ISRAEL JOURNAL OF MATHEMATICS **101** (1997), 323–347

STABILITÉ DU CARACTÈRE KÄHLÉRIEN TRANSVERSE

PAR

A. EL KACIMI ALAOUI* ET B. GMIRA

URA au CNRS GAT n° 751, LAMATH, Université de Valenciennes, Le Mont Houy 59304 Valenciennes Cedex, France

ABSTRACT

Soient $\mathcal{F}$ un feuilletage hermitien homologiquement orientable sur une variété compacte M et $\mathcal{F}_t$ une déformation de $\mathcal{F}$ à type différentiable fixé paramétrée par un voisinage T de 0 dans $\mathbb{R}^d$ par des feuilletages transversalement holomorphes. On suppose que la métrique hermitienne transverse σ de $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0$ est kählérienne.

On montre qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $t \in T$, $|t| < \varepsilon$, le feuilletage $\mathcal{F}_t$ possède une métrique kählérienne transverse σ_t telle que $\sigma_0 = \sigma$; en plus σ_t dépend différentiablement de t pour $|t| < \varepsilon$.

Introduction

Soit M une variété analytique complexe compacte. On appelle **déformation** de M paramétrée par un voisinage T de 0 dans l'espace $\mathbb{R}^d$ la donnée d'une variété différentiable $\mathcal{M}$ et d'une submersion C^∞, $\pi : \mathcal{M} \longrightarrow T$ telle que pour tout $t \in T$, $\pi^{-1}(t) = M_t$ est une variété analytique complexe compacte avec $M_0 = M$. Pour t suffisamment proche de 0, M_t est difféomorphe à M; mais pour t aussi proche de 0 qu'on veut la structure complexe de M_t peut être différente de celle de M. On peut alors se demander s'il existe sur M une propriété géométrique qui ne "disparaît" pas par petites déformations i.e pour t proche de 0. Dans cette direction Kodaira et Spencer [KS2] ont démontré que *si M a une métrique kählérienne σ alors il existe $\varepsilon > 0$ et une famille différentiable de métriques kählériennes σ_t*

* Lors de l'élaboration définitive de ce travail le premier auteur a séjourné au **Centre de Recerca Matemàtica** de Barcelona dans le cadre du **Semestre de Géométrie différentielle** qui s'est tenu au printemps-été 1995. Il remercie les organisateurs pour leur chaleureuse invitation.

Received June 8, 1995

sur M_t pour $|t| < \varepsilon$ telle que $\sigma_0 = \sigma$. Ce résultat a été généralisé dans [Ek1] aux V-**variétés** (**orbifolds** ou **variétés de Sataké**) complexes. Il semble alors naturel de voir s'il reste encore vrai pour des espaces plus généraux tels que l'espace des feuilles de certains feuilletages transversalement holomorphes sur des variétés compactes. La réponse est **non** si la déformation $\mathcal{F}_t$ est quelconque : il a été construit dans [EN1] une famille analytique $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{C}}$ de feuilletages holomorphes sur une nilvariété complexe compacte telle que $\mathcal{F}_0$ est transversalement kählérien et pour tout $t \neq 0$, $\mathcal{F}_t$ ne possède aucune structure kählérienne transverse. Mais la réponse est **oui** si la déformation est à **type différentiable fixé** i.e il existe une famille continue de difféomorphismes h_t tels que $h_t^*(\mathcal{F}_t) = \mathcal{F}$. C'est l'objet de ce travail.

La démonstration de Kodaira-Spencer dans le cas classique repose sur des propriétés fortes (qu'ils ont établies) d'une famille différentiable d'opérateurs fortement elliptiques sur une variété compacte : continuité des éléments du spectre, dépendance différentiable de l'opérateur de Green et des opérateurs de projection en fonction du paramètre $t \in T$ etc... La notre consiste à établir les mêmes propriétés pour une famille C^∞ d'opérateurs **fortement transversalement elliptiques** en se basant sur les résultats obtenus dans [Ek2].

Dans toute la suite $\mathcal{F}$ sera un feuilletage de codimension n (réelle ou complexe) sur une variété M défini par un cocycle feuilleté $\{U_i, f_i, \gamma_{ij}\}$ où $(U_i)_{i\in I}$ est un recouvrement ouvert de M , $f_i : U_i \longrightarrow S$ une submersion au-dessus d'une n-variété transverse S (réelle ou complexe) et γ_{ij} des difféomorphismes locaux de S tels que sur $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ on ait $f_j = \gamma_{ij} \circ f_i$. On note $T\mathcal{F}$ le fibré tangent à $\mathcal{F}$ et $\nu\mathcal{F} = TM/T\mathcal{F}$ son fibré normal. Quand on exprimera une propriété localement, ce sera toujours dans un système de coordonnées locales $(x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_n)$ (resp. $(x_1, \ldots, x_p, z_1, \ldots, z_n)$ si S est complexe) pour lesquelles le feuilletage est défini par les équations $dy_1 = \cdots = dy_n = 0$ (resp. $dz_1 = \cdots = dz_n = 0$).

Sauf mention expresse du contraire, toutes les structures considérées dans ce travail sont supposées être de classe C^∞.

1. Structures transverses

Dans cette section nous donnons quelques exemples de structures transverses. Nous nous sommes limités à celles dont nous aurons besoin par la suite.

1.1. Définition: Une structure transverse à $\mathcal{F}$ est une structure sur S invariante par les difféomorphismes locaux γ_{ij}.

1.2. Exemples: (i) Si S est un groupe de Lie et les γ_{ij} des restrictions de translations à gauche, on dira que $\mathcal{F}$ est un **feuilletage de Lie**.

(ii) On dira qu'un champ de vecteurs Y sur M est **feuilleté** si pour tout champ de vecteurs X tangent à $\mathcal{F}$, le crochet $[X, Y]$ est encore tangent à $\mathcal{F}$. Le flot local associé à un tel champ préserve le feuilletage $\mathcal{F}$. Les champs tangents à $\mathcal{F}$ forment un idéal $\Gamma(\mathcal{F})$ du module $\chi(M, \mathcal{F})$ des champs feuilletés sur M. Le quotient $\chi(M/\mathcal{F}) = \chi(M, \mathcal{F})/\Gamma(\mathcal{F})$ est une algèbre de Lie appelée l'**algèbre des champs basiques** de $\mathcal{F}$. On dira que $\mathcal{F}$ est **transversalement parallélisable** (T.P en abrégé) si $\chi(M/\mathcal{F})$ est libre de rang n. Cela signifie que la variété S admet un parallélisme invariant par les γ_{ij}.

(iii) Supposons S riemannienne et les γ_{ij} des isométries locales. On dira alors que $\mathcal{F}$ est un **feuilletage riemannien**. Ceci signifie que le fibré normal $\nu\mathcal{F}$ supporte une métrique invariante le long des feuilles ou encore que la distance entre les feuilles est localement constante. Localement cette métrique s'écrit

$$g(x, y) = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(y) dy_i \otimes dy_j. \tag{1.1}$$

Sur une variété fixée M, tout feuilletage de Lie est transversalement parallélisable et tout feuilletage transversalement parallélisable est évidemment riemannien.

La structure d'un feuilletage $\mathcal{F}$ riemannien (ou transversalement parallélisable) sur une variété M compacte est décrite par les théorèmes qui suivent dûs à P. Molino [Mo].

1.3. Théorème: *Supposons $\mathcal{F}$ transversalement parallélisable. Alors*

(1) *l'adhérence de toute feuille de $\mathcal{F}$ est une sous-variété de M,*

(2) *il existe un groupe de Lie G_0 tel que le feuilletage $\mathcal{F}_0$ induit sur chaque adhérence est de Lie de groupe G_0 à feuilles denses,*

(3) *les adhérences des feuilles forment une fibration localement triviale $\pi : M \longrightarrow W$ au-dessus d'une variété compacte W; le cocycle de cette fibration est à valeurs dans le groupe* $\mathrm{Diff}(F, \mathcal{F}_0)$ *des difféomorphismes de la fibre type F qui respectent le feuilletage $\mathcal{F}_0$.*

La variété W est appelée la **variété basique** de $\mathcal{F}$ et $\pi : M \longrightarrow W$ la **fibration basique** de $\mathcal{F}$.

Supposons $\mathcal{F}$ riemannien et pour simplifier transversalement orientable. Notons alors $M^{\#} \longrightarrow M$ le G-fibré principal des repères orthonormés directs transverses à $\mathcal{F}$ où G est le groupe $\mathrm{SO}(n)$.

1.4. THÉORÈME: *Le feuilletage $\mathcal{F}$ se relève à $M^{\#}$ en un feuilletage $\mathcal{F}^{\#}$ tel que*

(1) $\dim \mathcal{F}^{\#} = \dim \mathcal{F}$ *et $\mathcal{F}^{\#}$ est T.P,*

(2) *$\mathcal{F}^{\#}$ est invariant par l'action naturelle de G sur $M^{\#}$.*

La variété basique de $\mathcal{F}^{\#}$ sera par définition la **variété basique** de $\mathcal{F}$.

Un autre exemple : si S est une variété analytique complexe et les γ_{ij} des transformations biholomorphes on dira que $\mathcal{F}$ est un **feuilletage transversalement holomorphe**. Dans cette situation le fibré normal $\nu\mathcal{F}$ hérite d'une structure presque complexe i.e il existe un automorphisme $J : \nu\mathcal{F} \longrightarrow \nu\mathcal{F}$ invariant le long des feuilles et vérifiant $J^2 = -\mathrm{id}$.

Si en plus $\mathcal{F}$ est riemannien (de métrique transverse γ^0) on pose

$$\gamma(Y_1, Y_2) = \frac{1}{2}\Big\{\gamma^0(JY_1, JY_2) + \gamma^0(Y_1, Y_2)\Big\}, \tag{1.2}$$

pour toutes sections Y_1, Y_2 de $\nu\mathcal{F}$. Clairement γ satisfait la condition

$$\gamma(JY_1, JY_2) = \gamma(Y_1, Y_2),$$

i.e γ est une métrique hermitienne transverse à $\mathcal{F}$. On dira que le feuilletage $\mathcal{F}$ est **hermitien**. Posons maintenant

$$\omega(X, Y) = \gamma(JX, Y). \tag{1.3}$$

Alors ω est une 2-forme différentielle basique. On dira que $\mathcal{F}$ est **transversalement kählérien** si ω est fermée; dans ce cas on dira que ω est une **forme de Kähler basique** pour $\mathcal{F}$.

Rappelons qu'une forme différentielle α est dite **basique** si elle vérifie $i_X\alpha = L_X\alpha = 0$ pour tout $X \in \Gamma(\mathcal{F})$. Une **fonction basique** est une fonction constante sur les feuilles; on note A_b l'algèbre des fonctions basiques sur M. L'espace $\Omega^*(M/\mathcal{F})$ des formes différentielles basiques muni de la différentielle extérieure est un complexe différentiel (appelé **complexe de de Rham basique**); son homologie $H^*(M/\mathcal{F})$ est appelée la **cohomologie basique** de $\mathcal{F}$.

Si $\mathcal{F}$ est transversalement holomorphe on a, comme dans le cas classique, une décomposition

$$\Omega^r(M/\mathcal{F}) = \bigoplus_{p+q=r} \Omega^{pq}(M/\mathcal{F})$$

où $\Omega^{pq}(M/\mathcal{F})$ est l'espace des formes basiques de type (p,q). Le *complexe de Dolbeault basique*

$$\Omega^{pq}(M/\mathcal{F}) \xrightarrow{\bar\partial} \Omega^{p,q+1}(M/\mathcal{F})$$

est bien défini; son homologie est appelée la **cohomologie de Dolbeault basique** de $\mathcal{F}$.

Un cas particulier de feuilletage transversalement holomorphe est donné par un **feuilletage holomorphe** : la variété M est analytique complexe et les submersions $f_i : U_i \longrightarrow S$ sont holomorphes. Donnons un exemple concret d'un tel feuilletage. Soit $M = \mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ et considérons le champ de vecteurs holomorphe Z défini en tout point $(z_1, \ldots, z_{n+1})$ de $\mathbb{C}^{n+1}$ par

$$Z(z_1, \ldots, z_{n+1}) = \alpha_1 z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + \cdots + \alpha_{n+1} z_{n+1} \frac{\partial}{\partial z_{n+1}}$$

où $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1} \in \mathbb{C}^*$. Les variétés intégrales de Z définissent un feuilletage holomorphe de codimension complexe n sur M. On peut choisir les $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}$ de telle sorte que le champ Z intersecte transversalement la sphère $\mathbb{S}^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ et y définit un **flot réel** (i.e un feuilletage de dimension réelle 1) transversalement holomorphe de codimension n. Il a des orbites fermées $L_1, \ldots, L_{n+1}$ (difféomorphes au cercle) données respectivement sur chaque facteur de $\mathbb{C}^n$ par $|z_1| = 1, \ldots, |z_{n+1}| = 1$. Il est facile de voir que si tous les α_j sont de module 1, le flot associé à Z préserve la métrique kählérienne standard de $\mathbb{C}^{n+1}$ qui induit une métrique kählérienne transverse à $\mathcal{F}$ et en fait donc un feuilletage transversalement kählérien.

2. Opérateurs transversalement elliptiques

Soit $\mathcal{P} : P \xrightarrow{\iota} M$ un fibré principal de groupe structural $G \subset \mathrm{GL}(k, \mathbb{C})$. Le groupe G agit à droite sur P et sur son algèbre de Lie $\mathcal{G}$ par la représentation adjointe. On note $\mathcal{V}$ le sous-fibré vectoriel de TP dont la fibre V_z en un point $z \in P$ est l'espace tangent en z à la fibre de P. Une **connexion** sur $\mathcal{P}$ est un sous-fibré vectoriel $\mathcal{H}$ de TP tel que

(i) pour tout $z \in P$: $T_z P = V_z \oplus H_z$,

(ii) pour tout $g \in G$ et tout $z \in P$: $H_{zg} = (R_g)_* H_z$ où R_g est l'action à droite de g sur P.

Il est bien connu que $\mathcal{H}$ est le noyau d'une 1-forme invariante ω sur P (appelée **forme de connexion**) et à valeurs dans $\mathcal{G}$.

Il est facile de voir que la restriction de ι_* (la dérivée de ι) à H_z est un isomorphisme sur $T_{\iota(z)}M$. Soit $\tau = \iota_*^{-1}(T\mathcal{F})$.

2.1. Définition: On dira que $\mathcal{P}$ est **feuilleté** si τ est intégrable.

Dans ce cas τ définit un feuilletage $\widetilde{\mathcal{F}}$ sur P de même dimension que $\mathcal{F}$ et invariant par l'action de G.

On dira que la connection $\mathcal{H}$ est **basique** si la 1-forme ω est basique (pour le feuilletage $\widetilde{\mathcal{F}}$ bien sûr); un fibré principal feuilleté $\mathcal{P}$ est dit **$\mathcal{F}$-fibré** s'il est muni d'une connexion basique.

Soit $E \longrightarrow M$ un fibré vectoriel complexe défini par un cocycle $\{U_i, g_{ij}, G\}$ où U_i est un recouvrement ouvert de M et les g_{ij} sont les fonctions de transition $U_i \cap U_j \longrightarrow G \subset \mathrm{GL}(k, \mathbb{C})$. On dira que E est un **$\mathcal{F}$-fibré** si le fibré principal associé $G \longrightarrow P \longrightarrow M$ est un $\mathcal{F}$-fibré. Comme $E = P \times_G \mathbb{C}^k$, $\widetilde{\mathcal{F}}$ induit un feuilletage $\mathcal{F}_E$ sur E. Un **$\mathcal{F}$-morphisme** $\varphi : (E, \omega) \longrightarrow (E', \omega')$ entre deux $\mathcal{F}$-fibrés est un morphisme de fibrés vectoriels qui envoie feuilles de $\mathcal{F}_E$ dans celles de $\mathcal{F}_{E'}$ et la connexion de E' sur celle de E.

Soit $E \longrightarrow M$ un $\mathcal{F}$-fibré. Alors le fibré dual E^* et toutes ses puissances extérieures $\Lambda^* E^*$ sont des $\mathcal{F}$-fibrés; de même

$$\mathcal{H}^2 E = \{\text{2-formes hermitiennes sur } E\}$$

est un $\mathcal{F}$-fibré.

Soient E un $\mathcal{F}$-fibré, $C^\infty(E)$ l'espace de ses sections globales et notons

$$\nabla : \chi(M) \times C^\infty(E) \longrightarrow C^\infty(E)$$

la dérivée covariante associée à la connexion $\mathcal{H}$. On dira qu'une section $\alpha \in C^\infty(E)$ est **basique** si elle satisfait la condition

$$\nabla_X \alpha = 0 \quad \text{pour tout } X \in \Gamma(\mathcal{F}).$$

L'espace $C^\infty(E/\mathcal{F})$ des sections basiques de E est un A_b-module. Soient E et E' deux $\mathcal{F}$-fibrés de rangs respectifs k et k'. Un **opérateur différentiel basique d'ordre** $m \in \mathbb{N}$ est une application linéaire

$$D : C^\infty(E/\mathcal{F}) \longrightarrow C^\infty(E'/\mathcal{F})$$

ayant pour expression locale

$$D = \sum_{|\mathbf{s}| \leq m} a_{\mathbf{s}}(y) \frac{\partial^{|\mathbf{s}|}}{\partial y_1^{s_1} \cdots \partial y_n^{s_n}} \tag{2.1}$$

où $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_n) \in \mathbb{N}^n$, $|\mathbf{s}| = s_1 + \cdots + s_n$ et $a_\mathbf{s}$ sont des $k \times k'$-matrices dont les coefficients sont des fonctions basiques. Le **symbole principal** de D au point z et en le covecteur basique $\xi \in \nu_z^* \mathcal{F}$, $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ est l'application linéaire $\sigma(D)(z, \xi) : E_z \longrightarrow E'_z$ definie par

$$\sigma(D)(z, \xi)(\eta) = \sum_{|\mathbf{s}|=m} \xi_1^{s_1} \cdots \xi_n^{s_n} a_\mathbf{s}(y)(\eta). \tag{2.2}$$

2.2. Définition: On dira que D est **transverselement elliptique** si l'application linéaire $\sigma(D)(z, \xi)$ est un isomorphisme pour tout $z \in M$ et tout covecteur basique $\xi \in \nu_z^* \mathcal{F}$ non nul.

Notons $\nabla^2 : \chi(M) \times C^\infty(\mathcal{H}^2 E) \longrightarrow C^\infty(\mathcal{H}^2 E)$ la dérivée covariante sur le $\mathcal{F}$-fibré $\mathcal{H}^2 E$ des 2-formes hermitiennes sur E.

On dira que E est un **$\mathcal{F}$-fibré hermitien** si $\mathcal{H}^2 E$ admet une section basique $\langle \ , \ \rangle$ définie positive. Par exemple si $\mathcal{F}$ est riemannien, le complexifié $\nu\mathcal{F} \otimes \mathbb{C}$ de son fibré normal ainsi que toutes ses puissances extérieures $\Lambda^* \nu^* \mathcal{F} \otimes \mathbb{C}$ sont des $\mathcal{F}$-fibrés hermitiens.

Soient E un $\mathcal{F}$-fibré hermitien et $D : C^\infty(E/\mathcal{F}) \longrightarrow C^\infty(E/\mathcal{F})$ un opérateur basique d'ordre $m = 2m'$. Pour tout $z \in M$ et tout $\xi \in \nu_z^* \mathcal{F}$, on définit une forme quadratique $A(D)(z, \xi) : E_z \longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$A(D)(z, \xi)(\eta) = (-1)^{m'} \langle \sigma(D)(z, \xi)(\eta), \eta \rangle. \tag{2.3}$$

On dira que D est **fortement transversalement elliptique** si cette forme quadratique est définie positive pour tout $z \in M$ et tout covecteur basique non nul ξ. Bien sûr un tel opérateur est transversalement elliptique.

Nous allond donner la **décomposition de Hodge basique** dans le cas qui va nous intéresser : $E = E'$ et D d'ordre pair $m = 2m'$ fortement transversalement elliptique. La démonstration complète dans le cas général se trouve dans [Ek2].

Soit $E^\#$ le relevé à $M^\#$ du fibré E. Alors

(1) $E^\#$ est un $\mathcal{F}^\#$-fibré hermitien (on notera $\langle \ , \ \rangle$ la métrique hermitienne sur ce fibré qui n'est rien d'autre que la relevée de celle sur E);
(2) $E^\#$ est un G-fibré;
(3) l'espace $C^\infty(E/\mathcal{F})$ des sections basiques de E est canoniquement isomorphe à l'espace $C_G^\infty(E^\#/\mathcal{F}^\#)$ des sections basiques de $E^\#$ invariantes par l'action de G.

(4) A l'aide de la connexion de Levi-Civita du fibré principal

$$G \longrightarrow M^{\#} \longrightarrow M$$

on relève l'opérateur D en un opérateur basique

$$D^{\#} : \mathcal{C}^{\infty}(E^{\#}/\mathcal{F}^{\#}) \longrightarrow \mathcal{C}^{\infty}(E^{\#}/\mathcal{F}^{\#})$$

commutant à l'action de G et donc préserve $\mathcal{C}_G^{\infty}(E^{\#}/\mathcal{F}^{\#})$. Malheureusement cet opérateur n'est pas fortement transversalement elliptique. Nous allons le compléter à cet effet. Soient $Q_1, \ldots, Q_N$ les champs fondamentaux de l'action de G sur $M^{\#}$. Vus comme opérateurs différentiels d'ordre 1 sur $C^{\infty}(E^{\#})$ ils sont basiques. Notons $\overline{Q}_1, \ldots, \overline{Q}_N$ leurs conjugués complexes et posons

$$Q' = \left(\sum_{i=1}^{N} Q_i \overline{Q}_i\right)^{m'} \quad \text{et} \quad Q = (-1)^{m'} Q'.$$

On vérifie alors que l'opérateur

$$D' = D^{\#} + Q \tag{2.4}$$

est fortement transversalement elliptique, G-invariant et coincide avec D sur l'espace $\mathcal{C}_G^{\infty}(E^{\#}/\mathcal{F}^{\#})$ (via l'identification $\mathcal{C}_G^{\infty}(E^{\#}/\mathcal{F}^{\#}) = \mathcal{C}^{\infty}(E/\mathcal{F})$).

(5) Au fibré $E^{\#}$ sur $M^{\#}$ est associé un fibré hermitien $\overline{E} \longrightarrow W$ appelé le *fibré utile* de E qui est un G-fibré (l'action étant induite par celle de G sur $M^{\#}$). Il existe un isomorphisme canonique de $A(W)$-modules

$$\Psi : \mathcal{C}^{\infty}(E^{\#}/\mathcal{F}^{\#}) \longrightarrow \mathcal{C}^{\infty}(\overline{E}). \tag{2.5}$$

(6) Si w est la forme volume associée à la métrique riemannienne induite par celle de $M^{\#}$, on peut définir un produit hermitien sur $\mathcal{C}^{\infty}(\overline{E})$

$$\langle \overline{\alpha}, \overline{\beta} \rangle = \int_W \langle \alpha(u), \beta(u) \rangle_u dw(u)$$

qu'on transporte sur $C^{\infty}(E^{\#}/\mathcal{F}^{\#})$ de telle sorte que Ψ soit un isomorphisme unitaire. On notera $|| \; ||_0$ la norme associée.

(7) L'opérateur D' induit un opérateur différentiel fortement elliptique $\overline{D}$ sur $\mathcal{C}^\infty(\overline{E})$ tel que pour tout ouvert $U \subset W$ et $V = \pi^{-1}(U)$ le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}^\infty_V(E^\#/\mathcal{F}^\#) \arrow[r, "D'"] \arrow[d, "\Psi"'] & \mathcal{C}^\infty_V(E^\#/\mathcal{F}^\#) \arrow[d, "\Psi"] \\ \mathcal{C}^\infty_U(\overline{E}) \arrow[r, "\overline{D}"] & \mathcal{C}^\infty_U(\overline{E}) \end{tikzcd}$$

En résumé on a un isomorphisme unitaire $\overline{\Psi} : \mathcal{C}^\infty(E/\mathcal{F}) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty_G(\overline{E})$ tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}^\infty(E/\mathcal{F}) \arrow[r, "D"] \arrow[d, "\overline{\Psi}"'] & \mathcal{C}^\infty(E/\mathcal{F}) \arrow[d, "\overline{\Psi}"] \\ \mathcal{C}^\infty_G(\overline{E}) \arrow[r, "\overline{D}"] & \mathcal{C}^\infty_G(\overline{E}) \end{tikzcd} \tag{2.6}$$

commute.

Pour le produit hermitien défini par transport à l'aide de $\overline{\Psi}$ sur $C^\infty(E/\mathcal{F})$ on vérifie que si $D : C^\infty(E/\mathcal{F}) \longrightarrow C^\infty(E/\mathcal{F})$ est un opérateur basique transversalement elliptique (resp. transversalement fortement elliptique), alors son adjoint $D^* : C^\infty(E/\mathcal{F}) \longrightarrow C^\infty(E/\mathcal{F})$ est aussi un opérateur basique transversalement elliptique (resp. transversalement fortement elliptique).

Dorénavant pour tout opérateur D, $N(D)$ sera son noyau et $\operatorname{Im} D$ sera son image. La décomposition de Hodge pour le fibré $\overline{E} \longrightarrow W$ et l'opérateur fortement elliptique $\overline{D}$ induisent une décomposition de Hodge pour $\left(\mathcal{C}^\infty_G(\overline{E}), \overline{D}\right)$ qui donne, via le diagramme (2.6), le

2.3. THÉORÈME: *Soient E un $\mathcal{F}$-fibré hermitien et $D : C^\infty(E/\mathcal{F}) \longrightarrow C^\infty(E'/\mathcal{F})$ un opérateur transversalement elliptique. Alors*

(i) *$N(D)$ est de dimension finie;*

(ii) *on a une décomposition orthogonale $C^\infty(E/\mathcal{F}) = N(D) \oplus \operatorname{Im} D^*$.*

De tout ce qui précède on peut démontrer le théorème suivant dit de **décomposition spectrale basique**. Soit $L^2(E/\mathcal{F})$ le complété de $\mathcal{C}^\infty(E/\mathcal{F})$.

2.4. THÉORÈME: *On reprend les hypothèses du théorème 2.3. et on suppose en plus que D est autoadjoint. Alors D a un système $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de sections basiques propres C^∞ formant une base hilbertienne de $L^2(E/\mathcal{F})$. Pour toute section*

$\alpha \in L^2(E/\mathcal{F})$ on a

$$\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \langle \alpha, e_k \rangle e_k \tag{2.7}$$

et la série converge en norme L^2. Les valeurs propres (λ_k) associées respectivement à (e_k) sont réelles et telles que

$$\lambda_0 = 0 \ , \ \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_k \leq \cdots \ \text{ et } \lim_{k \to +\infty} \lambda_k = +\infty.$$

Une section $\alpha \in L^2(E/\mathcal{F})$ est C^∞ si et seulement si pour tout $r \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{2r} |\langle \alpha, e_k \rangle|^2 < +\infty. \tag{2.8}$$

On note $P : L^2(E/\mathcal{F}) \longrightarrow N(D)$ l'opérateur de projection orthogonale et K l'opérateur qui à toute section L^2 (resp. C^∞) $\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \langle \alpha, e_k \rangle e_k$ associe

$$K\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} \langle \alpha, e_k \rangle e_k$$

qu'on appelle l'**opérateur de Green** associé à D. On a clairement l'identité

$$DK\alpha + P\alpha = \alpha$$

pour toute section α qui est C^∞.

3. Application aux formes basiques

On sait que le complexifié ν du fibré normal à $\mathcal{F}$ est un $\mathcal{F}$-fibré hermitien. Il en est de même de toutes ses puissances extérieures $E_r = \Lambda^r \nu^*$, où $r = 0, \ldots, n$ dont les sections basiques sont les formes différentielles basiques à valeurs complexes. On pose

$$\Omega^r(M/\mathcal{F}) = \mathcal{C}^\infty(E_r/\mathcal{F})$$

et on note

$$* : \Omega^r(M/\mathcal{F}) \longrightarrow \Omega^{n-r}(M/\mathcal{F})$$

l'opérateur de Hodge défini à l'aide de la métrique hermitienne transverse.

Supposons M compacte et $\mathcal{F}$ riemannien transversalement orientable et **homologiquement orientable** i.e $H^{\operatorname{cod} \mathcal{F}}(M/\mathcal{F}) \neq 0$. Cette dernière condition implique (cf. [Ms]) qu'il existe sur M une métrique riemannienne pour laquelle $\mathcal{F}$ est riemannien et ayant toutes ses feuilles minimales; d'après [Ru] il existe une forme $\chi \in \Omega^{\dim \mathcal{F}}(M)$ qui est un volume sur chaque feuille et **relativement fermée** i.e

$$d\chi(X_1, \ldots, X_{\dim \mathcal{F}}, Y) = 0$$

pour $X_1, \ldots, X_{\dim \mathcal{F}}$ tangents à $\mathcal{F}$. Pour toutes formes $\alpha, \beta \in \Omega^r(M/\mathcal{F})$ on pose

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \int_M \alpha \wedge \overline{*\beta} \wedge \chi. \tag{3.1}$$

On obtient ainsi un produit hermitien sur $\Omega^r(M/\mathcal{F})$ pour lequel l'opérateur

$$d^* = (-1)^r * d*$$

est l'adjoint formel de $d : \Omega^r(M/\mathcal{F}) \longrightarrow \Omega^{r+1}(M/\mathcal{F})$. Il en résulte que l'opérateur $\Delta : \Omega^r(M/\mathcal{F}) \longrightarrow \Omega^r(M/\mathcal{F})$ défini par $\Delta = dd^* + d^*d$ est autoadjoint. En plus il est fortement transversalement elliptique (à symbole strictement positif même). On a

$$N(\Delta) = N(d) \cap N(d^*)$$

dont les éléments sont les **formes basiques harmoniques**. Le Théorème 2.3 donne alors

3.1. THÉORÈME: *Pour tout $r \in \{0, \ldots, n\}$:*

(i) *$N(\Delta) = \mathcal{H}^r(M/\mathcal{F})$ est de dimension finie,*

(ii) *On a une décomposition orthogonale*

$$\Omega^r(M/\mathcal{F}) = \mathcal{H}^r(M/\mathcal{F}) \oplus \operatorname{Im} d \oplus \operatorname{Im} d^*.$$

Il résulte de ce théorème que la cohomologie basique $H^r(M/\mathcal{F})$ est isomorphe à $\mathcal{H}^r(M/\mathcal{F})$; elle est donc de dimension finie. En plus elle vérifie la **dualité de Poincaré** i.e $H^r(M/\mathcal{F})$ est isomorphe à $H^{n-r}(M/\mathcal{F})$.

Supposons maintenant $\mathcal{F}$ hermitien. Alors on définit un opérateur

$$\overline{*} : \Omega^{p,q}(M/\mathcal{F}) \longrightarrow \Omega^{n-p,n-q}(M/\mathcal{F})$$

de telle sorte que $\overline{\partial}^* = (-1)^{p+q} \overline{*} \overline{\partial} \overline{*}$ soit l'adjoint formel de $\overline{\partial}$. L'opérateur

$$\Delta'' = \overline{\partial}\, \overline{\partial}^* + \overline{\partial}^* \overline{\partial} : \Omega^{p,q}(M/\mathcal{F}) \longrightarrow \Omega^{p,q}(M/\mathcal{F}) \tag{3.2}$$

est autoadjoint transversalement fortement elliptique. On a alors le

3.2. THÉORÈME: *Pour tous $p, q \in \{0, \dots, n\}$:*

(i) $N(\Delta'') = \mathcal{H}^{p,q}(M/\mathcal{F})$ *est de dimension finie,*

(ii) *On a une décomposition orthogonale*

$$\Omega^{p,q}(M/\mathcal{F}) = \mathcal{H}^{p,q}(M/\mathcal{F}) \oplus \operatorname{Im}\overline{\partial} \oplus \operatorname{Im}\overline{\partial}^*.$$

On en déduit le

3.3. THÉORÈME: *La cohomologie de Dolbeault basique $H^{p,q}(M/\mathcal{F})$ s'identifie à l'espace $\mathcal{H}^{p,q}(M/\mathcal{F})$; elle est donc de dimension finie et vérifie la dualité de Serre i.e pour tous $p, q \in \{0, \dots, n\}$ on a*

$$H^{p,q}(M/\mathcal{F}) \equiv H^{n-p,n-q}(M/\mathcal{F}).$$

Si en plus $\mathcal{F}$ est transversalement kählérien de forme de Kähler ω on a

(a) $\Delta = 2\Delta''$,

(b) $H^{p,q}(M/\mathcal{F}) = \overline{H^{q,p}(M/\mathcal{F})}$,

(c) $H^r(M/\mathcal{F}) = \bigoplus_{p+q=r} H^{p,q}(M/\mathcal{F})$,

(d) $\Delta''(\omega^p) = 0$ *pour tout* $p = 0, \dots, n$; *d'où* $H^{p,p}(M/\mathcal{F}) \neq 0$.

4. Déformations des feuilletages

Nous allons rappeler la définition d'une déformation d'un feuilletage de manière générale. Pour tout $x \in M$, on note $G_x(M, n)$ la grassmanienne des plans de codimension n de T_xM. On obtient ainsi un fibré localement trivial

$$\mathcal{G}(M, n) \longrightarrow M$$

de fibre type la grassmanienne $G(p+n, n)$ de l'espace $\mathbb{R}^{n+p}$. Un **champ C^∞ de p-plans** sur M n'est alors rien d'autre qu'une section C^∞ de

$$\mathcal{G}(M, n) \longrightarrow M.$$

Soient τ un champ de p-plans sur M et $(\tau_1, \dots, \tau_p)$ une base de sections locales de τ. Si

$$X = \sum_{i=1}^{p} a_i \tau_i \quad \text{et} \quad Y = \sum_{j=1}^{p} b_j \tau_j$$

sont deux sections locales de τ, on a

$$[X, Y] = \sum_{i,j=1}^{p} a_i b_j [\tau_i, \tau_j] + \sum_{i,j=1}^{p} \{a_i \tau_i(b_j)\tau_j - b_j \tau_j(a_i)\tau_i\}.$$

Dans le quotient $\nu = TM/\tau$, la valeur de $[X, Y]$ en un point $x \in M$ ne dépend que de celles de X et Y et non celles de leurs dérivées. Ce qui permet de définir une 2-forme

$$\Omega_\tau : \tau \times \tau \longrightarrow \nu \tag{4.1}$$

dont la valeur en X_x et Y_x est la classe dans le quotient ν_x du vecteur $[X, Y]_x$. Par le théorème de Frobenius le champ de plans τ est intégrable si et seulement si Ω_τ est identiquement nulle. Dans ce cas τ définit un feuilletage de codimension n sur M.

On munit l'espace $\Gamma(\mathcal{G}(M,n))$ des sections C^∞ de $\mathcal{G}(M,n)$ de la topologie C^∞ qui en fait une variété de Fréchet. L'ensemble $\mathcal{F}(M,n)$ des feuilletages de codimension n sur M ("zéros de Ω") en est un fermé; on le munit de la topologie induite.

4.1. Définition: Une **déformation** de $\mathcal{F} \in \mathcal{F}(M,n)$ paramétrée par un voisinage T de 0 dans $\mathbb{R}^d$ est une application continue $\rho : t \in T \longrightarrow \mathcal{F}_t \in \mathcal{F}(M,n)$ telle que $\rho(0) = \mathcal{F}_0 = \mathcal{F}$.

Le groupe $\mathrm{Diff}(M)$ des difféomorphismes (de classe C^∞) de M agit sur $\mathcal{F}(M,n)$. Pour tout $\mathcal{F}$ on notera $\mathcal{O}_\mathcal{F}$ l'orbite de $\mathcal{F}$.

4.2. Définition: Une déformation $\rho : t \in T \longrightarrow \mathcal{F}_t \in \mathcal{F}(M,n)$ de $\mathcal{F}$ paramétrée par T est dite à **type différentiable fixé** si pour tout $t \in T$, $\rho(t) \in \mathcal{O}_\mathcal{F}$; en d'autres termes il existe une famille différentiable $(h_t)_{t\in T}$ de difféomorphismes de M tels que $h_t^*(\mathcal{F}_t) = \mathcal{F}$.

4.3. PROPOSITION: *Soit $\mathcal{F}_t$ une déformation de $\mathcal{F}$ à type différentiable fixé en feuilletages transversalement holomorphes de codimension n.*

(i) *Supposons $\mathcal{F}$ riemannien; alors pour tout $t \in T$, $\mathcal{F}_t$ est aussi riemannien.*

(ii) *La famille $\mathcal{F}_t$ se relève à $M^\#$ en une famille différentiable à type différentiable fixé de feuilletages $\mathcal{F}_t^\#$ T.P. invariants par G.*

(iii) *Supposons que les feuilletages $\mathcal{F}_t$ sont transversalement holomorphes et $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}$ hermitien de métrique hermitienne transverse γ^0. Alors les feuilletages $\mathcal{F}_t$ sont munis de métriques hermitiennes transverses γ_t variant différentiablement en fonction de t.*

Démonstration: (i) Notons γ^0 la métrique riemannienne transverse de $\mathcal{F}$ et soit $(h_t)_{t\in T}$ la famille des difféomorphismes de M qui conjuguent les $\mathcal{F}_t$ à $\mathcal{F}$. Alors comme la différentielle $dh_t : TM \longrightarrow TM$ envoie $T\mathcal{F}_t$ sur $T\mathcal{F}$, elle induit un isomorphisme de fibrés feuilletés

$$dh_t : \nu\mathcal{F}_t \longrightarrow \nu\mathcal{F}.$$

Si X et Y sont deux sections de $\nu\mathcal{F}_t$ on pose

$$\gamma_t^0(X,Y) = \gamma^0(dh_t(X), dh_t(Y))$$

qui définit bien, pour chaque $t \in T$, une métrique riemannienne transverse à $\mathcal{F}_t$. Ainsi le difféomorphisme h_t est **transversalement une isométrie**.

(ii) Pour tout $t \in T$, soit $M_t^{\#} \longrightarrow M$ le G-fibré principal des repères orthonormés directs transverses à $\mathcal{F}_t$. Comme $h_t : M \longrightarrow M$ est un difféomorphisme qui est transversalement une isométrie il se relève en un difféomorphisme

$$h_t^{\#} : M_t^{\#} \longrightarrow M^{\#}$$

défini comme suit. Soit (x_t, ε_t) un point de $M_t^{\#}$: x_t est un point de M et ε_t un repère orthonormé direct transverse à $\mathcal{F}_t$; on pose

$$(x,\varepsilon) = h_t^{\#}(x_t,\varepsilon_t) = (h_t(x_t), dh_t(\varepsilon_t)).$$

En plus $h_t^{\#}$ est un isomorphisme du fibré principal $G \longrightarrow M_t^{\#} \longrightarrow M$ sur le fibré principal $G \longrightarrow M^{\#} \longrightarrow M$. On peut donc confondre $M_t^{\#}$ et $M^{\#}$. La famille $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ se relève alors à $M^{\#}$ en une famille à type différentiable fixé $(\mathcal{F}_t^{\#})_{t\in T}$ de feuilletages tranversalement parallélisables de codimension $n + \frac{n(n-1)}{2}$. Chaque $\mathcal{F}_t^{\#}$ est invariant par l'action de G sur $M^{\#}$.

(iii) Pour tout $t \in T$, la métrique γ_t définie par

$$\gamma_t(X,Y) = \frac{1}{2}\Big\{\gamma_t^0(X,Y) + \gamma_t^0(J_tX, J_tY)\Big\} \tag{4.2}$$

où $J_t : \nu\mathcal{F}_t \longrightarrow \nu\mathcal{F}_t$ est l'automorphisme associé à la structure complexe transverse de $\mathcal{F}_t$, est visiblement hermitienne et dépend différentiablement de t. ∎

Soit $(E_t \longrightarrow M)_{t\in T}$ une famille différentiable de $\mathcal{F}_t$-fibrés hermitiens **différentiablement triviale** i.e il existe une famille différentiable $(\phi_t)_{t\in T}$ d'isomorphismes de $\mathcal{F}$-fibrés faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} E_t & \xrightarrow{\phi_t} & E_0 \\ {\scriptstyle q_t}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle q_0} \\ M & \xrightarrow{\overline{\phi}_t} & M \end{array} \tag{4.3}$$

où $\overline{\phi}_t$ est le difféomorphisme de M induit par ϕ_t. Par exemple si $\mathcal{F}_t$ est une famille à type différentiable fixé de feuilletages hermitiens alors $\nu\mathcal{F}_t$ est une famille différentiablement triviale de $\mathcal{F}_t$-fibrés hermitiens sur M.

Une **famille différentiable d'opérateurs différentiels basiques d'ordre** m, est la donnée, pour chaque $t \in T$ d'un opérateur différentiel basique D_t opérant sur les sections basiques $C^\infty(E_t/\mathcal{F}_t)$ tel que dans l'ecriture locale

$$D_t = \sum_{|\mathbf{s}|\leq m} a_{\mathbf{s}}(y,t)\frac{\partial^{|\mathbf{s}|}}{\partial y_1^{s_1}\cdots\partial y_n^{s_n}} \tag{4.4}$$

les fonctions $a_{\mathbf{s}}$ dépendent différentiablement du paramètre $t \in T$. On dira que D_t est une famille **transversalement elliptique** (resp. **transversalement fortement elliptique**) si chaque D_t est transversalement elliptique (resp. transversalement fortement elliptique).

Dans toute la suite, $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ sera une déformation à type différentiable fixé de $\mathcal{F}$, $(E_t)_{t\in T}$ une famille différentiablement triviale de $\mathcal{F}_t$-fibrés hermitiens de rang k et $(D_t)_{t\in T}$ une famille différentiable d'opérateurs transversalement fortement elliptiques d'ordre $m = 2m'$ autoadjoints.

Comme la codimension réelle est ici $2n$, le groupe G sera cette fois-ci $\mathrm{SO}(2n)$. Toute la situation se relève à $M^\#$:

(1) La famille $\mathcal{F}_t$ en une famille à type différentiable fixé de feuilletages T.P. $\mathcal{F}_t^\#$ invariants sous l'action de G.
(2) La famille E_t en une famille différentiablement triviale de $\mathcal{F}_t^\#$-fibrés hermitiens $E_t^\#$, G-invariants et qui sont en plus canoniquement triviaux sur des ouverts qui sont images réciproques d'ouverts U de M trivialisant E_t.
(3) Les opérateurs D_t en des opérateurs $D_t^\#$ basiques commutant à l'action de G.
(4) Le groupe G agit sur chaque facteur $E_t^\#$ de telle sorte que les sections basiques de E_t s'identifient canoniquement aux sections basiques de $E_t^\#$ invariantes par cette action. L'isomorphisme

$$C^\infty(E_t/\mathcal{F}_t) \simeq C^\infty_G(E_t^\#/\mathcal{F}_t^\#)$$

est donné par le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} E_t^\# \arrow[r] \arrow[d] & E_t \arrow[d] \\ M^\# \arrow[r] & M \end{tikzcd} \tag{4.5}$$

(5) Soit $D'_t = D_t^{\#} + Q$ (cf. (2.4)); ici l'opérateur Q est indépendant de t du fait que les fibrés principaux feuilletés $M_t^{\#}$ sont isomorphes à l'aide de $h_t^{\#}$. Les opérateurs D'_t sont fortement transversalement elliptiques et restreints à $C_G^\infty(E_t^{\#}/\mathcal{F}_t^{\#})$ ils coincident (via l'isomorphisme $C^\infty(E_t/\mathcal{F}_t) \simeq C_G^\infty(E_t^{\#}/\mathcal{F}_t^{\#})$) avec les opérateurs D_t.

(6) En vertu des points (1) et (2) on peut supposer que la variété $M^{\#} \times T$ est munie d'un feuilletage qui coincide avec $\mathcal{F}^{\#}$ sur chaque facteur $M^{\#} \times \{t\}$ et que la famille $E_t^{\#}$ est en fait un fibré $E^{\#} \longrightarrow M^{\#} \times T$ qui est $E^{\#} \longrightarrow M^{\#} \times \{t\}$ pour chaque $t \in T$.

(7) Il n'y a donc que l'opérateur D_t qui se déforme quand t décrit T.

Ces objets seront fixés tout le long de ce papier. Au fibré $E^{\#} \longrightarrow M^{\#} \times T$ correspond un fibré utile $\overline{E} \longrightarrow W \times T$ tel que sa restriction à chaque $W \times \{t\}$ est le fibré utile associé à $E^{\#} \longrightarrow M^{\#}$. La famille D'_t induit une famille différentiable d'opérateurs différentiels $\overline{D}_t$ fortement elliptiques d'ordre m opérant sur l'espace $C^\infty(\overline{E})$. Pour chaque $t \in T$, $\overline{D}_t$ commute à l'action de G sur $\overline{E}$.

5. Déformations d'opérateurs transversalement fortement elliptiques

L'objet de cette section est l'étude des déformations du spectre de $\overline{D}_t$, et la dépendance différentiable, en fonction de t, de l'opérateur de Green $\overline{K}_t$ associé ainsi que celle de la projection orthogonale $\overline{P}_t : C^\infty(\overline{E}) \longrightarrow N(\overline{D}_t)$. Ces propriétés se transposent aux familles D_t, K_t et P_t opérant sur l'espace $C^\infty(E/\mathcal{F})$.

De manière analogue à [KS2] on démontre la

5.1. Proposition: *Si $\overline{D}_t : C_G^\infty(\overline{E}) \longrightarrow C_G^\infty(\overline{E})$ est surjectif et vérifie l'inégalité*

$$||\overline{D}_t\alpha||_0 \geq C||\alpha||_0 \tag{5.1}$$

où C est une constante positive indépendante de t, l'opérateur $\overline{D}_t^{-1}$ dépend différentiablement de t.

Soit Γ une courbe C^∞ dans le plan complexe bordant un ouvert V qui contient l'origine. Soit $\mathcal{H}_G^t(\Gamma)$ le sous-espace de $C_G^\infty(\overline{E})$ engendré par les sections propres $\overline{e}_k(t)$ de $\overline{D}_t$ correspondant aux valeurs propres contenues dans V; c'est un sous-espace de dimension finie de l'espace préhilbertien $C_G^\infty(\overline{E})$, donc complet. Notons $\overline{P}_t(\Gamma)$ la projection orthogonale

$$\overline{P}_t(\Gamma) : C_G^\infty(\overline{E}) \longrightarrow \mathcal{H}_G^t(\Gamma)$$

qui est donnée par

$$\overline{P}_t(\Gamma)\alpha = \sum_{\lambda_k(t)\in V} \langle \alpha, \overline{e}_k(t)\rangle \overline{e}_k(t). \tag{5.2}$$

Soit d'autre part

$$\overline{K}_t(\Gamma)\alpha = \sum_{\lambda_k(t)\notin V} \frac{\langle \alpha, \overline{e}_k(t)\rangle}{\lambda_k(t)} \overline{e}_k(t).$$

On a de manière évidente

$$\overline{D}_t\overline{K}_t(\Gamma)\alpha + \overline{P}_t(\Gamma)\alpha = \alpha$$

pour toute section $\alpha \in C^\infty_G(\overline{E})$.

Si V ne contient que 0 comme valeur propre on notera $\mathcal{H}^t_G(\Gamma)$, $\overline{K}_t(\Gamma)$ et $\overline{P}_t(\Gamma)$ simplement $\mathcal{H}^t_G$, $\overline{K}_t$ et $\overline{P}_t$.

La proposition 2, p. 55 de [KS2] admet une version G-équivariante qu'on peut établir de façon similaire.

5.2. Proposition: *Soit $t_0 \in T$. Si pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\lambda_k(t_0) \notin \Gamma$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que les opérateurs $\overline{P}_t(\Gamma)$ et $\overline{K}_t(\Gamma)$ dépendent différentiablement de t pour $|t - t_0| < \varepsilon$.*

On a d'autre part la

5.3. Proposition: *Pour tout $k \in \mathbb{N}$ fixé, la fonction $t \longrightarrow \lambda_k(t)$ est continue.*

Démonstration: Le spectre de l'opérateur $\overline{D}_t$ opérant sur $C^\infty_G(\overline{E})$ est contenu dans le spectre de $\overline{D}_t$ opérant sur tout l'espace $C^\infty(\overline{E})$. Le résultat cherché découle alors de [KS2] p. 47. ∎

De ce qui précède on déduit le théorème suivant qui sera fondamental dans la démonstration de la stabilité du caractère kählérien transverse d'un feuilletage.

5.4. Théorème:

(i) *La dimension du sous-espace $\mathcal{H}^t_G$ est une fonction semi-continue supérieurement en $t \in T$.*

(ii) *Si la dimension de $\mathcal{H}^t_G$ est indépendante de t, les opérateurs $\overline{P}_t$ et $\overline{K}_t$ dépendent différentiablement de t.*

6. Stabilité kählérienne transverse

La famille $\mathcal{F}_t$ étant différentiablement triviale, $\mathcal{F}_t^{\#}$ le sera aussi. Sur le $\mathcal{F}$-fibré hermitien on a une famille différentiable d'opérateurs fortement transversalement elliptiques d'ordre $m = 2m'$ autoadjoints chacun opérant sur les sections basiques du fibré $E \longrightarrow M$. A cette famille, comme on l'a vu, est associée une famille différentiable d'opérateurs $\overline{D}_t$ fortement elliptiques de même ordre agissant sur les sections G-invariantes du G-fibré $\overline{E} \longrightarrow W$ et commutant à l'action de G. L'isomorphisme canonique

$$\theta : C^\infty(E/\mathcal{F}_t) \longrightarrow C_G^\infty(\overline{E}) \tag{6.1}$$

est tel que : *si α est une section basique de E qui dépend différentiablement de t, alors $\theta(\alpha)$ dépend aussi différentiablement de t.*

Le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} C^\infty(E/\mathcal{F}_t) \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "D_t"'] & C_G^\infty(\overline{E}) \arrow[d, "\overline{D}_t"] \\ C^\infty(E/\mathcal{F}_t) \arrow[r, "\theta"] & C_G^\infty(\overline{E}) \end{tikzcd} \tag{6.2}$$

permet de transposer toutes les propriétés de la famille $\overline{D}_t$ à la famille D_t. En particulier pour tout $t \in T$, le spectre $\lambda_k(t)$ de $\overline{D}_t$ est le même que celui de D_t, les sections propres associées à $\lambda_k(t)$, $\overline{e}_k(t)$ et $e_k(t)$ respectivement de $\overline{D}_t$ et D_t sont reliées par $\theta(e_k(t)) = \overline{e}_k(t)$. On déduit du Théorème 5.4 le

6.1. THÉORÈME:

(i) *La dimension du sous-espace $\mathcal{H}_t = N(D_t)$ est une fonction semi-continue supérieurement en $t \in T$.*

(ii) *Si la dimension de $\mathcal{H}_t$ est indépendante de t, les opérateurs P_t et K_t dépendent différentiablement de t.*

Pour tout $t \in T$ on posera

$$b_t^r = \dim H^r(M/\mathcal{F}_t) \quad \text{et} \quad b_t^{p,q} = \dim H^{p,q}(M/\mathcal{F}_t).$$

Comme $\mathcal{F}_t$ est une déformation de $\mathcal{F}$ à type différentiable fixé, $H^r(M/\mathcal{F}_t)$ est isomorphe à $H^r(M/\mathcal{F})$ et donc $b_t^r = b_0^r$ qu'on notera tout simplement b^r. Si les $\mathcal{F}_t$ sont riemanniens, d'après [EN2], pour avoir cette égalité il suffit que la déformation soit à **type topologique fixé.**

On posera

$$Z^r(M/\mathcal{F}_t) = \{r\text{-formes basiques de } \mathcal{F}_t, \text{ fermées}\},$$
$$Z^{p,q}(M/\mathcal{F}_t) = \{\text{formes basiques de type } (p,q) \text{ de } \mathcal{F}_t, d\text{-fermées}\}.$$

Soit

$$A_t : \Omega^{p,q}(M/\mathcal{F}_t) \longrightarrow \Omega^{p,q}(M/\mathcal{F}_t)$$

l'opérateur différentiel d'ordre 4 défini par

$$A_t = \partial_t\overline{\partial}_t\overline{\partial}_t^*\partial_t^* + \overline{\partial}_t^*\partial_t^*\partial_t\overline{\partial}_t + \overline{\partial}_t^*\partial_t\partial_t^*\overline{\partial}_t + \partial_t^*\overline{\partial}_t\overline{\partial}_t^*\partial_t + \overline{\partial}_t^*\overline{\partial}_t + \partial_t^*\partial_t.$$

6.2. Proposition:

(i) *L'opèrateur A_t est fortement transversalement elliptique auto-adjoint.*

(ii) *une section $\alpha \in \Omega^{p,q}(M/\mathcal{F}_t)$ vérifie $A_t\alpha = 0$ si et seulement si*

$$\partial_t\alpha = \overline{\partial}_t\alpha = 0 \ \text{ et } \ \overline{\partial}_t^*\partial_t^*\alpha = 0.$$

(iii) *Si $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0$ est transversalement kählérien on a*

$$A_0 = \Delta''\Delta'' + \overline{\partial}^*\overline{\partial} + \partial^*\partial$$

où $\Delta'' = \overline{\partial}\,\overline{\partial}^* + \overline{\partial}^*\overline{\partial}$ est l'opérateur défini au (3.2).

Démonstration: Un calcul immédiat permet d'établir que l'opérateur A_t est autoadjoint. Pour la forte ellipticité transverse il suffit de remarquer que sur une transversale, l'opérateur A_t coincide avec celui de [KS2] p. 71 (noté E_t) défini dans le cas classique. Le point (ii) découle de l'inégalité

$$||\overline{\partial}_t^*\partial_t^*\alpha||_t^2 + ||\overline{\partial}_t\alpha||_t^2 + ||\partial_t\alpha||_t^2 \leq \langle A_t\alpha, \alpha\rangle_t$$

où $\langle\ ,\ \rangle_t$ est le produit hermitien sur l'espace $\Omega^{p,q}(M/\mathcal{F}_t)$. Le point (iii) découle du fait que $\Delta = 2\Delta''$ (cf. [Ek2]). ∎

Soient $\mathbf{F}_t^{p,q}$ le noyau de A_t (qui est de dimension finie). Considérons la projection orthogonale $F_t : \Omega^{p,q}(M/\mathcal{F}_t) \longrightarrow \mathbf{F}_t^{p,q}$ et K_t l'opérateur de Green associé à A_t. On rappelle l'identité

$$\alpha = A_tK_t\alpha + F_t\alpha.$$

Les résultats et les démonstrations des propositions 7 et 8 de [KS2] p.72 et 73 marchent de manière immédiate dans le cas basique; plus précisément

6.3. PROPOSITION:

(i) *On a une décomposition orthogonale*

$$Z^{p,q}(M/\mathcal{F}_t) = \partial_t\overline{\partial}_t(\Omega^{p-1,q-1}(M/\mathcal{F}_t)) \oplus \mathbf{F}_t^{p,q}.$$

(ii) *Il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\dim \mathbf{F}_t^{1,1}$ est indépendante de t pour $|t| < \varepsilon$ et égale à la dimension de l'espace $\mathcal{H}^{1,1}(M/\mathcal{F})$ des formes harmoniques basiques de type $(1,1)$ de $\mathcal{F}$.*

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le résultat de stabilité du caractère kählérien transverse des feuilletages qui est le but principal de ce travail.

6.4. THÉORÈME: *Soient $\mathcal{F}$ un feuilletage hermitien homologiquement orientable sur une variété compacte M et $\mathcal{F}_t$ une déformation de $\mathcal{F}$ à type différentiable fixé paramétrée par un voisinage T de 0 dans $\mathbb{R}^d$ par des feuilletages transversalement holomorphes. Supposons que la métrique hermitienne transverse σ de $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0$ soit kählérienne. Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $t \in T$, $|t| < \varepsilon$, le feuilletage $\mathcal{F}_t$ possède une métrique kählérienne transverse σ_t telle que $\sigma_0 = \sigma$ et dépendant différentiablement de t pour $|t| < \varepsilon$.*

Démonstration: Soit γ_t la famille de métriques définies par la formule (4.2) et notons $\widetilde{\omega}_t(\cdot,\cdot) = \gamma_t(J_t\cdot,\cdot)$ la famille de 2-formes différentielles basiques associées. La 2-forme $\widetilde{\omega}_0$ est fermée par hypothèse. On pose

$$\omega_t = \frac{1}{2}\left(F_t\widetilde{\omega}_t + \overline{F_t\widetilde{\omega}_t}\right).$$

Par la Proposition 6.2 on a

$$dF_t\widetilde{\omega}_t = \partial_t F_t\widetilde{\omega}_t + \overline{\partial}_t F_t\widetilde{\omega}_t = 0$$

et donc $d\omega_t = 0$.

D'autre part comme $\widetilde{\omega}_t$ dépend différentiablement de t, $|t| < \varepsilon$ et que $\dim \mathbf{F}_t^{1,1}$ est indépendante de t (voir la Proposition 6.3), on déduit du Théorème 6.1 que $F_t\widetilde{\omega}_t$ dépend différentiablement de t pour $|t| < \varepsilon$. Comme $\widetilde{\omega}_0$ est définie positive, il en est de même pour ω_t. Il en résulte que pour $|t| < \varepsilon$

$$\sigma_t(\cdot,\cdot) = \omega_t(\cdot, J_t\cdot)$$

est une mĕtrique kählérienne transverse pour $\mathcal{F}_t$ qui dépend de manière différentiable de t et vérifie $\sigma_0 = \sigma$. ∎

7. Exemple

Dans cette section nous allons montrer sur un exemple l'existence de feuilletages transversalement kählériens admettant des déformations à type différentiable fixé non triviales. Pour ce faire nous allons formuler la notion de déformation de façon un peu différente de celle qui a été donnée en 4.1.

Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage transversalement holomorphe de codimension n sur une variété compacte M défini par un cocycle feuilleté $\{U_i, f_i, \gamma_{ij}\}$ où $(U_i)_{i\in I}$ est un recouvrement ouvert de M , $f_i : U_i \longrightarrow \mathbb{C}^n$ une submersion et γ_{ij} des biholomorphismes locaux de $\mathbb{C}^n$ tels que sur $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ on ait $f_j = \gamma_{ij} \circ f_i$.

Une **déformation** $\mathcal{F}_t$ de $\mathcal{F}$ paramétrée par un germe en 0 d'**espace analytique** $(T, 0)$ (cf. [Ma] pour les définitions et tous les détails) est la donnée d'un recouvrement ouvert $(U_i)_{i\in I}$, d'une famille de submersions $f_i^t : U_i \longrightarrow \mathbb{C}^n$ et une famille de biholomorphismes $\gamma_{ij}^t : f_i^t(U_i \cap U_j) \longrightarrow f_j^t(U_i \cap U_j)$ dépendant holomorphiquement de t et tels que :

(i) $f_j^t = \gamma_{ij} \circ f_i^t$;

(ii) $f_i^0 = f_i$ et $\gamma_{ij}^0 = \gamma_{ij}$.

Deux déformations $\mathcal{F}_t$ et $\mathcal{F}'_t$ paramétrées par le même germe d'espace analytique $(T, 0)$ sont dites *isomorphes* s'il existe une famille différentiable de difféomorphismes h_t de M tels que $h_t^*(\mathcal{F}'_t) = \mathcal{F}_t$.

Si $\varphi : (T', 0) \longrightarrow (T, 0)$ est un morphisme d'espaces analytiques, alors toute déformation $\mathcal{F}_t$ de $\mathcal{F}$ paramétrée par $(T, 0)$ définit une déformation $\mathcal{F}_{\varphi(t')}$ paramétrée par $(T', 0)$. On dira que $\mathcal{F}_{\varphi(t')}$ est la **déformation induite** par φ.

Soit Θ le faisceau des germes de champs de vecteurs basiques holomorphes sur M. Un élément de Θ est représenté sur un ouvert de coordonnées locales $(x_1, \ldots, x_p, z_1, \ldots, z_n)$ (sur lequel $\mathcal{F}$ est défini par les équations $dz_1 = \cdots = dz_n = 0$) par un champ du type

$$Z = \sum_{k=1}^{n} a_k(z_1, \ldots, z_n) \frac{\partial}{\partial z_k}$$

où pour tout $k = 1, \ldots, n$, a_k est une fonction holomorphe. Ce faisceau n'est pas fin et donne lieu à une théorie de cohomologie non triviale $H^*(M, \Theta)$ mais de dimension finie (c'est la cohomologie d'un complexe elliptique sur une variété compacte). L'espace $H^1(M, \Theta)$ paramètre les classes d'équivalence de déformations infinitésimales de $\mathcal{F}$.

7.1. THÉORÈME ([GHS]): *Soient $\mathcal{F}$ un feuilletage transversalement holomorphe sur une variété compacte M et Θ le faisceau des germes de champs de vecteurs basiques holomorphes. Alors il existe un germe d'espace analytique $(S,0)$ paramétrant une déformation $\mathcal{F}_s$ tel que pour toute autre déformation $\mathcal{F}_t$ paramétrée par $(T,0)$ il existe un morphisme $\varphi : (T,0) \longrightarrow (S,0)$ tel que la déformation induite $\mathcal{F}_{\varphi(t)}$ soit isomorphe à $\mathcal{F}_t$. En plus il existe un voisinage U de 0 dans $H^1(M,\Theta)$ (qui est de dimension finie) et une application holomorphe $\beta : U \longrightarrow H^2(M,\Theta)$ tels que $(S,0)$ est le germe en 0 de $\beta^{-1}(0)$.*

Le germe d'espace $(S,0)$ est appelé **espace versel** de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}_s$ la **famille verselle** de $\mathcal{F}$. Si $H^2(M,\Theta) = 0$, S est un voisinage de 0 dans $H^1(M,\Theta)$. Si $H^1(M,\Theta) = 0$, S est réduit à un point; dans ce cas on dira que $\mathcal{F}$ est **rigide**.

Dans toute la suite on suppose que toutes les déformations de $\mathcal{F}$ que l'on considère sont à type différentiable fixé. Alors du point de vue infinitésimal les classes d'équivalence de telles déformations sont décrites par le premier espace vectoriel $H_b^{01}(M,\nu^{10})$ de cohomologie basique de Dolbeault à valeurs dans le fibré normal holomorphe ν^{10}. Les espaces vectoriels $H_b^{0*}(M,\nu^{10})$ sont de dimension finie [Ek2]. On a alors un théorème de versalité faible.

7.2. THÉORÈME ([EN3]): *Si le feuilletage $\mathcal{F}$ est hermitien il existe une déformation $\mathcal{F}_{s_b}$ à type différentiable fixé paramétrée par un germe d'espace analytique $(S_b,0)$ avec la propriété de versalité faible suivante : si $\mathcal{F}'$ est un feuilletage proche de $\mathcal{F}$ dans la topologie C^∞ et différentiablement conjugué à $\mathcal{F}$ alors il existe un difféomorphisme h de M proche de l'identité et $s_b \in S_b$ tels que $\mathcal{F}' = h^*(\mathcal{F}_{s_b})$ et h transforme la structure complexe transverse de $\mathcal{F}_{s_b}$ en celle de $\mathcal{F}'$. En plus il existe un voisinage U de 0 dans $H_b^{01}(M,\nu^{10})$ et une application holomorphe $\beta : U \longrightarrow H_b^{02}(M,\nu^{10})$ tels que $(S_b,0)$ est le germe en 0 de $\beta^{-1}(0)$.*

En particulier ce théorème dit que si $H_b^{01}(M,\nu^{10})$ est non nul et si $H_b^{02}(M,\nu^{10})$ est nul alors S_b est un voisinage de 0 dans $H_b^{01}(M,\nu^{10})$ et donc le feuilletage $\mathcal{F}$ se déforme à type différentiable fixé. Notre exemple sera de ce type.

Si X est une variété complexe, $T^{10}(X)$ sera son fibré tangent holomorphe et sa cohomologie de Dolbeault à valeurs dans $T^{10}(X)$ sera notée $H^{0q}(X,T^{10}(X))$.

7.3. Construction de l'exemple: Soit $\mathbb{T} = \mathbb{C}/\Gamma$ le tore complexe défini par le réseau standard $\Gamma = \mathbb{Z} \oplus i\mathbb{Z}$. On note F la variété complexe $\mathbb{T} \times \mathbb{P}^1$ où $\mathbb{P}^1$ est l'espace projectif complexe de dimension 1; F est kählérienne de dimension complexe 2. Soient $\zeta = 1 + i\tau$ et a deux nombres complexes avec $|a| = 1$, $a \neq 1$

et $\Phi: F \longrightarrow F$ la transformation définie par

$$\Phi(z,w) = (\psi(z), \varphi_a(w)),$$

où $\psi(z) = z + \zeta$ et φ_a est l'automorphisme de $\mathbb{P}^1$ induit par :

$$\mathbb{C}^2 - \{0\} \xrightarrow{\widehat{\varphi}_a} \mathbb{C}^2 - \{0\}$$

$$(w_1, w_2) \longrightarrow (aw_1, \bar{a}w_2).$$

Notons $\mathrm{Aut}(F)$ le groupe des automorphismes de la variété kählérienne F; alors $\Phi \in \mathrm{Aut}(F)$ et l'adhérence K de $\{\Phi^n : n \in \mathbb{Z}\}$ dans $\mathrm{Aut}(F)$ est un sous-groupe compact. Notons $H_K^{0q}(F, T^{10}(F))$ la cohomologie de Dolbeault de F à valeurs dans le fibré tangent holomorphe $T^{10}(F)$ des formes de type $(0,q)$ invariantes par K. Alors on a (cf. [Ko]) :

$$H^{0q}(\mathbb{T}, T^{10}(\mathbb{T})) = \begin{cases} \mathbb{C} & \text{pour } q = 0 \text{ ou } 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$H^{0q}(\mathbb{P}^1, T^{10}(\mathbb{P}^1)) = \begin{cases} \mathbb{C}^3 & \text{pour } q = 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La formule de Künneth nous donne :

$$H^{01}(F, T^{10}(F)) = H^{00}(\mathbb{P}^1, T^{10}(\mathbb{P}^1)) \otimes H^{01}(\mathbb{T}, \mathbb{C}) \oplus H^{01}(\mathbb{T}, T^{10}(\mathbb{T})).$$

Comme l'action de Φ respecte chaque facteur du produit $F = \mathbb{T} \times \mathbb{P}^1$ on a une formule analogue au niveau de la cohomologie K-invariante :

$$H_K^{01}(F, T^{10}(F)) = H_K^{00}(\mathbb{P}^1, T^{10}(\mathbb{P}^1)) \otimes H_K^{01}(\mathbb{T}, \mathbb{C}) \oplus H_K^{01}(\mathbb{T}, T^{10}(\mathbb{T})).$$

Le groupe K étant compact, la cohomologie K-invariante $H_K^{0q}(F, T^{10}(F))$ s'injecte dans la cohomologie totale $H^{0q}(F, T^{10}(F))$. D'autre part le générateur $d\bar{z} \otimes \frac{\partial}{\partial z}$ de $H^{01}(\mathbb{T}, T^{10}(\mathbb{T}))$ est K-invariant; il engendre donc $H_K^{01}(\mathbb{T}, T^{10}(\mathbb{T}))$. Par conséquent $H_K^{01}(\mathbb{T}, T^{10}(\mathbb{T})) = \mathbb{C}$. De même $H^{01}(\mathbb{T}, \mathbb{C})$ est engendré par $d\bar{z}$, qui est un élément invariant par ψ donc K-invariant; par conséquent il engendre $H_K^{01}(\mathbb{T}, \mathbb{C})$. D'où $H_K^{01}(\mathbb{T}, \mathbb{C}) = \mathbb{C}$.

Il reste maintenant à calculer $H_K^{00}(\mathbb{P}^1, T^{10}(\mathbb{P}^1))$, i.e. déterminer les champs de vecteurs holomorphes sur $\mathbb{P}^1$ qui sont K-invariants. Désignons par ξ la coordonnée non homogène sur $\mathbb{P}^1$. Un élément de $H^{00}(\mathbb{P}^1, T^{10}(\mathbb{P}^1))$ s'exprime alors en fonction de ξ sous la forme (cf. [KS1] p. 437) :

$$(c_2\xi^2 + c_1\xi + c_0)\frac{\partial}{\partial\xi},$$

avec c_0, c_1, c_2 des constantes complexes. Donc $\xi^2\frac{\partial}{\partial\xi}$, $\xi\frac{\partial}{\partial\xi}$ et $\frac{\partial}{\partial\xi}$ sont les générateurs de $H^{00}(\mathbb{P}^1, T^{10}(\mathbb{P}^1))$. Nous allons chercher lesquels d'entre eux sont K-invariants. En coordonnées homogènes (w_1, w_2) sur $\mathbb{P}^1$, ces trois champs s'écrivent respectivement dans l'ouvert $U_1 = \{w_1 \neq 0\}$:

$$\frac{w_2^2}{w_1}\frac{\partial}{\partial w_2}, \quad w_2\frac{\partial}{\partial w_2} \quad \text{et} \quad w_1\frac{\partial}{\partial w_2},$$

puisque $\frac{\partial}{\partial\xi}$ correspond à $w_1\frac{\partial}{\partial w_2}$. La condition d'invariance pour un champ de la forme $f(w_1, w_2)\frac{\partial}{\partial w_2}$ s'écrit :

$$f(aw_1, \bar{a}w_2) = \bar{a}f(w_1, w_2),$$

et elle est satisfaite uniquement par le champ $w_2\frac{\partial}{\partial w_2}$. On démontre de la même manière que dans l'ouvert $U_2 = \{w_2 \neq 0\}$, le seul champ invariant s'écrit $w_1\frac{\partial}{\partial w_1}$ et ces deux champs représentent le même champ de vecteurs holomorphe sur $\mathbb{P}^1$. Ainsi $H_K^{00}(\mathbb{P}^1, T^{10}(\mathbb{P}^1)) = \mathbb{C}$. D'où enfin :

$$H_K^{01}(F, T^{10}(F) = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}.$$

Ensuite, on montre que $H_K^{02}(F, T^{10}(F)) = 0$, puisque

$$H_K^{02}(F, T^{10}(F)) = H_K^{02}(\mathbb{P}^1, T^{10}(\mathbb{P}^1)) \oplus H_K^{02}(\mathbb{T}, T^{10}(\mathbb{T})),$$

et que $H_K^{02}(\mathbb{P}^1, T^{10}(\mathbb{P}^1)) = H_K^{02}(\mathbb{T}, T^{10}(\mathbb{T})) = 0$.

Soit maintenant $\mathcal{F}$ le feuilletage obtenu en suspendant l'automorphisme Φ. Il est supporté par la variété $M = \mathbb{S}^1 \times F$ et est transverse aux fibres de la fibration définie par la première projection $(\theta, \xi) \in \mathbb{S}^1 \times F \longrightarrow \theta \in \mathbb{S}^1$. C'est un feuilletage transversalement kählérien dont la cohomologie basique $H_b^{0q}(M, \nu^{10})$ coïncide avec $H_K^{0q}(F, T^{10}(F))$, ainsi

$$H_b^{01}(M, \nu^{10}) = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \text{ et } H_b^{02}(M, \nu^{10}) = 0.$$

Par conséquent, en vertu de ce qu'on a fait remarquer précédemment, l'espace S_b est un voisinage de 0 dans $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ et donc $\mathcal{F}$ se déforme bien à type différentiable fixé. ∎

References

[Ek1] A. El Kacimi Alaoui, *Stabilité des V-variétés kählériennes*, Lecture Notes in Mathematics **1345**, Springer-Verlag, Berlin, 1988, pp. 111–123.

[Ek2] A. El Kacimi Alaoui, *Opérateurs transversalement elliptiques sur un feuilletage riemannien et applications*, Compositio Mathematica **73** (1990), 57–106.

[EN1] A. El Kacimi Alaoui et M. Nicolau, *Structures géométriques invariantes et feuilletages de Lie*, Indagationes Mathematicae, New Series **1** (1990), 323–334.

[EN2] A. El Kacimi Alaoui and M. Nicolau, *On the topological invariance of the basic cohomology*, Mathematische Annalen **295** (1993), 627–634.

[EN3] A. El Kacimi Alaoui et M. Nicolau, *Déformations des feuilletages transversalement holomorphes à type différentiable fixé*, Publicacions Matemàtiques **33** (1989), 485–500.

[GHS] J. Girbau, A. Haefliger and D. Sundararaman, *On deformations of transversely holomorphic foliations*, Journal für die reine und angewandte Mathematik **345** (1983), 122–147.

[Ko] K. Kodaira, *Complex Manifolds and Deformation of Complex Structures*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften **283** (1985).

[KS1] K. Kodaira and D. C. Spencer, *On deformations of complex analytic structures, I-II*, Annals of Mathematics **67** (1958), 328–466.

[KS2] K. Kodaira and D. C. Spencer, *On deformations of complex structures, III. Stability theorems for complex structures*, Annals of Mathematics **71** (1960), 43–76.

[Ma] B. Malgrange, *Analytic spaces*, L'Enseignement Mathématique **14** (1968), 1–28.

[Ms] X. Masa, *Duality and minimality in Riemannian foliations*, Commentarii Mathematici Helvetici **67** (1992), 17–27.

[Mo] P. Molino, *Géométrie globale des feuilletages riemanniens*, Proceedings Koninklijke Nederlandse Akademie, Ser. A, **1** (1982), 45–76.

[Re] B. Reinhart, *Harmonic integrals on foliated manifolds*, American Journal of Mathematics **81** (1959), 529–586.

[Ru] H. Rummler, *Quelques notions simples en géométrie riemannienne et leurs applications aux feuilletages compacts*, Commentarii Mathematici Helvetici **54** (1979), 224–239.