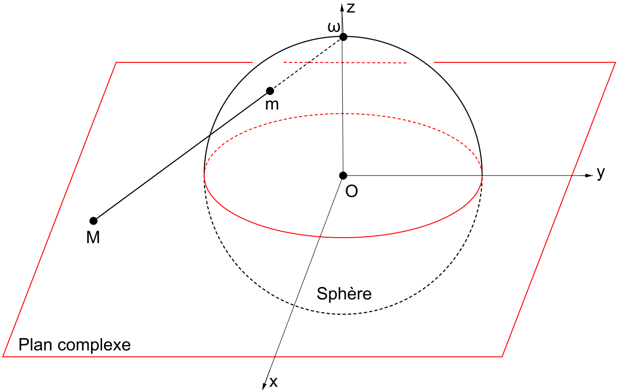
Ce problème se pose en fait sur une partie fermée de $\mathbb{R}^d$ et non sur $\mathbb{R}^d$ tou entier, en l'occurrence la sphère $\mathbb{S}^{d-1}$. Un espace topologique M (avec un minimum de bonnes propriétés) donné localement par des conditions similaires se comporte comme un espace euclidien ; on dira que c'est une ***variété topologique*** : pour chaque point x de M il existe un voisinage ouvert U de x et un homéomorphisme φ d'un ouvert de $\mathbb{R}^n$ sur U.

Pour connaître un point x de U, il suffit donc de connaître les coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ dans $\mathbb{R}^n$ de son image réciproque $\varphi^{-1}(x)$. Pour cette raison on dira que U est un ***ouvert de coordonnées locales*** de M au voisinage de x. La paire (U, φ) est appelée ***carte locale*** et $(x_1, \ldots, x_n) = \varphi^{-1}(x)$ seront les ***coordonnées*** de x.

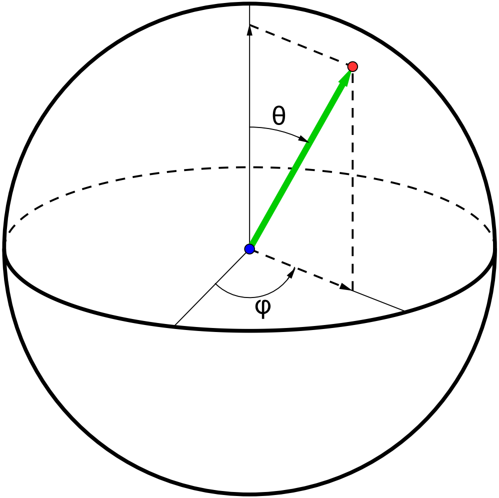
Si (U, φ) et (V, ψ) sont deux cartes locales telles que l'intersection $U \cap V$ soit non vide alors un point $x \in U \cap V$ sera repéré par ses coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ dans U et ses coordonnées $(x'_1, \ldots, x'_n)$ dans V. On doit avoir la condition :

$$(x'_1, \ldots, x'_n) = \psi^{-1} \circ \varphi(x_1, \ldots, x_n).$$

L'application $\psi^{-1} \circ \varphi$ est appelée ***changement de coordonnées*** de la carte (U, φ) à la carte (V, ψ). Lorsque tous ces changements de coordonnées sont de classe C^∞, on dira que M est une ***variété différentiable***.

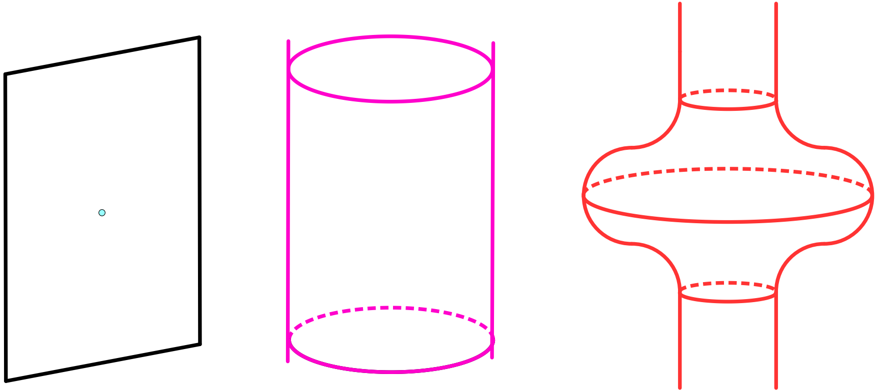


La ***projection stéréographique*** relative au pôle Nord ω réalise un homéomorphisme analytique entre le plan complexe et l'ouvert $\mathbb{S}^2 \setminus \{\omega\}$ de la sphère $\mathbb{S}^2$.



La sphère

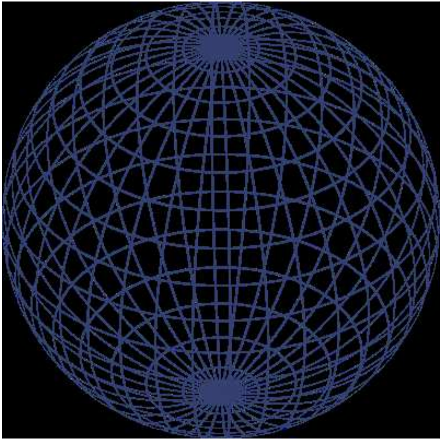
Trois surfaces topologiquement équivalentes



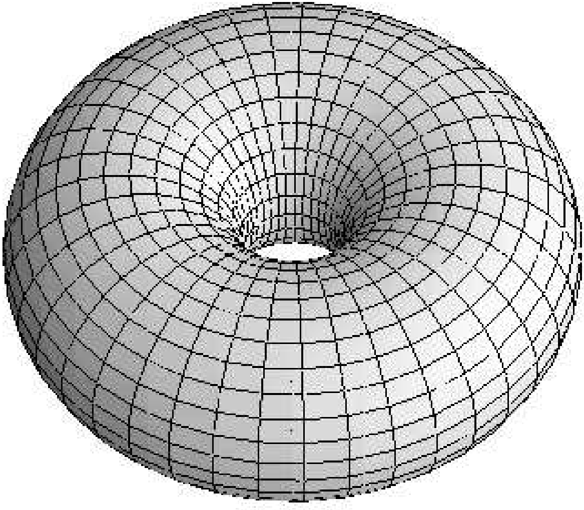
Trois surfaces homéomorphes, c'est-à-dire
ayant la même topologie

Le genre g d'une surface compacte orientable est son nombre de trous. Celle-ci est alors notée Σ_g.

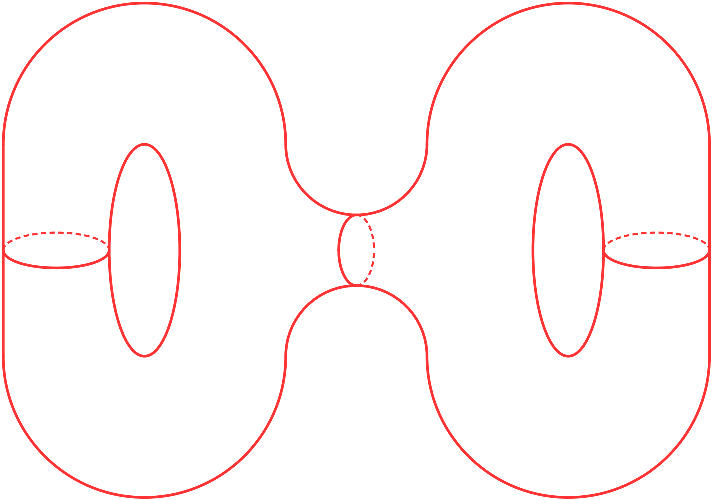
La sphère Σ_0 est de genre 0



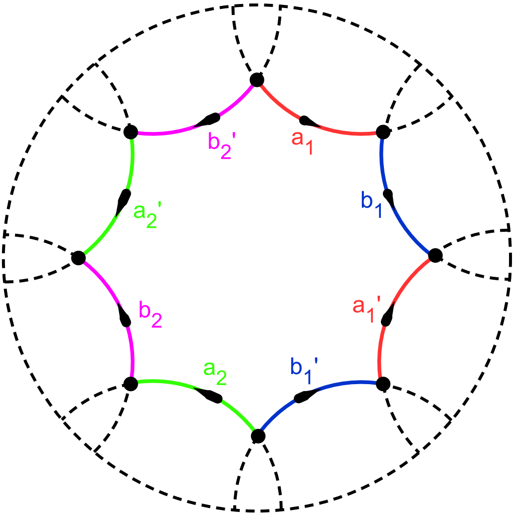
Le tore Σ_1 est de genre 1



La surface Σ_2 *de genre* 2

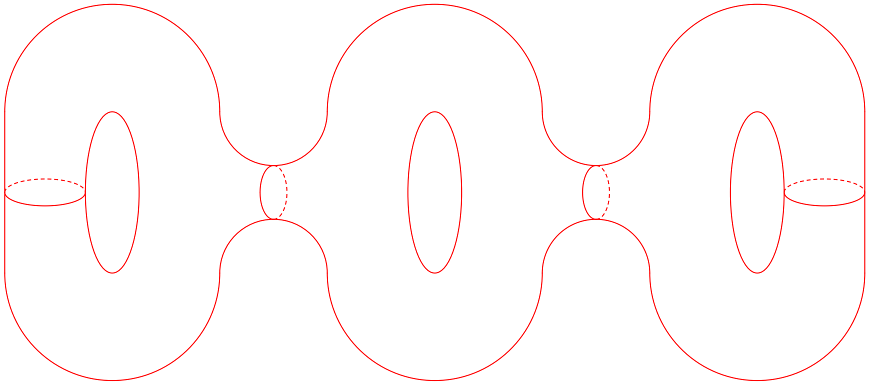


Octogone hyperbolique donnant Σ_2

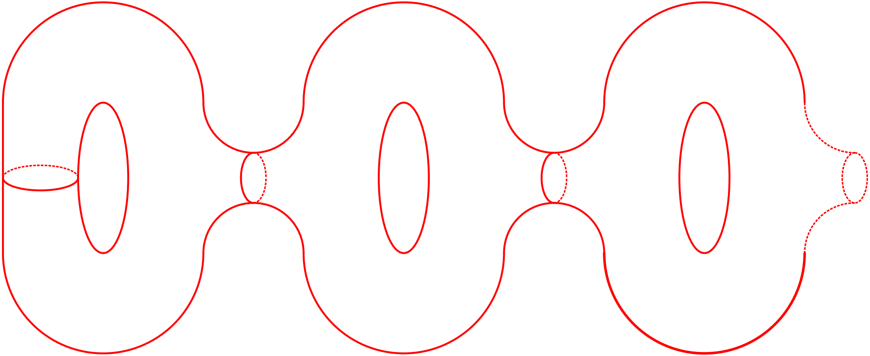


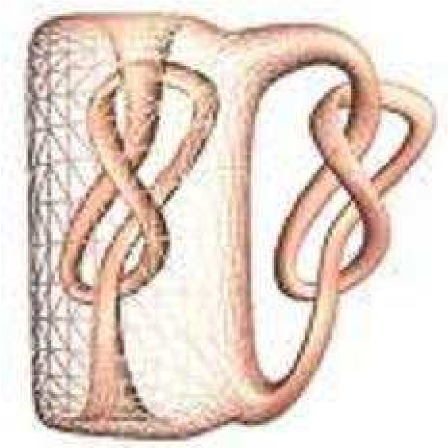
Caractéristique d'Euler-Poincaré = 1 - 4 + 1 = -2

La surface Σ_3 de genre 3

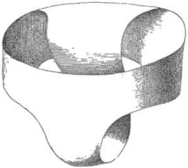


Et ainsi de suite : Σ_g ***avec*** $g \geq 4$ ***!***



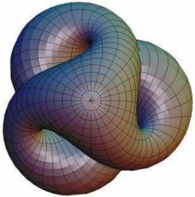


Surfaces non orientables !



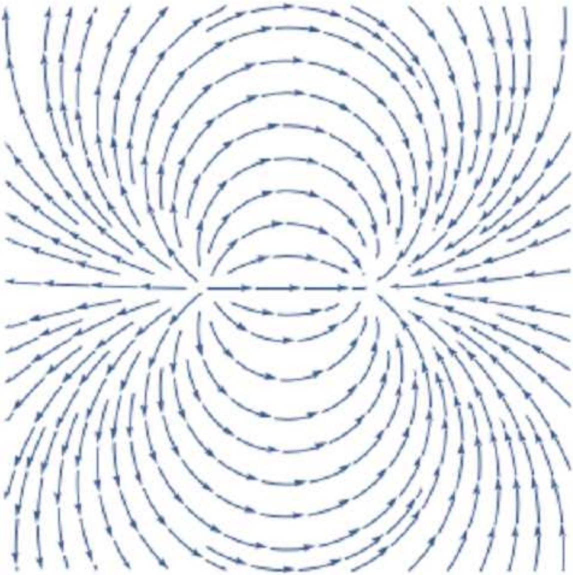
Le slip de Möbius
(difficile à porter !)

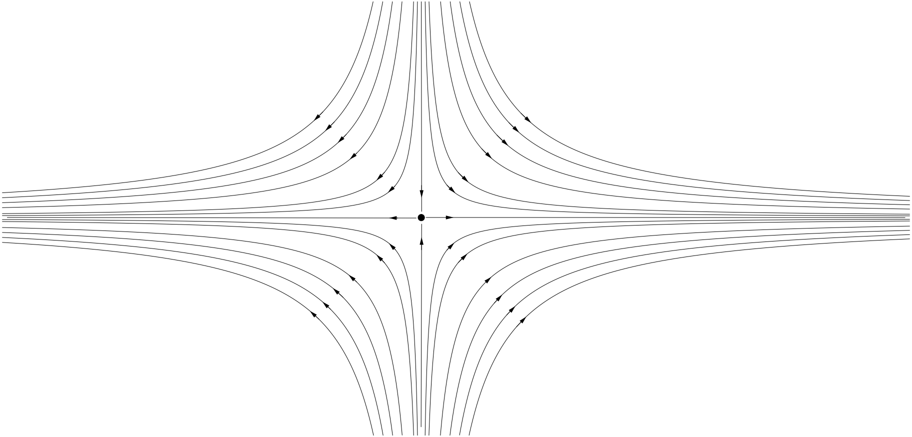
Bouteille de Klein



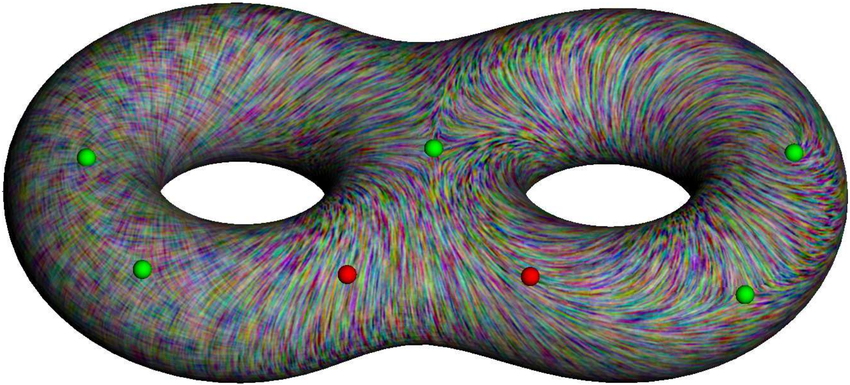
Surface de Boy
(immersion du plan projectif réel dans l'espace euclidien)

Dans l'enfer topologique, la bière est contenue dans des bouteilles de Klein !





Courbes intégrales du champ de
de vecteurs $\overrightarrow{u}(x_1, x_2) = (x_1, -x_2)$.



1. La cohomologie $H^*(\mathbb{Z}, E)$

Soient E un espace de Fréchet et $\gamma : E \longrightarrow E$ un automorphisme d'ordre infini (γ^k n'est pas l'identité pour tout $k \in \mathbb{Z}^*$). Alors γ engendre une ***action effective*** du groupe $\mathbb{Z}$ vu comme $\Gamma = \langle \gamma^k : k \in \mathbb{Z} \rangle$:

$$(k, f) \in \mathbb{Z} \times E \longmapsto \gamma^k \cdot f \in E.$$

Cela signifie qu'il existe un morphisme injectif de $\mathbb{Z}$ dans le groupe $\mathrm{Aut}(E)$ des automorphismes de E. L'espace E est ainsi muni d'une strucrure de Γ-***module***. On y définit un opérateur :

$$\delta : f \in E \longmapsto (f - \gamma \cdot f) \in E.$$

appelé ***opérateur cobord***. Le noyau de δ est constitué des éléments f qui vérifient $\gamma \cdot f = f$, c'est-à-dire ceux qui sont invariants par γ (et donc par tout élément de Γ). Ils forment un sous-espace fermé E^γ de E.

Un élément $f - \gamma \cdot f$ de l'image de δ mesure le défaut d'invariance de f ; de tels éléments forment un sous-espace noté $\langle f - \gamma \cdot f \rangle$ (non nécessairement fermé).

Par définition les ***espaces de cohomologie*** en degrés 0 et 1 du groupe discret Γ à valeurs dans le Γ-module sont :

$$H^0(\Gamma, E) = Ker(\delta) = E^\gamma \text{ et } H^1(\Gamma, E) = E/\langle f - \gamma \cdot f \rangle.$$

On voit donc que l'espace $H^1(\Gamma, E)$ contient exactement les obstructions à la résolution de l'équation $f - \delta \cdot f = g$ tandis que $H^0(\Gamma, E)$ en paramètre les solutions (quand elles existent).

(Une autre manière de définir la cohomologie du groupe $\mathbb{Z}$ permet de montrer que $H^*(\mathbb{Z}, E) = 0$ pour $* \geq 2$.)

Soit manitenant $T : E \longrightarrow E$ un ***opérateur borné*** commutant à l'action de γ. On s'intéresse aux solutions $f \in E^\gamma$ de l'équation :

$$Tf = g \quad \text{où } g \in E^\gamma \text{ est donné.}$$

Une démarche naturelle est de trouver d'abord une solution $f_0 \in E$ (oubliant que g est γ-invariant) et de corriger ensuite $f_0 \in E$ en lui rajoutant un élément h du noyau N de T pour rendre la nouvelle solution $f = f_0 + h$ invariante par γ, c'est-à-dire satisfaisant à la relation $\gamma \cdot (f_0 + h) = f_0 + h$ ***i.e.*** :

$$h - \gamma \cdot h = \gamma \cdot f_0 - f_0.$$

(L'élément $(\gamma \cdot f_0 - f_0)$ est dans N.) Ce qui donne le nouveau problème :

Soit $g \in N$. ***Existe-t-il*** $h \in N$ ***tel que :*** $h - \gamma \cdot h = g$ ***?***

Ce qui revient donc à calculer l'espace de cohomologie $H^1(\Gamma, N)$.

C'est l'*équation cohomologique* du *système dynamique* (N, γ) : N est un espace de Fréchet sur lequel l'automorphisme γ agit. On comprend bien d'où vient la terminologie !

Problème

Soient N un Fréchet et γ un automorphisme de N. Déterminer l'espace $H^1(\mathbb{Z}, N)$.

Pourquoi cet espace vectoriel est-il si important ?

Nous allons donner, à travers quelques exemples, des éléments de réponse à cette question.

Example 1

On prend $E = C^\infty(\mathbb{R})$ (fonctions réelles C^∞) muni de la topologie C^∞, T l'opérateur différentiel $\frac{d}{dx}$ et $\gamma : E \longrightarrow E$ l'automorphisme qui à f associe la fonction $\gamma \cdot f$ définie par $(\gamma \cdot f)(x) = f(x+1)$.

• On voit facilement que le noyau N de T est réduit à l'espace des fonctions constantes *i.e.* $N = \mathbb{R}$. L'action de γ (et le groupe monogène Γ qu'elle engendre) sur N est triviale, c'est-à-dire $\gamma \cdot f = f$. Par suite l'opérateur δ est nul sur N, ce qui donne $H^0(\Gamma, N) = \mathbb{R}$ et $H^1(\Gamma, N) = \mathbb{R}$.

• Les éléments Γ-invariants de E sont les fonctions $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ qui vérifient $f(x) = f(x+1)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire les fonctions périodiques de période 1. Elles s'identifient à l'espace $C^\infty(\mathbb{S}^1)$ des fonctions C^∞ sur le cercle $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

• Il est aussi clair que l'opérateur T commute à l'action de γ. Donc T préserve le sous-espace $E^\gamma = C^\infty(\mathbb{S}^1)$. On ne peut donc pas résoudre l'équation $Tf = g$ pour n'importe quelle fonction $g \in C^\infty(\mathbb{S}^1)$ si on exige une solution dans $C^\infty(\mathbb{S}^1)$: l'espace $H^1(\Gamma, N)$ des obstructions n'est pas nul !

Concrètement que sont ces obstructions ?

• Soit $g \in C^\infty(\mathbb{S}^1)$. Cherchons $f \in C^\infty(\mathbb{S}^1)$ de telle sorte que $\frac{df}{dx}(x) = g(x)$. De façon évidente :

$$f(x) = \int_0^x f(t)dt$$

est une solution. Mais elle doit satisfaire $f(x+1) = f(x)$. Cette condition impose à g de vérifier : $\int_0^1 g(x)dx = 0$.

• L'espace des fonctions $g \in C^\infty(\mathbb{S}^1)$ pour lesquelles il existe $f \in C^\infty(\mathbb{S}^1)$ telle que $Tf = g$ est donc le noyau de la forme linéaire continue : $g \in C^\infty(\mathbb{S}^1) \longmapsto \int_0^1 g(x)dx \in \mathbb{R}$.

Example 2

Il s'agit de la résolution du problème du $\overline{\partial}$ sur $\mathbb{C}^*$

Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$. Un point de U sera repéré par ses coordonnées réelles (x, y) ou son affixe $z = x + iy$. Notons $C^\infty(U)$ l'espace des fonctions complexes de classe C^∞ sur U. On s'intéresse à l'équation aux dérivées partielles suivante appelée ***équation de Cauchy-Riemann*** :

$$\text{(CR)} \qquad \overline{\partial} f = \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right) = g$$

où $g \in C^\infty(U)$ est donnée.

À la fin du XIXème siècle les mathématiciens furent capables de résoudre cette équation sur $U = \mathbb{C}$ (en usant de la ***Formule de Cauchy***) mais pas pour n'importe quel ouvert de $\mathbb{C}$. Par exemple, qu'en est-il de $U = \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$?

• On a une action de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{C}$ egendrée par le biholomorphisme $\tau : z \in \mathbb{C} \longmapsto (z+1) \in \mathbb{C}$; celui-ci induit un automorphisme γ de l'espace de Fréchet $E = C^\infty(\mathbb{C})$ des fonctions C^∞ sur $\mathbb{C}$:

$$(\gamma \cdot f)(z) = f \circ \tau(z) = f(z+1)$$

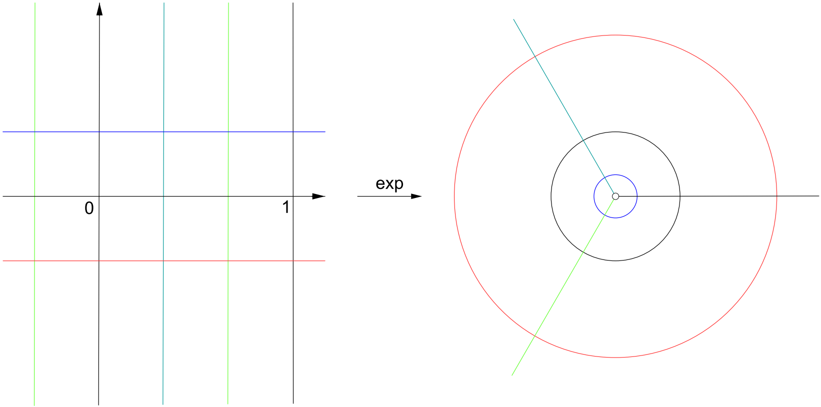
mais aussi sur l'espace $N = \mathcal{H}(\mathbb{C})$ des fonctions holomorphes, qui est exactement le noyau de l'opérateur $C^\infty(\mathbb{C}) \xrightarrow{\overline{\partial}} C^\infty(\mathbb{C})$.

• Cette action de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{C}$ est holomorphe, libre et propre. Le quotient $\mathbb{C}/\tau$ est alors une surface de Riemann. Elle peut être décrite explicitement : c'est exactement l'action par translations de $\mathbb{Z}$ sur le groupe additif $(\mathbb{C}, +)$; comme $\mathbb{Z}$ est le noyau du morphisme $\exp : z \in \mathbb{C} \longmapsto e^{2i\pi z} \in \mathbb{C}^*$, la suite ci-dessous est exacte :

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{C} \xrightarrow{\exp} \mathbb{C}^* \longrightarrow 1.$$

$$e^{2i\pi z} = e^{2i\pi(x+iy)} = e^{-2\pi y} \cdot e^{2i\pi x}.$$

Ce qui montre que le quotient $\mathbb{C}/\tau$ est une surface de Riemann ; elle est biholomorphiquement équivalente à $\mathbb{C}^*$.


0
1
exp

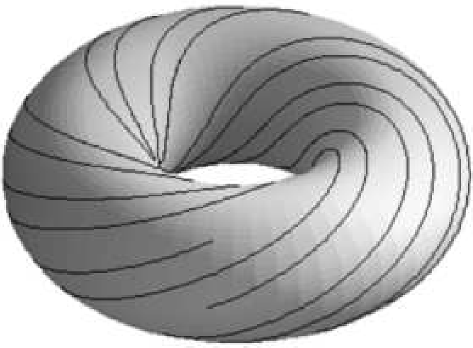
• Les fonctions C^∞ sur $\mathbb{C}^*$ s'identifient aux fonctions C^∞ sur $\mathbb{C}$ invariantes γ, c'est-à-dire aux fonctions $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ vérifiant la condition de périodicité $f(z+1) = f(z)$. Elles forment un sous-espace fermé E^γ de l'espace de Fréchet $E = C^\infty(\mathbb{C})$. Comme l'équation (CR) a une solution dans E, on aura aussi une solution dans E^γ si l'espace vectoriel $H^1(\mathbb{Z}, N)$ est trivial (comme on l'a mentionné). Est-ce le cas ? Oui :

Théorème (Guichard 1887)

Soient $\tau : z \in \mathbb{C} \longmapsto z+1 \in \mathbb{C}$ et γ l'automorphisme de l'espace de Fréchet $N = \mathcal{H}(\mathbb{C})$ des fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}$ defini par $\gamma \cdot f = f \circ \tau$. Alors $H^1(\mathbb{Z}, \mathcal{H}(\mathbb{C})) = 0$.

2. Champs hypoelliptiques

2.1. Un ***système dynamique continu*** (SDC en abrégé) est un couple (M, X) où M est une variété (compacte pour simplifier) et X un champ de vecteurs sur M.



On dit que deux SDC (M, X) et (N, Y) sont ***conjugués*** s'il existe un difféomorphisme $h : M \longrightarrow N$ tel que $h_*(X) = Y$. L'existence d'une conjugaison implique la chose suivante : ***Tout ce qui se passe pour l'un des SDC se passe exactement pour l'autre !***

2.2. Soit (M, X) un SDC. Alors le champ X définit un opérateur différentiel d'ordre 1 : $X : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$ donné par :

$$(X \cdot f)(x) = (d_x f)(X_x)$$

valeur de la différentielle $d_x f$ de f au point x (qui est une forme linéaire sur l'espace tangent $T_x M$) sur le vecteur $X_x \in T_x M$.
Il est naturel de s'intéresser aux solutions de l'équation :

$$X \cdot f = g. \tag{1}$$

L'opérateur $X : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$ s'étend à l'espace des distributions :

$$X : T \in \mathcal{D}'(M) \longrightarrow X \cdot T \in \mathcal{D}'(M)$$

défini $\langle X \cdot T, \varphi\rangle = -\langle T, X \cdot \varphi\rangle$. Ce qui amène à l'équation :

$$X \cdot T = S. \tag{2}$$

Une distribution T est *invariante* par X ou X-*invariante* si elle satisfait $X \cdot T = 0$, c'est-à-dire elle est nulle sur l'image de $X : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$. Une condition nécessaire (mais pas suffisante en général) pour que l'équation (1) admette une solution f est $\langle T, g\rangle = 0$ pour toute distribution T invariante par X.

Le problème de la régularité des solutions est très important. On dira que X est ***globalement hypoelliptique*** si, pour toute distribution $T \in \mathcal{D}'(M)$:

$$X \cdot T \in C^\infty(M) \Longrightarrow T \in C^\infty(M).$$

En particulier, si c'est le cas, toute distribution X-invariante T est ***régulière***, c'est-à-dire il existe une fonction ψ de classe C^∞ sur M telle que, pour toute fonction $f \in C^\infty(M)$ on ait :

$$\langle T, f \rangle = \int_M f(x) \cdot \psi(x) dx$$

où dx est la mesure canonique sur M (associée à sa structure différentiable).

Exemple fondamental

2.3. Soit $n \geq 2$ un entier. L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ sera équipé de son produit scalaire usuel $\langle\ ,\ \rangle$ de norme associée $|\cdot|$. Le tore $\mathbb{T}^n$ est le quotient de $\mathbb{R}^n$ par son réseau standard $\mathbb{Z}^n$. Pour $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n$, $\Theta_{\mathbf{m}}$ sera la fonction $\Theta_{\mathbf{m}}(x) = e^{2i\pi\langle \mathbf{m},x\rangle}$. Une fonction sur $\mathbb{T}^n$ est une fonction $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ satisfaisant à la condition d'invariance $f(x+\mathbf{m}) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n$.

Si $f : \mathbb{T}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ est intégrable, elle admet un ***développement de Fourier*** :

$$f(x) = \sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^n} f_{\mathbf{m}}\Theta_{\mathbf{m}}(x)$$

où les $f_{\mathbf{m}}$ sont les ***coefficients de Fourier*** de f donnés par les formules intégrales :

$$f_{\mathbf{m}} = \int_{\mathbb{T}^n} f(x)e^{-2i\pi\langle \mathbf{m},x\rangle}dx.$$

Si en plus la fonction f est de carré intégrable, les coefficients $f_{\mathbf{m}}$ vérifient la condition :

$$\sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^n} |f_{\mathbf{m}}|^2 < +\infty.$$

De même, toute distribution T sur le tore $\mathbb{T}^n$ (vue comme une distribution $\mathbb{Z}^n$-periodique sur $\mathbb{R}^n$) peut être écrite :

$$T = \sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^n} T_{\mathbf{m}}\Theta_{\mathbf{m}}$$

où la famille de nombres complexes $T_{\mathbf{m}}$ (indexée par $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n$) est au plus de *croissance polynomiale*, c'est-à-dire il existe un entier $r \in \mathbb{N}$ et une constante $C > 0$ tels que $|T_{\mathbf{m}}| \leq C|\mathbf{m}|^r$ pour tout $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n$.

2.4. Pour tout $r \in \mathbb{N}$, notons $W^{1,r}$ l'espace des fonctions f sur le tore $\mathbb{T}^n$ données par leurs coefficients de Fourier $(f_{\mathbf{m}})_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^n}$ satisfaisant à la condition $\sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^n} |\mathbf{m}|^r |f_{\mathbf{m}}| < +\infty$. De même $W^{2,r}$ sera l'espace des fonctions f sur $\mathbb{T}^n$ données par leurs coefficients de Fourier $(f_{\mathbf{m}})_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^n}$ et vérifient la condition $\sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^n} |\mathbf{m}|^{2r} |f_{\mathbf{m}}|^2 < +\infty$. Ces espaces sont complets pour les normes :

$$||f||_{1,r} = |f_0| + \sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^n\setminus\{\mathbf{0}\}} |\mathbf{m}|^r |f_{\mathbf{m}}| \quad \text{for } f \in W^{1,r}$$

et :

$$||f||_{2,r} = \sqrt{|f_0|^2 + \sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^n\setminus\{\mathbf{0}\}} |\mathbf{m}|^{2r} |f_{\mathbf{m}}|^2} \quad \text{for } f \in W^{2,r}$$

$W^{2,r}$ est le $r^{\text{ème}}$ ***espace de Sobolev*** du tore $\mathbb{T}^n$; il a une structure d'espace de Hilbert pour le produit hermitien :

$$\langle f, g\rangle_r = f_0\overline{g}_\mathbf{0} + \sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^n\setminus\{\mathbf{0}\}} |\mathbf{m}|^{2r} f_\mathbf{m}\overline{g}_\mathbf{m}.$$

On a des inclusions naturelles :

$$C^\infty(\mathbb{T}^n) \subset \cdots \subset W^{1,r+1} \subset W^{1,r} \subset \cdots \subset W^{1,0}$$

et :

$$C^\infty(\mathbb{T}^n) \subset \cdots \subset W^{2,r+1} \subset W^{2,r} \subset \cdots \subset W^{2,0} = L^2(\mathbb{T}^n).$$

La proposition suivante est facile à établir :

Proposition

Soit $T = \sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^n} T_{\mathbf{m}}\Theta_{\mathbf{m}}$ *une série (les* $T_{\mathbf{m}}$ *sont des nombres complexes). Les assertions i), ii) et iii) qui suivent sont équivalentes :*

i) T *est une distribution régulière, i.e.* T *est une fonction* C^∞.

ii) pour tout $r \in \mathbb{N}$*, la série* $\sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^n} |\mathbf{m}|^{2r}|T_{\mathbf{m}}|^2$ *converge.*

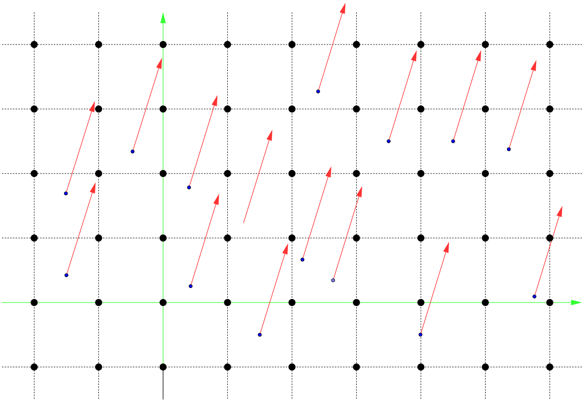
iii) pour tout $r \in \mathbb{N}$*, la série* $\sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^n} |\mathbf{m}|^{r}|T_{\mathbf{m}}|$ *converge.*

Pour tout $r \in \mathbb{N}$*, les injections* $j_{1,r} : W^{1,r+1} \hookrightarrow W^{1,r}$ *et* $j_{2,r} : W^{2,r+1} \hookrightarrow W^{2,r}$ *sont des* ***opérateurs compacts****.*

Conséquence :

$$\bigcap_{r\in\mathbb{N}} W^{1,r} = \bigcap_{r\in\mathbb{N}} W^{2,r} = C^\infty(\mathbb{T}^n).$$

2.5. Considérons maintenant le champ de vecteurs linéaire $X = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \frac{\partial}{\partial x_k}$ sur le tore $\mathbb{T}^n$ où $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ est un vecteur de $\mathbb{R}^n$.



Un champ linéaire sur $\mathbb{R}^2$
Le réseau $\mathbb{Z}^2$ dans $\mathbb{R}^2$

On suppose les $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$; ceci implique que les orbites de X sont denses.

L'équation (1) s'écrit :

$$(3) \qquad \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \frac{\partial f}{\partial x_k} = g.$$

Pour la résoudre, on utilise le développement de Fourier des fonctions sur le tore $\mathbb{T}^n$. On a :

$$f(x) = \sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^n} f_{\mathbf{m}} e^{2i\pi\langle \mathbf{m},x\rangle} \quad \text{et} \quad g(x) = \sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^n} g_{\mathbf{m}} e^{2i\pi\langle \mathbf{m},x\rangle}.$$

En termes de coefficients de Fourier, l'équation (3) est équivalente au système :

$$(4) \qquad 2i\pi\langle \mathbf{m}, \alpha\rangle f_{\mathbf{m}} = g_{\mathbf{m}} \quad \text{avec} \quad \mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n$$

Ce qui donne une solution formelle :

$$f_{\mathbf{m}} = \begin{cases} 0 & \text{si } \mathbf{m} = \mathbf{0} \\ \frac{g_{\mathbf{m}}}{2i\pi\langle \mathbf{m}, \alpha\rangle} & \text{sinon} \end{cases} \tag{5}$$

Problème : La quantité $2i\pi\langle \mathbf{m}, \alpha\rangle$ peut tendre vers 0 plus rapidement que $g_{\mathbf{m}}$! Ce qui empêcherait la série de Fourier de converger ! Ceci nous amène à la notion ***d'approximation diophantienne***.

Tout vecteur $\alpha \in \mathbb{R}^n$ définit une forme linéaire $\mathbb{R}^n$:
$x \in \mathbb{R}^n \longmapsto \langle \alpha, x\rangle \in \mathbb{R}$ et donc, par restriction, sur le réseau $\mathbb{Z}^n$.

Définition

i) On dit qu'un vecteur α est diophantien s'il existe $A > 0$ et $s > 0$ tels que : $|\langle\alpha, \mathbf{m}\rangle| \geq \frac{A}{|\mathbf{m}|^{1+s}}$ pour tout $\mathbf{m} = (m_1, ..., m_n) \in \mathbb{Z}^n$ différent de $\mathbf{0}$. Dans ce cas, on dit que X est un champ diophantien.

ii) On dit que α est un vecteur de Liouville s'il existe $A > 0$ tel que, pour tout $\delta > 0$, il existe $\mathbf{m}_\delta \in \mathbb{Z}^n$ vérifiant : $|\langle\alpha, \mathbf{m}_\delta\rangle| \leq \frac{A}{|\mathbf{m}_\delta|^\delta}$. On dira alors que X est un champ de Liouville.

Par exemple : *Tout vecteur $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ dont les composantes sont des nombres algébriques $\mathbb{Q}$-linéairement independants est un vecteur diophantien*.

En effet, en multipliant les polynômes minimaux des composantes par le dénominteur commun on peut supposer que les α_i sont des entiers algébriques.
Soit $\mathbb{Q}[\alpha_1, \cdots, \alpha_n]$ le corps de nombres engendré par $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$.
Notons d le degré de l'extension algébrique $\mathbb{Q}[\alpha_1, \cdots, \alpha_n]$ et G son groupe de Galois.
Pour $i = 1, \cdots, n$, soient σ_i le plongement de $\mathbb{Q}[\alpha_1, \cdots, \alpha_n]$ dans la clôture algébrique de $\overline{\mathbb{Q}}$.
Pour tout n-uple non nul $\mathbf{m}$ d'entiers, le produit : $\prod_j \sigma_j(\langle \alpha, \mathbf{m} \rangle)$ est un entier algébrique non nul et invariant par G ; c'est donc un entier non nul. Ceci implique : $\left| \prod_j \sigma_j(\langle \alpha, \mathbf{m} \rangle) \right| \geq 1$, et donc, si $\sigma_1 = \mathrm{Id}$, on a : $|\langle \alpha, \mathbf{m} \rangle| \geq \dfrac{1}{\left| \prod_{j \geq 2} \sigma_j(\langle \alpha, \mathbf{m} \rangle) \right|} \geq \frac{C}{|\mathbf{m}|^{d-1}}$ où C est une constante réelle strictement positive. $\square$

Le théorème principal

i) Supposons que X est diophantien. Alors l'équation $X \cdot f = g$ a une solution $f \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ si, et seulement si :

$$\int_{\mathbb{T}^n} g(x)dx = g_{\mathbf{0}} = 0.$$

ii) Si X est de Liouville, il existe une famille libre de fonctions $(g_s)_{s\in\mathbb{N}}$ vérifiant la condition :

$$\int_{\mathbb{T}^n} g_s(x)dx = g_{\mathbf{0}} = 0$$

et telle que l'équation $X \cdot f = g_s$ n'ait pas de solution ; en plus, l'image de l'opérateur X n'est pas fermée pour la C^∞-topologie sur $C^\infty(\mathbb{T}^n)$.

Finalement, on remarque que l'opérateur différentiel X :

- *n'est pas **GH** si α est un **vecteur de Liouville**.*
- *est **GH** si α est un **vecteur diophantien**.*

*Le seul exemple connu **d'opérateur GH** est ce genre de **champ linéaire diophantien** sur $\mathbb{T}^n$. Ce qui mène à la :*

Conjecture de Greenfield-Wallach (1973)

Soient M une variété compacte de dimension n et X un champ de vecteurs non singulier préservant un C^∞-volume sur M. Supposons X globalement hypoelliptique. Alors M est difféomorphe au tore $\mathbb{T}^n$ et X est conjugué à un champ linéaire diophantien.

Cette conjecture a d'abord été démontrée en dimension $n = 3$ par différents auteurs. Et récemment, en toute dimension, pour un espace homogène G/Γ et un champ X induit par un élément de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ du groupe de Lie G !

REFERENCES

[DE] – Dehgan-Nezhad, A. & El Kacimi, A. ***Équations cohomologiques de flots riemanniens et de difféomorphismes d'Anosov***. ***Journal of the Mathematical Society of Japan***, Vol. 59 N 4 (2007), 1105-1134.

[EI] – El Kacimi, A. ***On some holomorphic cohomological equations.*** Prépublication UVHC (2011). To appear in ***Results in Mathematics*** in 2012.

[GW] – Greenfield, S. & Wallach, N. ***Globally hypoelliptic vector fields.*** ***Topology*** 12, (1973), 247-253.

[Gu] – Guichard, C. ***Sur la résolution de l'équation aux différences finies*** $G(x+1) - G(x) = H(x)$. ***Ann. Sc. ENS*** Série 3, 4 (1887) 361-380.

[Sc] – Schmidt, W. M. ***Diophantine approximation.*** ***Lecture Notes in Math.*** 785, (1980).