Le regard géométrique et la beauté en mathématiques

Lo sguardo geometrico e la bellezza in matematica

Aziz El Kacimi
Université de Valenciennes
http://perso.numericable.fr/azizelkacimi/

Conférence à l'Université de Rome 1 au colloque
Educare lo sguardo: intrecci tra arte e matematica
Du 11 au 12 mai 2018

...que de charme possède le regard qui saisit chaque signe.

S. Kierkegaard

...che fascino ha lo sguardo

che coglie ogni segno.

S. Kierkegaard

Le mathématicien n'étudie pas les mathématiques pures parce qu'elles sont utiles ;
il les étudie parce qu'il y prend plaisir, et il y prend plaisir parce qu'elles sont belles.

H. Poincaré

Il matematico non studia la
matematica pura perché è utile ;
la studia perché si diletta,
e lui si diletta perché è bella.

H. Poincaré

Nul mathématicien ne peut être un mathématicien accompli s'il n'est aussi poète.

Nessun matematico può realizzarsi in quanto matematico se non è anche un poeta.

K. Weierstrass

Mieux encore :

***Aucun peuple ne peut vivre
en dehors de la beauté !***

***Nessun popolo può sopravvivere
se privato della bellezza !***

A. Camus

1. La beauté en mathématiques

Qu'y a-t-il de beau en mathématiques ?

- *Les objets ?*
- *les formules ?*
- *les théorèmes ?*
- *ou les démonstrations ?*

Sans doute un peu de tout ! Cela dépend :

- *de la nature des objets,*
- *de la manière dont on les relie,*
- *celle dont on démontre un théorème !*

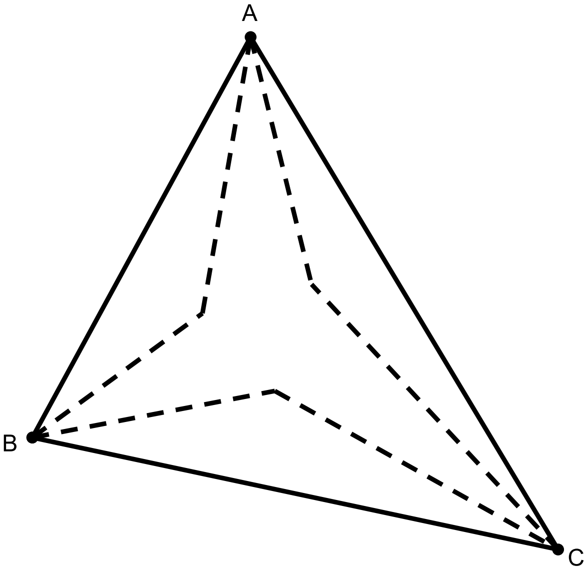
Les exemples ne manquent pas ! En voici quelques-uns.

- *Par deux points passe toujours une droite. C'est une vertu pour trois points d'être alignés ! de former un triangle équilatéral !*
- *Par trois points non alignés passe toujours un cercle et un seul. C'est une vertu pour quatre points d'être cocycliques ! de former un carré !*
- *Beaucoup de théorèmes ont pour conclusion :*

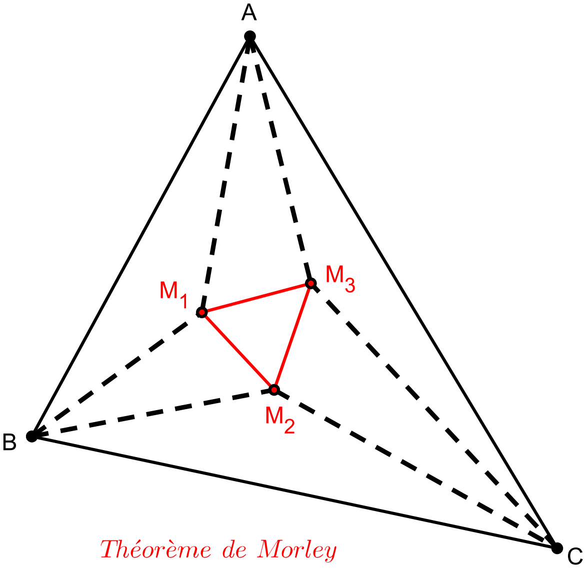
– *Alors les trois points... sont alignés.*
– *Alors le triangle... est équilatéral.*
– *Alors les quatre points... sont cocycliques.*
– *Alors le quadrilatère... est un carré.*

De l'irrégularité on peut toujours sortir une certaine régularité !

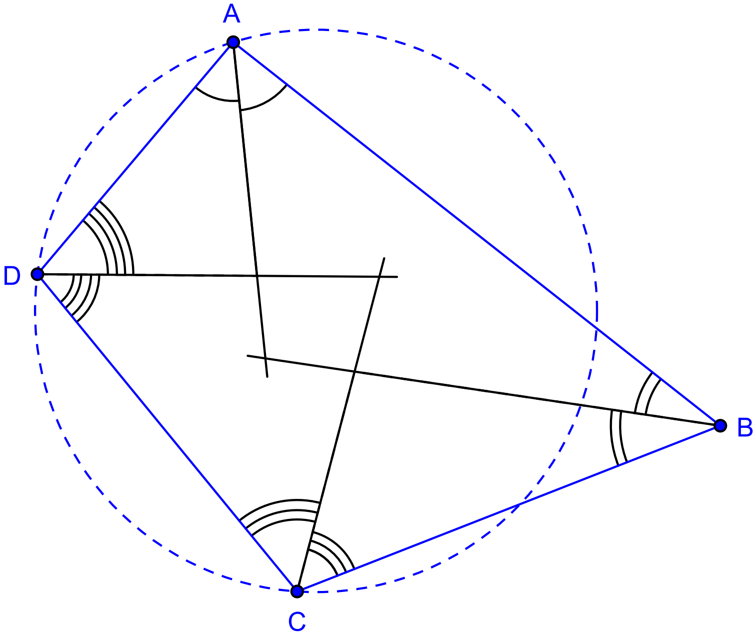
Un triangle quelconque et les trisectrices de ses angles.

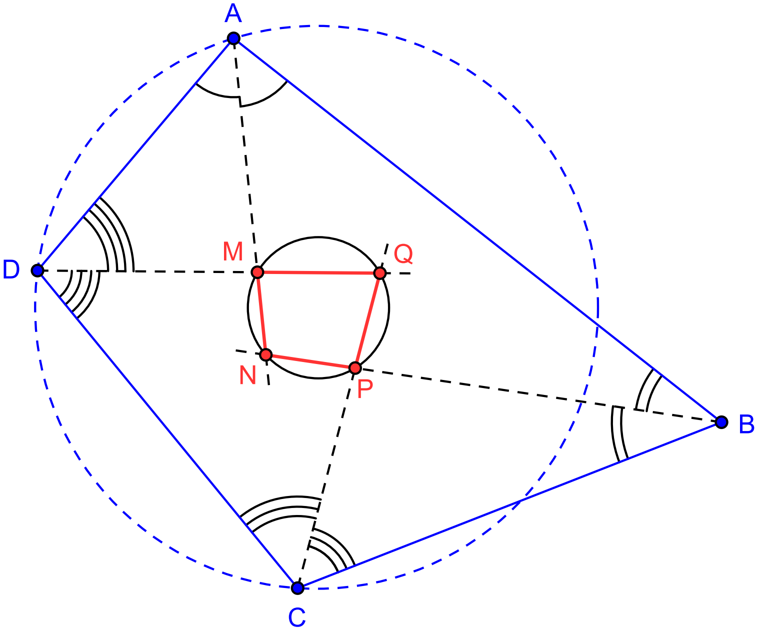


Le triangle $M_1M_2M_3$ est équilatéral !



Théorème de Morley


A
D
B
C


A
B
C
D
M
Q
N
P

Le plus court poème de la poésie française :

Le chantre

Et l'unique cordeau des trompettes marines.

Il cantore

E l'unica linea di trombe di mare.

G. Apollinaire

Le plus court poème mathématique :

Tout corps fini est commutatif
Et son ordre est un entier primitif.

J. Wedderburn *est l'auteur du premier vers*

“Démonstration du deuxième vers” !

Soit K *un corps fini.*

- *Il n'y a qu'un seul homomorphisme d'anneaux* $\phi : \mathbb{Z} \longrightarrow K$. *Il est défini par* $\phi(1) = 1_K$ *(l'élément unité de* K*).*
- *Comme* K *est fini,* ϕ *n'est pas injectif. Son noyau est un idéal de* $\mathbb{Z}$*, donc du type* $p\mathbb{Z}$ *avec* $p > 0$. *L'entier* p *est forcément premier ; c'est la caractéristique de* K.
- *L'homomorphisme* ϕ *induit un homomorphisme de corps injectif* $\overline{\phi} : \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \longrightarrow K$. *Son image est un sous-corps* K_0 *de* K *isomorphe à* $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ *(donc d'ordre* p*).*
- *Le corps* K *a une structure d'espace vectoriel sur* K_0. *Comme il est fini, il est de dimension finie. Par suite il est isomorphe à* K_0^r *pour un certain entier* $r \geq 1$.
- Conclusion : *Le corps* K *a* p^r *éléments.*

En analyse, voici un beau :

Théorème

On se donne un borélien A de $\mathbb{R}$ de mesure de Lebesgue strictement positive i.e. $0 < \lambda(A) \leq +\infty$. Alors l'ensemble $E = A - A = \{a - b : a, b \in A\}$ est un voisinage de 0.

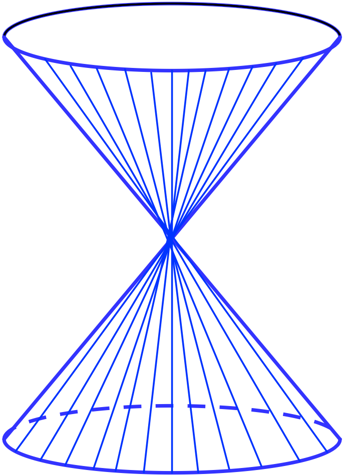
Par exemple, en vidant l'intervalle $[0, 1]$ de tous ses rationnels, on obtient un borélien A de $\mathbb{R}$ de mesure (de Lebesgue) 1. Il est d'intérieur vide et, curieusement, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]-\varepsilon, \varepsilon[\subset E = A - A$? C'est vraiment étonnant !

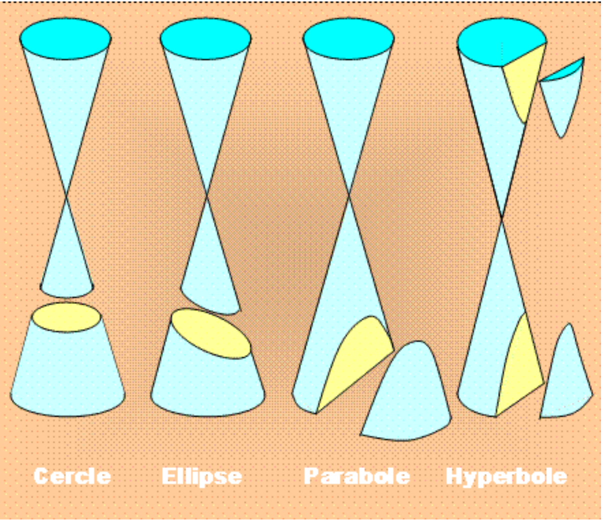
Démonstration rapide

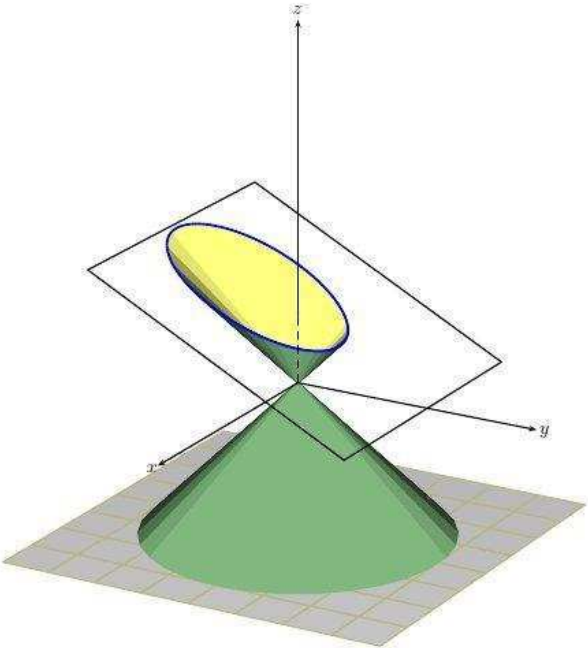
Soit A *un borélien de* $\mathbb{R}$ *tel que* $\lambda(A) > 0$. *On peut supposer* $\lambda(A) < +\infty$, *le cas* $\lambda(A) = +\infty$ *s'y ramène.*

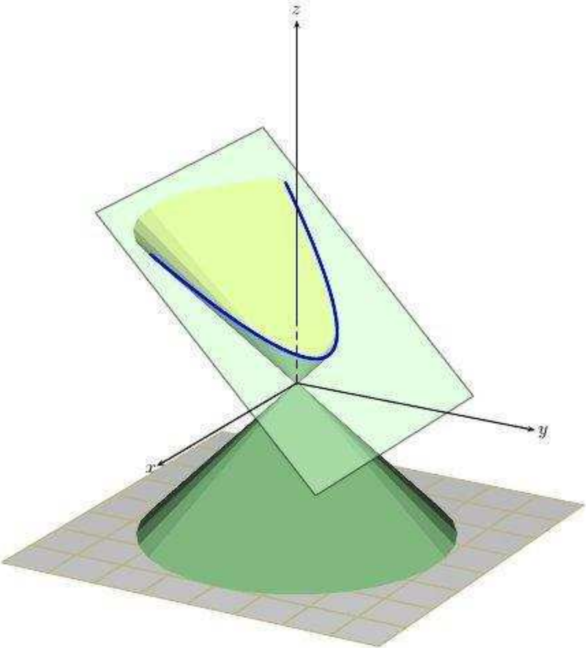
- *Notons* 1_A *la fonction indicatrice de* A. *On pose :*
$$h(t) = \int_{\mathbb{R}} 1_A(x) 1_A(x+t) d\lambda(x).$$
- *Cette quantité existe et est une fonction continue de* $t \in \mathbb{R}$. *(C'est l'étape la moins évidente de la démonstration.)*
- *On a* $h(0) = \int_{\mathbb{R}} 1_A(x) 1_A(x) d\lambda(x) = \lambda(A) > 0$. *Comme* h *est continue, il existe* $\varepsilon > 0$ *tel que* $h(t) > 0$ *pour tout* $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$.
- *Par suite, pour tout* $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$, *il existe* x_t *tel que* $1_A(x_t) 1_A(x_t + t) > 0$, *c'est-à-dire* $x_t \in A$ *et* $x_t + t \in A$, *ce qui signifie* $x_t + t - x_t = t \in E = A - A$.
- ***Conclusion*** *:* $]-\varepsilon, \varepsilon[\subset E = A - A$.

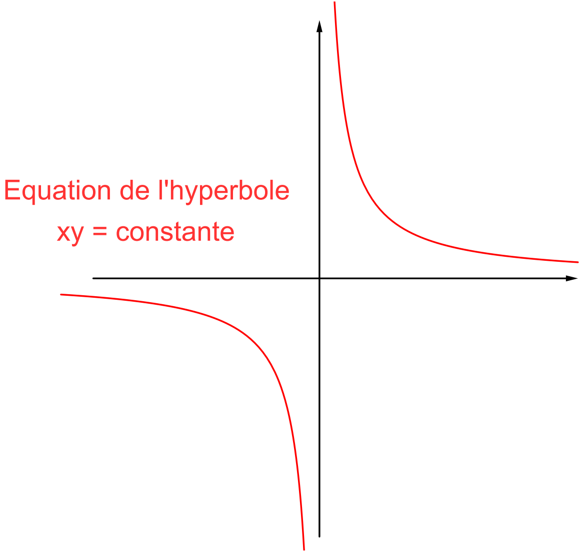
Les coniques : des courbes belles et utiles !

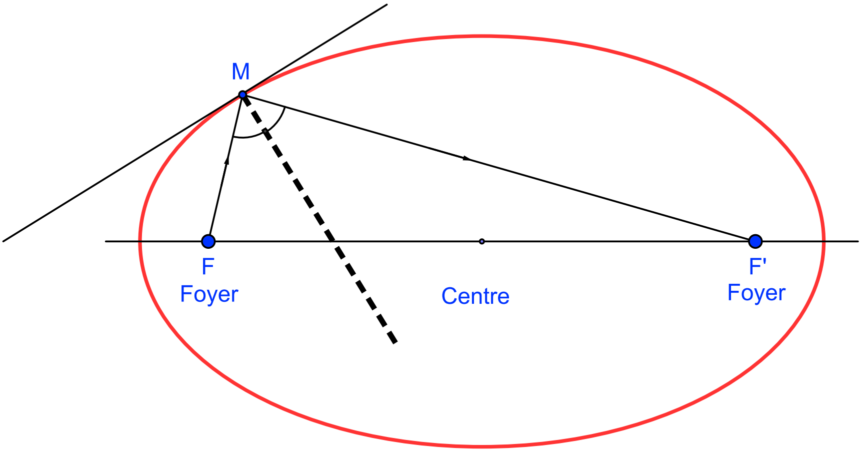


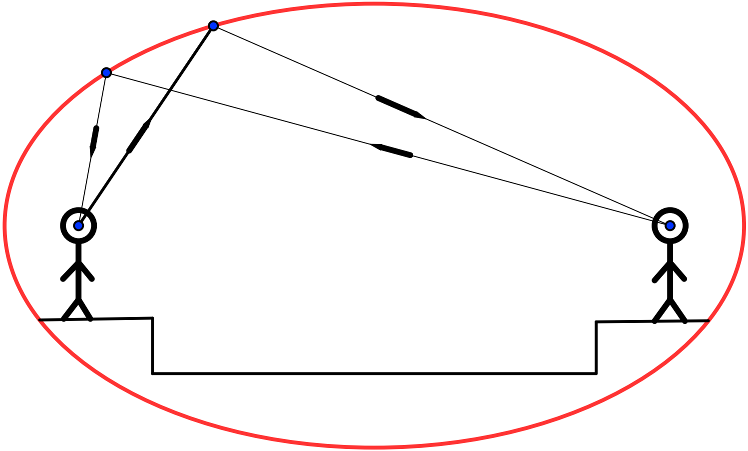

Cercle
Ellipse
Parabole
Hyperbole

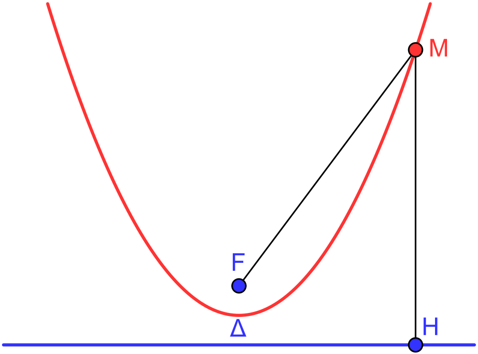

z
y
x


z
y
x


Equation de l'hyperbole
xy = constante

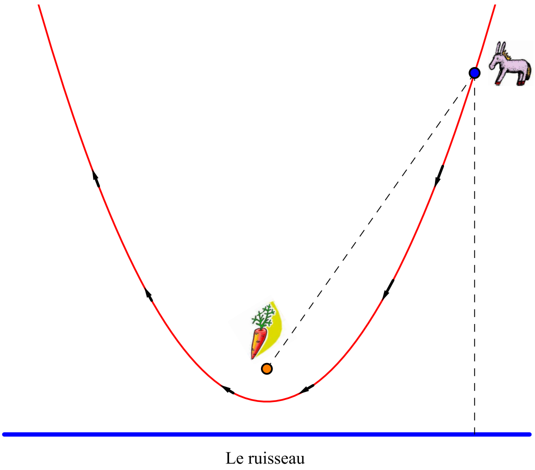

M
F
Foyer
Centre
F'
Foyer

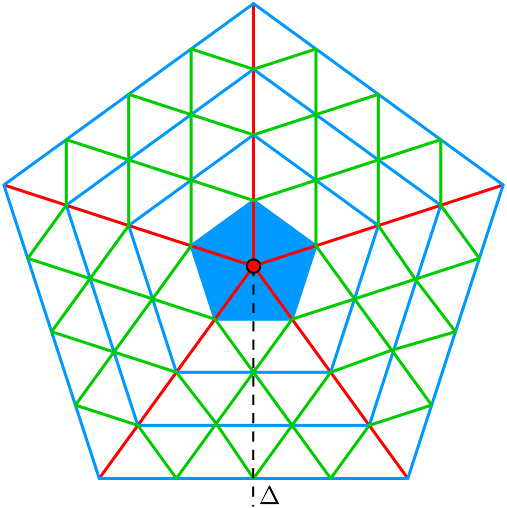




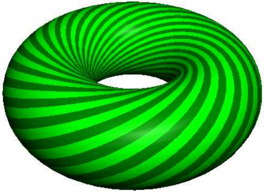
Ensemble des points à égale distance
d'un point F appelé foyer et une
droite Δ appelée directrice

L'âne de Buridan !





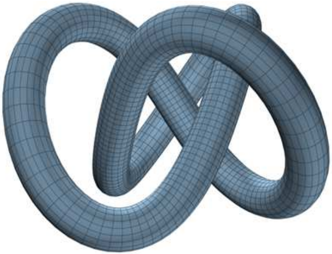
Pavage non périodique mais ayant un groupe
de symétrie isomorphe au groupe diédral D_5 engendré
par la rotation d'angle 72° et la réflexion d'axe Δ



Trois surfaces topologiquement équivalentes.

Un type singulier et inhabituel de la beauté géométrique !

Se larguant dans l'espace,
Tel un serpent, il s'enlace.
Ainsi, il peut être noué
Et drôlement floué.



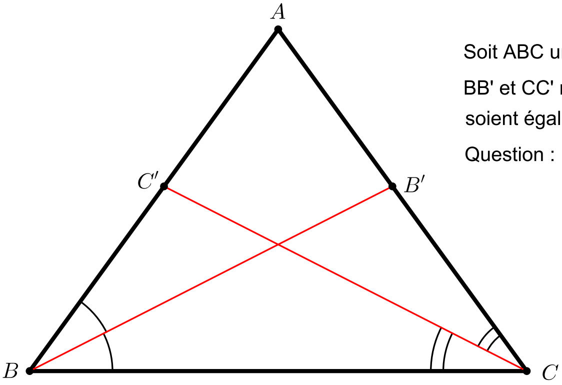
Défiant toute norme,
Il respire et déforme
Sa magnifique carapace
En toute petite tasse.

Pour la version complète du poème voir :

http ://images.math.cnrs.fr/Les-surfaces-2577.html

2. Le regard géométrique

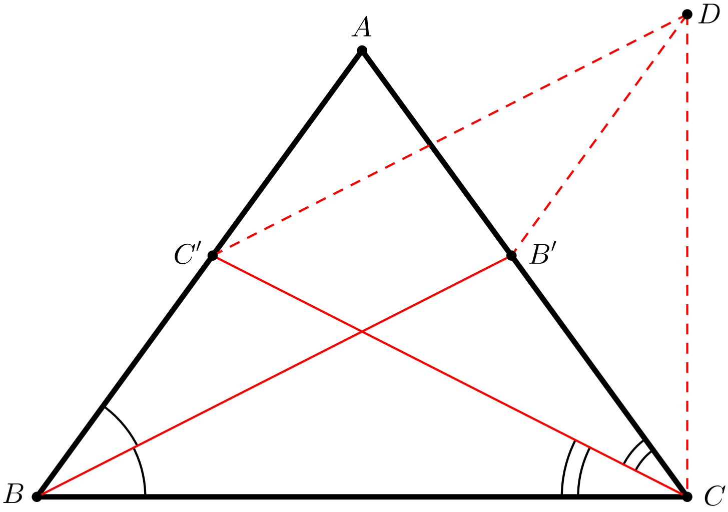
Le regard est nécessaire !



Soit ABC un triangle tel que les bissectrices BB' et CC' respectivement des angles B et C soient égales.

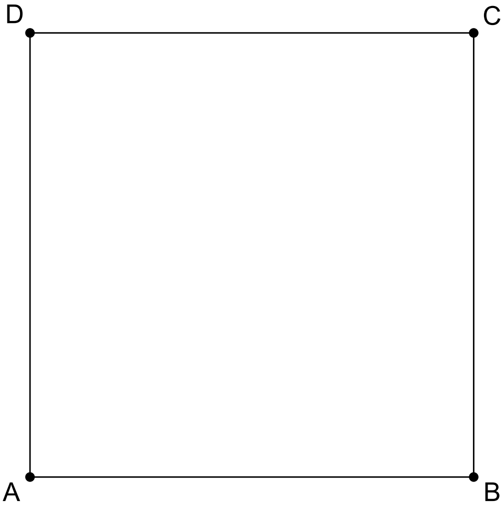
Question : ABC est-il isocèle ?

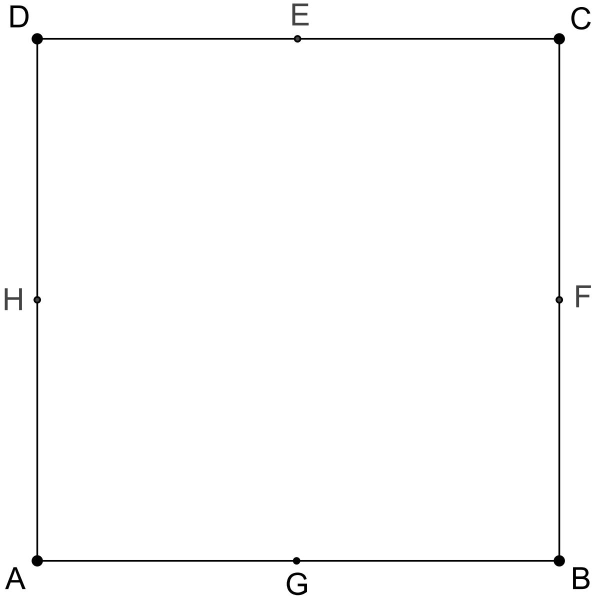
Le rajout du point D décoince et amène la démonstration !



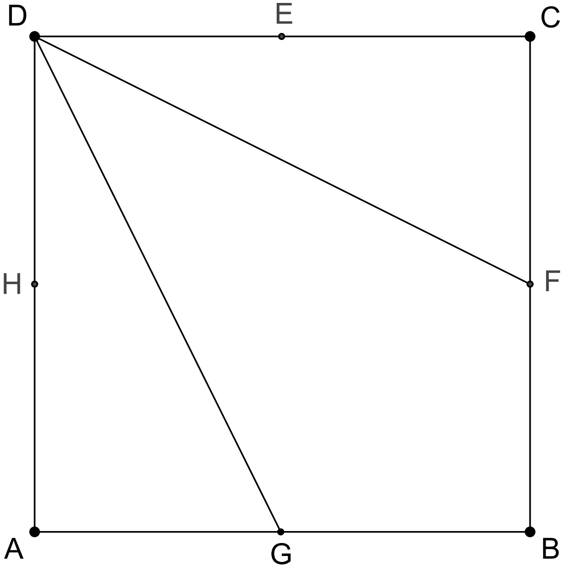
Le regard qui trompe !

On part d'un carré ABCD

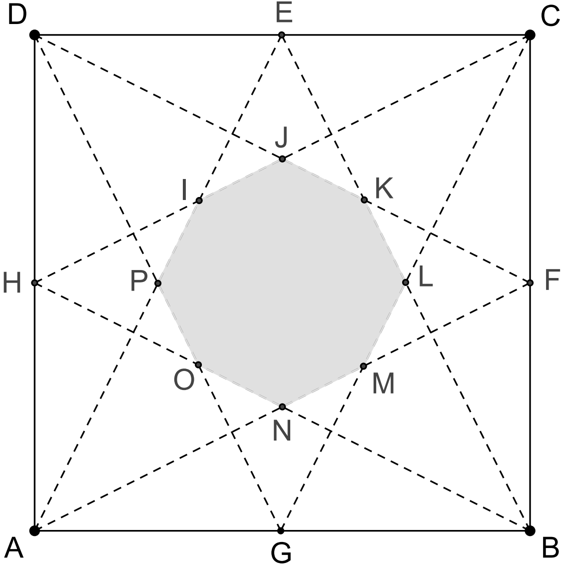


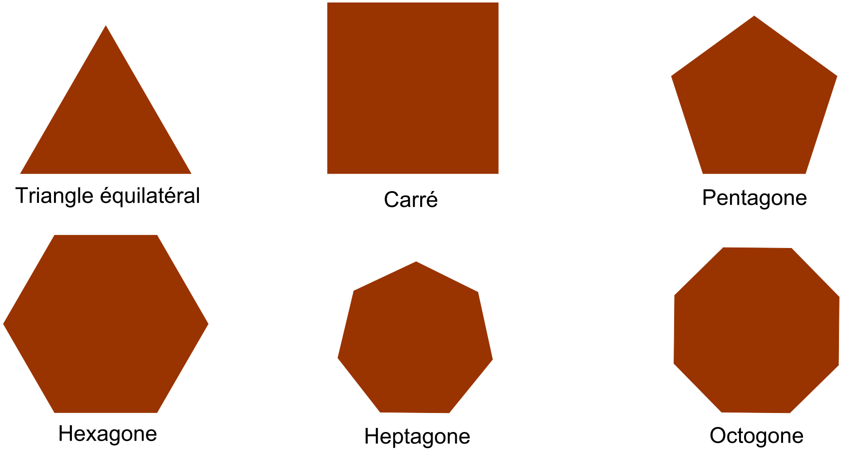

D
E
C
H
F
A
G
B

On joint chaque sommet aux milieux des deux côtés opposés.



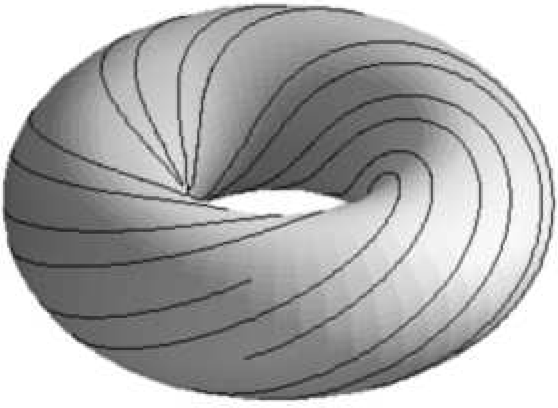
L'octogone IJKLMNOP obtenu au milieu est-il régulier ?



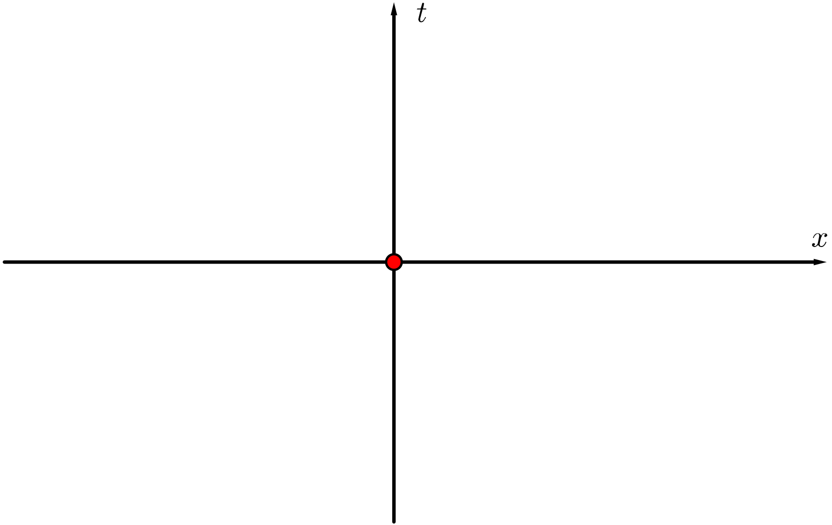


POLYGONES RÉGULIERS

Et même furtif, il peut décoincer !



Ω ***est le plan*** $\mathbb{R}^2$ ***privé de l'origine*** $(0,0)$



Sur l'ouvert Ω notre problème est le suivant :

On se donne une fonction $u : (x,t) \in \Omega \longmapsto u(x,t) \in \mathbb{R}$ *indéfiniment différentiable, c'est-à-dire qui admet des dérivées de tous ordres par rapport à* x *et* t*. On cherche une fonction* $F : (x,t) \in \Omega \longmapsto F(x,t) \in \mathbb{R}$ *ayant les mêmes propriétés et telle que :*

$$\frac{\partial F}{\partial t}(x,t) = u(x,t).$$

Sur $\mathbb{R}^2$ *la fonction* F *est facile à déterminer. Il suffit de choisir* $t_0 \in \mathbb{R}$ *et poser :*

$$(E) \qquad F(x,t) = \int_{t_0}^{t} u(x,s)ds \quad \textit{pour tout } (x,t) \in \mathbb{R}^2.$$

Mais pas sur Ω *: la singularité* $(0,0)$ *pose un problème !*

Question naturelle alors :

Y a-t-il des obstructions à résoudre l'équation (E) ?

La réponse est OUI ! et ces obstructions forment un espace vectoriel H^1.

Si cet espace n'est pas réduit à $\{0\}$, ***ces obstructions sont effectives. D'où l'intérêt de son calcul.***

Pour les plus savants, H^1 ***se note en fait*** $H^1(\mathbb{Z}, C^\infty(\Omega))$ ***et s'appelle premier espace de cohomologie du groupe discret*** $\mathbb{Z}$ ***à valeurs dans le*** $\mathbb{Z}$***-module*** $C^\infty(\Omega)$ ***des fonctions indéfiniment différentiables sur*** Ω.

On a par exemple $H^1(\mathbb{Z}, C^\infty(\mathbb{R}^2)) = 0$. ***Ce qui signifie qu'on peut toujours résoudre l'équation*** (E) ***pour toute donnée*** u ***sur*** $\mathbb{R}^2$ ***comme on l'a déjà fait remarquer !***

L'approche topologique

On a aussi $H^1(\mathbb{Z}, C^\infty(U)) = 0$ *pour tout ouvert* U *du plan homéomorphe à* $\mathbb{R}^2$*, c'est-à-dire pour lequel il existe une bijection bicontinue :* $U \xrightarrow{\phi} \mathbb{R}^2$.

Et si on arrive à recouvrir Ω *par deux ouverts* U *et* V *homéomorphes à* $\mathbb{R}^2$ *et tels que leur intersection* $U \cap V$ *soit réunion finie d'ouverts homéomorphes aussi à* $\mathbb{R}^2$*, alors un outil d'algèbre homologique, connu sous le nom de suite de Mayer-Vietoris nous permet de calculer notre espace* $H^1(\mathbb{Z}, C^\infty(\Omega))$.

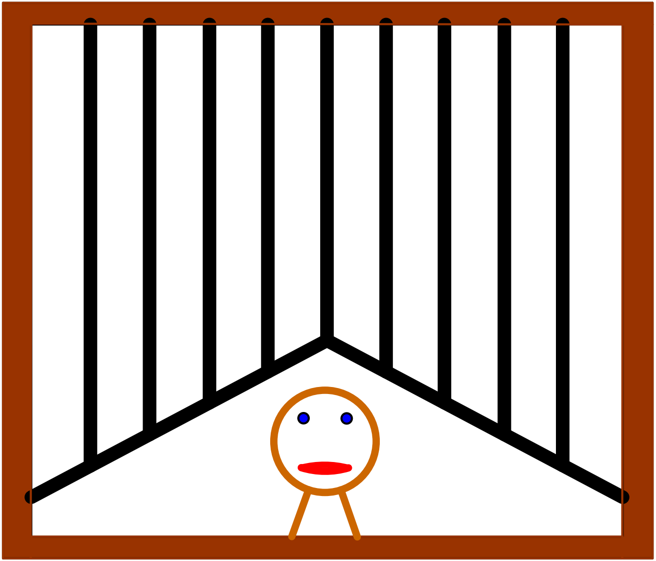
Le problème revient donc à trouver les ouverts U *et* V *en question !*

Comment faire alors ?

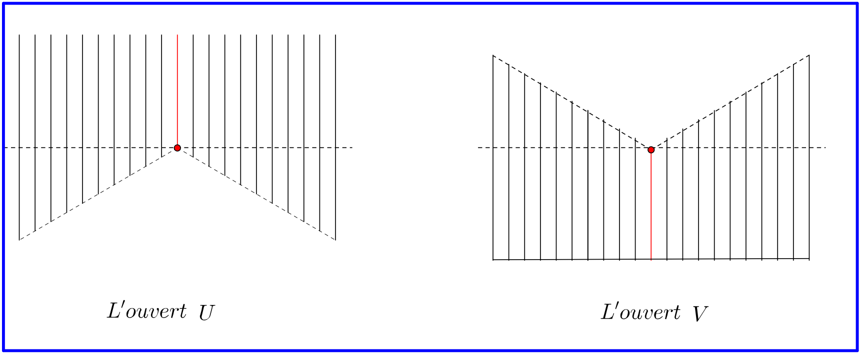
De temps en temps j'y pense. Presque en vain ? Pas vraiment...

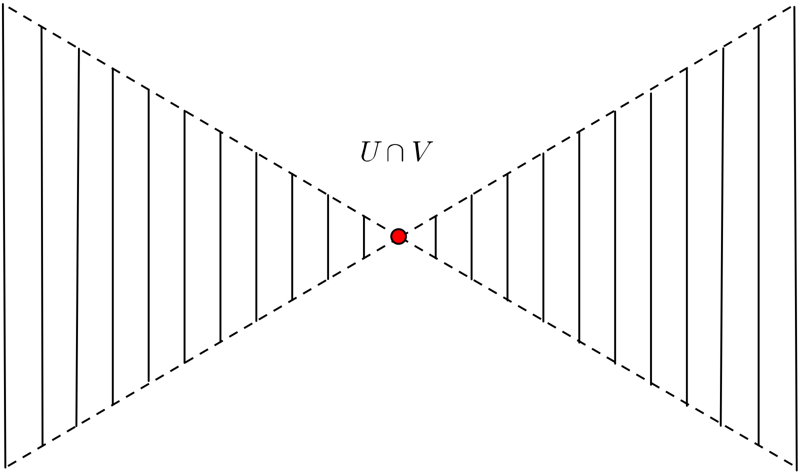
Un jour je me baladais dans une Médina au Maroc. Un peu hagard et tête en l'air, je regardais par-ci par-là sans but précis, j'appréciais simplement le mouvement de la foule et le tintamarre de la vie quotidienne.

À un moment je dirigeai mon regard vers le haut et j'aperçus une femme sortant sa tête d'une fenêtre armée de barreaux de fer ne laissant qu'une petite ouverture triangulaire en bas.



Grand tilt : "Une coupe plane verticale de mon feuilletage ! Et si je prenais les ouverts que je cherchais de la même forme que la partie que remplissent les barreaux, ils seraient exactement ce qu'il me faut, n'est-ce pas ?" m'étais-je questionné.


$L'ouvert\ \ U$
$L'ouvert\ \ V$


$U \cap V$

3. Regard géométrique et regard artistique

Une bonne question :

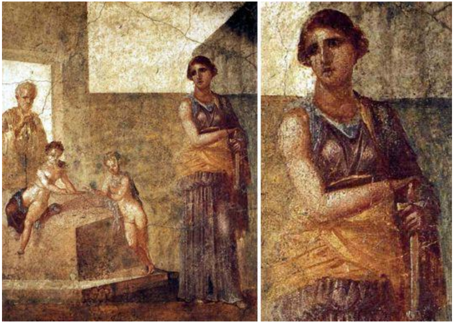
Le regard du géomètre est-il toujours comme celui de l'historien de l'art ?

Réponse :

Non, comme on va le voir tout de suite !

Ici Medée !

Nous avons choisi le tableau ci-dessous (de Timonaque de Byzance) exposé au Museo Archelegico Nazionale à Naples mais provenant de la Maison des Dioscures à Pompéi.



Médée

On y voit une femme debout, regardant à sa droite et tenant un sabre à la main. Elle tourne le dos à deux enfants en train de jouer sous l'œil attentif d'un homme au fond de la salle. Qui est cette femme ? qui sont ces enfants ? qui est cet homme ? Que signifie cette scène ? La réponse à chacune de ces questions se trouve dans l'histoire de Médée. La voici donnée de façon brève.

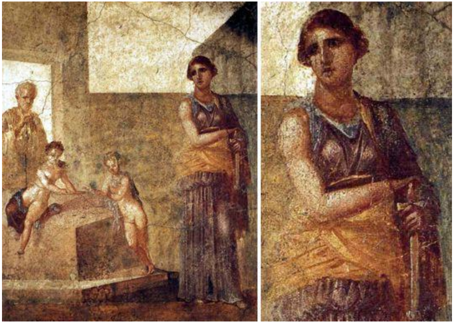
Éeson était roi d'Iolcos en Thessalie mais fut chassé de son royaume par son frère Pélias. Son fils Jason fut recueilli par le centaure Chiron qui lui apprit non seulement la sagesse mais aussi l'art du combat. À l'âge adulte, il décida de revenir dans son pays pour aider son père à récupérer son trône. Pélias, ayant rencontré une vieille femme qui lui prédit sa mort par un vagabond, craignait ce retour. Il accepta alors de se démettre à condition que Jason ramène la Toison d'or qui se trouve en Colchide chez le roi Éetès, pendue à un chêne et gardée par un dragon, pensant ainsi qu'il ne pourra jamais y arriver.

Jason se rendit chez Éetès. Celui-ci consentit à lui céder la Toison d'or s'il arrive à surmonter certaines épreuves difficiles. Médée, fille du roi, et connue par ses pouvoirs de sorcellerie, tomba amoureuse de Jason et l'aida à décrocher cette toison. À son départ de Colchide, Ascylros, le frère de Médée, menaça Jason. Médée le tua, s'enfuit avec Jason et se donna à lui. Ils eurent deux enfants, Merméros et Phérès. À leur retour à Iolcos, Pélias n'a pas tenu sa promesse et Médée le tua en le faisant bouillir dans une cuve.

Médée et Jason se réfugièrent alors chez le roi Créon de Corinthe. Mais ce dernier ignora l'existence de Médée et offrit sa fille Creüse à Jason, celui-ci répudia Médée et épousa Creüse dont il fut épris et parce qu'elle était grecque comme lui. Médée, foudroyée par ce qui lui arriva et complètement rattrapée par ses instincts meurtriers, tua sa rivale et égorgea ses deux enfants pour se venger de Jason. C'est ce dernier instant précis que décrit le peintre : les enfants jouent sous le regard de leur éducateur qui ne se doute de rien ; Médée se tient devant, un sabre à la main et dans un mouvement de rotation qui l'amène vers eux pour accomplir son geste.

Qua Medea !

Abbiamo scelto il quadro sottostante (di Timomaco di Bisanzio) esposto al Museo Archeologico Nazionale di Napoli ma proveniente dalla Casa dei Dioscuri a Pompei.



Médée

Si vede una donna in piedi, che guarda sulla sua destra e tiene una sciabola in mano. Lei volta le spalle a due bambini che giocano sotto l'occhio vigile di un uomo in fondo alla stanza. Chi è questa donna ? Chi sono questi bambini ? Chi è quest'uomo ? Cosa significa questa scena ? La risposta a ciascuna di queste domande si trova nella storia di Medea, qui ricordata brevemente.

Esone era re di Iolco in Tessaglia ma fu espulso dal suo regno usurpato dal fratello Pelia. Suo figlio Giasone fu raccolto dal centauro Chirone che gli insegnò non solo la saggezza ma anche l'arte del combattimento. Da adulto, decise di tornare nel suo paese per aiutare suo padre a recuperare il suo trono. Pelia, avendo incontrato una vecchia che gli predisse la morte per mano di un vagabondo, temette questo ritorno. Accettò di rinunciare a condizione che Giasone riportasse il Vello d'oro che si trovava nella Colchide dal Re Eeta, appeso a una quercia e custodito da un drago, pensando che non sarebbe mai stato in grado di farlo.

Giasone andò da Eeta. Questi acconsentìı a cedergli il vello d'oro se fosse riuscito a superare alcune prove difficili. Medea, figlia del re Eeta, e conosciuta per i suoi poteri di stregoneria, si innamorò di Giasone e lo aiutò a prendere il vello. Lasciando la Colchide, Apsirto, il fratello di Medea, minacciò Giasone. Medea lo uccise, fuggì con Giasone ed ebbero due figli, Mermero e Fere.

Al loro ritorno a Iolco, Pelia, non avendo mantenuto la promessa, fu ucciso da Medea che lo bollì in un tino.

Medea e Giasone si rifugiarono allora dal re Creonte di Corinto. Ma quest'ultimo, ignorando l'esistenza di Medea, offrì sua figlia Glauce in sposa a Giasone, che ripudiò Medea sposando Glauce, che amava anche perchè era greca come lui. Medea, scioccata per ciò che le era successo e completamente sopraffatta dal suo istinto assassino, uccise la sua rivale e sgozzò i due bambini per vendicarsi di Giasone.

È questo ultimo momento preciso descritto dal pittore : i bambini giocano sotto lo sguardo del loro educatore che non sospetta nulla ; Medea sta davanti con una sciabola in mano facendo un gesto rotatorio che la porterà sui bambini per compiere l'insano gesto.

Conclusion

Pour l'observateur Lambda, il est impossible de deviner cela s'il ne connaît pas l'histoire de Médée.

Il y a donc une différence fondamentale entre le regard que jette le géomètre sur une figure et celui de l'historien de l'art sur un tableau :

- *Le premier dispose de règles d'observation qui lui permettent d'examiner chaque figure dans un cadre assez général.*

- *Le deuxième a besoin de connaître l'histoire des objets, des personnages...dans chaque tableau pris individuellement.*