RÉFLEXIONS
RÉFLEXIONS

Qu'ont en commun une frise, un papier peint et une roche cristalline ?

Une certaine régularité !
Mais laquelle et de quel ordre ?

La géométrie répond à cette interrogation en utilisant un objet particulier que les mathématiciens nomment… *groupe* !

« Réflexions et Réflexions » est une introduction à cet outil fondamental des mathématiques modernes.

Bonne visite et bon divertissement !

Exposition conçue et réalisée par Giorgio Ferrarese du département de mathématiques de l'Université de Turin, Italie.

Comité scientifique pour la version française Aziz El Kacimi, François Recher, Valerio Vassallo, Mathématiciens en résidence à la Cité des Géométries de Maubeuge, France.

Conception graphique graphisme@tousles3.com
Impression DAG

SUGGESTION…

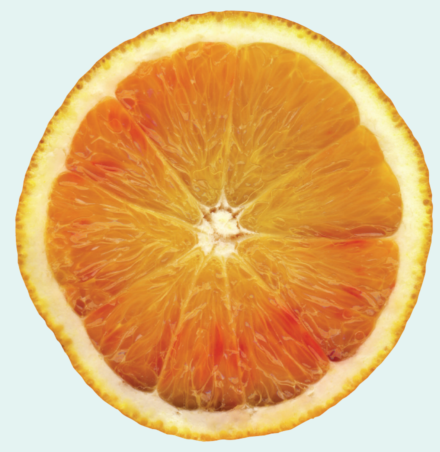
Au cours de votre visite, il ne faut pas hésiter à manipuler, tourner, pousser, renverser les objets et utiliser les outils à votre disposition : papier, crayon, miroir…

symétries

SYMÉTRIE

Ce mot indique le type d'ordre qu'il est possible de trouver globalement dans la disposition des différentes parties qui constituent un objet.

On parlera de symétrie par rapport à un point, une droite ou un plan.



Orange © Per Enström

Papillon Polyommatus Icarus © Luc Viatour

Orchidée blanche © Mike Murphy

SYMÉTRIE PAR RAPPORT À UN POINT OU SYMÉTRIE CENTRALE

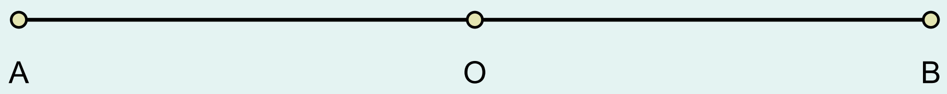
Deux points A et B sont dits **SYMÉTRIQUES** par rapport à un point O, **CENTRE DE SYMÉTRIE**, lorsque ce dernier est le milieu du segment d'extrémités A et B.

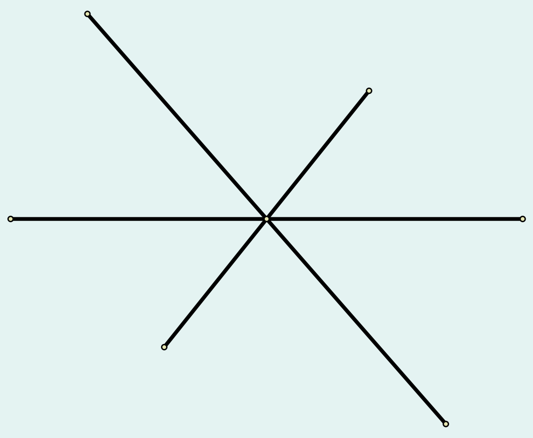
On dit alors que B est le **TRANSFORMÉ** de A ou l'**IMAGE** de A par la symétrie de centre O.

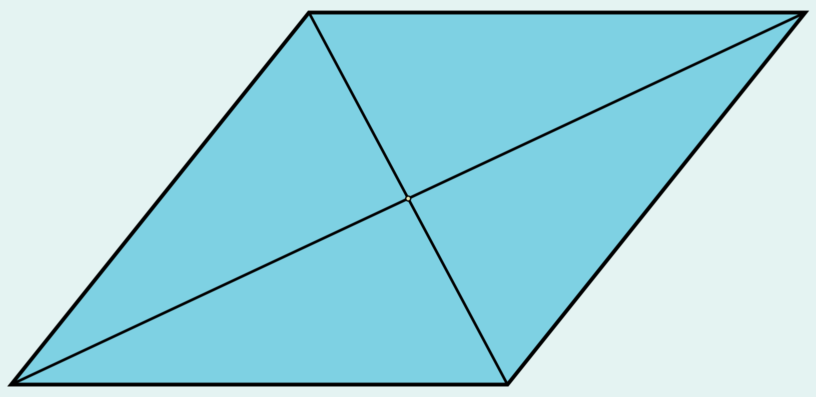
Le verbe « transformer » est là pour nous rappeler qu'il y a mouvement ou déplacement.

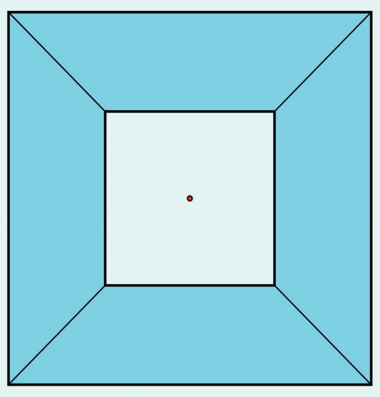
Une figure est symétrique par rapport à un point O, lorsque tout point de la figure possède un symétrique sur cette même figure.

Voici quelques exemples de figures symétriques par rapport à un point appartenant ou non à la figure.





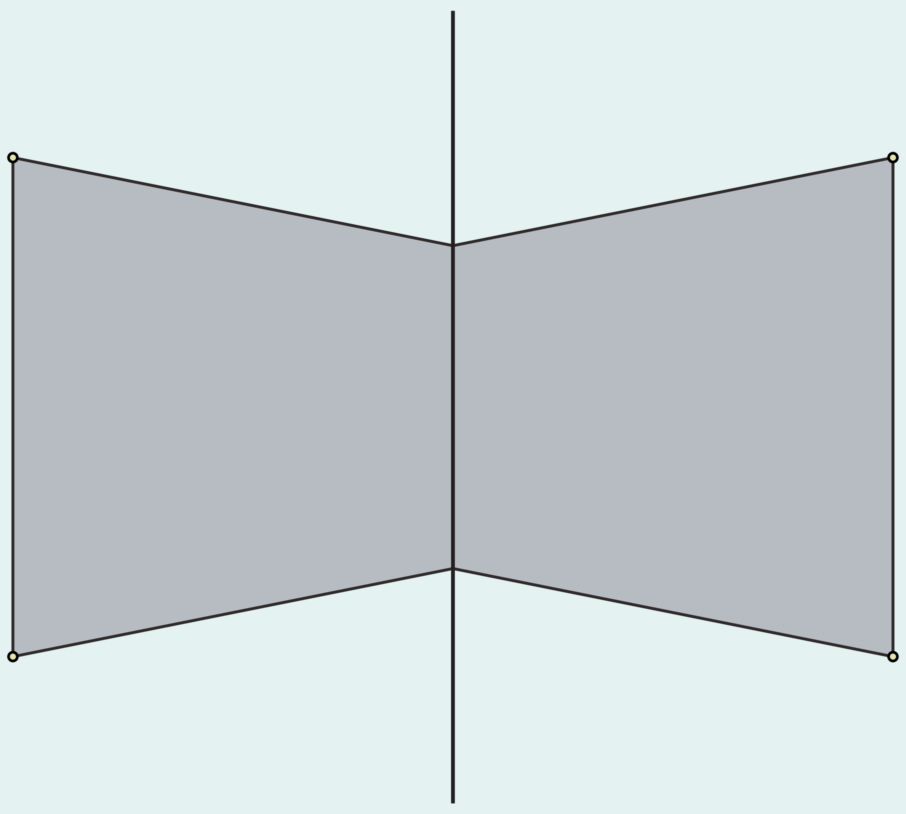


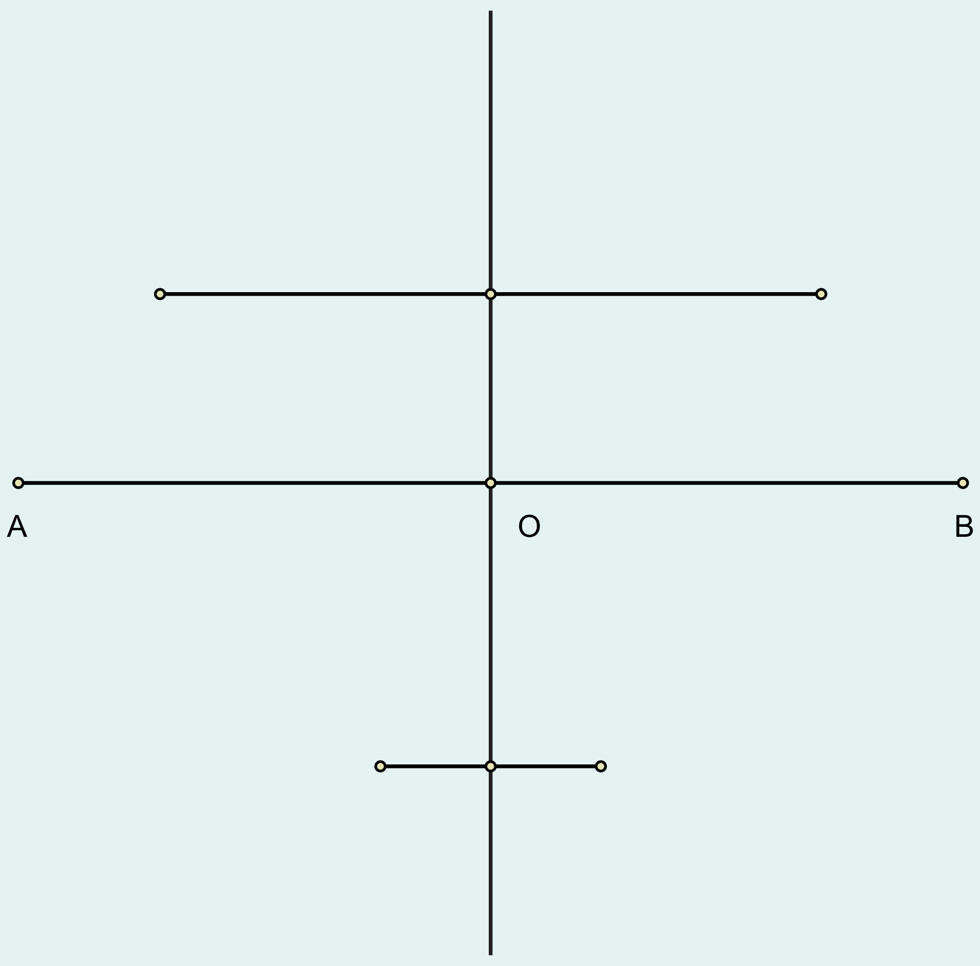


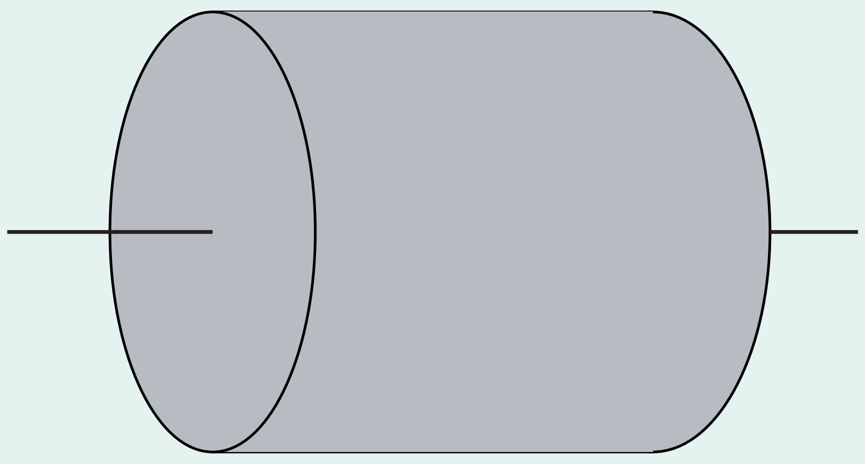
SYMÉTRIE PAR RAPPORT À UNE DROITE OU SYMÉTRIE AXIALE

Deux points A et B sont dits symétriques par rapport à une droite (d) lorsque celle-ci est la médiatrice du segment d'extrémités A et B, c'est-à-dire lorsque (d) est perpendiculaire au segment en son milieu.

En géométrie plane, une symétrie axiale est aussi appelée **RÉFLEXION**.

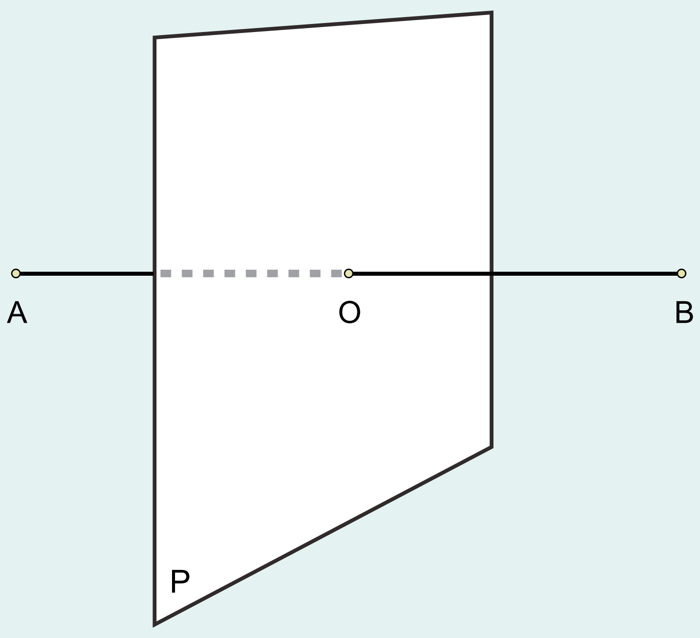






SYMÉTRIE PAR RAPPORT À UN PLAN

Deux points A et B sont dits symétriques par rapport à un plan (P) lorsque celui-ci est le plan médiateur du segment d'extrémités A et B, c'est-à-dire quand le plan (P) est perpendiculaire au segment en son milieu.



AVERTISSEMENT

Dans cette exposition, le concept de symétrie a cependant un sens plus large comme nous le verrons dans les prochains panneaux.

QU'EST-CE QU'UNE SYMÉTRIE ?

SYMÉTRIE

Essayons d'effectuer tous les mouvements rigides qui échangent les sommets d'un rectangle qui n'est pas un carré, en d'autres termes, qui ne permettent pas de savoir si le rectangle a été déplacé.

ROTATIONS

Commençons avec les rotations autour du centre O : quelles sont celles qui conviennent ?

- celle d'angle 180° convient, c'est le demi-tour que nous noterons “ **r** ”
- celle d'angle 360° convient également, c'est le tour complet, il ramène chaque sommet sur lui-même, c'est pour cela qu'on l'appelle l'identité que nous noterons “ **id** ”
- celle d'angle 90° par exemple ne convient pas, pourquoi ?

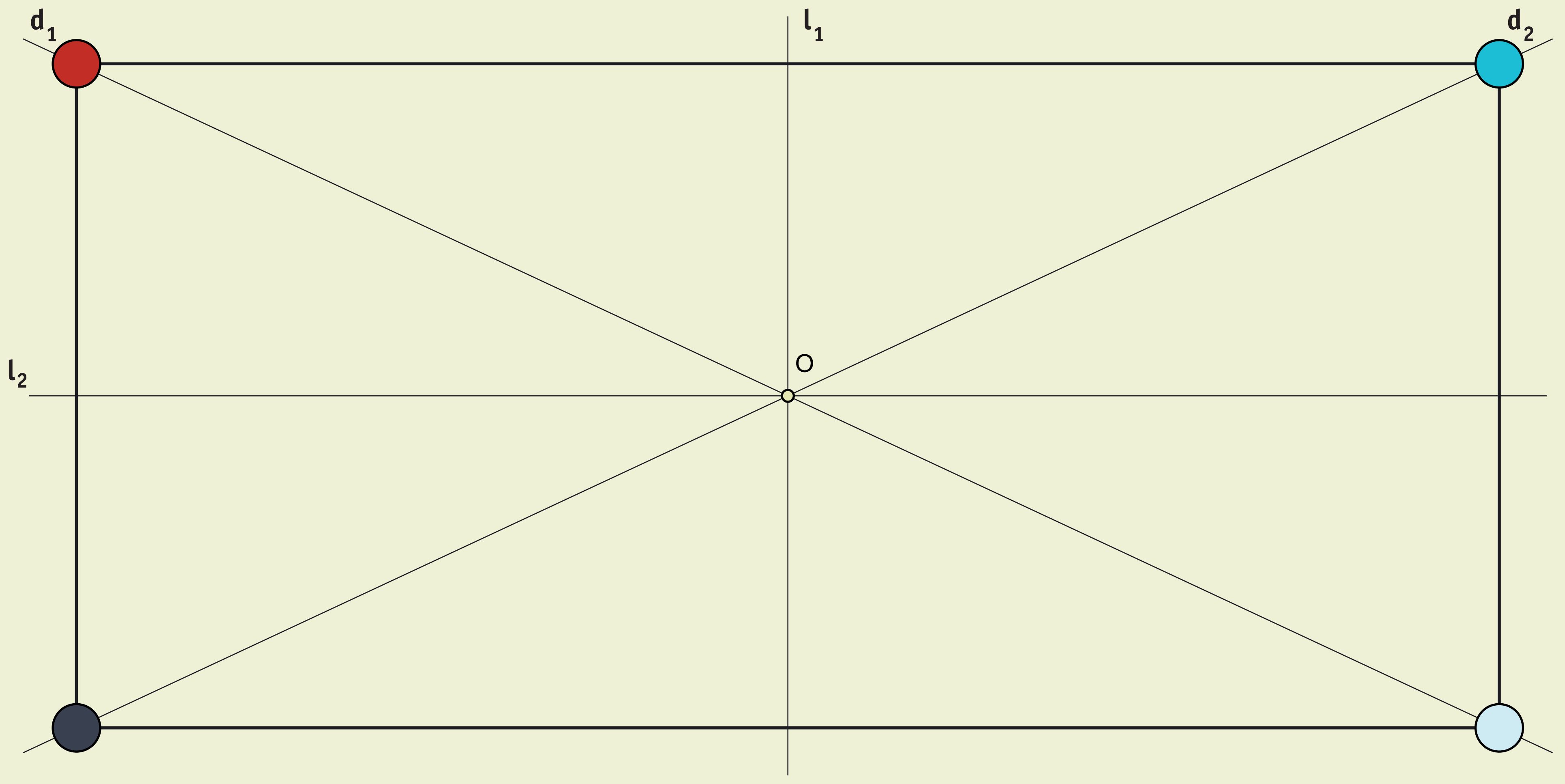
On peut démontrer qu'il n'existe que deux rotations laissant le rectangle invariant.

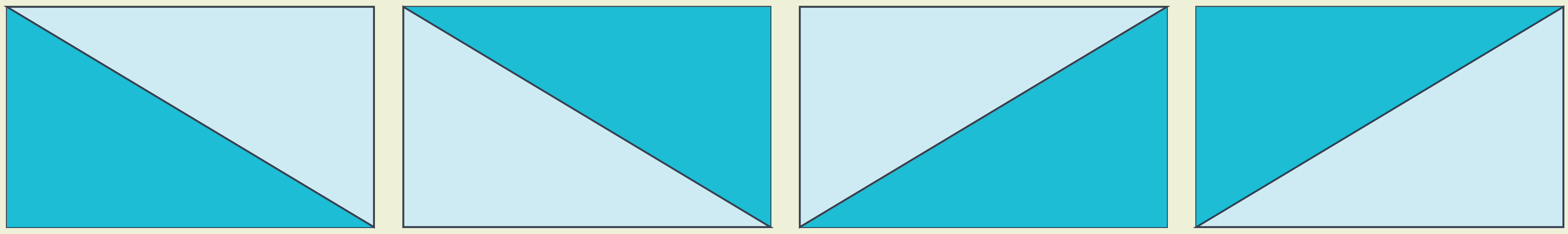
RÉFLEXIONS

Passons maintenant aux réflexions : quelles sont celles qui conviennent ?

- la réflexion par rapport à la droite l_1 ?
- la réflexion par rapport à la droite l_2 ?
- la réflexion par rapport à la droite d_1 ?
- la réflexion par rapport à la droite d_2 ?

On peut démontrer qu'il n'existe que deux réflexions laissant le rectangle invariant : “ $\mathbf{s_h}$ ” d'axe l_2 et “ $\mathbf{s_v}$ ” d'axe l_1.





De quelles façons ces rectangles s'échangent-ils ?

CONCLUSION

Les droites l_1, l_2 et le centre O du rectangle sont dits **ÉLÉMENTS DE SYMÉTRIE** du rectangle.

Les droites sont appelées axes de symétrie et le point centre de symétrie.

On obtient ainsi toutes les symétries du rectangle.

POUR ALLER PLUS LOIN

Une figure se superpose à celle obtenue après symétrie.

Les symétries sont donc des transformations qui ne modifient pas les distances entre les points.

Autrement dit, si deux points se trouvent à une certaine distance, les points transformés se trouvent encore à la même distance.

Une transformation qui conserve les distances entre les points est appelée **ISOMÉTRIE**.

Une symétrie d'une figure est une isométrie qui transforme la figure en elle-même.

ISOMÉTRIES DU PLAN

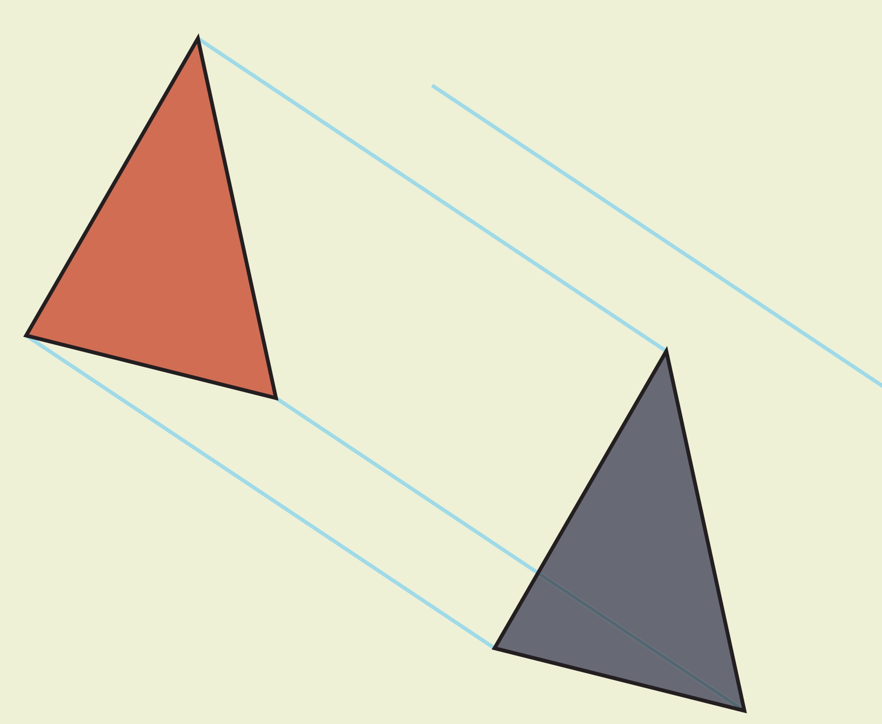
LES ISOMÉTRIES DU PLAN

Il existe quatre types d'isométries dans le plan :
- les translations
- les réflexions
- les rotations
- les symétries glissées

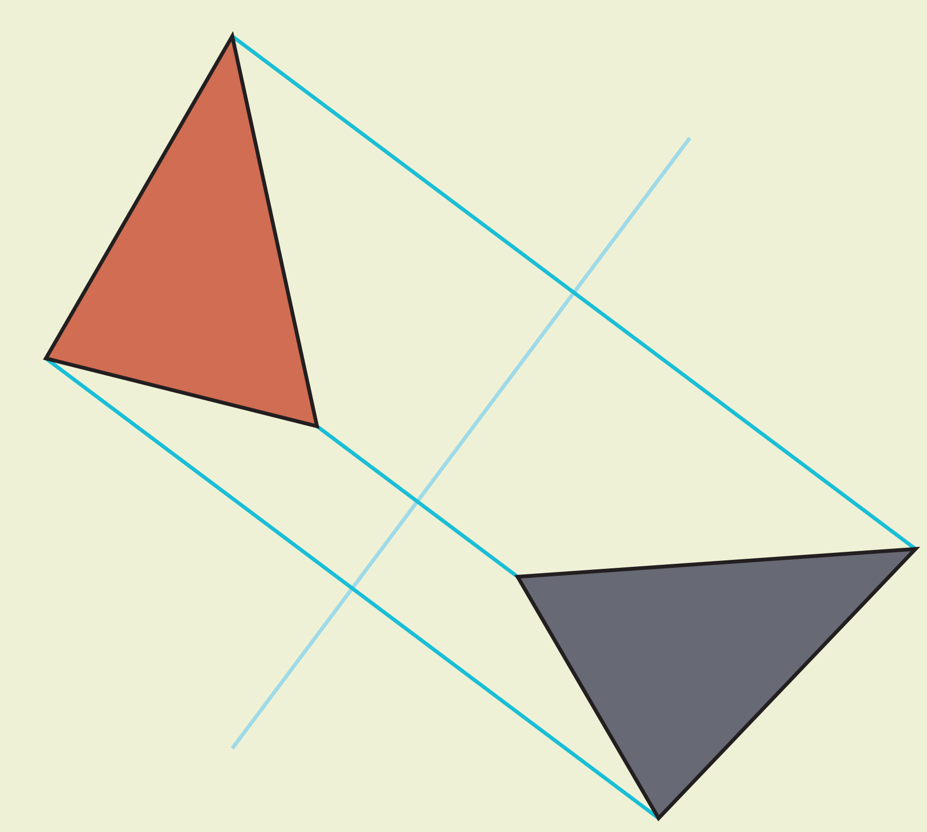
Une SYMÉTRIE GLISSÉE est la composée d'une réflexion et d'une translation, la direction de la translation et l'axe de la réflexion étant identiques.

Une symétrie centrale est aussi une rotation de 180°.

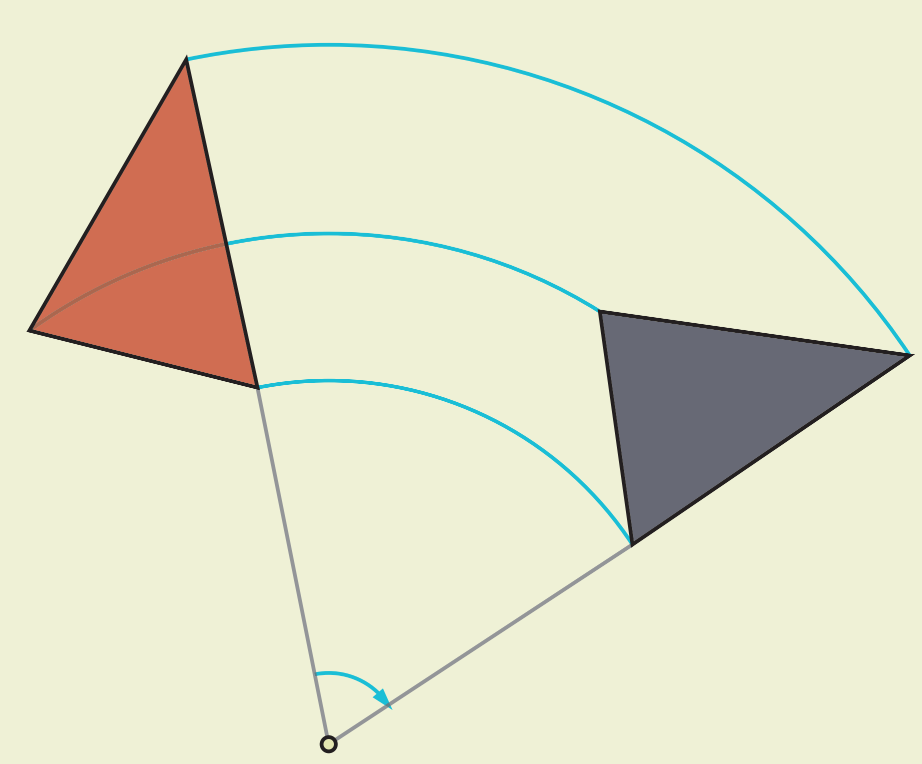
REMARQUE : les translations et les symétries glissées ne peuvent pas être les symétries d'une figure finie (contenue par exemple dans un carré du plan), puisque toutes les deux déplacent réellement la figure, c'est-à-dire que la figure transformée ne se superpose plus avec la figure initiale.



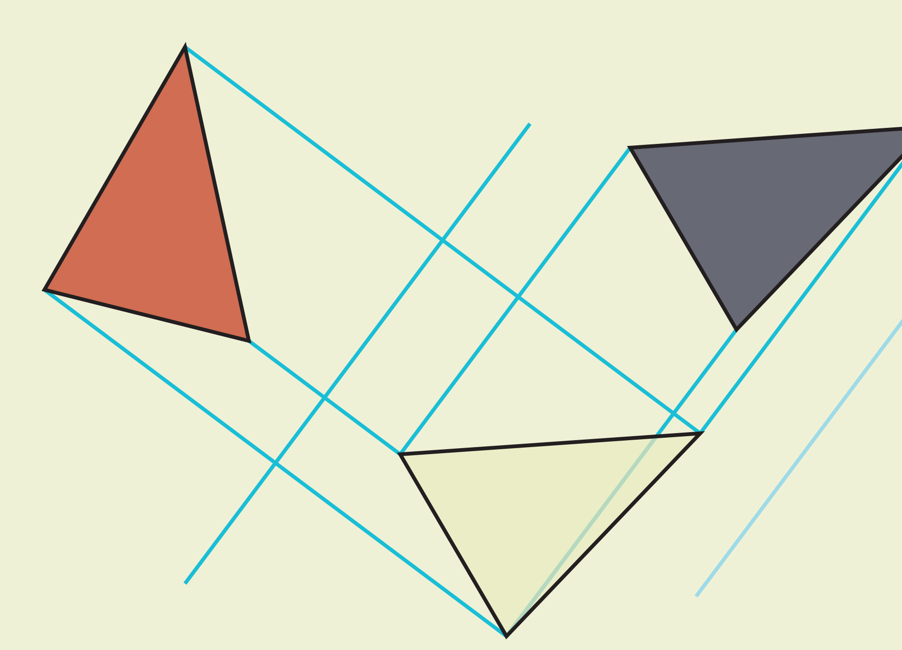
Translation



Réflexion



Rotation



Symétrie glissée

LE GROUPE DES SYMÉTRIES DU RECTANGLE

Dans le tableau ci-contre, chaque case bleue contient la transformation obtenue en faisant d'abord agir la transformation indiquée dans la case rouge de la même ligne, puis celle indiquée dans la case jaune de la même colonne.

Par exemple, au croisement de la **ligne s_h** et de la **colonne s_v** nous avons noté **r**, puisque le résultat de la composition de la transformation **s_h** et **s_v** est égale à la transformation **s_v * s_h = r.**

Il s'agit d'un groupe commutatif puisque dans ce cas l'ordre dans lequel se font les compositions ne compte pas, mais il n'en est pas toujours ainsi !

*	id	s_h	s_v	r
id	id	s_h	s_v	r
s_h	s_h	id	r	s_v
s_v	s_v	r	id	s_h
r	r	s_v	s_h	id

VÉRIFICATION

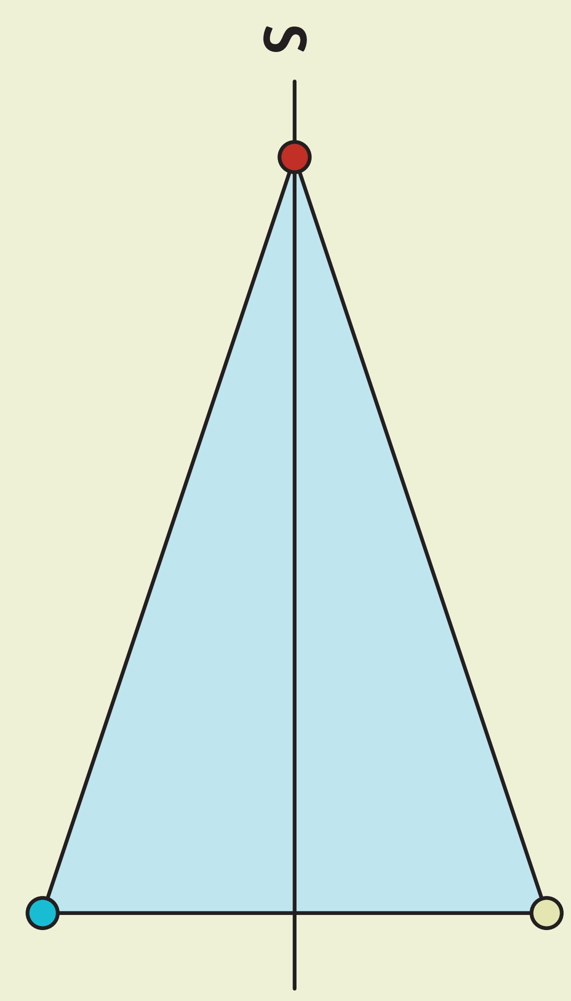
Contrôle maintenant en t'aidant d'un objet les résultats annoncés dans le tableau.

Félicitations ! Tu viens de construire ton premier groupe.

LES SYMÉTRIES DU...

TRIANGLE ISOCÈLE

s : symétrie axiale



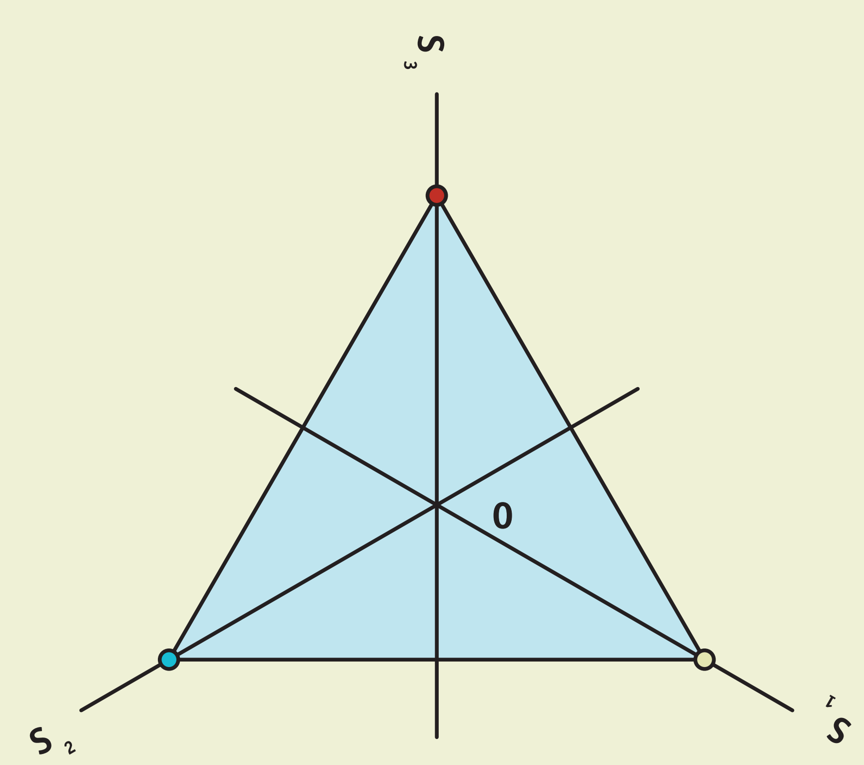
*	id	s
id		
s		

TRIANGLE ÉQUILATÉRAL

s_1, s_2, s_3 : symétries axiales

r_1 : rotation de centre 0 et d'angle 120° (sens des aiguilles d'une montre)

r_2 : rotation de centre 0 et d'angle 240° (sens des aiguilles d'une montre)



*	id	s_1	s_2	s_3	r_1	r_2
id	id	s_1			r_1	r_2
s_1	s_1		r_2	r_1		s_2
s_2	s_2	r_1	id			s_3
s_3	s_3	r_2		id	s_2	s_1
r_1	r_1	s_2	s_3	s_1	r_2	id
r_2	r_2	s_3		s_2	id	r_1

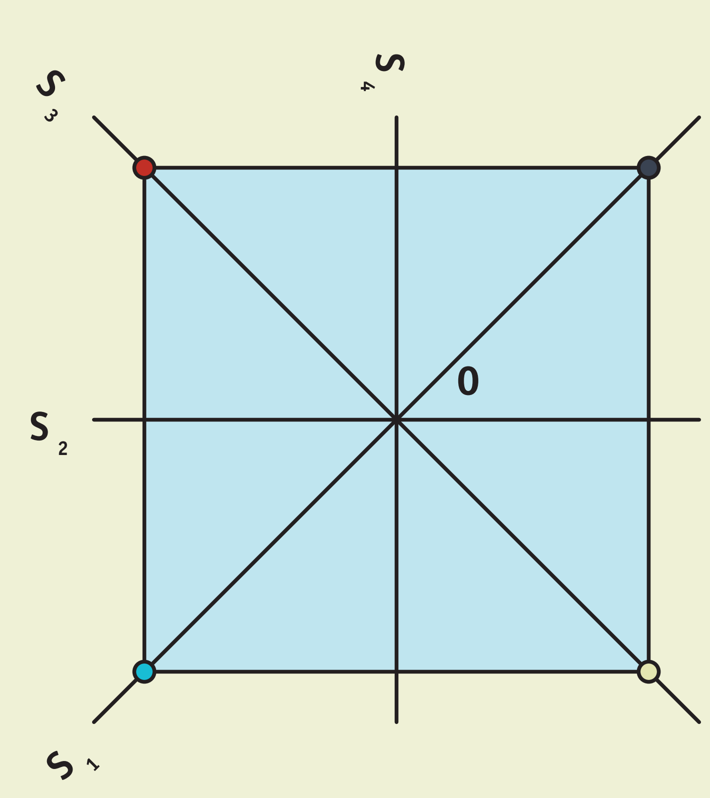
CARRÉ

s_1, s_2, s_3, s_4 : symétries axiales

r1 : rotation de centre 0 et d'angle 90° (sens des aiguilles d'une montre)

r2 : rotation de centre 0 et d'angle 180° (sens des aiguilles d'une montre)

r3 : rotation de centre 0 et d'angle 270° (sens des aiguilles d'une montre)



*	id	s_1	s_2	s_3	s_4	r_1	r_2	r_3
id	id	s_1				r_1	r_2	r_3
s_1	s_1		r_1	r_2	r_3		s_3	s_4
s_2	s_2		id	r_1	r_2		s_4	s_1
s_3	s_3	r_2	r_3	id	r_1		s_1	s_2
s_4	s_4	r_1				s_1	s_2	s_3
r_1	r_1	s_4		s_2	s_3	r_2	r_3	id
r_2	r_2	s_3	s_4	s_1	s_2	r_3	id	r_1
r_3	r_3	s_2		s_4	s_1	id	r_1	r_2

COMPLÈTE...

Complète les tableaux suivants en te servant des modèles physiques fournis. La méthode est la même que celle utilisée pour le groupe du rectangle.

À SAVOIR : chaque case bleue contient la transformation obtenue en faisant d'abord agir la transformation indiquée dans la case rouge de la même ligne puis celle indiquée dans la case jaune de la même colonne.

ATTENTION, l'ordre peut être extrêmement important.

QU'EST-CE QU'UN GROUPE ?

DÉFINITION

Un **GROUPE** ***G*** est un ensemble dans lequel est définie une **LOI DE COMPOSITION** * qui à chaque couple (*a*, *b*) d'éléments de ***G*** associe un élément ***a**b*** possédant les trois propriétés suivantes :

- **ASSOCIATIVITÉ :** pour tout triplet (*a*, *b*, *c*) de ***G*** : ***a*(b*c) = (a*b)*c*** où les parenthèses définissent la priorité
- existence de l'**ÉLÉMENT NEUTRE** noté ***e*** : pour tout élément ***a*** de ***G*** : ***a*e = a*** et ***e*a = a***
- pour tout élément ***a*** de ***G***, il existe un **OPPOSÉ** noté ***ã*** tel que ***a * ã = e*** et ***ã * a = e***

L'EXEMPLE DES ENTIERS RELATIFS

Depuis le collège, vous avez l'habitude d'utiliser un groupe particulier : le groupe des **ENTIERS RELATIFS** noté ***Z*** (de l'allemand *Zahlen* qui signifie nombre) et muni de l'opération addition notée **+**. À deux entiers ***a*** et ***b***, on associe un troisième entier ***c*** appelé somme : ***c = a + b***.

Voici sur des exemples, l'illustration des propriétés énoncées précédemment :
(2 + 3) + 5 = 2 + (3 + 5)
3 + 0 = 3 = 0 + 3
2 + (-2) = (-2) + 2 = 0

L'élément neutre est 0 et l'opposé de 2 est -2.
En général, l'opposé d'un relatif ***a*** est ***-a***.
Vous aurez peut-être observé que ***a + b*** donne le même résultat que ***b + a***. Cette remarque traduit une quatrième propriété, valable pour cet exemple particulier de groupe, appelée **COMMUTATIVITÉ** : pour tout couple (***a***, ***b***) de ***G***, ***a*** et ***b*** commutent, c'est-à-dire ***a*b = b*a***.

Lorsque cette propriété est vérifiée, le groupe est dit **COMMUTATIF**, on dit également **ABÉLIEN** (du nom du mathématicien norvégien Niels Abel). Cela sous-entend qu'il existe des groupes non commutatifs.

LE GROUPE DES SYMÉTRIES DU RECTANGLE

Les symétries du rectangle forment un ensemble pour lequel nous avons déjà défini une opération dite de composition. Elle possède les trois propriétés suivantes :

- associativité : la vérification est fastidieuse ;
- existence d'un élément neutre : il s'agit de la transformation que nous avons appelée identité et notée **id** ;
- existence d'un élément opposé : l'opposé de **id** est **id**, l'opposé de **r** est **r**, l'opposé de $\mathbf{s_h}$ est $\mathbf{s_h}$, l'opposé de $\mathbf{s_v}$ est $\mathbf{s_v}$. C'est un cas particulièrement simple où chaque élément est son propre opposé !

L'ensemble des symétries du rectangle non carré est donc un groupe qui de plus est commutatif.

PROPRIÉTÉ

L'ensemble des symétries d'une figure constitue toujours un groupe qui peut être ou non commutatif. Par exemple, le groupe des symétries du carré n'est pas commutatif.

Pouvez-vous trouver deux symétries du carré qui ne commutent pas ?

LE GROUPE DE L'HORLOGE

Les nombres inscrits sur le cadran de l'horloge vont de 1 à 12. Imaginons une opération avec ces nombres que nous nommerons ***pallino*** et que nous noterons avec un **•** : ***h • k = x***
où ***x*** est le nombre obtenu en faisant avancer l'aiguille positionnée sur ***h*** de ***k*** heures.

Par exemple :
2 • 5 = 7 ; 3 • 9 = 12 ; 9 • 5 = 2 ; 12 • 12 = 12 ; etc…

Pour de telles opérations, l'associativité est vérifiée, l'élément neutre est ***12*** (incroyable mais vrai : 12 vole la place du 0), l'opposé de ***12*** est ***12***, et l'opposé du nombre ***h*** différent de ***12*** est ***12 - h***.

Il s'agit donc d'un groupe ! De plus, il est facile de vérifier que c'est un groupe commutatif.

PERMUTATIONS ET SYMÉTRIES

EXEMPLE

Une manière particulièrement pratique et claire pour représenter une permutation est de juxtaposer l'ensemble ordonné du départ et l'ensemble ordonné obtenu par permutation :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Ce tableau signifie qu'à l'élément *1* on associe *4*, à *2* on associe *3*, et ainsi de suite.

Le tableau

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

peut aussi s'interpréter : $1 \rightsquigarrow 3$, $2 \rightsquigarrow 2$, $3 \rightsquigarrow 4$, $4 \rightsquigarrow 1$ et se lire à *1* on associe *3*, etc…

À l'aide de cette notation, il devient particulièrement facile de définir l'opération de composition :

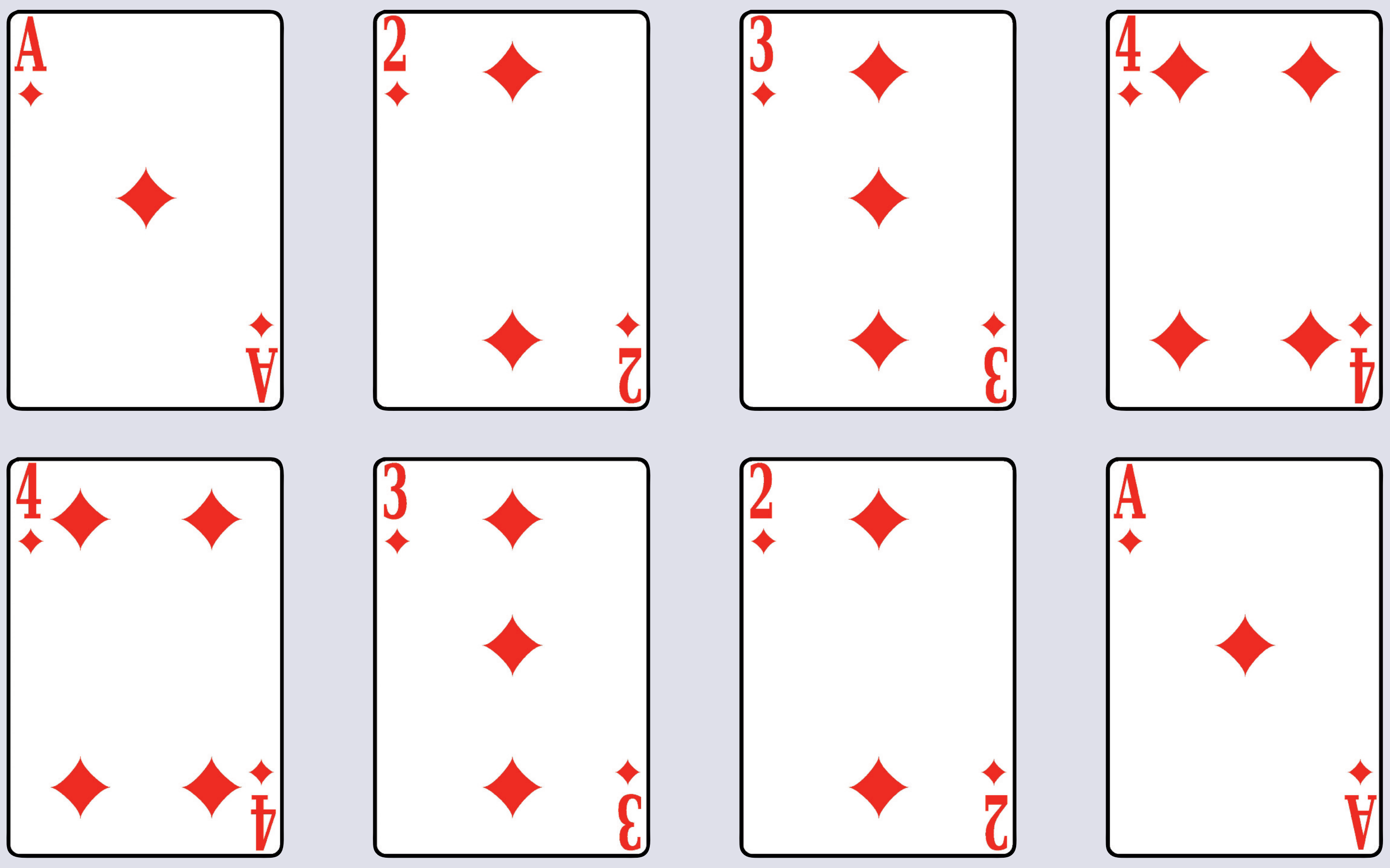
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

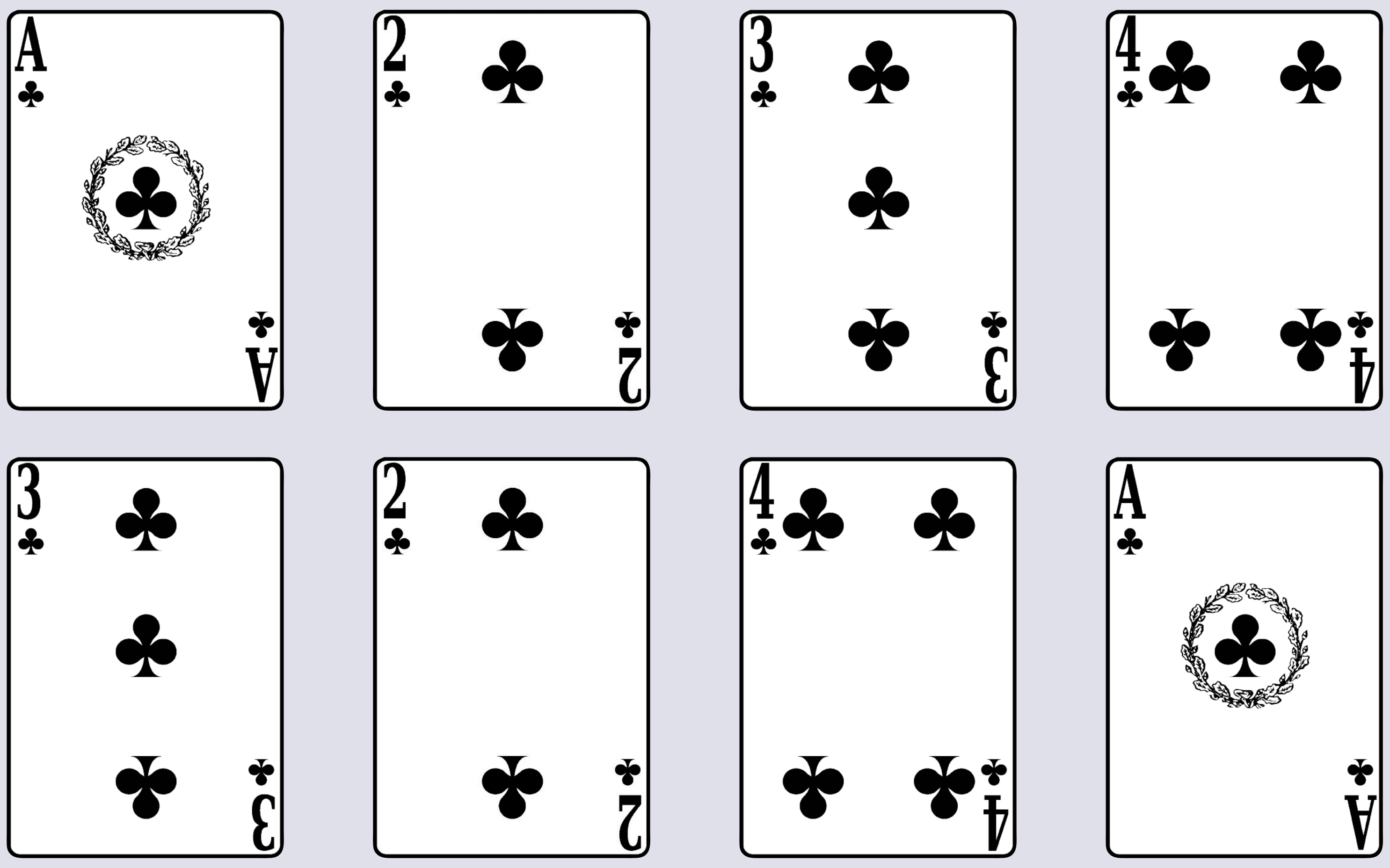
Détaillons cette écriture : par la première permutation à *1* on associe *4*, par la deuxième permutation à *4* on associe *1*, finalement à *1* on associe *1*.

Par suite :
$2 \rightsquigarrow 3$ puis $3 \rightsquigarrow 4$, donc $2 \rightsquigarrow 4$
$3 \rightsquigarrow 2$ puis $2 \rightsquigarrow 2$, donc $3 \rightsquigarrow 2$
$4 \rightsquigarrow 1$ puis $1 \rightsquigarrow 3$, donc $4 \rightsquigarrow 3$

Il est possible de vérifier que l'ensemble des permutations muni de l'opération de composition est un groupe, en particulier non commutatif pour un ensemble ayant au moins trois éléments.

Puisque à chaque symétrie d'une figure polygonale est associée une permutation de ses sommets, le groupe des symétries d'un polygone est contenu dans le groupe des permutations de ses sommets.





SOUS-GROUPE

Un groupe ***H*** contenu dans un groupe ***G*** (l'opération étant la même pour les deux groupes) est appelé **SOUS-GROUPE** de ***G***.

THÉORÈMES

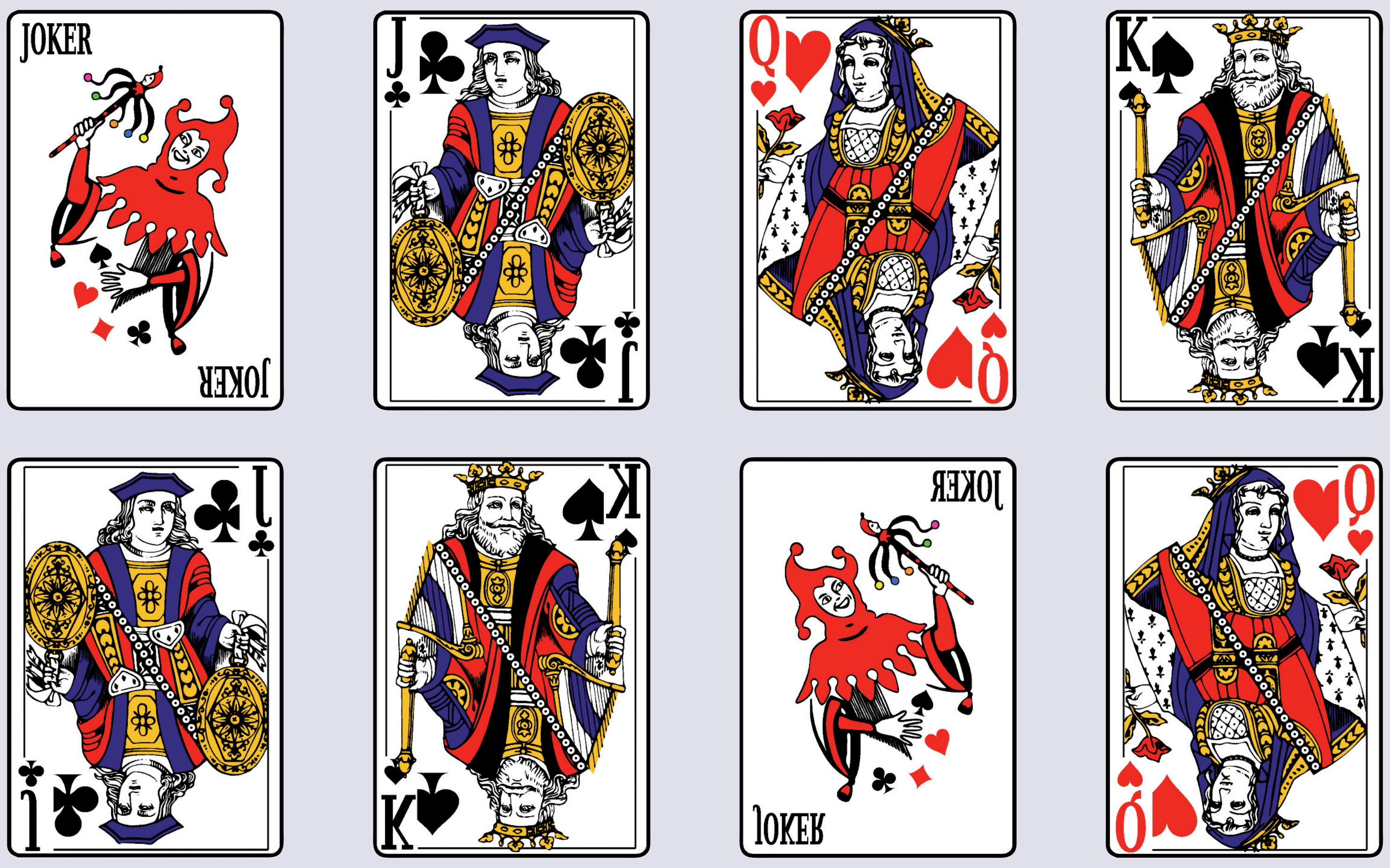
Le nombre de permutations d'un ensemble à *n* éléments est égal au produit $n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times \ldots \times (1)$

Ce nombre s'écrit ***n!*** et se lit ***n factoriel***.

Ainsi, le nombre de permutations d'un ensemble à 3 éléments est : $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$, autant que les symétries du triangle équilatéral.

Le nombre de permutations d'un ensemble à 4 éléments est : $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$, alors que les symétries du carré sont au nombre de 8.

Remarquons toutefois que 8 divise 24 comme le dit en toute généralité le théorème suivant dû à Lagrange : **Si un groupe est fini, c'est-à-dire possède un nombre fini d'éléments, alors le nombre d'éléments d'un sous-groupe de ce groupe divise le nombre d'éléments du groupe.**

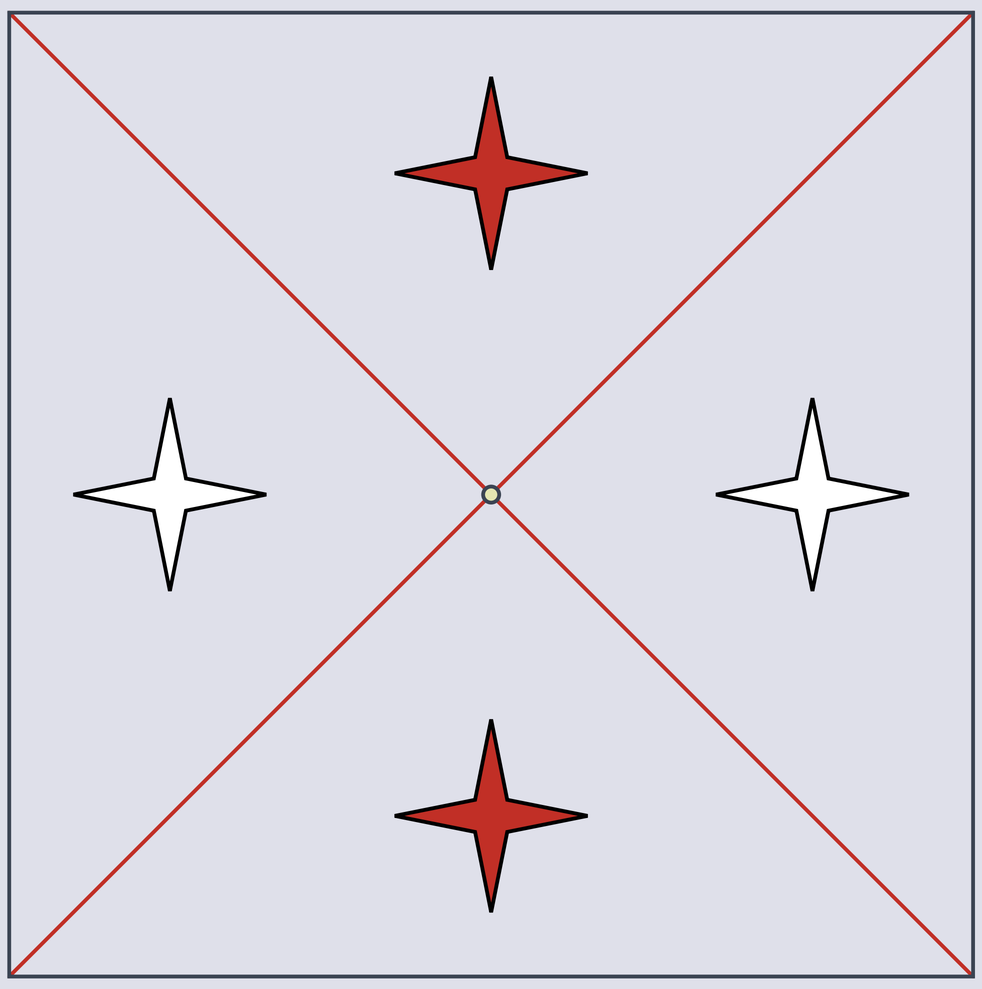


Rosettes et rosaces

FIGURE DÉCORÉE

Nous avons appris à travailler avec les symétries d'un polygone régulier, notamment celles du triangle équilatéral et celles du carré.

Maintenant, au lieu de considérer un polygone par l'intermédiaire de ses sommets, considérons un polygone sur lequel nous avons dessiné un motif. Nous admettons que les symétries qui conservent un polygone décoré sont généralement moins nombreuses que celles qui conservent un polygone nu.

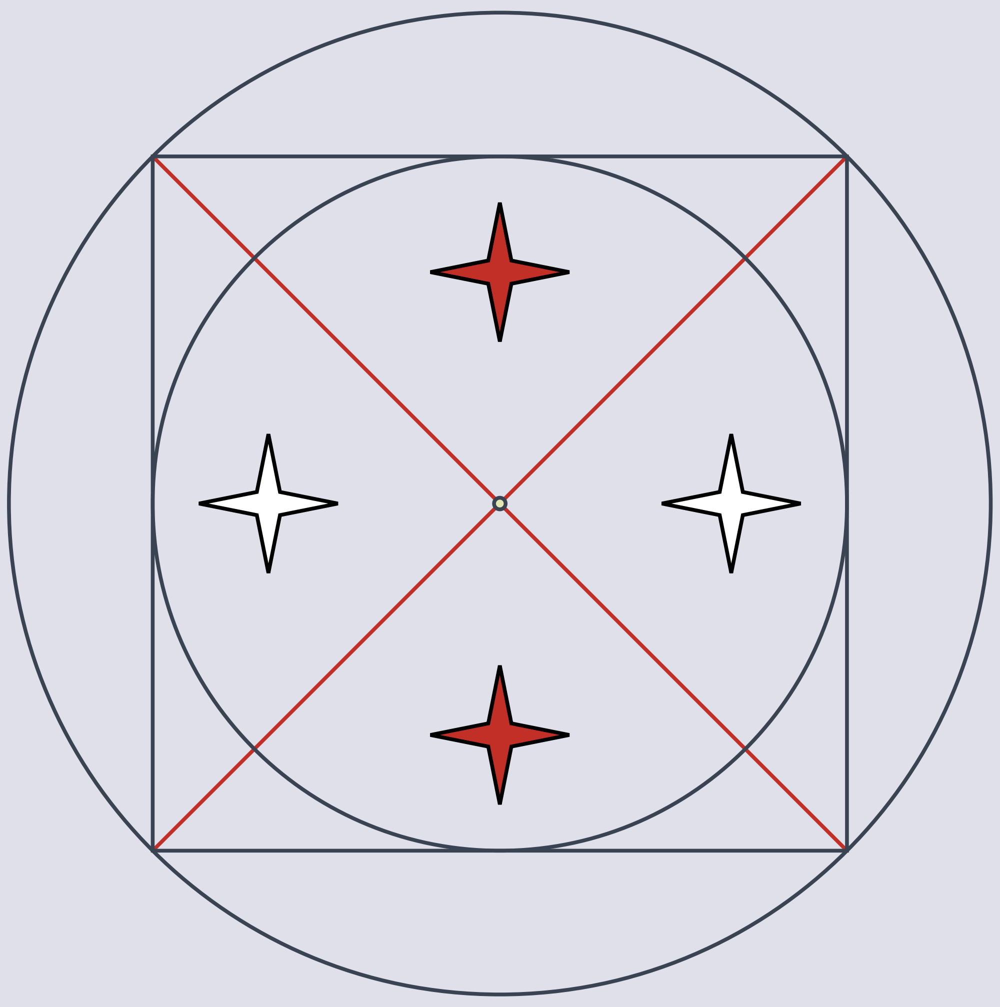


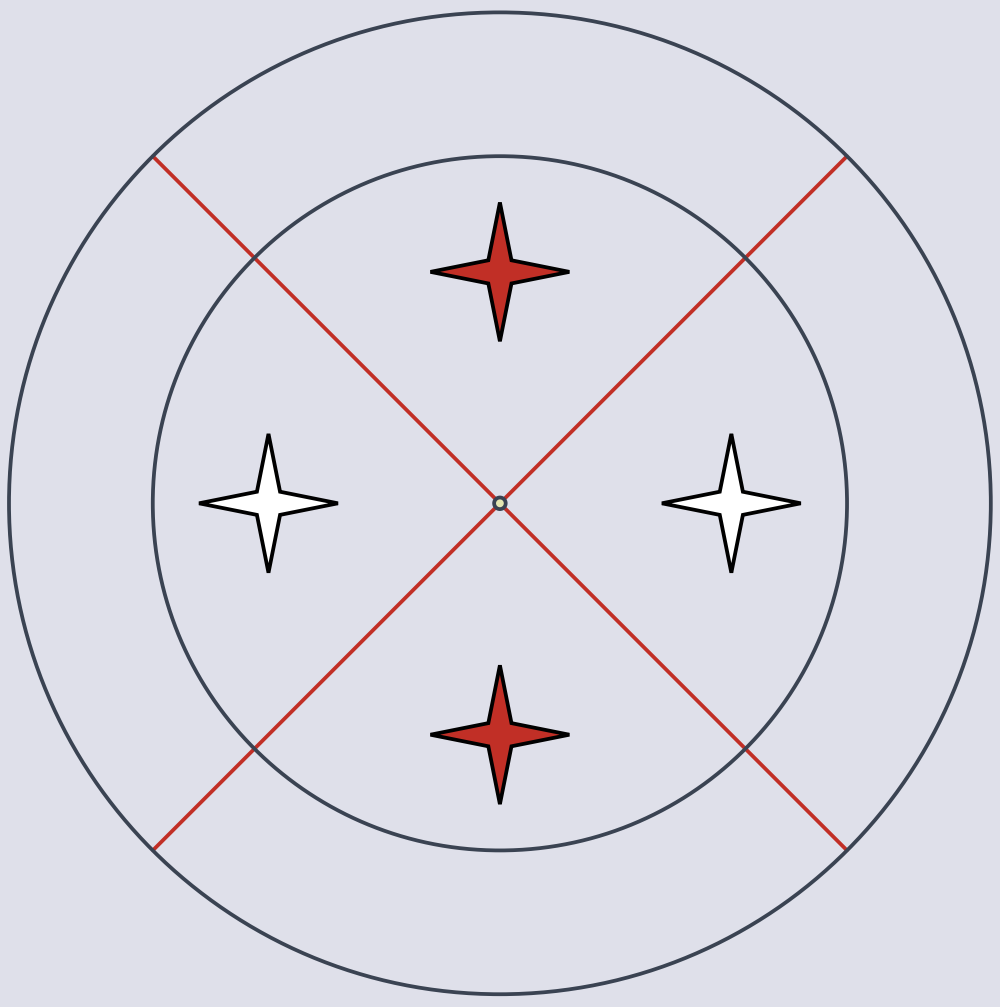
EXEMPLE

Le carré nu admet comme symétries les rotations d'angle 90° autour du centre, alors que ce n'est plus le cas du carré décoré représenté sur le dessin.

En effet, une rotation d'angle 90° autour du centre amènerait les étoiles blanches sur les rouges et réciproquement. Ceci modifierait les décorations de notre carré alors que par définition une symétrie ne doit pas changer la figure y compris les motifs !

Les symétries du carré décoré sont donc les rotations d'angle 180° autour du centre et les symétries par rapport à deux droites perpendiculaires. Lesquelles ?



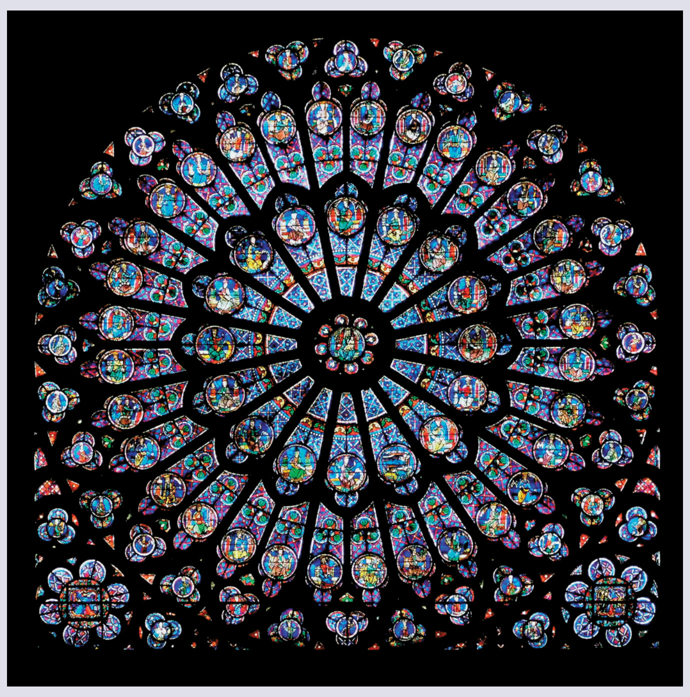


CONCLUSION

Les symétries du carré décoré sont moins nombreuses que celles du carré nu ou uni. Néanmoins elles constituent un sous-groupe du groupe des symétries du carré.

Étant donné qu'un polygone régulier est toujours inscriptible dans un cercle (on parle alors de cercle circonscrit), le groupe des symétries d'un polygone régulier décoré peut être considéré comme un sous-groupe du groupe des symétries d'un disque décoré appelé communément rosace.

Plaque de boucle d'oreille en or - Etrusque (530-480 av. J.-C.) - British Museum



Rosace nord de la Cathédrale Notre-Dame de Paris
© Krzysztof Mizera

Tournesol

FRISES, PAVAGES ET CRISTAUX

DÉFINITION

Un ensemble **RÉGULIER** de points ou de motifs peut être considéré comme un ensemble de points ou de motifs que l'on peut obtenir à partir d'un petit nombre de points ou de motifs par translation :

- le long d'une direction pour remplir une *bande* du plan,
- le long de deux directions non parallèles pour remplir le plan,
- le long de trois directions non coplanaires pour remplir l'espace.

Plaza aux ruines, Chan Chan, Pérou © Martin St-Amant

Papier peint © Owen Jones

RÉSULTATS MATHÉMATIQUES

Par définition, un ensemble régulier de points ou de motifs situé dans une bande du plan admet toujours les translations comme symétries.

Dans le cas du plan, il peut de plus admettre des rotations, des réflexions ou des symétries glissées.

Dans le cas de l'espace, nous le verrons par la suite, il existe deux autres types de symétries possibles.

On démontre qu'il existe seulement :

7 types possibles de frises (bandes du plan),

17 types possibles de pavages (plan tout entier).

Enfin, pour l'espace tout entier, ce qui est le cas des cristaux, on démontre - et les cristallographes ont pu le vérifier par l'observation et l'expérience - qu'il existe :

230 types différents de cristaux.

EXEMPLE

Cet ensemble d'étoiles est obtenu en translatant l'étoile, considérée comme motif de base, suivant deux directions non parallèles et dans ce cas précis perpendiculaires.

Les frises, les papiers peints et les cristaux sont des exemples d'ensembles réguliers de points, de motifs ou, dans le cas des cristaux, d'atomes.

FRISES

Ce sont des ensembles réguliers de points ou de motifs du plan qui admettent des symétries par translation dans une seule direction, on les nomme donc frises infinies !

Badia Vecchia, Taormina, Italie
© Giovanni Dall'Orto

PAVAGES PÉRIODIQUES

Ce sont des ensembles réguliers de points ou de motifs du plan qui admettent des symétries par translation dans au moins deux directions différentes.

Houtrust, La Haye, Pays-Bas © Pieter Musterd

STRUCTURES CRISTALLINES

Ce sont des ensembles réguliers de points ou de motifs de l'espace qui admettent des symétries par translation dans au moins trois directions non coplanaires.

Quartz orange sur barytine © Géry Parent

Les sept types de frises

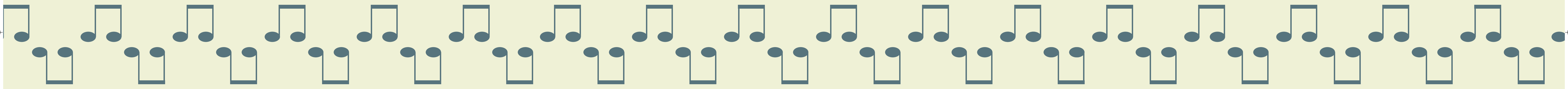
NOTES FRISÉES

Le groupe des isométries des frises contient des translations dans une seule direction.

En utilisant les motifs à disposition, vérifie les affirmations suivantes :

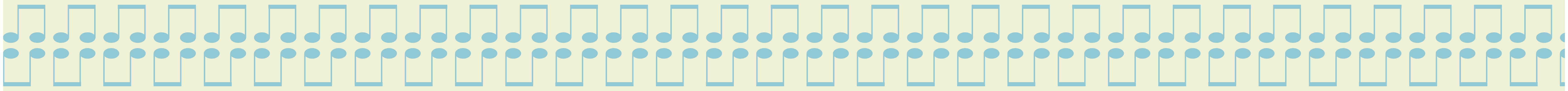
1. Le groupe des isométries de cette frise contient uniquement des translations

2. Le groupe des isométries de cette frise contient des translations et des symétries glissées

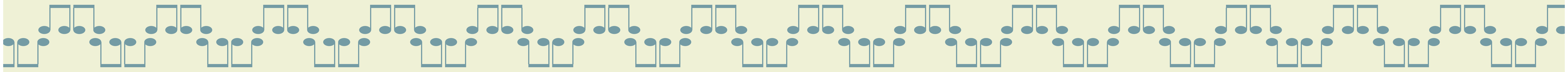


3. Le groupe des isométries de cette frise contient des translations et des réflexions d'axes verticaux

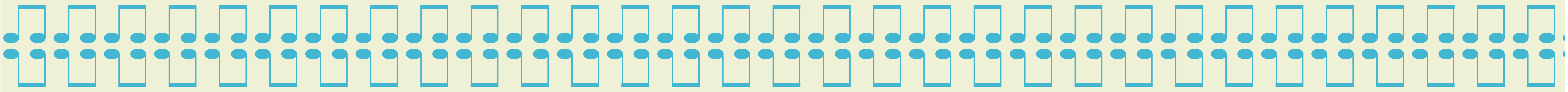
4. Le groupe des isométries de cette frise contient des translations et des rotations d'angle 180°



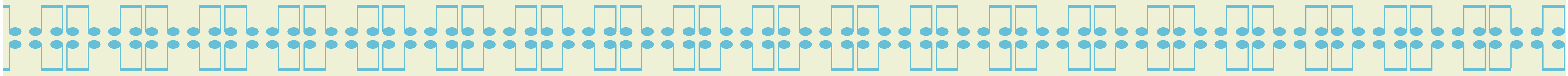
5. Le groupe des isométries de cette frise contient des translations, des symétries glissées et des réflexions



6. Le groupe des isométries de cette frise contient des translations et des réflexions d'axe horizontal



7. Le groupe des isométries de cette frise contient des translations, des réflexions d'axe vertical et des réflexions d'axe horizontal



À chaque schéma correspond un groupe de symétrie bien déterminé.

Pavages périodiques

PRÉSENTATION

Le groupe des symétries d'un pavage périodique contient des translations le long d'au moins deux directions distinctes. Mais en réalité, dans un pavage, il existe une infinité de directions non parallèles le long desquelles il est possible de translater la figure de base.

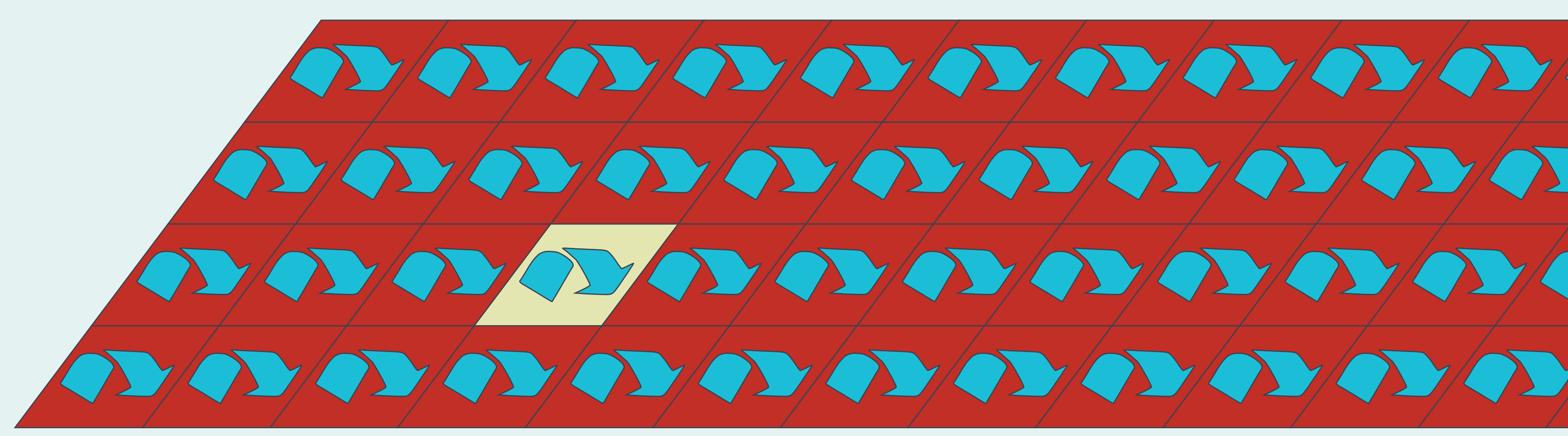
Les pavages peuvent également se penser comme des mosaïques, des carrelages, qui couvrent le plan.

Le parallélogramme mis en évidence dans chaque dessin constitue la cellule élémentaire du pavage. Il est possible à partir de cette cellule de construire l'ensemble du pavage en appliquant des translations spécifiées par les côtés de la cellule élémentaire (longueur et direction).

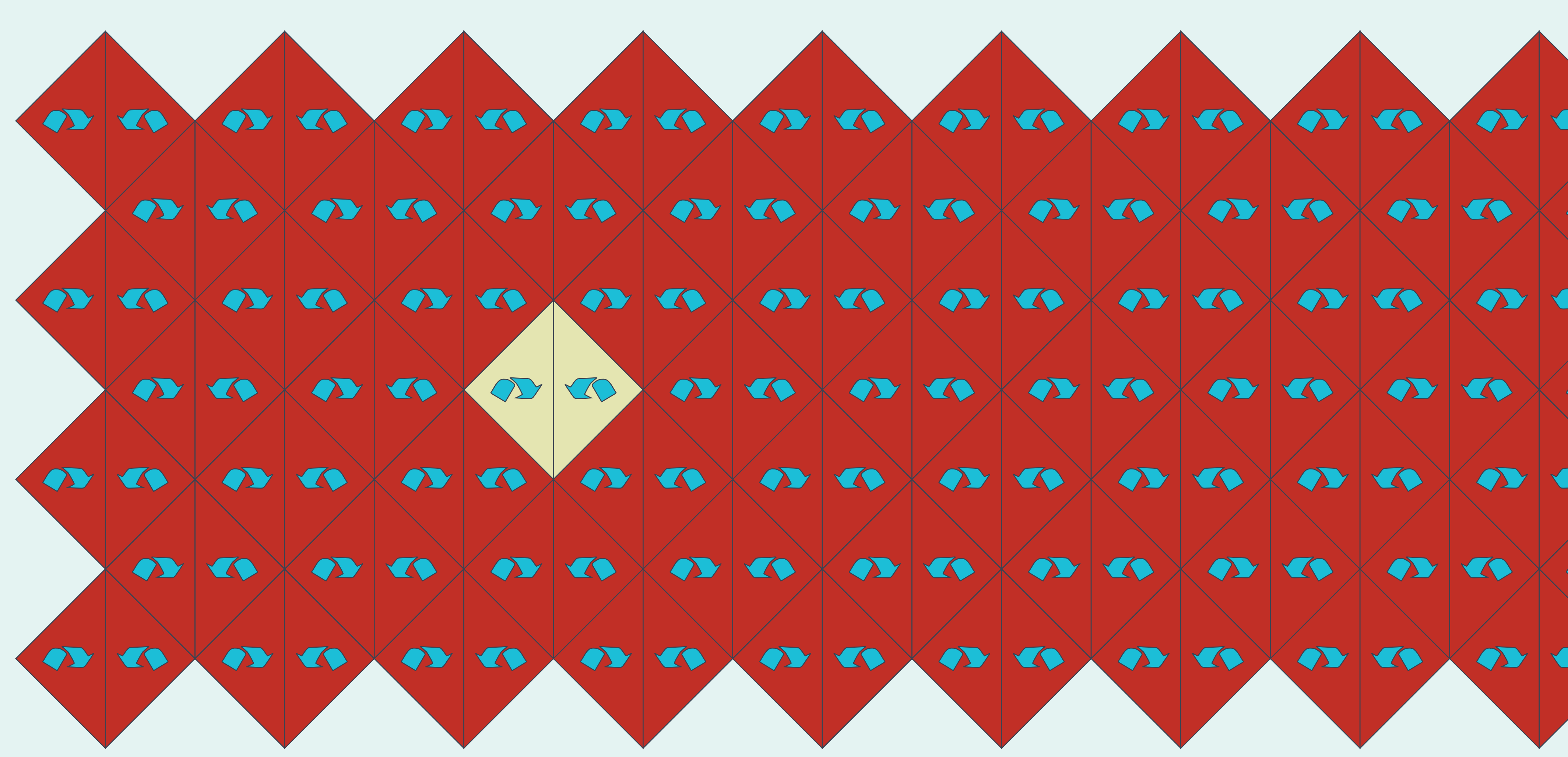
EXEMPLES

En utilisant les motifs à disposition, vérifie les affirmations suivantes :

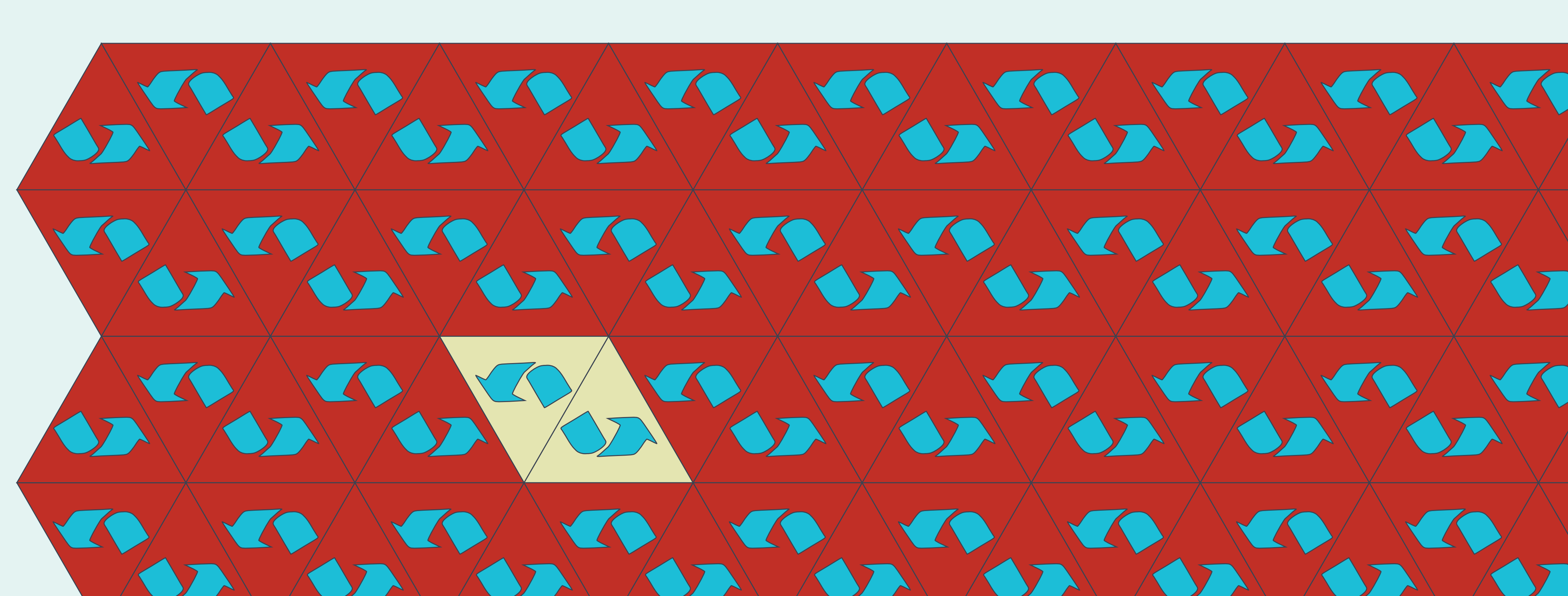
1. Le groupe des isométries de ce pavage contient uniquement des translations
2. Le groupe des isométries de ce pavage contient des translations, des réflexions et des symétries glissées
3. Le groupe des isométries de ce pavage contient des translations et des rotations d'angle 180°



1



2



3

Pavages périodiques

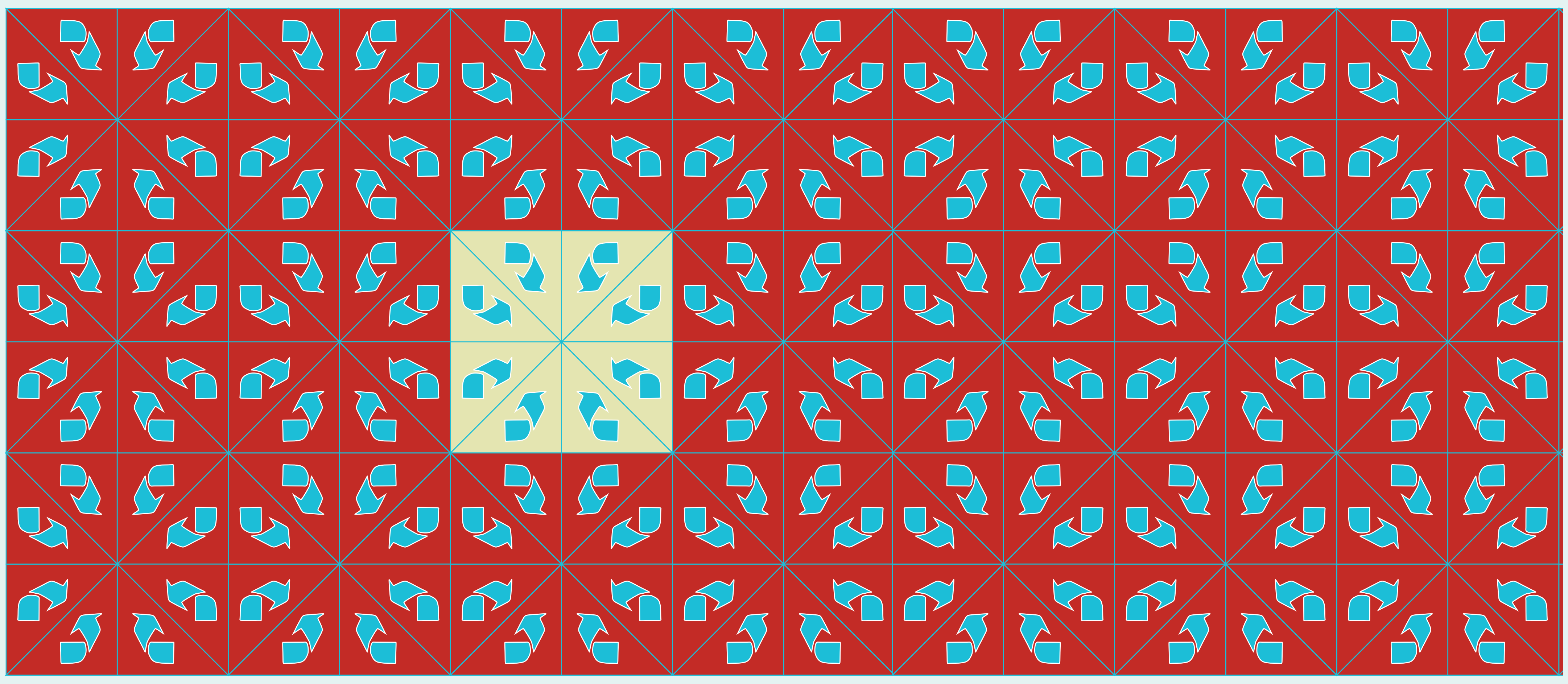
EXEMPLES

4 Le groupe des isométries de ce pavage contient des translations et des réflexions par rapport à toutes les droites tracées

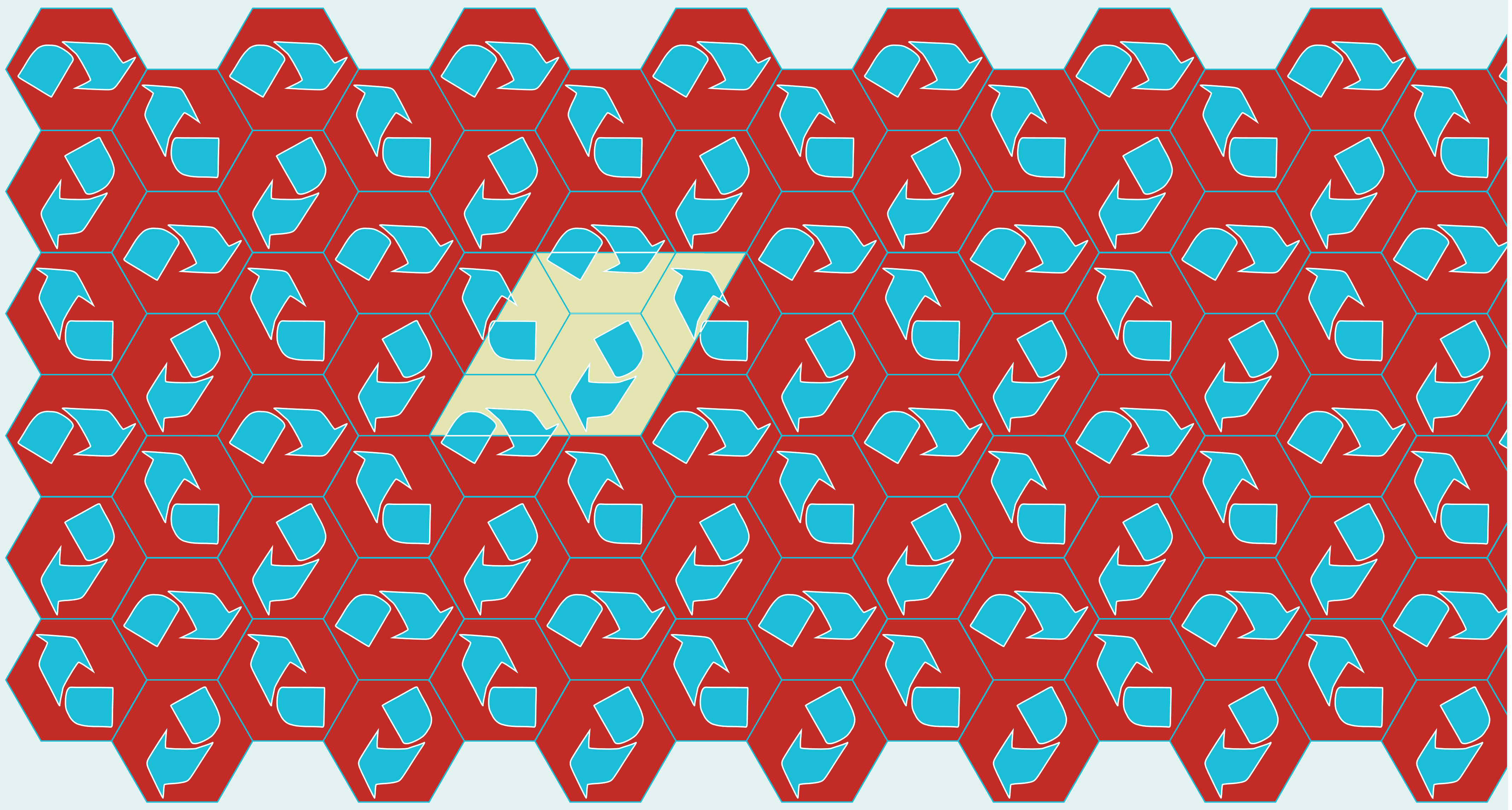
5 Le groupe des isométries de ce pavage contient des translations et des rotations d'angle 120°

6 Le groupe des isométries de ce pavage contient des translations, des réflexions et des rotations d'angle 120°

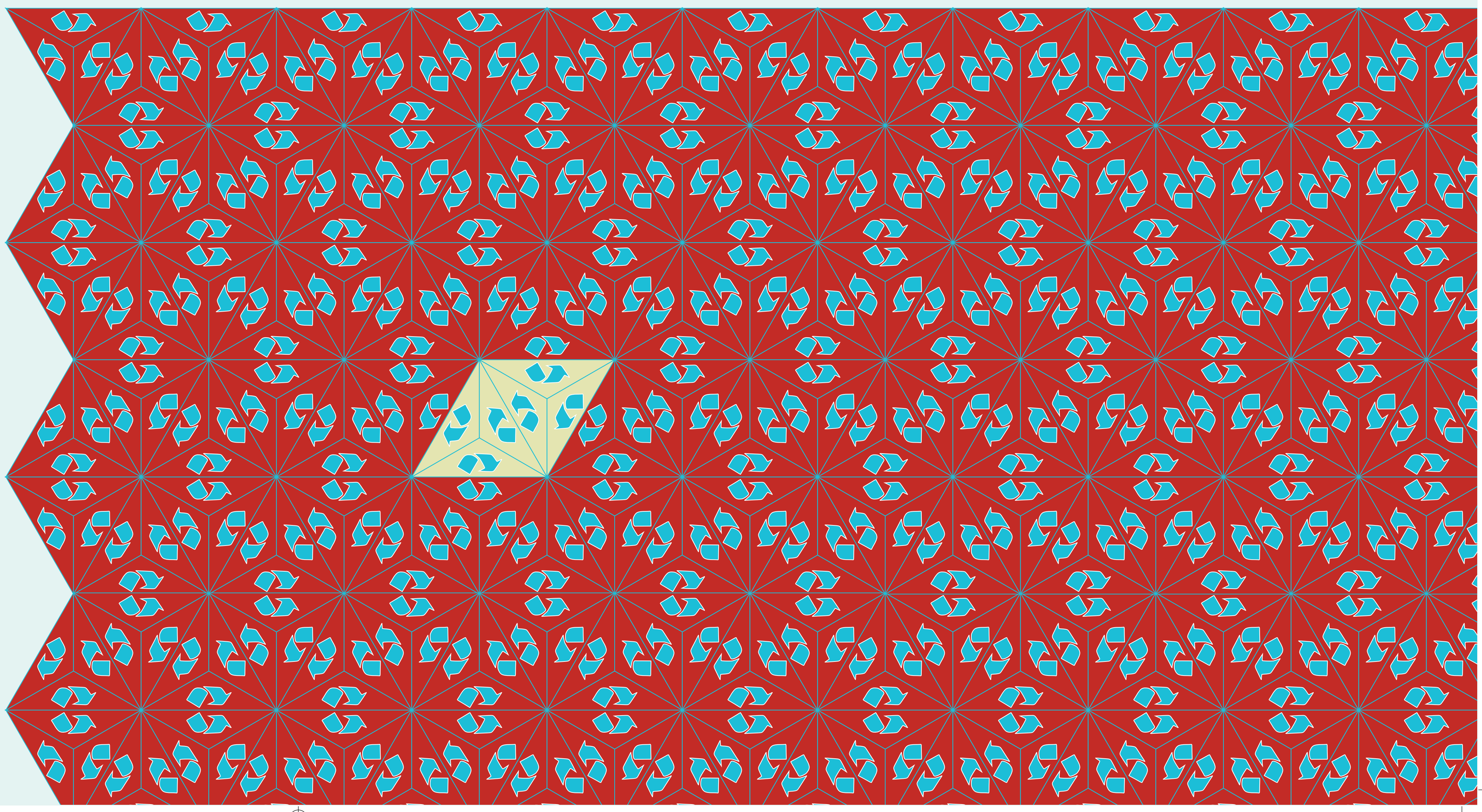
4



5



6



symétries dans l'espace

PREMIERS ÉLÉMENTS DE SYMÉTRIE

TÉTRAÈDRE :
4 axes de rotation passant par un sommet et le centre de la face opposée,
3 axes de rotation passant par les milieux de deux arêtes opposées (non contenues dans un même plan),
6 plans de réflexion.

CUBE :
1 centre de symétrie,
3 axes de rotation passant par les centres de deux faces opposées,
4 axes de rotation passant par deux sommets opposés,
6 axes de rotation passant les milieux de deux arêtes opposées,
9 plans de réflexion.

Utilise les objets proposés pour t'en convaincre !

SYMÉTRIES DU TÉTRAÈDRE

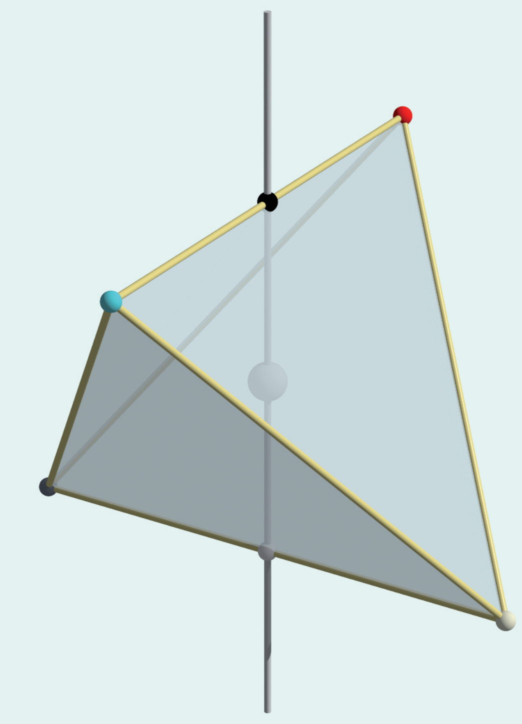
D'après les premiers éléments annoncés ci-dessus, nous pouvons d'ores et déjà affirmer qu'il y a déjà :
4 rotations d'angle 120°,
4 rotations d'angle 240°,
3 rotations d'angle 180°,
6 réflexions,
l'identité.

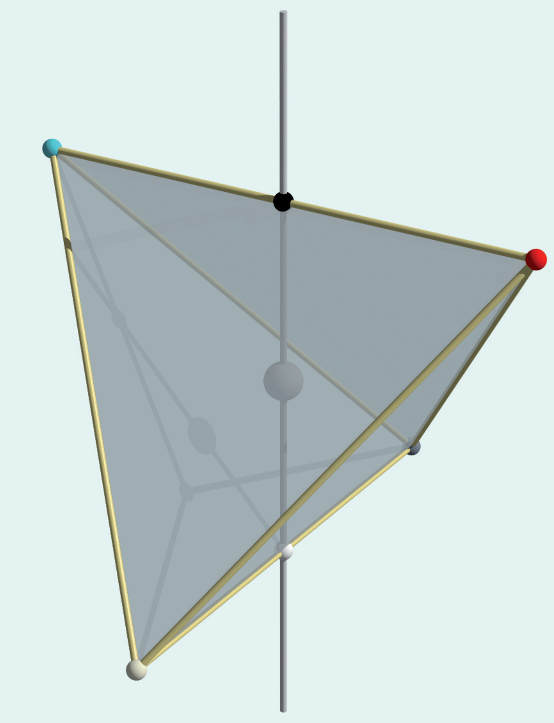
Le théorème de Lagrange affirme que ***le nombre d'éléments d'un sous-groupe doit diviser le nombre d'éléments du groupe***.

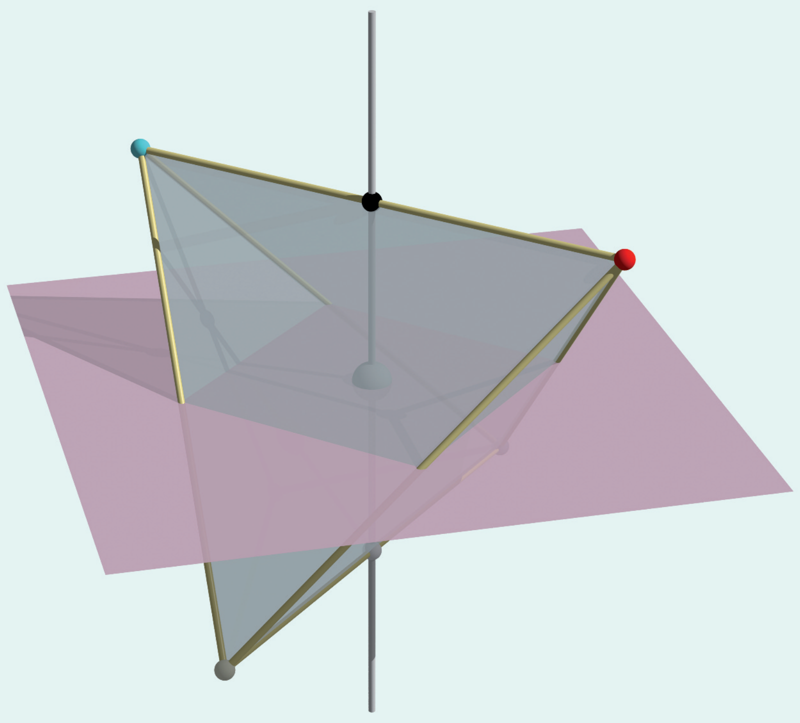
Chaque symétrie provoque une permutation des 4 sommets du tétraèdre. Or, les permutations d'un ensemble à quatre éléments constituent un groupe à 24 éléments, le nombre de symétries du tétraèdre doit donc nécessairement diviser 24. Comme nous avons déjà identifié 18 symétries et qu'aucun entier entre 18 et 23 ne divise 24, nous en déduisons que le groupe des symétries du tétraèdre contient 24 éléments.

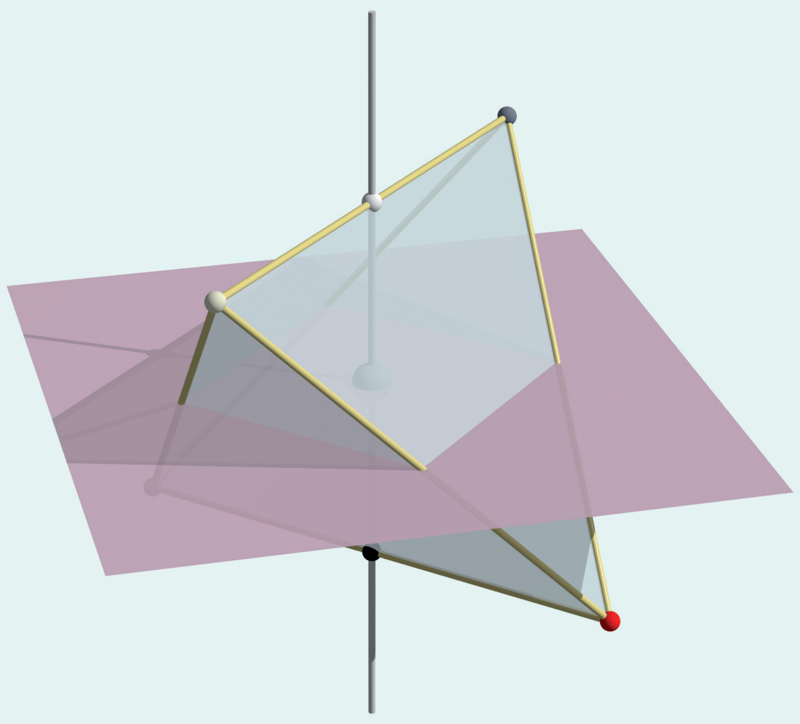
Les 6 symétries non encore identifiées sont d'un type particulier. Elles consistent à composer une rotation d'angle 90° autour d'un axe passant par les milieux de deux arrêtes opposées avec une réflexion par rapport au plan perpendiculaire à l'axe de rotation passant par le barycentre ou centre de gravité du tétraèdre (cf. illustrations ci-contre).

Nous appellerons ce type de symétrie une **ROTATION MIROIR**. Celles-ci sont au nombre de 6, puisque par chaque axe (au nombre de 3) nous pouvons choisir d'effectuer la rotation dans un sens ou dans l'autre.









Puits San Patrizio, Orvieto, Italie, 1527
Profondeur 62 m, 248 marches, 72 ouvertures. Un bel exemple de vissage !

CAS GÉNÉRAL

Les isométries de l'espace sont de 6 types :

translation,

réflexion par rapport à un plan,

rotation autour d'un axe,

symétrie glissée : composition d'une réflexion par rapport à un plan avec une translation dont la direction est parallèle au plan de réflexion,

vissage : composition d'une rotation autour d'un axe avec une translation dont la direction est parallèle à cet axe,

rotation miroir : composition d'une rotation autour d'un axe avec une réflexion par rapport à un plan perpendiculaire à cet axe.

cristaux et structures atomiques cristallines

GENÈSE D'UN CRISTAL

Il semble que les forces qui modèlent un cristal soient dotées d'une volonté propre d'ordre, de symétrie. Cette constatation est stupéfiante s'agissant d'une référence à de la matière inanimée. Il y a là de quoi exciter notre propre curiosité scientifique et faire naître en nous le désir d'une explication convaincante.

Un cristal est constitué de matière solide et homogène de forme polyédrique, c'est-à-dire un solide géométrique possédant des faces, des arrêtes et des sommets. Ces éléments dépendent de la composition chimique ou de la substance qui constitue le cristal mais aussi des conditions de croissance.

La formation d'un cristal dépend des conditions précises qui, par une série de réactions physico-chimiques, permettent aux atomes initialement en désordre de s'organiser et de se distribuer en mode régulier et homogène.

En fait, les cristaux peuvent être obtenus par évaporation d'un solvant, à partir d'un matériau solide soumis à des conditions particulières de température et de pression, puis à une réaction chimique ou par refroidissement à partir d'une fusion. C'est notamment ce qui se passe dans le cas du durcissement du magma.

Si le magma refroidit lentement parce qu'il circule dans des roches préexistantes, des cristaux facilement reconnaissables peuvent se développer, comme par exemple le granit.

Si le refroidissement est rapide parce que le magma est au contact de l'atmosphère ou de l'eau, soit des cristaux que l'on distinguent à l'œil nu se forment, comme par exemple le basalte, soit il n'y a pas cristallisation mais formation d'un solide amorphe comme par exemple l'obsidienne.

La lenteur du refroidissement et la libération progressive des éléments volatiles permettent la formation de cristaux à l'intérieur d'une cavité appelée DRUSE.

Les cristaux se forment par agrégation graduelle de très petits éléments cristallins appelés germes cristallins qui sont invisibles même à fort grossissement microscopique. Grâce à l'apposition successive de matière, ils peuvent atteindre des dimensions importantes de l'ordre de plusieurs mètres pour certains quartz.

Si un minéral peut se développer sans contraintes externes, il développe alors un cristal unique prenant une forme géométrique précise. Si au contraire, la croissance est gênée par le développement dans le même temps d'autres cristaux, ce qui est le cas le plus fréquent, il en résulte une masse microcristalline qu'il est impossible de reconnaître sans utiliser des instruments adéquats comme par exemple le microscope électronique.

Druse d'Améthyste © Jonathan Zander

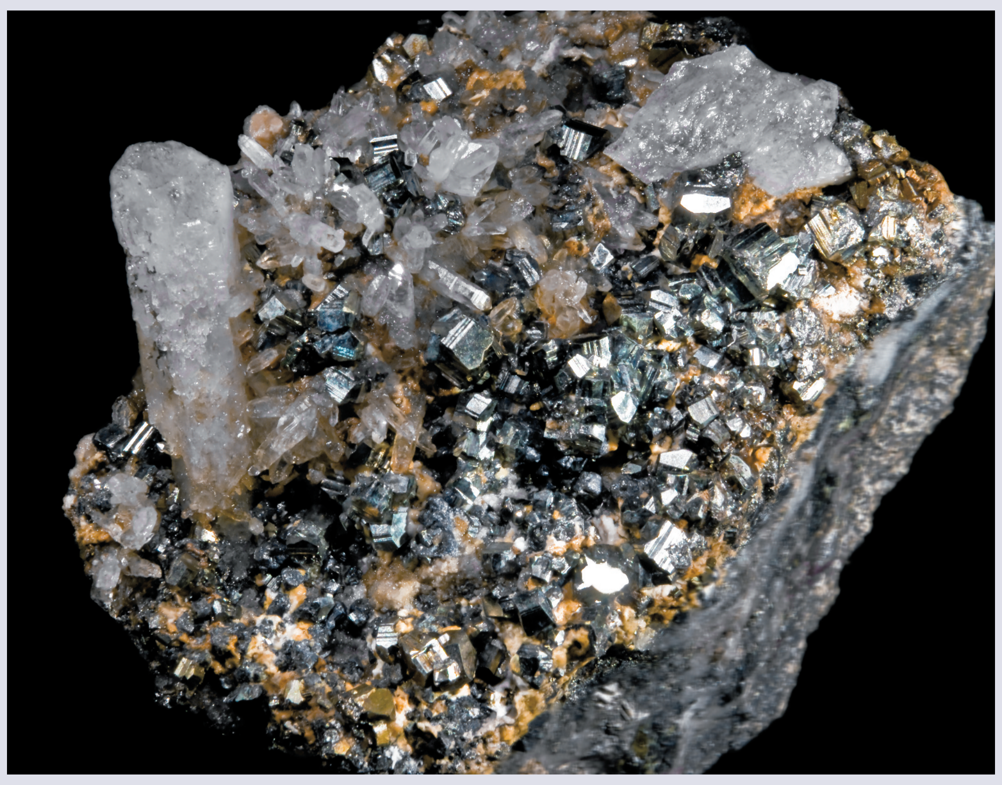
GEMMES

Dans certains cas, plusieurs cristaux peuvent se développer chacun de façon singulière. On obtient alors des associations qui ressemblent en apparence à un cristal unique, mais sont en réalité un ensemble de deux ou plusieurs cristaux assemblés de manière symétrique. On les nomme GEMMES, elles représentent l'union de cristaux, cristaux interpénétrés ou présentant une face plane en commun.

En outre, chaque changement des conditions ambiantes, telles les variations de température et de pression, peut interrompre la croissance ou modifier la structure du cristal.

Quoi qu'il en soit, même si une substance de nature cristalline ne montre pas toujours extérieurement une forme géométrique reconnaissable, elle possède néanmoins les caractéristiques du cristal puisqu'elle renferme une structure interne, au niveau atomique, régulière et ordonnée.

Calcite - Bruniquel, Tarn-et-Garonne, France
© Didier Descouens



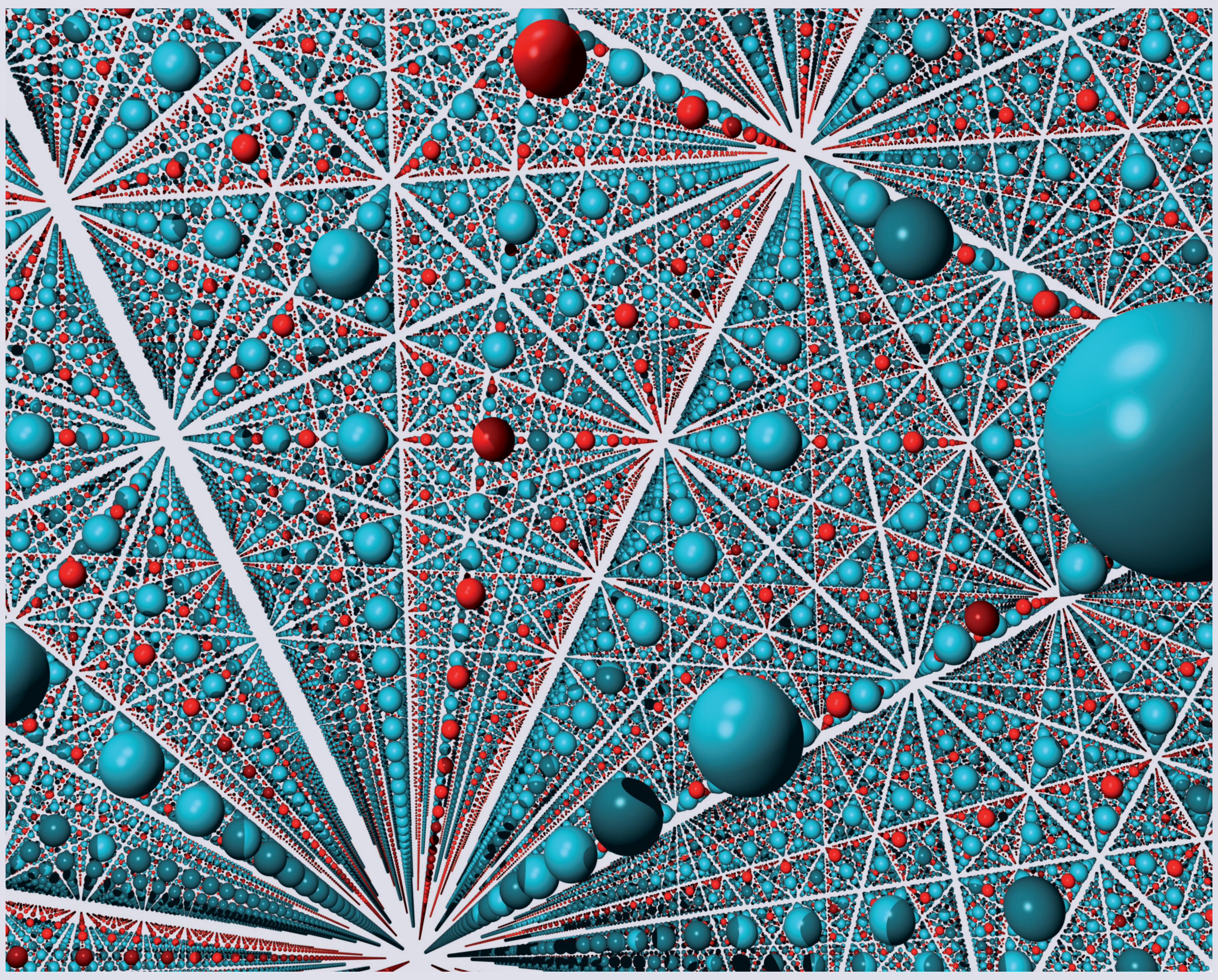
Pyrite et quartz, Slovaquie

Cristal de tourmaline polychrome, Brésil
© Géry Parent

RÉSEAUX CRISTALLINS

DÉFINITION

Une STRUCTURE CRISTALLINE est un ensemble régulier d'atomes que l'on peut obtenir en translatant périodiquement un même ensemble d'atomes selon trois directions non coplanaires.



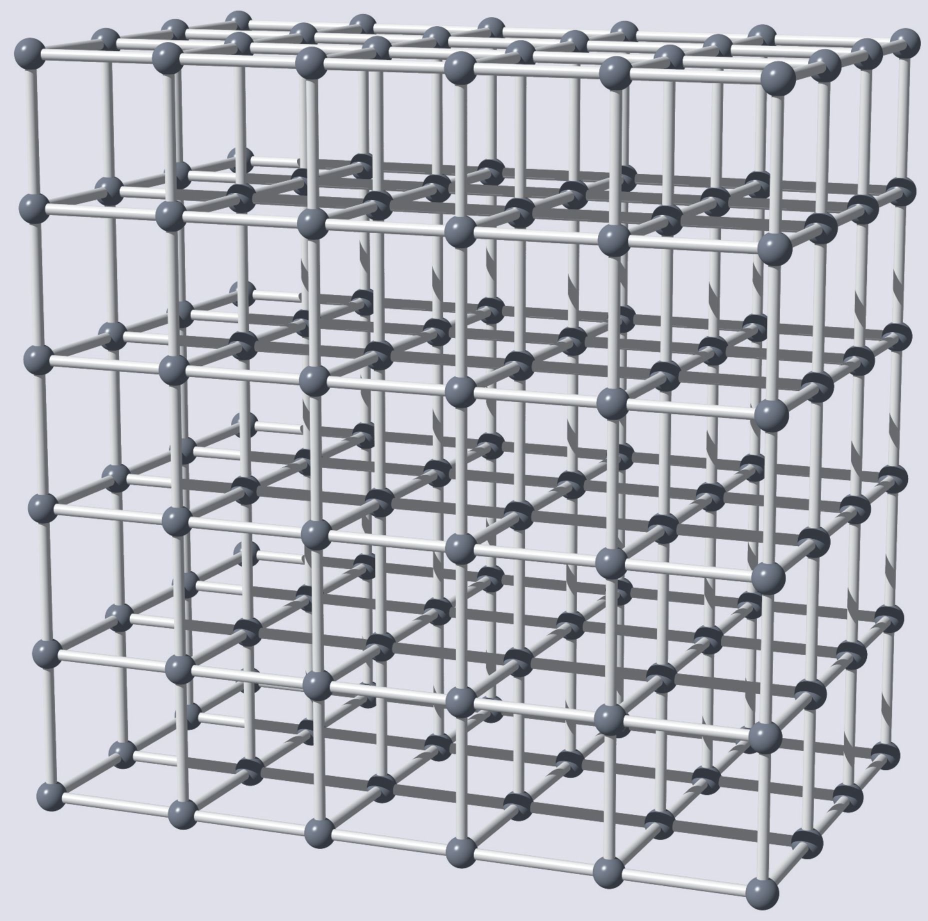
Structure cristalline du Chlorure de Sodium

RÉSEAU SPATIAL

Pour mieux comprendre le concept de structure cristalline, il est utile d'introduire le concept de réseau spatial.

Un RÉSEAU est un ensemble de points de l'espace obtenu à partir d'un point unique, point qui est translaté périodiquement suivant trois directions non coplanaires. Dans chacune des directions, l'espacement ente les points est constant. Cependant, ces espacements peuvent être différents suivant les directions. De plus, chaque point doit avoir le même environnement : l'environnement d'un point du réseau ne doit pas permettre de connaître sa position dans le réseau.

Un réseau est caractérisé par sa cellule élémentaire : un parallélépipède délimité par les trois translations génératrices du réseau.



Réseau cristallin associé

AUGUSTE BRAVAIS

Auguste Bravais, physicien français, a montré en 1848 qu'il existait 14 types différents de réseaux cristallins, chacun étant caractérisé par une cellule élémentaire particulière.

Pour rendre plus évidente la symétrie du réseau, au lieu d'associer les 14 cellules élémentaires associées à chacune d'elles, Bravais a préféré se servir de 7 cellules élémentaires, dites primitives et de 7 cellules non primitives.

Chaque cellule non primitive admet une symétrie correspondant à celle d'une des 7 cellules primitives.

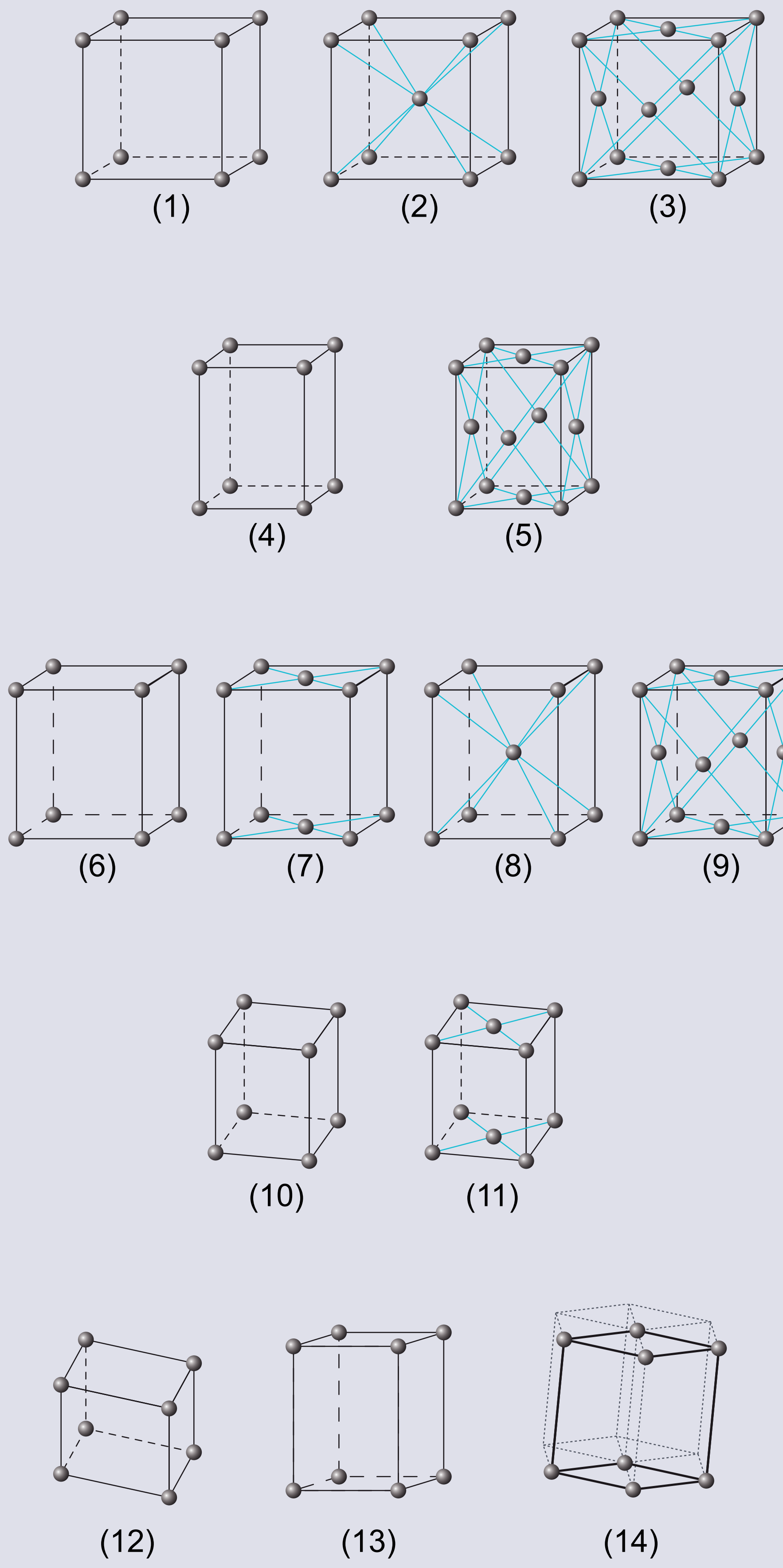
LES CELLULES ÉLÉMENTAIRES DES RÉSEAUX DE BRAVAIS

Les cellules primitives sont celles qui présentent 8 points à leurs sommets. Les cellules non primitives sont celles qui présentent de plus des points au centre des faces ou au centre de la cellule.

Les réseaux non primitifs peuvent être considérés comme étant engendrés soit par l'union de deux réseaux primitifs décalés d'une demi-diagonale d'une des faces ou bien de la cellule, soit par l'union de quatre réseaux primitifs dont trois sont translatés d'une demi-diagonale d'une des faces.

Les faces des cristaux sont parallèles au plan des réseaux, elles ne reproduisent pas la symétrie et sont divisées en 7 systèmes cristallins, un pour chacune des 7 cellules primitives.

C'est pourquoi ils prennent le nom de systèmes : triclinique, monoclinique, orthorhombique, tétragonal, hexagonal, trigonal et cubique.



LES 14 RÉSEAUX DE BRAVAIS

1. **Cubique** *P*
2. **Cubique** *I*
3. **Cubique** *F*
4. **Tétragonal** *P*
5. **Tétragonal** *I*
6. **Orthorhombique** *P*
7. **Orthorhombique** *C*
8. **Orthorhombique** *I*
9. **Orthorhombique** *F*
10. **Monoclinique** *P*
11. **Monoclinique** *C*
12. **Triclinique** *P*
13. **Trigonal** *P*
14. **Hexagonal** *P*

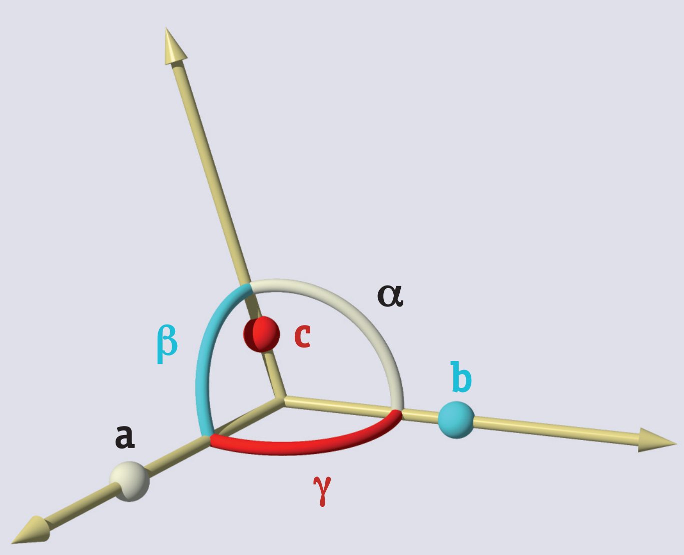
P : primitif
C : bases centrées
I : centré
F : faces centrées

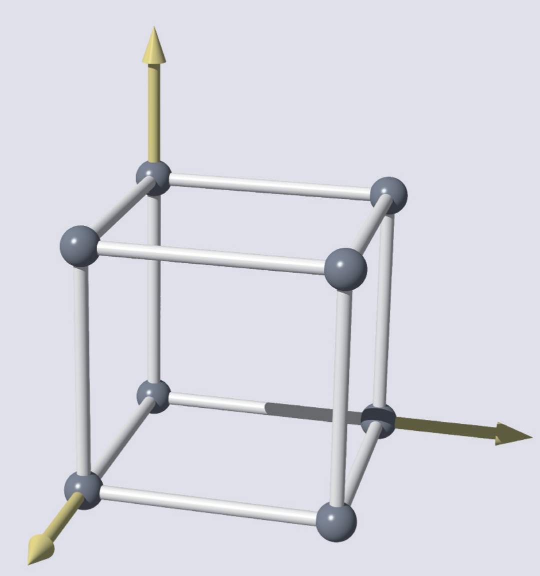
SYSTÈMES CRISTALLINS

PRÉSENTATION

Les rapports entre les dimensions **a**, **b**, **c**, de la cellule primitive et les angles α, β et γ formés par les arêtes non co-planaires sont caractéristiques de chaque structure cristalline et sont nommées CONSTANTES CRISTALLOGRAPHIQUES.

SYSTÈME	CONSTANTES CRISTALLOGRAPHIQUES	EXEMPLES DE CRISTAUX
Triclinique	α, β et γ sont distincts et différents de 90° a, b, et c sont distincts	Albite, Cianite...
Monoclinique	α et γ valent 90° et β est différent de 90° a, b, et c sont distincts	Orthose, Gypse, Diopside...
Orthorhombique	α, β et γ valent 90° a, b, et c sont distincts	Topaze, Souffre, Aragonite...
Tétragonal	α, β et γ valent 90° a et b sont égaux, c est différent de a et b	Zircon, Wulfenite...
Trigonal	α et β valent 90°, γ vaut 120° a et b sont égaux, c est différent de a et b	Calcite, Quartz...
Hexagonal	α et β valent 90°, γ vaut 120° a et b sont égaux, c est différent de a et b	Graphite, Zincite...
Cubique	α, β et γ valent 90° a, b, et c sont égaux	Pirite, Magnétite, Sel...





Cubique

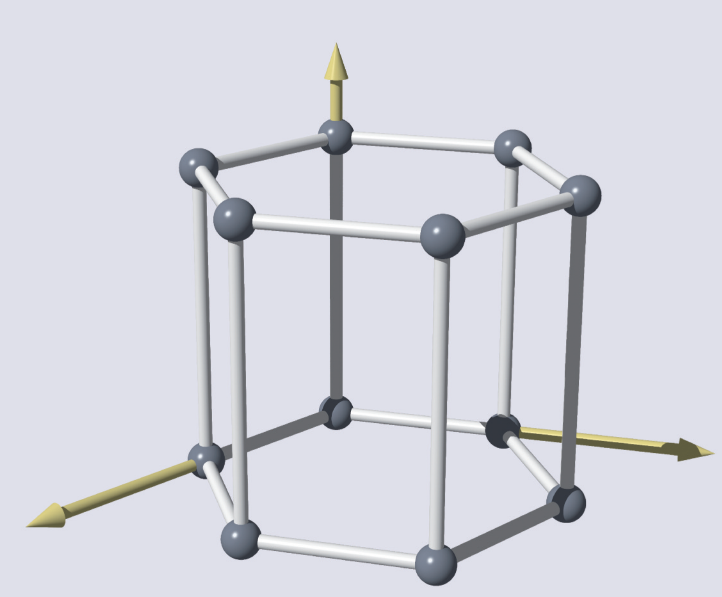
Nous avons vu comment obtenir une structure cristalline à partir d'un réseau, en substituant à chaque point du réseau un ensemble particulier d'atomes qui la caractérise.

Un cristal est une partie finie d'une structure cristalline. Les formes des cristaux sont classées sur la base de leurs symétries.

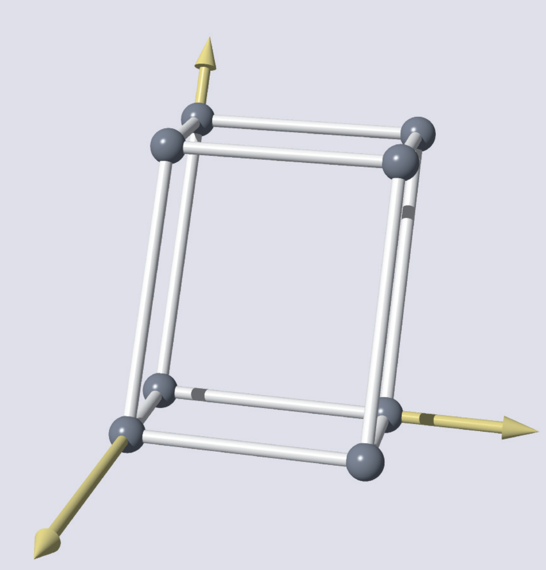
Les mathématiques, grâce à la théorie des groupes, ont établi qu'il existe 32 types de symétries compatibles avec une structure cristalline finie.

Si nous considérons maintenant les structures cristallines infinies, nous devons ajouter aux symétries précédentes les translations, celles-ci ne faisant pas partie des symétries d'une structure finie (comme nous l'avons déjà remarqué pour le triangle et le carré).

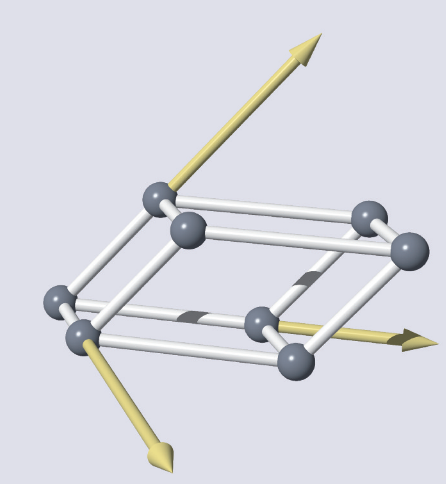
Les mathématiciens et les cristallographes ont prouvé et vérifié expérimentalement qu'il existe 230 types ou groupes de symétries différents compatibles avec une structure cristalline infinie.



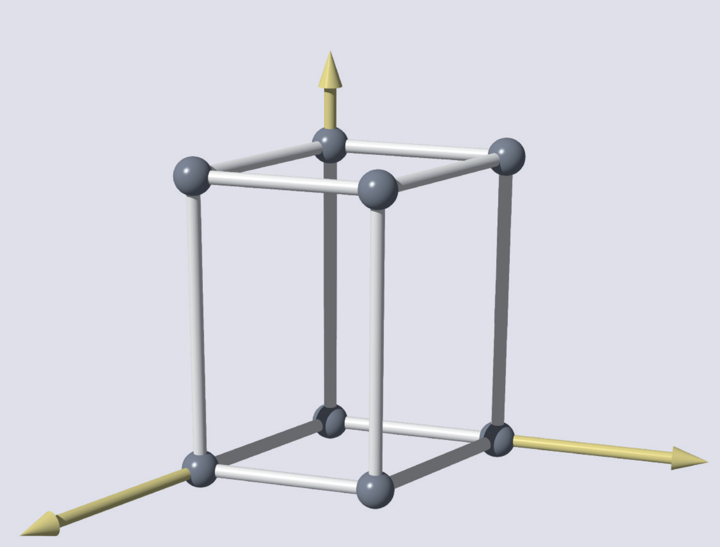
Hexagonal



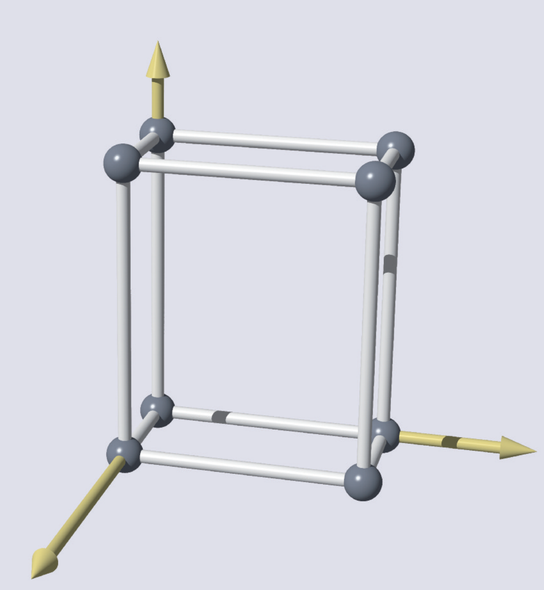
Monoclinique



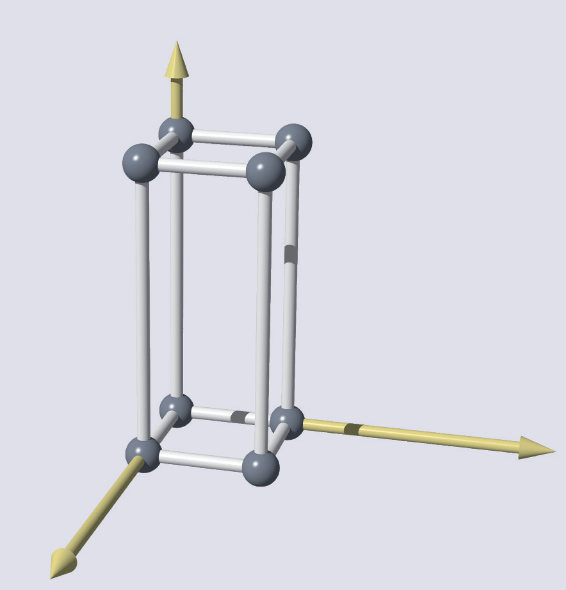
Triclinique



Trigonal



Orthorhombique



Tétragonal

Topaze ambrée - Système orthorhombique © Géry Parent

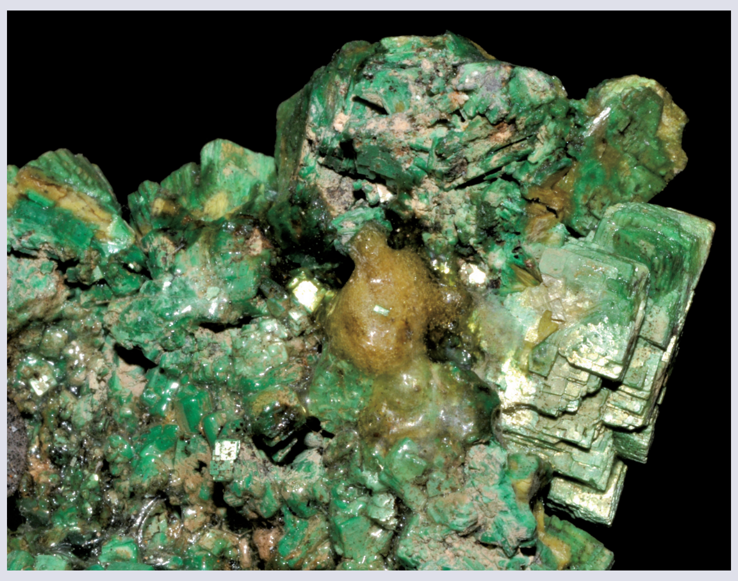
Dolomite - Système trigonal
© Didier Descouens

Diamant - Système cubique
© Géry Parent

Béryl - Système hexagonal

Kunzite - Système monoclinique
© Géry Parent

Axinite - Système triclinique
© Géry Parent



Torbernite - Système tétragonal
© Géry Parent