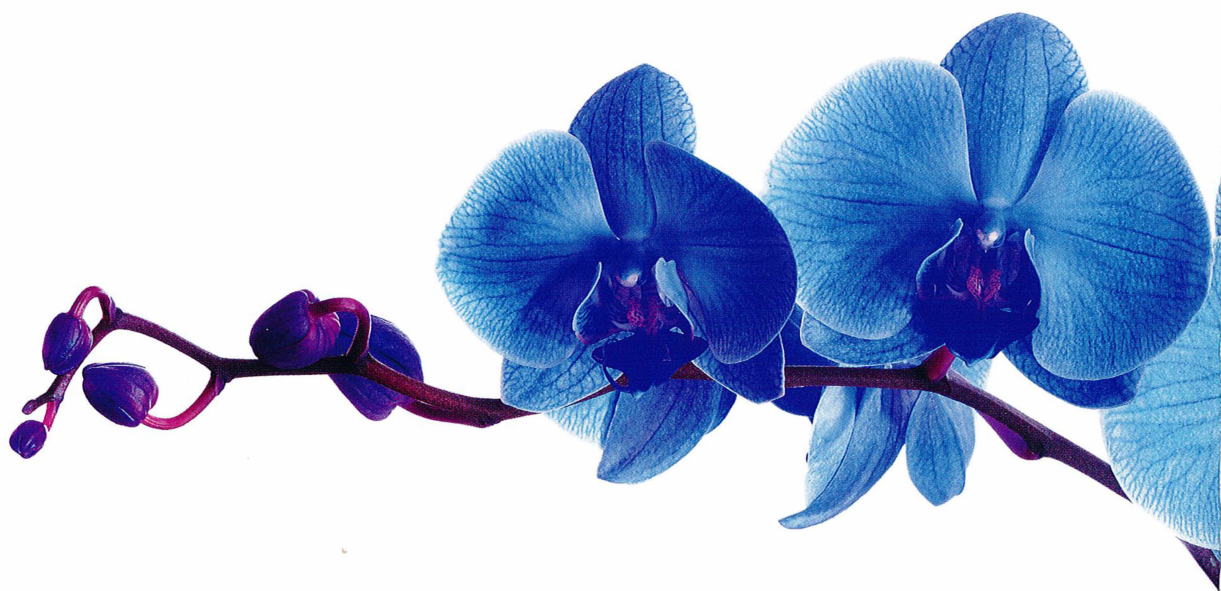


Aziz El Kacimi Alaoui

Géométrie euclidienne élémentaire



ellipses

Géométrie euclidienne élémentaire

Aziz El Kacimi Alaoui



Collection *Références sciences*

dirigée par Paul de Laboulaye

paul.delaboulaye@editions-ellipses.fr

Calcul différentiel, Marcel Grangé, 240 pages, 2012.

Convolution, séries et intégrales de Fourier, Jacques Peyrière, 120 pages, 2012.

De l'intégration aux probabilités, Olivier Garet, Aline Kurtzmann, 504 pages, 2011.

Épistémologie mathématique, Henri Lombardi, 216 pages, 2011.

Géométrie euclidienne élémentaire, Aziz El Kacimi Alaoui, 240 pages, 2012.

Ingénierie Dirigée par les Modèles, Jean-Marc Jézéquel, Benoît Combemale, Didier Vojtisek, 144 pages, 2012.

Intégration - Intégrale de Lebesgue et introduction à l'analyse fonctionnelle,
Thierry Goudon, 192 pages, 2011.

Suites et séries numériques. Suites et séries de fonctions, Mohammed El Amrani,
456 pages, 2011.

Traité de géométrie affine, Dominique Bourn, 168 pages, 2012.

ISBN 978-2-7298-71949

© Ellipses Édition Marketing S.A., 2012
32, rue Bargue 75740 Paris cedex 15

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5.2° et 3°a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective », et d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4). Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

www.editions-ellipses.fr

AVANT-PROPOS

Depuis les temps anciens, la *Géométrie* est considérée comme un élément de base de la connaissance. En témoignait la fameuse devise *Que nul n'entre ici s'il n'est géomètre !* gravée au fronton de l'Académie de Platon. En mathématiques, elle en est la colonne vertébrale ! L'algèbre et l'analyse ont progressé substantiellement grâce à son apport, tant la vision géométrique inspire et guide les démonstrations. Elle doit donc être au premier rang dans l'enseignement des mathématiques, a fortiori en Licence 3 et Master enseignement. Mais l'enseigner actuellement n'est pas toujours si facile. Depuis fort longtemps la même question se pose : qu'ont appris et que savent en géométrie les étudiants quand ils arrivent en Licence 3 par exemple ? Pas mal de choses répondent certains ! Mais cette réponse ne convainc que ses auteurs. Ce constat (d'échec) explique le niveau de ce cours : il se veut délibérément le plus élémentaire possible et, même s'il reste majoritairement limité au plan (c'est déjà beaucoup si on sait ce qui s'y passe), il contient l'essentiel de ce que doit savoir un étudiant de Master.

Le contenu du texte est la réunion de cours que j'ai donnés pendant des années dans diverses formations en Mathématiques à l'Université de Valenciennes.

Depuis des années, je partage ma passion pour cette "géométrie à l'ancienne" avec des collègues et amis : nous nous posons des questions les uns aux autres et nous passons quelquefois un long moment à y réfléchir ensemble. Ces "petits problèmes" (comme on dit) sont faciles et amusants à formuler mais leur résolution peut parfois s'avérer un véritable casse-tête. Je pense à Raymond Barre qui a lu en détail une première version de ce texte, Bernard Calleneare, Youssef Hantout, Jean-Jacques Lœb et Rajagopalan Parthasarathy quand il nous rend visite. La première partie a été relue par François Goichot au moment de sa première élaboration. Qu'ils trouvent tous ici l'expression de ma gratitude.

Ces derniers temps, François Recher et Valerio Vassallo ont été mes interlocuteurs réguliers. Nous sommes tous les trois *Mathématiciens en résidence* à la *Cité des Géométries - Gare numérique de Jeumont*. Ce qui nous offre l'occasion de discuter de "petite géométrie plane", et presque souvent sous l'œil participatif et le questionnement de Francis Trincaretto, président de la CdG, chirurgien de métier mais passionné par la géométrie qu'il considère comme un bon vecteur de transmission de la connaissance. Merci à tous les trois et au personnel de la CdG.

Mes étudiants des différentes promotions de Licence 3, Master enseignement et préparation au CAPES ont été les principaux lecteurs de différentes parties de ce texte. Beaucoup d'entre eux m'ont signalé de nombreuses erreurs de frappe et quelques coquilles sur des versions préliminaires. Je les en remercie.

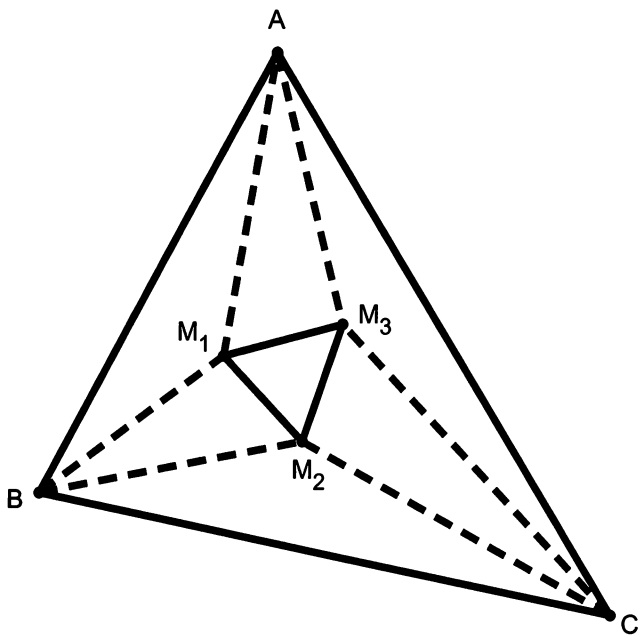
Je dédie cet ouvrage à la mémoire de ma mère. Sa disparition en 2006 m'a laissé une entaille que je ne cesse de panser depuis lors.

Je saisis aussi l'occasion qui m'est offerte ici pour rendre hommage à mon père, disparu en 1994. Il a été mon premier professeur de géométrie.

Il était à la fois menuisier, ébéniste et charpentier, l'un des rares à cumuler ces trois métiers de bois. Jusqu'à un certain âge, j'avais l'habitude de passer une partie de mon temps libre dans son atelier. C'est là que j'ai commencé à prendre inconsciemment goût à la géométrie : il m'a appris à en faire de façon expérimentale, pour l'utilité de la vie quotidienne. Je me contente de donner trois exemples, et non des moindres, de ce que j'ai appris auprès de lui.

Quand il a à fabriquer une table ronde, il utilise un grand compas métallique pour tracer un cercle avant de découper la planche de bois de cèdre d'une scie mince et flexible permettant de suivre la courbure du trait. Les gens savent bien ce qu'est un cercle, ils l'appellent un "rond". Mais curieusement ils ne voient souvent que la courbe qui le représente sans jamais imaginer qu'il a un centre : c'est la bordure, sa régularité et sa parfaite harmonie qui les fascinent ! Mon père en "savait plus" : quand il me laisse faire, il insiste toujours pour que je plante bien une pointe du compas sur un point précis et que je n'en bouge pas... que je veille à ce que l'écartement reste constamment le même au cours de l'opération de traçage. Il n'a jamais été à l'école mais il savait, par sa longue expérience du métier, qu'un rond était bien *l'ensemble des points de sa planche bien aplanie qui sont à égale distance du point sur lequel repose la première pointe du compas*. Mais certaines tables n'étaient pas rondes : des clients avaient la fantaisie d'en demander des ovales. Ce n'est en fait qu'une forme approximative. Alors comment en faire une qui garde tout de même des symétries ? Là encore, il m'apprend le bon procédé : il plante deux clous et attache une ficelle à chacun d'eux ; il tend la ficelle avec son crayon de bois et commence à faire le tour. Je vois alors le crayon tracer une belle courbe lisse. "C'est la forme de la table" me dit-il ! Ce n'est donc pas uniquement la méthode du jardinier (comme on le dit habituellement) mais aussi celle de l'ébéniste ! Enfin, dans son métier de charpentier, il avait toujours à dresser en premier lieu une ferme. C'est une structure qui en supporte d'autres et notamment les lattes sur lesquelles se posent les tuiles. Elle a la forme d'un triangle isocèle dont la base est l'entrait, les deux côtés égaux sont les arbalétriers et la hauteur relative à la base le poinçon. Pour la solidité de l'édifice, la mesure de l'angle droit que fait le poinçon avec l'entrait et l'égalité des arbalétriers doivent être des plus précises. Son équerre habituelle étant trop petite pour vérifier cela, il procède alors comme suit. À partir du milieu de la base, il repère un point à 60 cm d'un côté, un autre à 80 cm sur la hauteur et s'arrange pour que la distance entre les deux soit de 100 cm. Il m'explique que cela lui garantit que l'angle en question est droit et que son grand triangle est aussi isocèle (dans son langage les deux autres côtés sont égaux). Il prend la peine de me démontrer cela en remesurant.

Ces premières leçons expérimentales m'ont appris ce que sont un *cercle*, une *ellipse*, le fameux *Théorème de Pythagore* et bien d'autres choses... Pour moi, elles ont été non seulement révélatrices mais aussi un point de départ dans l'"apprentissage" de la géométrie et des mathématiques en général.



Théorème de Morley

Soient ABC un triangle, (AM_1) et (AM_3) les trisectrices de l'angle $\widehat{BAC}$, (BM_1) et (BM_2) les trisectrices de l'angle $\widehat{ABC}$ et (CM_2) et (CM_3) celles de l'angle $\widehat{ACB}$. Alors le triangle $M_1M_2M_3$ est équilatéral.

C'est un peu magique !

TABLE DES MATIÈRES

PREMIÈRE PARTIE

I. LA NOTION D'ESPACE AFFINE

1. Premières définitions	15
2. Barycentres	18
3. Sous-espaces affines	20
4. Repères et coordonnées	20
5. Convexité	21
6. Retour sur les espaces affines	23
7. Orientation	24

II. APPLICATIONS AFFINES

1. Définition et exemples	27
2. Applications affines et barycentres	29
3. Projections	31

III. LE GROUPE AFFINE DU PLAN

1. Le groupe affine et ses sous-groupes	33
2. Théorème de Thalès	35
3. Théorème de Pappus	37
4. Théorème de Ménélaüs	38
5. Structure algébrique de $\text{Aff}(\mathcal{P})$	39

IV. PLAN EUCLIDIEN, ISOMÉTRIES ET SIMILITUDES

1. Structure euclidienne	43
2. Isométries	46
3. Notion d'angle	48
4. Exemples d'isométries	52
5. Composition des éléments de $\text{Isom}(\mathcal{P})$	54
6. Le groupe des similitudes	57

V. TRIANGLE ET CERCLE

1. Généralités	61
2. Droites concourantes d'un triangle	64
3. Cas d'isométrie des triangles	68
4. Cas de similitude des triangles	69
5. Cercles passant par 1, 2, 3 ou 4 points	70
6. Transformés de cercles	71

VI. CONSTRUCTIONS GÉOMÉTRIQUES

1. Constructions classiques élémentaires	76
2. Un peu plus compliqué	76

DEUXIÈME PARTIE

FICHES DE TRAVAIL

1. Isométries de l'espace83

2. Autour du birapport 91

3. Autour du triangle 101

4. La puissance et l'inversion108

5. Homographies 118

6. Parabole 124

7. Ellipse 129

8. Hyperbole136

EXERCICES RÉSOLUS

1. Énoncés143

2. Solutions153

EXERCICES EN VRAC

1. Énoncés193

TROISIÈME PARTIE

PAVAGES

1. Généralités et définitions 207

2. Les groupes paveurs211

3. Pavages réguliers213

4. Un quadrilatère pave périodiquement 215

5. Pavages hexagonaux217

6. En guise de petite conclusion 221

APPENDICE

RAPPELS SUR LES GROUPES

1. Définition et exemples225

2. Homomorphismes 226

3. Produit semi-direct228

4. Exemples tirés de la géométrie228

5. Groupes résolubles, groupes nilpotents231

6. Sous-groupes finis d'isométries de l'espace 232

BIBLIOGRAPHIE 235

INDEX ALPHABÉTIQUE 237

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Un *espace affine* est un ensemble $\mathcal{P}$ dont les éléments sont des *points* et sur lequel un espace vectoriel $\vec{\mathcal{V}}$ opère en respectant un certain nombre de règles : un vecteur $\vec{u}$ de $\vec{\mathcal{V}}$ est une “force” qui pousse les points de $\mathcal{P}$ dans une direction, un sens et avec une certaine intensité. Le vecteur $\vec{u}$ représente donc un *mouvement* ou *transformation* de $\mathcal{P}$; ces mouvements se composent et en donnent d’autres de même nature : pousser par $\vec{u}$ ensuite par $\vec{v}$, revient simplement à pousser par $\vec{u} + \vec{v}$ sans que cela dépende de l’ordre dans lequel on applique $\vec{u}$ et $\vec{v}$; le vecteur nul $\vec{0}$ ne pousse pas et $-\vec{u}$ produit l’effet opposé à celui de $\vec{u}$. En plus : seul le vecteur $\vec{0}$ fixe tout point et deux points quelconques de E peuvent être poussés l’un vers l’autre, et de manière unique ! (Derrière tout cela, il y a la structure de *groupe abélien* de $(\vec{\mathcal{V}}, +)$.) On dit qu’on a une *action simple* et *transitive* du groupe $\vec{\mathcal{V}}$ sur $\mathcal{P}$ c’est-à-dire une application $T : (\vec{u}, M) \in \vec{\mathcal{V}} \times \mathcal{P} \mapsto T(\vec{u}, M) \in \mathcal{P}$ vérifiant un certain nombre de propriétés.

Pour $\vec{u}$ fixé dans $\vec{\mathcal{V}}$, l’application $T(\vec{u}, \cdot) : M \in \mathcal{P} \mapsto T(\vec{u}, M) \in \mathcal{P}$ représente exactement le mouvement qui consiste à pousser les points de $\mathcal{P}$ par la “force” $\vec{u}$. Pour $M \in \mathcal{P}$ et $\vec{u} \in \vec{\mathcal{P}}$, le point $T(\vec{u}, M) = M'$ sera noté $M' = M + \vec{u}$; ce qui “justifie” l’écriture $\vec{u} = \overrightarrow{MM'}$.

La donnée de l’action $T : \vec{\mathcal{V}} \times \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$ est équivalente à celle d’une application $\Phi : (M, N) \in \mathcal{P} \times \mathcal{P} \mapsto \overrightarrow{MN} \in \vec{\mathcal{V}}$ vérifiant les deux propriétés :

- i) la relation de Chasles $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ML} + \overrightarrow{LN}$ pour tous $M, N, L \in \mathcal{P}$;
- ii) pour tout M fixé dans $\mathcal{P}$, l’application $N \in \mathcal{P} \mapsto \overrightarrow{MN} \in \vec{\mathcal{V}}$ est une bijection.

Les exemples d’espaces affines ne manquent pas. Nous n’en parlerons que d’un seul dans cette introduction : un espace vectoriel réel $\mathcal{P} = E$ de dimension (finie) n muni de sa *structure affine canonique*, c’est-à-dire celle donnée par l’application :

$$\Phi : (x, y) \in E \times E \mapsto \overrightarrow{xy} = y - x \in E.$$

Les éléments de E peuvent être vus indifféremment comme points ou comme vecteurs. Un automorphisme *affine* de E est une application affine bijective $E \longrightarrow E$. L’ensemble de tous les automorphismes affines de E , muni de la loi de composition, est un groupe qu’on note $\text{Aff}(E)$ et qu’on appelle *groupe affine* de E ; il contient comme sous-groupe le groupe $\text{GL}(E)$ de tous les automorphismes linéaires de E qu’on appelle *groupe linéaire* de E . Toute application affine $E \longrightarrow E$ s’écrit $f(x) = u(x) + b$ où u est linéaire (dite *direction* de f) et b le point (ou le vecteur) $f(0)$ de E . Un automorphisme affine est donc la donnée du couple (u, b) . Lorsque E n’est pas réduit à $\{0\}$, $\text{GL}(E)$ est strictement contenu dans $\text{Aff}(E)$; nous allons décrire exactement comment il s’y imbrique. Toute translation est affine, elle est définie par un vecteur de E et le groupe des translations s’identifie canoniquement au groupe additif $(E, +)$. Soit $j : E \hookrightarrow \text{Aff}(E)$ l’injection associée à cette identification. Le groupe linéaire $\text{GL}(E)$ agit de façon naturelle sur le groupe $E : (u, x) \in \text{GL}(E) \times E \mapsto u(x) \in E$. Cette action permet de construire le

produit semi-direct $E \rtimes \text{GL}(E)$ qui n'est rien d'autre que le groupe affine $\text{Aff}(E)$. On a une suite exacte :

$$0 \longrightarrow E \xrightarrow{j} \text{Aff}(E) = E \rtimes \text{GL}(E) \xrightarrow{\pi} \text{GL}(E) \longrightarrow 1$$

où π est le morphisme qui à $f = (u, b)$ associe sa direction u . Une *propriété affine* est une propriété invariante sous l'action de tout le groupe $\text{Aff}(E)$.

Soit $\langle , \rangle$ un produit scalaire sur E ($\langle , \rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive sur E). On a alors la notion de *norme* d'un vecteur $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ et celle de mesure d'*angle* entre deux vecteurs x et y (tous deux non nuls) donné par son $\cos(x, y) = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \cdot \|y\|}$. La norme $\| \cdot \|$ permet de définir sur l'espace affine E une métrique d invariante par translation. Bref ! tout est donc là pour mesurer les longueurs et les angles ! C'est la *géométrie euclidienne* ! Quels sont alors ses automorphismes ? Ceux qui préservent d'abord la structure affine, ensuite le produit scalaire $\langle , \rangle$ (et la distance) ! (Mais tout se lit sur ce qui est linéaire.) On dira que $u \in \text{GL}(E)$ est *unitaire* si, pour tous $x, y \in E$, on a $\langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle$. De tels automorphismes préservent donc la norme et les angles entre vecteurs ; ils forment un sous-groupe $\text{O}(E)$ de $\text{GL}(E)$ appelé groupe *orthogonal* de l'espace euclidien $(E, \langle , \rangle)$. Les translations (non triviales) ne sont pas linéaires, mais elles sont des isométries affines de l'espace métrique (E, d) . Le groupe des *isométries* est alors le produit semi-direct $E \rtimes \text{O}(E)$. On pourrait parfois exiger moins d'une transformation linéaire en lui demandant de ne préserver que les angles ; on dira alors qu'elle est *conforme*. Bien entendu, si u est unitaire, elle est conforme. Le groupe $\text{Conf}(E)$ des transformations conformes de l'espace euclidien E contient donc le groupe orthogonal $\text{O}(E)$.

On se donne une orientation de l'espace affine E en orientant l'espace vectoriel E . Ceci se fait en fixant une base $(e_1, \dots, e_n)$ dont on décrètera qu'elle est *directe*. Un automorphisme linéaire u de E est complètement déterminé par sa matrice $M(u)$ par rapport à cette base ; le déterminant de cette matrice est par définition le *déterminant* de u qu'on note $\det(u)$ (il est non nul bien sûr). On dira que u *préserve l'orientation* si $\det(u) > 0$. Ces transformations forment un sous-groupe $\text{GL}^+(E)$ de $\text{GL}(E)$. Un automorphisme affine $f = (u, b)$ préserve l'orientation si $u \in \text{GL}^+(E)$; de telles transformations forment un sous-groupe $\text{Aff}^+(E)$. (Une translation est toujours un élément de $\text{Aff}^+(E)$.) N'importe quel sous-groupe G de $\text{GL}(E)$ possède un sous-groupe G^+ dont les éléments préservent en plus l'orientation. Dans le cas de $G = \text{O}(E)$, G^+ est noté $\text{SO}(E)$ et appelé *groupe spécial orthogonal*.

On voit donc que les sous-groupes de $\text{Aff}(E)$ apparaissent de façon naturelle dès qu'on impose aux transformations affines de préserver une structure plus riche ! Leur étude est à la base même de la géométrie. Une *géométrie* n'est rien d'autre que l'étude des *invariants* d'un sous-groupe G de $\text{Aff}(E)$. C'est Félix KLEIN (*) qui a mis en forme

(*) Felix KLEIN : mathématicien allemand né en 1849 et mort en 1925. Il est connu pour ses travaux en théorie des groupes et en géométrie. Son fameux "Programme d'Erlangen" reste une référence jusqu'à nos jours.

cette idée en 1872 dans son fameux *Programme d'Erlangen* [K2] (qui reste une grande référence jusqu'à nos jours). Par exemple :

- La *géométrie affine* correspond à tout le groupe affine $G = \text{Aff}(E)$. La propriété centrale est la *conservation de l'alignement*.
- La *géométrie euclidienne* correspond au groupe orthogonal $O(E)$. La propriété centrale est la *conservation des distances*.
- La *géométrie conforme* correspond au groupe conforme $\text{Conf}(E)$. La propriété centrale est la *conservation des angles*.

On pourrait évoquer et étudier d'autres exemples mais on se limitera au deuxième et on traitera seulement quelques aspects du dernier. On restera essentiellement en dimension 2 (avec une petite digression en dimension 3) pour trois raisons :

- Il est bien sûr impossible de faire des dessins réels en dimension $n \geq 4$. (Et qui dit "géométrie" dit "dessin").
- Les dimensions 2 et 3 sont suffisamment riches ! C'est déjà une bonne chose de savoir ce qui s'y passe !
- Au besoin, la dimension 2 a le privilège de pouvoir user de la magie et la beauté des nombres complexes !

PREMIÈRE PARTIE

CHAPITRE I

LA NOTION D'ESPACE AFFINE

On se donne un espace vectoriel $\mathbb{E}$ sur le corps des réels $\mathbb{R}$. On rappelle que l'ensemble $\mathbb{E}$ est muni d'une *addition* $M + M'$ qui en fait un *groupe abélien* c'est-à-dire cette addition vérifie :

- $\{M + N\} + L = M + \{N + L\}$ (*associativité*) ;
- $M + N = N + M$ (*commutativité*) ;
- il existe $O \in \mathbb{E}$ tel que $M + O = M$ (O est un *élément neutre*) ;
- pour tout $M \in \mathbb{E}$ il existe $-M \in \mathbb{E}$ (*opposé* de M) tel que $M + (-M) = O$.

L'ensemble $\mathbb{E}$ est aussi muni d'une multiplication (externe) par les nombres réels $(\lambda, M) \in \mathbb{R} \times \mathbb{E} \mapsto \lambda M \in \mathbb{E}$ vérifiant :

- $1 \cdot M = M$ pour tout $M \in \mathbb{E}$;
- $(\lambda\mu)M = \lambda(\mu M)$ pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et tout $M \in \mathbb{E}$;
- $(\lambda + \mu)M = \lambda M + \mu M$ pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et tout $M \in \mathbb{E}$;
- $\lambda(M + N) = \lambda M + \lambda N$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tous $M, N \in \mathbb{E}$.

Dans toute la suite, on gardera ce choix de noter les éléments de $\mathbb{E}$ par les lettres capitales $A, B, \dots, M \dots$.

1. Premières définitions

On appelle habituellement *vecteur* un élément d'un espace vectoriel. Mais on va reprendre une "définition ancienne" qui a l'avantage de montrer que cette notion a bien un sens du point de vue géométrique et physique ; elle consiste à interpréter un vecteur comme une "force" agissant sur des objets (les éléments de $\mathbb{E}$) dans une direction donnée, un sens donné et avec une certaine intensité !

1.1. Vecteurs "géométriques"

On dira que deux couples (M, N) et (M', N') d'éléments de $\mathbb{E}$ sont *équipollents* si on a la relation :

$$N - M = N' - M'.$$

On vérifie facilement que cette équipollence est une relation d'équivalence c'est-à-dire elle est *réflexive*, *symétrique* et *transitive*. La classe d'équipollence du couple (M, N) sera notée $\overrightarrow{MN}$ et appelée *vecteur géométrique* (mais dans toute la suite on dira simplement *vecteur*). Chaque classe d'équipollence contient un représentant *unique* de la forme (O, A) où O est l'élément neutre de $\mathbb{E}$ (cf. Fig.1). Sur l'ensemble $\vec{\mathcal{V}}$ de ces classes d'équipollence on peut définir une addition et une multiplication par les scalaires de la façon suivante. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\vec{u}, \vec{u}' \in \vec{\mathcal{V}}$ représentés respectivement par (M, N) et (M', N') ; alors $\vec{u} + \vec{u}'$ et $\lambda \vec{u}$ sont représentés respectivement par $(M + M', N + N')$ et $(\lambda M, \lambda N)$; il est facile de voir que cela ne dépend pas des choix des représentants et que cette addition et cette multiplication par les réels confèrent à $\vec{\mathcal{V}}$ une structure d'espace vectoriel réel de vecteur nul $\vec{0} = \overrightarrow{MM}$ (M quelconque).

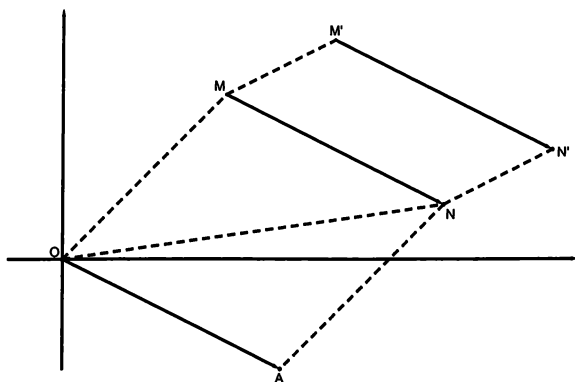


Fig. 1

En fait, on a défini une application $\Phi : \mathbb{E} \times \mathbb{E} \longrightarrow \vec{\mathcal{V}}$ qui à tout couple (M, N) associe le vecteur $\overrightarrow{MN}$. Cette application vérifie la relation suivante dite *relation de Chasles* (*):

$$(1) \quad \overrightarrow{ML} + \overrightarrow{LN} = \overrightarrow{MN}$$

et, pour tout élément $\omega \in \mathbb{E}$ fixé, l'application partielle $\Phi_\omega : M \in \mathbb{E} \longmapsto \overrightarrow{\omega M} \in \vec{\mathcal{V}}$ est une bijection.

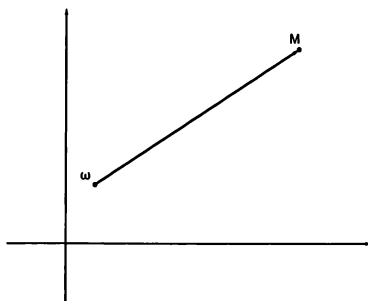


Fig. 2

Ce seront les deux propriétés essentielles qui vont intervenir dans la définition d'un espace affine.

L'application $M \in \mathbb{E} \longmapsto \overrightarrow{OM} \in \vec{\mathcal{V}}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Dant toute la suite un espace vectoriel réel $\mathbb{E}$ de dimension n sera donc vu comme si c'était $\vec{\mathcal{V}}$ pour lui garder cet "aspect géométrique" qu'on vient de lui conférer. On se donne maintenant un ensemble $\mathcal{P}$.

1.2. Définition. On dira que $\mathcal{P}$ possède une structure d'espace affine dirigé par $\vec{\mathcal{V}}$ s'il existe une application $\Phi : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \longrightarrow \vec{\mathcal{V}}$ associant à tout couple (M, N) un vecteur $\overrightarrow{MN}$ de telle sorte que :

- (i) $\overrightarrow{ML} + \overrightarrow{LN} = \overrightarrow{MN}$ pour tous $M, N, L \in \mathcal{P}$; c'est la **relation de Chasles**.

(*) Michel CHASLES : éminent mathématicien français (1793-1880) à l'origine de cette relation et beaucoup d'autres choses en géométrie : étude des homographies, des coniques etc.

- (ii) Pour tout élément $\omega \in \mathcal{P}$ fixé, l'application partielle $\Phi_\omega : M \in \mathcal{P} \mapsto \omega\vec{M} \in \vec{\mathcal{V}}$ est une bijection.

L'espace vectoriel $\vec{\mathcal{V}}$ est la *direction* de l'espace affine $\mathcal{P}$. Les éléments de $\mathcal{P}$ seront les *points*. L'espace vectoriel $\vec{\mathcal{V}}$ agit sur l'ensemble $\mathcal{P}$ au moyen d'une application $\Psi : (\vec{u}, M) \in \vec{\mathcal{V}} \times \mathcal{P} \mapsto M' = M + \vec{u} \in \mathcal{P}$ de telle sorte que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$; celle-ci vérifie les propriétés qui suivent :

- (i) $M + \vec{0} = M$ pour tout $M \in \mathcal{P}$;
- (ii) $M + (\vec{u} + \vec{v}) = (M + \vec{u}) + \vec{v}$ pour tous $\vec{u}, \vec{v} \in \vec{\mathcal{V}}$ et tout $M \in \mathcal{P}$;
- (iii) $M + \vec{u} = M$ implique $\vec{u} = \vec{0}$ (*simplicité* de l'action) ;
- (iv) pour tous M, N de $\mathcal{P}$ il existe $\vec{u} \in \vec{\mathcal{V}}$ tel que $M + \vec{u} = N$ (*transitivité* de l'action).

Ce qui suit est facile à vérifier. Si on fixe un vecteur $\vec{u} \in \vec{\mathcal{V}}$, l'application partielle $\Psi_{\vec{u}} : M \in \mathcal{P} \mapsto M + \vec{u} \in \mathcal{P}$ est une bijection. L'application $\vec{u} \mapsto \Psi_{\vec{u}}$ est un morphisme injectif du groupe additif $(\vec{\mathcal{V}}, +)$ dans le groupe des bijections de $\mathcal{P}$. La transformation $\Psi_{\vec{u}}$ est appelée *translation* de vecteur $\vec{u}$. Pour la loi de composition, les translations de $\mathcal{P}$ forment un groupe noté $\mathcal{T}$.

1.3. Proposition. La donnée de l'application Φ de la définition 1.2 est équivalente à celle d'une action Ψ vérifiant les propriétés qu'on vient d'énumérer.

La démonstration de cette proposition est assez instructive ; nous la laissons au lecteur comme exercice.

1.4. Quelques règles de calcul

- Pour tout $M \in \mathcal{P}$, on a $\overrightarrow{MM} + \overrightarrow{MM} = \overrightarrow{MM}$ c'est-à-dire $2\overrightarrow{MM} = \overrightarrow{MM}$ donc $\overrightarrow{MM} = \vec{0}$.
- Pour tous $M, N \in \mathcal{P}$, on a $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NM} = \overrightarrow{MM} = \vec{0}$ donc $\overrightarrow{MN} = -\overrightarrow{NM}$.
- $\overrightarrow{MN} = \vec{0}$ si, et seulement si, $M = N$.
- $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{M'N'}$ si, et seulement si, $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{NN'}$; c'est la *règle du parallélogramme*.

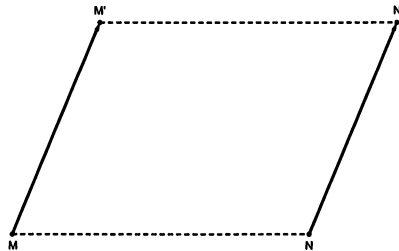


Fig. 3

Dans toute la suite, ce qu'on entendra par espace affine sera la donnée de l'espace vectoriel $\vec{\mathcal{V}}$ associé à un espace vectoriel $\mathbb{E}$, d'un ensemble $\mathcal{P}$ et d'une application $\Phi : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \longrightarrow \vec{\mathcal{V}}$ ou une action $\Psi : (\vec{u}, M) \in \vec{\mathcal{V}} \times \mathcal{P} \mapsto M + \vec{u} \in \mathcal{P}$ possédant les propriétés que nous avons décrites pour chacune d'elles. Reste à savoir ce qu'on peut prendre pour ensemble $\mathcal{P}$; voici quelques :

1.5. Exemples

- (i) Soit $\mathcal{P} = \vec{\mathcal{V}}$ un espace vectoriel de dimension n . L'application $\Phi : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \longrightarrow \vec{\mathcal{V}}$ définie par $\Phi(M, N) = N - M$ munit $\mathcal{P}$ d'une structure d'espace affine ; c'est la *structure affine canonique* sur l'espace vectoriel $\vec{\mathcal{V}}$.

- (ii) Soient $\mathcal{P}$ un ensemble quelconque et $f : \mathcal{P} \longrightarrow \vec{\mathcal{V}}$ une bijection. On définit $\Phi : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \longrightarrow \vec{\mathcal{V}}$ par $\Phi(M, N) = f(N) - f(M)$. Il est alors facile de voir que Φ munit $\mathcal{P}$ d'une structure d'espace affine. Si $g : \mathcal{P} \longrightarrow \vec{\mathcal{V}}$ est une autre bijection alors elle définit la même structure affine si, et seulement si, $g \circ f^{-1}$ est une translation (la démonstration est laissée en exercice au lecteur).

1.6. Vectorialisé d'un espace affine

Soient $(\mathcal{P}, \vec{\mathcal{V}}, \Phi)$ un espace affine et ω un point de $\mathcal{P}$. On sait qu'on a une bijection $\Phi_\omega : M \in \mathcal{P} \longrightarrow \overrightarrow{\omega M} \in \vec{\mathcal{V}}$; la bijection inverse est donnée par $\Phi_\omega^{-1}(\vec{u}) = \omega + \vec{u}$; donc tout point de $\mathcal{P}$ est de la forme $\omega + \vec{u}$. On définit une structure d'espace vectoriel sur $\mathcal{P}$ en posant : $(\omega + \vec{u}) + (\omega + \vec{v}) = \omega + (\vec{u} + \vec{v})$ et $\lambda(\omega + \vec{u}) = \omega + \lambda \vec{u}$. L'espace vectoriel ainsi obtenu sera noté $\mathcal{P}_\omega$ et appelé *vectorialisé* de $\mathcal{P}$ relativement à ω . Il dépend du choix de ω comme on le voit sur le dessin ci-dessous : la somme $M + N$ de M et N dans $\mathcal{P}_\omega$ n'est pas la même que leur somme $(M + N)'$ dans $\mathcal{P}_{\omega'}$!

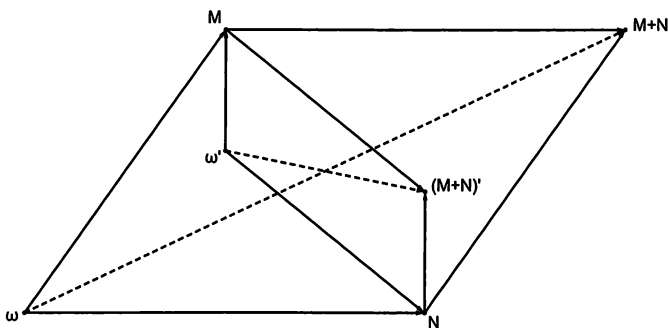


Fig. 4

2. Barycentres

On se situe toujours dans un espace affine $(\mathcal{P}, \vec{\mathcal{V}}, \Phi)$. Soient $M_1, \dots, M_p$ des points de $\mathcal{P}$ (avec $p \geq 2$), $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ des réels et $\omega \in \mathcal{P}$. On pose $\lambda = \lambda_1 + \dots + \lambda_p$.

2.1. Proposition.

- (i) Si $\lambda = 0$, le vecteur $\lambda_1 \overrightarrow{\omega M_1} + \dots + \lambda_p \overrightarrow{\omega M_p}$ ne dépend pas de ω .
(ii) Si $\lambda \neq 0$, le point $G = \frac{1}{\lambda}(\lambda_1 M_1 + \dots + \lambda_p M_p) = \omega + \frac{1}{\lambda}(\lambda_1 \overrightarrow{\omega M_1} + \dots + \lambda_p \overrightarrow{\omega M_p})$ ne dépend pas de ω . On dira que G est le **barycentre** des points $M_1, \dots, M_p$ affectés respectivement des coefficients $\lambda_1, \dots, \lambda_p$.

Démonstration. Soit ω' un autre point de $\mathcal{P}$.

i) On a :

$$\begin{aligned} \lambda_1 \overrightarrow{\omega' M_1} + \dots + \lambda_p \overrightarrow{\omega' M_p} &= \lambda_1 (\overrightarrow{\omega' \omega} + \overrightarrow{\omega M_1}) + \dots + \lambda_p (\overrightarrow{\omega' \omega} + \overrightarrow{\omega M_p}) \\ &= (\lambda_1 + \dots + \lambda_p) \overrightarrow{\omega' \omega} + \lambda_1 \overrightarrow{\omega M_1} + \dots + \lambda_p \overrightarrow{\omega M_p} \\ &= \lambda_1 \overrightarrow{\omega M_1} + \dots + \lambda_p \overrightarrow{\omega M_p}. \end{aligned}$$

ii) On a :

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\lambda} (\lambda_1 M_1 + \cdots + \lambda_p M_p) &= \omega + \frac{1}{\lambda} (\lambda_1 \overrightarrow{\omega M_1} + \cdots + \lambda_p \overrightarrow{\omega M_p}) \\
 &= \omega + \frac{1}{\lambda} (\lambda_1 (\overrightarrow{\omega \omega} + \overrightarrow{\omega' M_1}) + \cdots + \lambda_p (\overrightarrow{\omega \omega} + \overrightarrow{\omega' M_p})) \\
 &= (\omega + \overrightarrow{\omega \omega'}) + \frac{1}{\lambda} (\lambda_1 \overrightarrow{\omega' M_1} + \cdots + \lambda_p \overrightarrow{\omega' M_p}) \\
 &= \omega' + \frac{1}{\lambda} (\lambda_1 \overrightarrow{\omega' M_1} + \cdots + \lambda_p \overrightarrow{\omega' M_p})
 \end{aligned}$$

Ce qui termine la démonstration de la proposition. $\square$

2.2. Quelques remarques

i) Si $\lambda_i = 0$, le point M_i n'intervient pas. On peut donc supposer que chacun des λ_i est non nul. On dira alors que le couple (M_i, λ_i) est un *point massique*.

ii) Si on multiplie tous les λ_i par un même nombre s non nul, le point G ne change pas. On peut donc supposer que $\lambda = \lambda_1 + \cdots + \lambda_p = 1$.

iii) Si les λ_i sont tous égaux (et non nuls), on dira que G est l'*isobarycentre* ou le *centre de gravité* des points $M_1, \dots, M_p$.

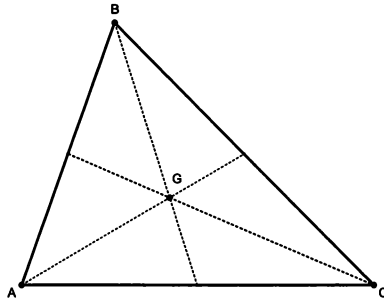


Fig. 5

iv) Lorsque $\lambda_1 + \cdots + \lambda_p = 0$, on convient de noter $\lambda_1 M_1 + \cdots + \lambda_p M_p$ le vecteur $\lambda_1 \overrightarrow{\omega M_1} + \cdots + \lambda_p \overrightarrow{\omega M_p}$. Par exemple $N - M = \overrightarrow{\omega N} - \overrightarrow{\omega M} = \overrightarrow{MN}$.

2.3. Détermination pratique des barycentres

On se donne toujours des points $M_1, \dots, M_p$ (avec $p \geq 2$) et $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ des réels. On pose $\lambda = \lambda_1 + \cdots + \lambda_p$ qu'on suppose non nul. Le lecteur est invité à établir les assertions qui suivent.

i) *Origine quelconque ω*

Dans ce cas, $G = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^p \lambda_i M_i$ si, et seulement si, on a $\lambda \overrightarrow{\omega G} = \sum_{i=1}^p \lambda_i \overrightarrow{\omega M_i}$.

ii) *Origine en G*

Dans ce cas, $G = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^p \lambda_i M_i$ si, et seulement si, on a $\sum_{i=1}^p \lambda_i \overrightarrow{GM_i} = \vec{0}$.

iii) *Origine en M_j*

Dans ce cas, $G = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^p \lambda_i M_i$ si, et seulement si, on a $\lambda \overrightarrow{M_j G} = \sum_{i \neq j} \lambda_i \overrightarrow{M_j M_i}$.

2.4. Exercice

Soient $(M_1, \lambda_1), \dots, (M_p, \lambda_p)$ p points massiques. On se donne une partition de l'ensemble $\{1, \dots, p\}$ par des parties $J_1 = \{1, \dots, p_1\}$, $J_2 = \{p_1 + 1, \dots, p_2\}, \dots$ et $J_k = \{p_{k-1} + 1, \dots, p_k\}$ où $p_k = p$. Pour tout $\ell \in \{1, \dots, k\}$ on note G_ℓ le barycentre des points massiques $\{(M_j, \lambda_j) : j \in J_\ell\}$ et $\lambda^\ell = \sum_{j \in J_\ell} \lambda_j$. On suppose que les nombres

$\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont tels que $\lambda_1 + \dots + \lambda_p \neq 0$ et $\lambda^\ell \neq 0$ pour tout $\ell \in \{1, \dots, k\}$. Montrer que le barycentre G des points massiques $(M_1, \lambda_1), \dots, (M_p, \lambda_p)$ est le même que celui des points massiques $\{(G_\ell, \lambda^\ell) : \ell \in \{1, \dots, k\}\}$. (C'est l'*associativité* du calcul du barycentre.)

3. Sous-espaces affines

Soit $(\mathcal{P}, \vec{\mathcal{V}})$ un espace affine dont la structure est donnée par une application $\Phi : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \longrightarrow \vec{\mathcal{V}}$. Si on fixe un point $\omega \in \mathcal{P}$, on a une bijection $\Phi_\omega : M \in \mathcal{P} \longrightarrow \overrightarrow{\omega M} \in \vec{\mathcal{V}}$.

3.1. Définition. Soit $\mathcal{F}$ une partie de $\mathcal{P}$. On dira que $\mathcal{F}$ est un **sous-espace affine** de $\mathcal{P}$ si $\mathcal{F}$ est vide ou s'il existe un point $\omega \in \mathcal{P}$ tel que l'image $\Phi_\omega(\mathcal{F})$ de $\mathcal{F}$ par l'application Φ_ω soit un sous-espace vectoriel $\vec{\mathcal{F}}$ de $\vec{\mathcal{V}}$. La **dimension** de $\mathcal{F}$ est par définition celle de $\vec{\mathcal{F}}$.

Si $M, N \in \mathcal{F}$, le vecteur $\overrightarrow{MN}$ appartient à $\vec{\mathcal{F}}$; $\vec{\mathcal{F}}$ est la *direction* de $\mathcal{F}$.

3.2. Proposition. Soient $\vec{\mathcal{F}}$ un sous-espace vectoriel de $\vec{\mathcal{V}}$ et ω un point de $\mathcal{P}$. Il existe une unique sous-espace affine $\mathcal{F}$ passant par ω et de direction $\vec{\mathcal{F}}$.

Démonstration. Le sous-espace affine $\mathcal{F}$ en question est tel que $\Phi_\omega(\mathcal{F}) = \vec{\mathcal{F}}$. Il est donc nécessairement donné par $\mathcal{F} = \{M \in \mathcal{P} : \overrightarrow{\omega M} \in \vec{\mathcal{F}}\}$. Ceci montre son existence et son unicité. $\square$

Il résulte de la démonstration de cette proposition que deux sous-espaces affines ayant même direction n'ont aucun point commun ou sont confondus !

3.3. Exemples

- (i) Un sous-espace affine de dimension 0 est un point. Sa direction est le sous-espace vectoriel réduit à $\{\vec{0}\}$.
- (ii) Une *droite affine* est un sous-espace affine de dimension 1.
- (iii) Un *plan affine* est un sous-espace affine de dimension 2.
- (iv) Soient $\vec{\mathcal{V}}$ et $\vec{\mathcal{W}}$ deux espaces vectoriels et $f : \vec{\mathcal{V}} \longrightarrow \vec{\mathcal{W}}$ une application linéaire. Alors, pour tout $\vec{w} \in \vec{\mathcal{W}}$, $f^{-1}(\vec{w})$ est un sous-espace affine de $\vec{\mathcal{V}}$ (pour sa structure affine canonique).

4. Repères et coordonnées

Soit $(\mathcal{P}, \vec{\mathcal{V}}, \Phi)$ un espace affine de dimension n . On se donne $p + 1$ points $C_0, \dots, C_p$ de $\mathcal{P}$.

4.1. Définition. On dira que les points $C_0, \dots, C_p$ sont **affinement indépendants** si les vecteurs $\overrightarrow{C_0 C_1}, \dots, \overrightarrow{C_0 C_p}$ sont linéairement indépendants dans $\vec{\mathcal{V}}$. Il est alors clair que ceci impose la condition $p \leq n$.

Si $p = n$, $(\overrightarrow{C_0C_1}, \dots, \overrightarrow{C_0C_n})$ est une base de $\vec{V}$ et $(C_0; \overrightarrow{C_0C_1}, \dots, \overrightarrow{C_0C_n})$ est un repère cartésien de $\mathcal{P}$. Pour $M \in \mathcal{P}$, il existe des réels uniques $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que :

$$\overrightarrow{C_0M} = \lambda_1 \overrightarrow{C_0C_1} + \dots + \lambda_n \overrightarrow{C_0C_n}.$$

Les nombres réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont les *coordonnées cartésiennes* de M dans le repère (cartésien) $(C_0; \overrightarrow{C_0C_1}, \dots, \overrightarrow{C_0C_n})$. On a donc $M = C_0 + \lambda_1 \overrightarrow{C_0C_1} + \dots + \lambda_n \overrightarrow{C_0C_n}$, ce qui est équivalent à : $M = (1 - (\lambda_1 + \dots + \lambda_n))C_0 + \lambda_1 C_1 + \dots + \lambda_n C_n$. Si on pose $\lambda_0 = (1 - (\lambda_1 + \dots + \lambda_n))$ on voit que tout point M de $\mathcal{P}$ s'écrit de manière unique sous la forme :

$$(2) \quad M = \lambda_0 C_0 + \lambda_1 C_1 + \dots + \lambda_n C_n$$

où $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont des réels tels que $\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$; $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$ sont les *coordonnées barycentriques* de M dans le repère affine $(C_0, C_1, \dots, C_n)$. Par exemple C_0 a pour coordonnées barycentriques $(1, 0, \dots, 0)$, celles de C_1 sont $(0, 1, 0, \dots, 0)$ etc.

4.2. Mesure algébrique sur une droite

Deux points A et B de $\mathcal{P}$ sont affinement indépendants si, et seulement si, $A \neq B$. L'ensemble $(AB) = \{(1 - \lambda)A + \lambda B : \lambda \in \mathbb{R}\}$ est la droite définie par les points A et B . On a une application :

$$(3) \quad p : \lambda \in \mathbb{R} \mapsto \lambda \overrightarrow{AB} \in \mathbb{R} \overrightarrow{AB} \mapsto A + \lambda \overrightarrow{AB} \in (AB).$$

C'est la *représentation paramétrique* de (AB) dans le repère affine (A, B) (de la droite (AB)).

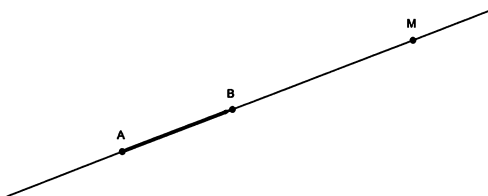


Fig. 6

Soient $M = A + \lambda \overrightarrow{AB}$ et $N = A + \mu \overrightarrow{AB}$ deux points de (AB) . Alors $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = (\mu - \lambda) \overrightarrow{AB}$. Le nombre réel $\mu - \lambda$ est la *mesure algébrique* du vecteur $\overrightarrow{MN}$ par rapport au repère affine (A, B) sur la droite (AB) ; on la note $\overline{MN}$. Cette mesure algébrique dépend bien sûr de la représentation paramétrique de la droite (AB) qui dépend elle-même du repère (A, B) . Par contre, on peut montrer (laissé en exercice au lecteur) que si on se donne quatre points M, N, M', N' sur la droite (AB) le rapport $\frac{\overline{MN}}{\overline{M'N'}}$ n'en dépend pas !

5. Convexité

Soit $(\mathcal{P}, \vec{V})$ un espace affine. La donnée de deux points quelconques A et B de $\mathcal{P}$ nous permet de définir une application $\lambda \in [0, 1] \rightarrow A + \lambda \overrightarrow{AB} \in \mathcal{P}$. L'image qu'on note $[AB]$ de cette application est appelée *segment d'origine A et d'extrémité B* . (Le point $A + \lambda \overrightarrow{AB}$ est aussi noté $(1 - \lambda)A + \lambda B$.)

5.1. Définition. Une partie C de $\mathcal{P}$ est dite **convexe** si, pour tous points $A, B \in C$, le segment $[AB]$ est contenu tout entier dans C .

La proposition qui suit dit qu'une partie convexe est caractérisée par le fait que tous les barycentres d'un ensemble fini de points de cette partie restent dans cette partie.

5.2. Proposition. Une partie C est convexe si, et seulement si, pour toute partie finie $\{A_1, \dots, A_p\}$ de C et tous réels positifs $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ tels que $\lambda_1 + \dots + \lambda_p = 1$, le point $\sum_{i=1}^p \lambda_i A_i$ appartient à C .

Démonstration. Pour tout entier $p \geq 2$, notons $(\mathcal{H}_p)$ la propriété :

$$(\mathcal{H}_p) \quad \begin{cases} \text{Pour tous } A_1, \dots, A_p \in C \\ \text{et tous } \lambda_1, \dots, \lambda_p \in [0, 1] \\ \text{tels que } \lambda_1 + \dots + \lambda_p = 1 \\ \text{le point } \sum_{i=1}^p \lambda_i A_i \text{ est dans } C. \end{cases}$$

La proposition dit simplement que, pour tout $p \geq 2$, la propriété $(\mathcal{H}_p)$ est équivalente à $(\mathcal{H}_2)$. Il est clair que $(\mathcal{H}_p)$ implique $(\mathcal{H}_2)$. Nous allons montrer la réciproque par récurrence, c'est-à-dire que $(\mathcal{H}_p)$ et $(\mathcal{H}_2)$ impliquent $(\mathcal{H}_{p+1})$. Soient donc $A_1, \dots, A_{p+1}$ des points de C et $\lambda_1, \dots, \lambda_{p+1} \in [0, 1]$ tels que $\lambda_1 + \dots + \lambda_{p+1} = 1$. On suppose que tous les λ_i sont strictement positifs sinon on est dans le cas où on a au plus p points (et la propriété est supposée vraie). On pose $\alpha_1 = \lambda_1 + \dots + \lambda_p$, $\alpha_2 = \lambda_{p+1}$, $K_1 = \frac{\lambda_1}{\alpha_1} A_1 + \dots + \frac{\lambda_p}{\alpha_1} A_p$ et $K_2 = A_{p+1}$. Par $(\mathcal{H}_p)$ le point K_1 est dans C et par $(\mathcal{H}_2)$ le point :

$$\begin{aligned} \lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_{p+1} A_{p+1} &= \alpha_1 \left(\frac{\lambda_1}{\alpha_1} A_1 + \dots + \frac{\lambda_p}{\alpha_1} A_p + \frac{\lambda_{p+1}}{\alpha_1} A_{p+1} \right) \\ &= \alpha_1 K_1 + \alpha_2 K_2 \end{aligned}$$

est aussi dans C . Ceci démontre la proposition. $\square$

On vérifie facilement que l'intersection d'une famille quelconque de parties convexes est encore convexe (ou vide évidemment). Par contre la réunion de deux parties convexes n'est pas toujours convexe (les exemples illustrant cette situation sont faciles à construire).

Soit C_0 une partie de $\mathcal{P}$. On appelle *enveloppe convexe* de C_0 le plus petit convexe contenant C_0 . C'est aussi l'intersection de tous les convexes contenant C_0 . On la note $\widehat{C}_0$. On peut montrer facilement que l'on obtient $\widehat{C}_0$ à partir de C_0 en prenant toutes les combinaisons finies convexes $\sum \lambda_i A_i$ avec les A_i des points de C_0 et les λ_i des réels positifs de somme égale à 1.

5.3. Exemples

- (i) Tout sous-espace affine de $\mathcal{P}$ est convexe (immédiat à vérifier).
- (ii) Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure affine canonique, tout demi-espace c'est-à-dire une partie définie par une inéquation de la forme $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n \geq c$ (où $c \in \mathbb{R}$ et les λ_i sont des constantes réelles non toutes nulles) est convexe.
- (iii) La partie délimitée par les côtés d'un triangle est convexe.
- (iv) La tête à Toto (voir Fig. 6 bis) est-elle convexe ?

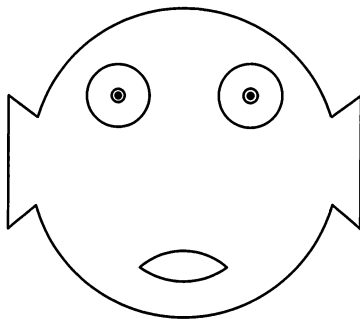


Fig. 6 bis

6. Retour sur les sous-espaces affines

Dans toute cette section on se donne un sous-espace affine $(\mathcal{P}, \vec{V}, \Phi)$ de dimension n .

6.1. Proposition. *Toute intersection de sous-espaces affines de $\mathcal{P}$ est encore un sous-espace affine.*

Démonstration. Soit $(\mathcal{F}_i)_{i \in I}$ une famille de sous-espaces affines et posons $\mathcal{F} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i$.

Si $\mathcal{F} = \emptyset$, c'est un sous-espace affine. Sinon notons $\vec{\mathcal{F}}_i$ la direction de $\mathcal{F}_i$. L'intersection $\vec{\mathcal{F}} = \bigcap_{i \in I} \vec{\mathcal{F}}_i$ est un sous-espace vectoriel de $\vec{\mathcal{P}}$. Soit $M \in \mathcal{F}$; alors $\Phi_M(\mathcal{F}_i) = \vec{\mathcal{F}}_i$ et

$\Phi_M(\mathcal{F}) = \vec{\mathcal{F}}$. En effet un point N de $\mathcal{P}$ est dans $\mathcal{F}$ si, et seulement si, $\overrightarrow{MN} \in \vec{\mathcal{F}}_i$ pour tout $i \in I$, c'est-à-dire $\overrightarrow{MN} \in \vec{\mathcal{F}}$. $\square$

Soit $\mathcal{C}$ une partie (non vide) de $\mathcal{P}$ et notons $\mathfrak{F}_{\mathcal{C}}$ l'ensemble de tous les sous-espaces affines contenant $\mathcal{C}$; $\mathfrak{F}_{\mathcal{C}}$ est non vide car $\mathcal{P} \in \mathfrak{F}_{\mathcal{C}}$. L'intersection de tous ces sous-espaces est un sous-espace affine contenant $\mathcal{C}$ et c'est le plus petit sous-espace affine qui possède cette propriété; on le note $\langle \mathcal{C} \rangle$ et on l'appelle sous-espace affine engendré par $\mathcal{C}$.

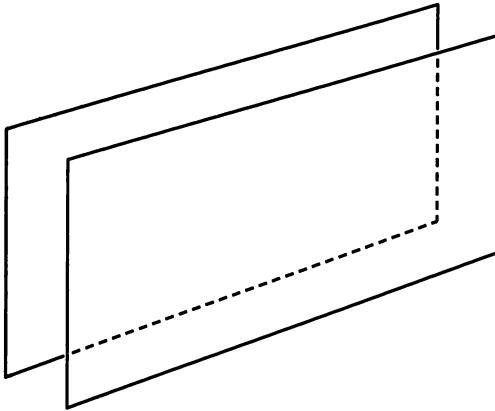
Si $\mathcal{C} = \{C_0, \dots, C_n\}$ est une partie à $n+1$ éléments de $\mathcal{P}$, $\langle \mathcal{C} \rangle$ est un sous-espace affine dirigé par le sous-espace vectoriel engendré par $\{\overrightarrow{C_0 C_1}, \dots, \overrightarrow{C_0 C_n}\}$. La dimension de $\langle \mathcal{C} \rangle$ est inférieure ou égale à n ; elle est exactement n si $\mathcal{C} = \{C_0, \dots, C_n\}$ est un repère affine.

La démonstration de la proposition qui suit est laissée au lecteur.

6.2. Proposition. *Le sous-espace $\langle \mathcal{C} \rangle$ est l'ensemble de toutes les combinaisons affines $\sum_{j \in J} \lambda_j C_j$ avec J fini, $C_j \in \mathcal{C}$ et $\lambda_j \in \mathbb{R}$ tels que $\sum_{j \in J} \lambda_j = 1$.*

6.3. Définition. *Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux sous-espaces affines de $\mathcal{P}$ de directions respectives $\vec{\mathcal{F}}$ et $\vec{\mathcal{G}}$. On dira que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont **parallèles** si $\vec{\mathcal{F}} = \vec{\mathcal{G}}$.*

Le "parallélisme" entre sous-espaces affines est une relation d'équivalence. Il y a aussi la notion de *parallélisme faible* qu'on peut introduire entre sous-espaces affines qui n'ont pas forcément la même dimension: on dira que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont *faiblement parallèles* si $\vec{\mathcal{F}} \subset \vec{\mathcal{G}}$ ou $\vec{\mathcal{G}} \subset \vec{\mathcal{F}}$. Le "parallélisme faible" n'est pas une relation d'équivalence: la transitivité n'est pas toujours satisfaite!



Plans parallèles dans l'espace

Fig. 6 ter

Pour tout sous-espace affine $\mathcal{F}$ de $\mathcal{P}$ et tout point $A \in \mathcal{P}$, $\mathcal{F}$ et $A + \vec{\mathcal{F}}$ sont parallèles. En particulier si $f : \vec{\mathcal{V}} \rightarrow \vec{\mathcal{W}}$ est une application linéaire entre deux espaces vectoriels, tous les sous-espaces affines $f^{-1}(\vec{w})$ (avec $\vec{w}$ variant dans $\vec{\mathcal{W}}$) sont parallèles deux à deux.

Deux sous-espaces affines parallèles sont soit égaux soit disjoints.

6.4. Postulat des parallèles. Soient $A \in \mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$ une droite affine de $\mathcal{P}$. Alors par A passe une et une seule droite parallèle à $\mathcal{D}$: $\mathcal{D}' = \{M \in \mathcal{P} : \overrightarrow{AM} \in \vec{\mathcal{D}}\}$.

6.5. Proposition. Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux sous-espaces affines de $\mathcal{P}$ de directions respectives $\vec{\mathcal{F}}$ et $\vec{\mathcal{G}}$ telles que $\vec{\mathcal{F}} + \vec{\mathcal{G}} = \vec{\mathcal{V}}$ (cela signifie que $\vec{\mathcal{F}}$ et $\vec{\mathcal{G}}$ engendrent $\vec{\mathcal{V}}$). Alors tout sous-espace affine parallèle à $\mathcal{G}$ rencontre $\mathcal{F}$.

Démonstration. Établissons d'abord le résultat suivant. Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux sous-espaces affines dirigés respectivement par $\vec{\mathcal{F}}$ et $\vec{\mathcal{G}}$. Soient $A \in \mathcal{F}$ et $B \in \mathcal{G}$. Alors :

$$\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset \iff \overrightarrow{AB} \in \vec{\mathcal{F}} + \vec{\mathcal{G}}.$$

Supposons $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset$ et soit $M \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$. Alors $\overrightarrow{AM} = \vec{u} \in \vec{\mathcal{F}}$ et $\overrightarrow{BM} = \vec{v} \in \vec{\mathcal{G}}$, donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BM} - \overrightarrow{AM} = \vec{v} - \vec{u} \in \vec{\mathcal{F}} + \vec{\mathcal{G}}$. Inversement, supposons $\overrightarrow{AB} = \vec{u} + \vec{v}$ avec $\vec{u} \in \vec{\mathcal{F}}$ et $\vec{v} \in \vec{\mathcal{G}}$. Alors le point $M \in \mathcal{P}$ tel que $\overrightarrow{AM} = \vec{u}$ est dans $\mathcal{F}$ et $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} = \vec{u} + \overrightarrow{MB}$ donc $\overrightarrow{MB} \in \vec{\mathcal{G}}$ c'est-à-dire $M \in \mathcal{G}$ et par suite $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset$.

Démontrons maintenant la proposition. Soient $A \in \mathcal{F}$ et $B \in \mathcal{P}$. Soit $\mathcal{G}'$ le sous-espace affine passant par B et parallèle à $\mathcal{G}$. On a $\overrightarrow{AB} \in \vec{\mathcal{V}} = \vec{\mathcal{F}} + \vec{\mathcal{G}}$. D'après ce qui précède $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}' \neq \emptyset$. $\square$

7. Orientation

7.1. On sait ce qu'est orienter une droite $\mathcal{D}$: on s'y donne deux points M et N et on décrète par exemple que l'*orientation positive* est celle qui consiste d'aller de M vers N , c'est-à-dire le "sens" du vecteur $\overrightarrow{MN}$; l'orientation "négative" (ou contraire) est celle du vecteur $\overrightarrow{NM}$ ou tout autre vecteur $\vec{u}$ avec $\vec{u} = \mu \overrightarrow{MN}$, $\mu \in \mathbb{R}_-^*$! Finalement,

orienter $\mathcal{D}$ c'est choisir une classe de bases de l'espace vectoriel $\vec{\mathcal{D}}$, direction de $\mathcal{D}$. C'est cette manière de voir qui va nous amener à définir la notion d'orientation dans un espace vectoriel $\vec{\mathcal{V}}$ et par suite dans tout espace affine $\mathcal{P}$ (de dimension n).

7.2. Soit $\mathfrak{B}$ l'ensemble de toutes les bases de $\vec{\mathcal{V}}$. Si $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ et $(\vec{e}'_1, \dots, \vec{e}'_n)$ sont deux éléments de $\mathfrak{B}$, pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, on peut écrire $\vec{e}'_j$ sous la forme $\vec{e}'_j = a_1^j \vec{e}_1 + \dots + a_n^j \vec{e}_n$ et :

$$P = \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_1^n \\ \vdots & & \vdots \\ a_n^1 & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}$$

est la matrice de passage de la base $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ à la base $(\vec{e}'_1, \dots, \vec{e}'_n)$. On dira que $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ et $(\vec{e}'_1, \dots, \vec{e}'_n)$ sont *équivalentes* si le déterminant de P (qui est toujours non nul) est positif. L'ensemble $\mathfrak{B}$ se répartit donc en deux classes d'équivalence $\mathfrak{B}_+$ et $\mathfrak{B}_-$.

Orienter l'espace vectoriel $\vec{\mathcal{V}}$, c'est choisir une base $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ dans l'une des classes $\mathfrak{B}_+$ ou $\mathfrak{B}_-$. Une autre base $(\vec{e}'_1, \dots, \vec{e}'_n)$ est dite *directe* si elle est dans la classe d'orientation choisie. Une orientation de l'espace affine $\mathcal{P}$ est une orientation de l'espace vectoriel $\vec{\mathcal{V}}$.

CHAPITRE II

APPLICATIONS AFFINES

Soient $(\mathcal{P}, \vec{\mathcal{V}}, \Phi)$ et $(\mathcal{P}', \vec{\mathcal{V}}', \Phi')$ deux espaces affines. On définit la notion d'application affine $\mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}'$ qui généralise celle d'application linéaire dans le cas où $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont des espaces vectoriels munis de leurs structures affines canoniques respectives. Dans le cas où les deux espaces sont les mêmes, on donne les exemples fondamentaux tels que la translation, l'homothétie, la projection sur un sous-espace parallèlement à une direction donnée *etc.*

1. Définition et exemples

Bien sûr on suppose connue la définition d'une application linéaire entre deux espaces vectoriels. Soit $f : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}'$ une application.

1.1. Définition. On dira que f est **affine** s'il existe un point O de $\mathcal{P}$ tel que l'application $\varphi : \overrightarrow{OM} \in \vec{\mathcal{V}} \longrightarrow \overrightarrow{f(O)f(M)} \in \vec{\mathcal{V}}'$ soit linéaire.

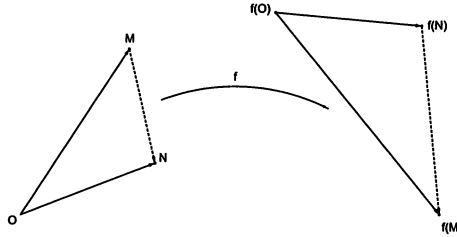


Fig. 7

En fait, l'application φ est indépendante de O : si O_1 est un autre point de $\mathcal{P}$, φ est définie de la même manière par $\varphi(\overrightarrow{O_1M}) = \overrightarrow{f(O_1)f(M)}$. En effet, on a :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{f(O_1)f(M)} &= \overrightarrow{f(O)f(M)} - \overrightarrow{f(O)f(O_1)} \\ &= \varphi(\overrightarrow{OM}) - \varphi(\overrightarrow{OO_1}) \\ &= \varphi(\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OO_1}) \text{ (car } \varphi \text{ est linéaire)} \\ &= \varphi(\overrightarrow{O_1M}). \end{aligned}$$

L'application φ sera notée $\vec{f}$ et appelée *direction* de f . On a donc, pour tous points M et N :

$$(4) \quad \overrightarrow{f(M)f(N)} = \vec{f}(\overrightarrow{MN}).$$

En effet :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{f(M)f(N)} &= \overrightarrow{f(O)f(N)} - \overrightarrow{f(O)f(M)} \\ &= \vec{f}(\overrightarrow{ON}) - \vec{f}(\overrightarrow{OM}) \\ &= \vec{f}(\overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM}) \text{ (car } \vec{f} \text{ est linéaire)} \\ &= \vec{f}(\overrightarrow{MN}). \end{aligned}$$

1.2. Exemples

i) Toute application constante $f : M \mapsto M_0$ est affine ; sa direction $\vec{f} : \vec{\mathcal{V}} \longrightarrow \vec{\mathcal{V}}'$ est l'application nulle.

ii) Supposons que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont des espaces vectoriels munis de leurs structures affines canoniques $\Phi(M, N) = N - M$ et $\Phi'(M', N') = N' - M'$. Alors $f : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}'$ est affine si, et seulement si, il existe $B' \in \mathcal{P}'$ et $\varphi : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}'$ linéaire tels que $f(M) = \varphi(M) + B'$. En effet, supposons f affine de direction $\vec{f}$ et prenons O égal au vecteur nul. On a clairement :

$$\begin{aligned} f(M) - f(O) &= \overrightarrow{f(O)f(M)} \\ &= \vec{f}(\overrightarrow{OM}) \\ &= \vec{f}(M). \end{aligned}$$

Ce qui donne $f(M) = \vec{f}(M) + f(O)$; il suffit alors de prendre $B' = f(O)$ et $\varphi = \vec{f}$. Inversement, si $f(M) = \varphi(M) + B'$ avec φ linéaire, on a de façon immédiate $f(O) = B'$, d'où $f(M) - f(O) = \varphi(M) = \varphi(\overrightarrow{OM})$. Ce qui donne $\overrightarrow{f(O)f(M)} = \varphi(\overrightarrow{OM})$ qui montre bien que f satisfait aux conditions de la définition 1.1 et donc elle est affine.

Supposons $\mathcal{P} = \mathcal{P}'$, $\vec{\mathcal{V}} = \vec{\mathcal{V}}'$ et $\Phi = \Phi'$.

1.3. Translation

Soit $f : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$ une application affine dont la direction $\vec{f}$ est l'identité de $\vec{\mathcal{V}}$. Alors $\overrightarrow{f(M)f(N)} = \overrightarrow{MN}$ pour tous $M, N \in \mathcal{P}$; ce qui est équivalent (par la règle du parallélogramme) à $\overrightarrow{Mf(M)} = \overrightarrow{Nf(N)}$. Le vecteur $\overrightarrow{Mf(M)}$ est donc indépendant de M ; on le note $\vec{u}$. L'application f est alors la *translation* de vecteur $\vec{u}$ qu'on notera $\tau_{\vec{u}}$.

Il est très facile de voir que la composée $\tau_{\vec{v}} \circ \tau_{\vec{u}}$ de deux translations $\tau_{\vec{u}}$ et $\tau_{\vec{v}}$ n'est rien d'autre que la translation $\tau_{\vec{u} + \vec{v}}$ de vecteur $\vec{u} + \vec{v}$; on voit donc que $\tau_{\vec{v}} \circ \tau_{\vec{u}} = \tau_{\vec{u}} \circ \tau_{\vec{v}}$; la translation $\tau_{\vec{0}}$ est l'identité de $\mathcal{P}$; d'autre part, toute translation $\tau_{\vec{u}}$ est une bijection, donc inversible et son inverse est $\tau_{\vec{u}}^{-1} = \tau_{-\vec{u}}$. Les translations de $\mathcal{P}$ forment donc un groupe commutatif $\mathcal{T}$ pour la composition des applications. L'application $\vec{u} \in \vec{\mathcal{V}} \mapsto \tau_{\vec{u}} \in \mathcal{T}$ est un isomorphisme du groupe additif $(\vec{\mathcal{V}}, +)$ sur le groupe $(\mathcal{T}, \circ)$.

1.4. Homothétie

Soient $\omega \in \mathcal{P}$ et $k \in \mathbb{R}^*$. On appelle *homothétie* de centre ω et de rapport k l'application $h : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$ qui à tout point M associe le point M' tel que $\overrightarrow{\omega M'} = k\overrightarrow{\omega M}$.

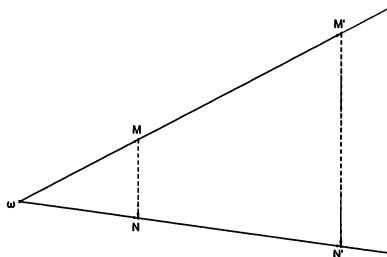


Fig. 8

Comme $h(\omega) = \omega$ (i.e ω est un point fixe de h), on a $\overrightarrow{h(\omega)h(M)} = \overrightarrow{k\omega M}$ qui montre bien que h satisfait aux conditions de la définition 1.1 et est donc une application affine de direction l'application linéaire $\overrightarrow{h} : \overrightarrow{V} \longrightarrow \overrightarrow{V}$ définie par $\overrightarrow{h}(\overrightarrow{u}) = k\overrightarrow{u}$.

Fixons un point $\omega \in \mathcal{P}$ et notons $\mathcal{H}(\omega)$ l'ensemble de toutes les homothéties de centre ω . Il est immédiat de voir que si $h, h' \in \mathcal{H}(\omega)$ sont de rapports respectifs k et k' , leur composée $h' \circ h$ est dans $\mathcal{H}(\omega)$ de rapport kk' ; l'homothétie (de centre ω) et de rapport 1 est l'identité; d'autre part, toute homothétie $h(\omega, k)$ est une bijection, donc inversible et son inverse h^{-1} est une homothétie de centre ω et de rapport $\frac{1}{k}$. L'ensemble $\mathcal{H}(\omega)$ muni de la loi de composition est donc un groupe commutatif. L'application $k \in \mathbb{R}^* \longmapsto h(\omega, k) \in \mathcal{H}(\omega)$ est un isomorphisme du groupe multiplicatif $(\mathbb{R}^*, \times)$ sur le groupe $(\mathcal{H}(\omega), \circ)$.

1.5. Exercice

Son objet est d'établir une propriété caractéristique des deux types d'applications affines qu'on vient de voir. Soit $f : M \in \mathcal{P} \longmapsto M' \in \mathcal{P}$ une application.

- On suppose que, pour tous M et N , on a $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$. Montrer que f est une translation.

- On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$ tel que pour tous M et N on ait $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$. Montrer que f est une homothétie de rapport k .

2. Applications affines et barycentres

Dans cette section, nous allons voir le lien entre application affine et barycentres. Plus précisément, nous donnerons une caractérisation très utilisée dans la pratique; c'est souvent de cette manière qu'on montre qu'une application est affine.

2.1. Théorème. *Une application $f : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}'$ est affine si, et seulement si, pour tous $M, N \in \mathcal{P}$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $f((1 - \lambda)M + \lambda N) = (1 - \lambda)f(M) + \lambda f(N)$.*

Démonstration. Supposons f affine. Montrer que :

$$(5) \quad f((1 - \lambda)M + \lambda N) = (1 - \lambda)f(M) + \lambda f(N)$$

revient à montrer que l'image du barycentre G des points massiques $(M, 1 - \lambda)$ et (N, λ) est le barycentre G' des points massiques $(f(M), 1 - \lambda)$ et $(f(N), \lambda)$. Le point G est caractérisé par la relation : $(1 - \lambda)\overrightarrow{GM} + \lambda\overrightarrow{GN} = \overrightarrow{0}$. D'où :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{0} &= \overrightarrow{f}((1 - \lambda)\overrightarrow{GM} + \lambda\overrightarrow{GN}) \\ &= (1 - \lambda)\overrightarrow{f}(\overrightarrow{GM}) + \lambda\overrightarrow{f}(\overrightarrow{GN}) \\ &= (1 - \lambda)\overrightarrow{f(G)f(M)} + \lambda\overrightarrow{f(G)f(N)} \\ &= (1 - \lambda)\overrightarrow{G'f(M)} + \lambda\overrightarrow{G'f(N)} \end{aligned}$$

qui montre que G' est le barycentre des points massiques $(f(M), 1 - \lambda)$ et $(f(N), \lambda)$.

Réciproquement, supposons l'assertion suivante remplie : si G est le barycentre des points massiques $(M, 1 - \lambda)$ et (N, λ) alors $G' = f(G)$ est le barycentre des points massiques $(f(M), 1 - \lambda)$ et $(f(N), \lambda)$. Soient O un point de $\mathcal{P}$ et $O' = f(O)$. Posons $M' = f(M)$ et $N' = f(N)$. On a :

$$\overrightarrow{OG} = (1 - \lambda)\overrightarrow{OM} + \lambda\overrightarrow{ON} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{O'G'} = (1 - \lambda)\overrightarrow{O'M'} + \lambda\overrightarrow{O'N'}.$$

On définit $\varphi : \vec{\mathcal{V}} \longrightarrow \vec{\mathcal{V}}'$ par $\varphi(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{O'M'}$. Montrons que φ est linéaire. D'abord $\varphi(\vec{0}) = \varphi(\overrightarrow{OO}) = \overrightarrow{O'O} = \vec{0}$. Ensuite :

$$\begin{aligned}\varphi((1-\lambda)\overrightarrow{OM} + \lambda\overrightarrow{ON}) &= \varphi(\overrightarrow{OG}) \\ &= \overrightarrow{O'G'} \\ &= (1-\lambda)\overrightarrow{O'M'} + \lambda\overrightarrow{O'N'}\end{aligned}$$

c'est-à-dire $\varphi((1-\lambda)\overrightarrow{OM} + \lambda\overrightarrow{ON}) = (1-\lambda)\varphi(\overrightarrow{OM}) + \lambda\varphi(\overrightarrow{ON})$. Si on prend $M = O$ et on pose $\vec{v} = \overrightarrow{ON}$, on aura :

$$\varphi(\lambda\vec{v}) = \varphi((1-\lambda)\overrightarrow{OO} + \lambda\overrightarrow{ON}) = \lambda\varphi(\overrightarrow{ON}) = \lambda\varphi(\vec{v}).$$

Soient $\vec{u}, \vec{v} \in \vec{\mathcal{V}}$ et $M, N \in \mathcal{P}$ tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{ON}$. Notons ω le milieu du segment $[MN]$. On a $\frac{1}{2}\varphi(\vec{u} + \vec{v}) = \varphi(\frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v}))$. Mais $\frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v}) = \overrightarrow{O\omega}$ donc :

$$\varphi\left(\frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v})\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{O'M'} + \frac{1}{2}\overrightarrow{O'N'} = \frac{1}{2}(\varphi(\vec{u}) + \varphi(\vec{v}))$$

par suite $\varphi(\vec{u} + \vec{v}) = \varphi(\vec{u}) + \varphi(\vec{v})$; l'application φ est donc linéaire ; f est affine et de direction φ . $\square$

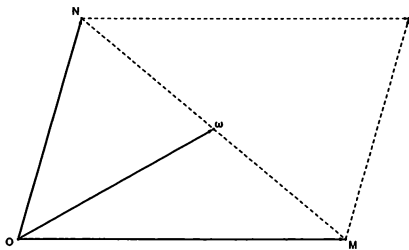


Fig. 9

2.2. Proposition-corollaire. Soit $f : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}'$ une application affine de direction $\vec{f}$. On suppose f non constante.

- i) Si $\mathcal{F}$ est un sous-espace affine de $\mathcal{P}$ de direction $\vec{F}$, son image $f(\mathcal{F})$ est un sous-espace affine de $\mathcal{P}'$ de direction le sous-espace vectoriel $\vec{f}(\vec{F})$.
- ii) Si $\mathcal{F}'$ est un sous-espace affine de $\mathcal{P}'$ de direction $\vec{F}'$, son image réciproque $f^{-1}(\mathcal{F}')$ est un sous-espace affine de $\mathcal{P}$ de direction $\vec{f}^{-1}(\vec{F}')$.
- iii) f préserve l'alignement : si M, N et P sont trois points alignés, leurs images $f(M), f(N)$ et $f(P)$ le sont aussi.
- iv) L'image par f d'un segment $[MN]$ est le segment $[f(M)f(N)]$ (éventuellement réduit à un point).
- v) L'image par f d'une partie convexe de $\mathcal{P}$ est une partie convexe de $\mathcal{P}'$.
- vi) f est entièrement déterminée par ses valeurs sur les points d'un repère affine $(C_0, \dots, C_n)$ de $\mathcal{P}$.

2.3. Autres propriétés

Soit $f : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}'$ une application affine de direction $\vec{f}$. La vérification de ce qui suit est laissée au lecteur.

1) f est injective $\iff \vec{f}$ est injective.

2) f est surjective $\iff \vec{f}$ est surjective.

3) Donc : f est bijective $\iff \vec{f}$ est bijective. Dans ce cas, on dira que f est un *isomorphisme affine* de $\mathcal{P}$ sur $\mathcal{P}'$.

4) Une application affine conserve le parallélisme : si deux sous-espaces affines $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont parallèles, leurs images $f(\mathcal{F})$ et $f(\mathcal{G})$ le sont aussi.

5) Supposons $\mathcal{P} = \mathcal{P}'$ et soit $f : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$ une application affine. On dira que ω est un *point fixe* de f si $f(\omega) = \omega$. Dans ce cas on a $\vec{f}(\overrightarrow{\omega M}) = \overrightarrow{f(\omega)f(M)} = \overrightarrow{\omega f(M)}$, ce qui donne $f(M) = \omega + \vec{f}(\overrightarrow{\omega M})$. Si donc on vectorialise $\mathcal{P}$ au point ω , l'application $f : \vec{\mathcal{P}}_\omega \longrightarrow \vec{\mathcal{P}}_\omega$ est linéaire.

6) Une application $f : \mathcal{P} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $f((1-\lambda)M + \lambda N) = (1-\lambda)f(M) + \lambda f(N)$ pour tous M, N et tout $\lambda \in \mathbb{R}$ est appelée *forme affine*. Si f est non constante, elle est surjective et, pour tout $c \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(c)$ est un hyperplan affine $\mathcal{H}_c$; tous les hyperplans $\mathcal{H}_c$ (avec c variant dans $\mathbb{R}$) sont parallèles. Si on munit $\mathcal{P}$ d'un repère $(O; \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$, tout point M de $\mathcal{P}$ est défini de façon unique par ses coordonnées cartésiennes $(x_1, \dots, x_n)$; toute forme affine s'écrit (en fonction de ces coordonnées) :

$$f(M) = a_1x_1 + \dots + a_nx_n + a_0$$

où $a_0, a_1, \dots, a_n$ sont des réels ; f est non constante si l'un au moins des nombres $a_1, \dots, a_n$ est non nul.

7) Soient $f : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}'$ et $g : \mathcal{P}' \longrightarrow \mathcal{P}''$ deux applications affines de directions respectives $\vec{f}$ et $\vec{g}$. Alors la composée $g \circ f$ est aussi affine de direction $\vec{g} \circ \vec{f}$. Si f est bijective, f^{-1} est affine de direction $(\vec{f}^{-1}) = (\vec{f})^{-1}$.

8) Soient $(C_0, \dots, C_n)$ un repère affine de $\mathcal{P}$ et $B_0, \dots, B_n$ des points de $\mathcal{P}'$. Alors il existe une unique application affine $f : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}'$ telle que $f(C_0) = B_0, \dots, f(C_n) = B_n$. Ainsi f est injective si, et seulement si, les points $\{B_0, \dots, B_n\}$ sont affinement indépendants.

3. Projections

3.1. Soit $(\mathcal{P}, \vec{\mathcal{V}}, \Phi)$ un espace affine. On se donne deux sous-espaces vectoriels $\vec{\mathcal{F}}$ et $\vec{\mathcal{G}}$ tels que $\vec{\mathcal{V}}$ soit la somme directe $\vec{\mathcal{F}} \oplus \vec{\mathcal{G}}$ c'est-à-dire tout vecteur $\vec{w} \in \vec{\mathcal{V}}$ s'écrit de façon unique sous la forme $\vec{u} + \vec{v}$ avec $\vec{u} \in \vec{\mathcal{F}}$ et $\vec{v} \in \vec{\mathcal{G}}$. On dira que $\vec{\mathcal{F}}$ et $\vec{\mathcal{G}}$ sont *supplémentaires*.

L'application $\vec{p} : \vec{\mathcal{V}} = \vec{\mathcal{F}} \oplus \vec{\mathcal{G}} \longrightarrow \vec{\mathcal{F}}$ qui à $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$ associe $\vec{u}$ est appelée *projection sur $\vec{\mathcal{F}}$ parallèlement à $\vec{\mathcal{G}}$* (ou dans la *direction $\vec{\mathcal{G}}$*). Elle est évidemment linéaire et vérifie $\vec{p} \circ \vec{p} = \vec{p}$.

Soient maintenant $\mathcal{F}$ un sous-espace affine de $\mathcal{P}$ de direction $\vec{\mathcal{F}}$ et $\vec{\mathcal{G}}$ un sous-espace supplémentaire à $\vec{\mathcal{F}}$. Alors tout sous-espace affine $\mathcal{G}$ de direction $\vec{\mathcal{G}}$ coupe $\mathcal{F}$ en un point et un seul. On verra comment l'obtenir concrètement dans la proposition qui suit.

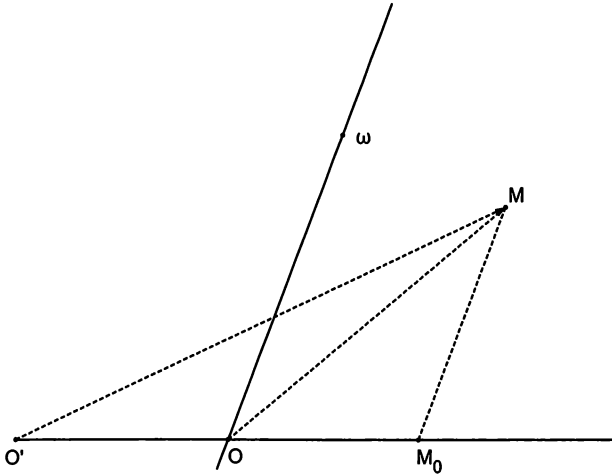
3.2. Proposition. Soit O un point de $\mathcal{F}$. Pour tout $M \in \mathcal{P}$, notons M_0 l'unique point de $\mathcal{F}$ tel que $\vec{p}(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{OM_0}$ où $\vec{p}$ est la projection sur $\vec{\mathcal{F}}$ parallèlement à $\vec{\mathcal{G}}$. Alors M_0 ne dépend pas du choix de O .

Démonstration. Notons M'_0 le point sur $\mathcal{F}$ obtenu en utilisant un autre $O' \in \mathcal{F}$. Il s'agit de montrer que $M_0 = M'_0$. On a :

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{O'M'_0} &= \overrightarrow{p}(\overrightarrow{O'M}) \\
 &= \overrightarrow{p}(\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OM}) \\
 &= \overrightarrow{p}(\overrightarrow{O'O}) + \overrightarrow{p}(\overrightarrow{OM}) \quad (\text{car } \overrightarrow{p} \text{ est linéaire}) \\
 &= \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OM_0} \quad (\text{car } \overrightarrow{p} \text{ est l'identité sur } \mathcal{F}) \\
 &= \overrightarrow{O'M_0}
 \end{aligned}$$

ce qui donne $M_0 = M'_0$. □

L'application $p : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{F}$ définie par $p(M) = M_0$ est appelée *projection* sur $\mathcal{F}$ parallèlement à $\overrightarrow{\mathcal{G}}$. En tant qu'application de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ (on se rappelle que $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{P}$), elle est affine de direction la projection linéaire $\overrightarrow{p} : \overrightarrow{\mathcal{V}} \longrightarrow \overrightarrow{\mathcal{F}} \subset \overrightarrow{\mathcal{V}}$. Elle vérifie $p \circ p = p$ et est l'identité sur $\mathcal{F}$.



Droite $\mathcal{F} = (OO')$ et droite $\mathcal{G} = (O\omega)$

Fig. 10

3.3. Exercice

Soit $\overrightarrow{\varphi} : \overrightarrow{\mathcal{V}} \longrightarrow \overrightarrow{\mathcal{V}}$ une application linéaire non nulle telle que $\overrightarrow{\varphi} \circ \overrightarrow{\varphi} = \overrightarrow{\varphi}$. Montrer qu'il existe une décomposition de $\overrightarrow{\mathcal{V}}$ en sous-espaces vectoriels $\overrightarrow{\mathcal{V}} = \overrightarrow{\mathcal{F}} \oplus \overrightarrow{\mathcal{G}}$ telle que $\overrightarrow{\varphi}$ soit la projection sur $\overrightarrow{\mathcal{F}}$ parallèlement à $\overrightarrow{\mathcal{G}}$.

CHAPITRE III

LE GROUPE AFFINE DU PLAN

Dans tout ce chapitre $(\mathcal{P}, \vec{\mathcal{V}}, \Phi)$ désigne un plan affine. On étudie le *groupe affine* de ce plan et on décrit quelques-uns de ses sous-groupes, notamment le groupe des translations, le groupe des homothéties et celui des homothéties translations. On termine par les théorèmes de Thalès, Pappus et Menélaüs.

L'application $\Phi : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \longrightarrow \vec{\mathcal{V}}$ est définie par $\Phi(M, N) = \overrightarrow{MN}$. Soient O un point quelconque de $\mathcal{P}$ (fixé une fois pour toutes) et Φ_O la bijection entre $\mathcal{P}$ et $\vec{\mathcal{V}}$ définie par $\Phi_O(M) = \overrightarrow{OM}$. Notons $\vec{\mathcal{P}}_O$ le vectorialisé de $\mathcal{P}$ au point O .

1. Le groupe affine et ses sous-groupes

1.1. Définition. On appelle **groupe affine** du plan $(\mathcal{P}, \vec{\mathcal{V}}, \Phi)$ le groupe de toutes les applications affines bijectives $\mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$. On le note $\text{Aff}(\mathcal{P})$.

En voyant les points M de $\mathcal{P}$ comme des vecteurs de $\vec{\mathcal{P}}_O$, l'application σ qui à $M \in \vec{\mathcal{P}}_O$ associe $\overrightarrow{OM} \in \vec{\mathcal{V}}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

1.2. Sous-groupe linéaire

Le diagramme qui suit décrit un isomorphisme entre le groupe linéaire $\text{GL}(\vec{\mathcal{P}}_O)$ de $\vec{\mathcal{P}}_O$ et le groupe linéaire $\text{GL}(\vec{\mathcal{V}})$ de $\vec{\mathcal{V}}$:

$$\begin{array}{ccc} \vec{\mathcal{P}}_O & \xrightarrow{\sigma} & \vec{\mathcal{V}} \\ \vec{f} \downarrow & & \downarrow \vec{f}_\sigma \\ \vec{\mathcal{P}}_O & \xrightarrow{\sigma} & \vec{\mathcal{V}} \end{array}$$

À tout $\vec{f} \in \text{GL}(\vec{\mathcal{P}}_O)$ on associe $\vec{f}_\sigma \in \text{GL}(\vec{\mathcal{V}})$ avec $\vec{f}_\sigma = \sigma \circ \vec{f} \circ \sigma^{-1}$. Un automorphisme linéaire de $\vec{\mathcal{P}}_O$ est donc un automorphisme affine qui fixe O . De cette façon les groupes linéaires $\text{GL}(\vec{\mathcal{V}})$ et $\text{GL}(\vec{\mathcal{P}}_O)$ se plongent dans le groupe affine $\text{Aff}(\mathcal{P})$.

1.2. Sous-groupe des translations

On se donne un élément $f \in \text{Aff}(\mathcal{P})$ de direction $\vec{f}$; $\vec{f}$ est un automorphisme linéaire c'est-à-dire $\vec{f}$ est un élément du groupe linéaire $\text{GL}(\vec{\mathcal{V}})$ de $\vec{\mathcal{V}}$. Alors on sait (cf. chapitre II 1.2. ii)) que $f(M) = \vec{f}(M) + B$ où $B = f(O)$. L'application :

$$(6) \quad \pi : f \in \text{Aff}(\mathcal{P}) \longmapsto \vec{f} \in \text{GL}(\vec{\mathcal{V}})$$

est un morphisme de groupes. Il est surjectif ; en effet, on a vu que tout $\varphi \in \text{GL}(\vec{\mathcal{V}})$ se réalise comme élément de $\text{Aff}(\mathcal{P})$ fixant le point O . Le noyau de π (les éléments qui s'envoient par π sur l'identité de $\vec{\mathcal{V}}$) sont du type $M \in \mathcal{P} \longmapsto M + B$ c'est-à-dire les translations qui forment un sous-groupe $\mathcal{T}$ de $\text{Aff}(\mathcal{P})$.

1.3. Sous-groupe des homothéties translations

• Composée de deux homothéties

Soient h_1 et h_2 deux homothéties de centres respectifs ω_1 et ω_2 et de rapports respectifs k_1 et k_2 . Le cas où $\omega_1 = \omega_2$ a déjà été traité ; nous supposons donc $\omega_1 \neq \omega_2$. Soient M et N deux points de $\mathcal{P}$; ils se transforment par h_1 respectivement

en M_1 et N_1 de telle sorte que $\overrightarrow{M_1 N_1} = k_1 \overrightarrow{MN}$; de même M_1 et N_1 se transforment par h_2 respectivement en M_2 et N_2 de telle sorte que $\overrightarrow{M_2 N_2} = k_2 \overrightarrow{M_1 N_1}$. Finalement M et N se transforment par $h_2 \circ h_1$ respectivement en M_2 et N_2 de telle sorte que $\overrightarrow{M_2 N_2} = k_2 k_1 \overrightarrow{MN}$. Deux cas donc :

- i) $k_2 k_1 = 1$; $h_2 \circ h_1$ est alors une translation τ ; déterminons son vecteur. Soient M un point de $\mathcal{P}$, $M_1 = h_1(M)$ et $M_2 = h_2(M_1)$. On a :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MM_2} &= \overrightarrow{M\omega_1} + \overrightarrow{\omega_1 M_2} \\ &= -\frac{1}{k_1} \overrightarrow{\omega_1 M_1} + \overrightarrow{\omega_1 \omega_2} + \overrightarrow{\omega_2 M_2} \\ &= -\frac{1}{k_1} \overrightarrow{\omega_1 M_1} + \overrightarrow{\omega_1 \omega_2} + k_2 (\overrightarrow{\omega_2 \omega_1} + \overrightarrow{\omega_1 M_1}) \\ &= (1 - k_2) \overrightarrow{\omega_1 \omega_2} - \frac{1}{k_1} \overrightarrow{\omega_1 M_1} + \frac{1}{k_1} \overrightarrow{\omega_1 M_1} \\ &= (1 - k_2) \overrightarrow{\omega_1 \omega_2}. \end{aligned}$$

La translation τ a donc pour vecteur $\overrightarrow{u} = (1 - k_2) \overrightarrow{\omega_1 \omega_2}$

- ii) si $k_2 k_1 \neq 1$, $h_2 \circ h_1$ est une homothétie h de rapport $k = k_2 k_1$. Son centre ω est son unique point fixe ; déterminons-le. Soient M un point de $\mathcal{P}$, $M_1 = h_1(M)$ et $M_2 = h(M) = h_2(M_1)$. On a :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\omega_2 M_2} &= k_2 \overrightarrow{\omega_2 M_1} \\ &= k_2 (\overrightarrow{\omega_2 \omega_1} + \overrightarrow{\omega_1 M_1}) \\ &= k_2 (\overrightarrow{\omega_2 \omega_1} + k_1 \overrightarrow{\omega_1 M}) \\ &= k_2 \overrightarrow{\omega_2 \omega_1} + k_2 k_1 \overrightarrow{\omega_1 M}. \end{aligned}$$

Si $M = \omega$, $M_2 = \omega$ car ω est le centre de h . D'où : $\overrightarrow{\omega_2 \omega} = k_2 \overrightarrow{\omega_2 \omega_1} + k_2 k_1 \overrightarrow{\omega_1 \omega}$; ce qui donne $(1 - k_2 k_1) \overrightarrow{\omega_2 \omega} = k_2 (1 - k_1) \overrightarrow{\omega_2 \omega_1}$. Comme $k_2 k_1 \neq 1$, on a finalement :

$$\overrightarrow{\omega_2 \omega} = \frac{k_2 (1 - k_1)}{1 - k_2 k_1} \overrightarrow{\omega_2 \omega_1}.$$

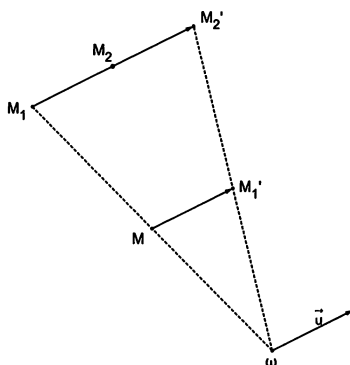
Ceci détermine complètement le point ω .

• *Composée d'une homothétie et d'une translation*

Soient h une homothétie de centre ω et de rapport $k \in \mathbb{R}^*$ et τ une translation de vecteur $\overrightarrow{u}$. Pour éviter les cas triviaux (l'une ou l'autre des deux transformations est l'identité) on supposera $k \neq 1$ et $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$. Posons $f = \tau \circ h$ et prenons deux points M et N . Par h , ils se transforment en M_1 et N_1 de telle sorte que $\overrightarrow{M_1 N_1} = k \overrightarrow{MN}$; à leur tour, M_1 et N_1 se transforment par τ en M_2 et N_2 de telle sorte que $\overrightarrow{M_2 N_2} = \overrightarrow{M_1 N_1}$. Finalement $\overrightarrow{M_2 N_2} = k \overrightarrow{MN}$; comme k est différent de 1, la composée f est une homothétie de rapport k (le lecteur pourrait entreprendre de déterminer de façon exacte son centre). On aurait eu aussi une homothétie si on avait pris le produit $h \circ \tau$.

L'ensemble $\mathcal{HT}$ des homothéties-translations est donc un sous-groupe du groupe affine $\text{Aff}(\mathcal{P})$. C'est le groupe des *dilatations* du plan : une figure géométrique est poussée puis dilatée ou dilatée d'abord et poussée ensuite ! Le groupe $\mathcal{HT}$ n'est pas

abélien comme on peut le voir sur le dessin qui suit : on a pris une homothétie de centre ω et de rapport 2 et une translation de vecteur $\vec{u}$.



Par $\tau \circ h$, M va sur M_2 et par $h \circ \tau$ il va sur M_2'

Fig. 11

1.4. Un autre exemple

Soit $\mathcal{C}$ une partie de $\mathcal{P}$. On dira que $f \in \text{Aff}(\mathcal{P})$ stabilise $\mathcal{C}$ si, pour tout $C \in \mathcal{C}$, $f(C) \in \mathcal{C}$; comme f est une bijection on a en fait $f(C) = C$. Il est facile de voir que, si f et f' stabilisent $\mathcal{C}$, il en est de même pour f^{-1} et $f' \circ f$; donc les éléments de $\text{Aff}(\mathcal{P})$ qui stabilisent $\mathcal{C}$ forment un sous-groupe qu'on notera $\text{Aff}_{\mathcal{C}}(\mathcal{P})$.

Supposons que $\mathcal{C} = \{C_0, C_1, C_2\}$ est un repère affine. On sait (cf. II 2.2. vi)) que pour connaître $f \in \text{Aff}(\mathcal{P})$, il suffit de connaître ses valeurs sur les points C_0, C_1 et C_2 . Notons $\mathfrak{S}_3$ le groupe symétrique des permutations de trois éléments $\{0, 1, 2\}$. À tout $\sigma \in \mathfrak{S}_3$ on associe $f \in \text{Aff}(\mathcal{P})$ défini par $f_{\sigma}(C_i) = C_{\sigma(i)}$ pour $i \in \{0, 1, 2\}$. Il est clair que $f_{\sigma} \in \text{Aff}_{\mathcal{C}}(\mathcal{P})$; on a donc une application $\varphi : \sigma \in \mathfrak{S}_3 \mapsto f_{\sigma} \in \text{Aff}_{\mathcal{C}}(\mathcal{P})$ dont il est facile de voir que c'est un morphisme de groupes ; nous allons montrer qu'en fait φ est un isomorphisme.

Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_3$ tel que f_{σ} soit l'identité ; il est clair que $f_{\sigma}(C_i) = C_i$ pour tout $i \in \{0, 1, 2\}$ donc $\sigma(i) = i$ pour tout i et par suite σ est la permutation identité donc φ est injectif. Montrons maintenant qu'il est surjectif. Soit $f \in \text{Aff}_{\mathcal{C}}(\mathcal{P})$. Comme f stabilise $\mathcal{C}$, il ne fait que permuer les points C_0, C_1 et C_2 c'est-à-dire il existe $\sigma \in \mathfrak{S}_3$ tel que $f(C_i) = C_{\sigma(i)}$; ceci montre que $f = f_{\sigma}$, donc φ est surjectif et par suite c'est un isomorphisme du groupe $\mathfrak{S}_3$ sur le groupe $\text{Aff}_{\mathcal{C}}(\mathcal{P})$.

2. Théorème de Thalès (*)

C'est sans conteste l'un des théorèmes fondamentaux de la géométrie affine. Il est partout ! Nous allons l'énoncer et le démontrer dans le cadre qui nous intéresse ici, celui de la géométrie affine réelle plane. À cet effet, nous allons rappeler la notion de mesure algébrique.

Deux points distincts A et B définissent une droite $(AB) = \{(1-\lambda)A + \lambda B : \lambda \in \mathbb{R}\}$. On a des applications $\lambda \in \mathbb{R} \mapsto \lambda \overrightarrow{AB} \in \mathbb{R} \overrightarrow{AB} \mapsto A + \lambda \overrightarrow{AB} \in (AB)$. Tout point M de (AB) s'écrit $M = A + \lambda \overrightarrow{AB}$ pour un $\lambda \in \mathbb{R}$ unique. Soient $M = A + \lambda \overrightarrow{AB}$ et

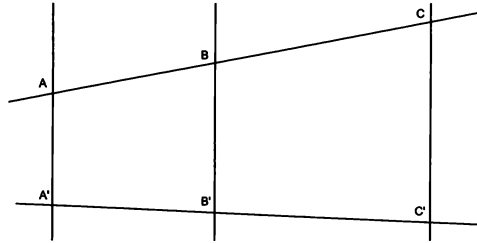
(*) THALÈS de Milet : grand mathématicien (surtout géomètre) et philosophe grec. Il vécut aux VII^e et VI^e siècles av. J.C.

$N = A + \mu \overrightarrow{AB}$ deux points de (AB) ; on a $\overrightarrow{MN} = (\mu - \lambda) \overrightarrow{AB}$. Le nombre $\overline{MN} = \mu - \lambda$ est ce qu'on a appelé la mesure algébrique du vecteur $\overrightarrow{MN}$ relativement au repère affine $\{A, B\}$ de (AB) . On a aussi fait remarquer que si ce nombre dépend fortement de $\{A, B\}$, tout rapport $\frac{\overline{MN}}{\overline{M'N'}}$ (avec $M, N, M', N' \in (AB)$) n'en dépend jamais !

2.1. Énoncé du théorème

Soient $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ et $\mathcal{W}$ trois droites parallèles, deux à deux distinctes et $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites non parallèles à $\mathcal{U}$ (donc non plus à $\mathcal{V}$ et $\mathcal{W}$). On note A, B et C les points d'intersection de $\mathcal{D}$ respectivement avec $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ et $\mathcal{W}$ et A', B' et C' les points d'intersection de $\mathcal{D}'$ respectivement avec $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ et $\mathcal{W}$. Alors :

- i) $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}}$.
- ii) Si $\omega \in \mathcal{D}$ est tel que $\frac{\overline{A\omega}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}}$ alors $\omega = B$.



$$\mathcal{U} = (AA'), \mathcal{V} = (BB'), \mathcal{W} = (CC'), \mathcal{D} = (AB), \mathcal{D}' = (A'B')$$

Fig. 12

2.2. Démonstration du théorème

i) Les trois droites affines $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ et $\mathcal{W}$ ont même direction $\overrightarrow{U}$. Soit $p : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{D}$ la projection sur $\mathcal{D}$ parallèlement à $\overrightarrow{U}$. Alors $p(A') = A$, $p(B') = B$ et $p(C') = C$. Notons $\overrightarrow{p}$ la direction de p et posons $\alpha = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}}$. On a :

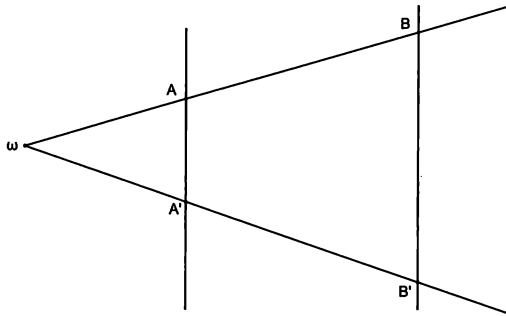
$$\overline{AB} = \overline{p(A')p(B')} = \overrightarrow{p} \left(\overline{A'B'} \right) = \alpha \overrightarrow{p} \left(\overline{A'C'} \right) = \alpha \overline{AC}.$$

Donc $\alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$; ce qu'on cherche à établir.

ii) Les deux égalités $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}}$ et $\frac{\overline{A\omega}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}}$ donnent $\overline{A\omega} = \overline{AB}$ et donc $B = \omega$. Ce qui termine la démonstration du théorème. $\square$

2.3. Une sorte de réciproque (sans démonstration)

Soient $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ deux droites affines et $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux autres droites telles que $\mathcal{D}$ coupe $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ respectivement en A et B et $\mathcal{D}'$ coupe $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ respectivement en A' et B' . On suppose que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ se coupent en ω . Si $\frac{\omega A}{\omega B} = \frac{\omega A'}{\omega B'}$ alors $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ sont parallèles.



$$\mathcal{U} = (AA'), \mathcal{V} = (BB'), \mathcal{D} = (\omega A), \mathcal{D}' = (\omega A')$$

Fig. 13

3. Théorème de Pappus (*)

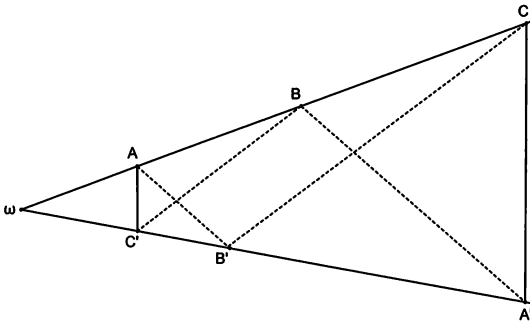
3.1. Énoncé du théorème

Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites distinctes. On prend trois points A, B et C sur $\mathcal{D}$ et trois points A', B' et C' sur $\mathcal{D}'$ tels que (AB') soit parallèle à (BA') et (BC') parallèle à (CB') . Alors (AC') est parallèle à (CA') .

La démonstration de ce théorème distinguera les deux cas : i) $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ parallèles ; ii) $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sécantes en ω .

3.2. $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sécantes en ω

Soient h_1 l'homothétie de centre ω envoyant A sur B et h_2 l'homothétie de centre ω envoyant B sur C . Alors h_1 envoie B' sur A' et h_2 envoie C' sur B' car (AB') est parallèle à (BA') et (BC') est parallèle à (CB') . Donc $h_2 \circ h_1$ envoie A sur C et $h_1 \circ h_2$ envoie C' sur A' . Comme h_1 et h_2 ont même centre, on a $h_2 \circ h_1 = h_1 \circ h_2 =$ une même homothétie h centrée en ω ; celle-ci envoie A sur C et C' sur A' ; donc la droite (AC') est parallèle à la droite (CA') .



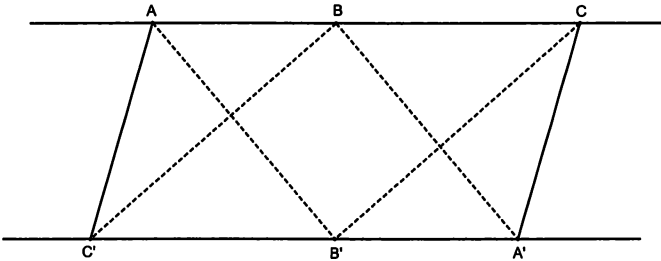
$$\mathcal{D} = (\omega A), \mathcal{D}' = (\omega A')$$

Fig. 14

(*) PAPPUS d'Alexandrie : vécut au IV^e siècle ap. J.C. Mathématicien illustre de la Grèce antique

3.3. $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ parallèles

Soient τ_1 la translation envoyant A sur B et τ_2 celle envoyant B sur C . Alors τ_1 envoie B' sur A' et τ_2 envoie C' sur B' car (AB') est parallèle à (BA') et (BC') est parallèle à (CB') . Donc $\tau_2 \circ \tau_1$ envoie A sur C et $\tau_1 \circ \tau_2$ envoie C' sur A' . Comme τ_1 et τ_2 commutent, $\tau_1 \circ \tau_2$ et $\tau_2 \circ \tau_1$ sont égales à une même translation τ ; celle-ci envoie A sur C et C' sur A' ; donc la droite (AC') est parallèle à la droite (CA') .



$\mathcal{D} = (AB), \mathcal{D}' = (A'B')$
Fig. 15

4. Théorème de Ménélaüs (*)

C'est vraiment un beau théorème de la géométrie affine plane et qui mérite bien entendu qu'on en parle !

4.1. Énoncé du théorème

Soient A, B et C trois points affinement indépendants et $A' \in (BC)$, $B' \in (AC)$ et $C' \in (AB)$ distincts. Alors A', B' et C' sont alignés si, et seulement si, on a :

(7)
$$\frac{\overline{A'C}}{\overline{A'B}} \cdot \frac{\overline{B'A}}{\overline{B'C}} \cdot \frac{\overline{C'B}}{\overline{C'A}} = 1.$$

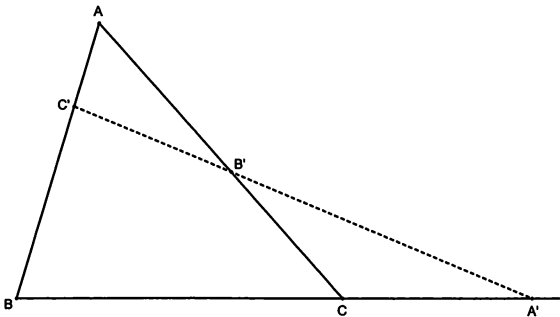


Fig. 16

(*) MÉNÉLAÛS d'Alexandrie : vécut vers l'an 100 ap. J.C. en Égypte.

4.2. On suppose A' , B' et C' alignés. Notons h_1 l'homothétie de centre A' et de rapport $\rho_1 = \frac{A'C}{A'B}$ et h_2 celle de centre B' et de rapport $\rho_2 = \frac{B'A}{B'C}$; alors h_1 envoie B sur C et h_2 envoie C sur A . Donc la transformation $h_2 \circ h_1$ envoie B sur A . Si $h_2 \circ h_1$ était une translation son vecteur serait forcément $\overrightarrow{BA}$; h_1 fixe A' et h_2 l'envoie sur un point $A'' \in (A'B')$ donc $\overrightarrow{A'A''} \neq \overrightarrow{BA}$ par suite $h_2 \circ h_1$ n'est pas une translation ; elle est donc une homothétie (qu'on notera h_3) et son centre est forcément sur la droite $(A'B')$; comme il doit aussi être sur (AB) (car $h_2 \circ h_1$ envoie B sur A), c'est le point C' . L'homothétie h_3 a pour rapport $\rho_3 = \frac{C'A}{C'B}$ qui est aussi égal à $\rho_2\rho_1$. De l'égalité $\frac{C'A}{C'B} = \frac{A'C}{A'B} \cdot \frac{B'A}{B'C}$ on tire donc :

$$\frac{A'C}{A'B} \cdot \frac{B'A}{B'C} \cdot \frac{C'B}{C'A} = 1.$$

4.3. On suppose qu'on a l'égalité $\frac{A'C}{A'B} \cdot \frac{B'A}{B'C} \cdot \frac{C'B}{C'A} = 1$ et on va démontrer que les trois points A' , B' et C' sont alignés. La composée des homothéties $h\left(B', \frac{B'A}{B'C}\right)$, $h\left(A', \frac{A'C}{A'B}\right)$ et $h\left(C', \frac{C'B}{C'A}\right)$ est une translation (car le produit de leurs rapports est 1) c'est-à-dire : $h\left(B', \frac{B'A}{B'C}\right) \circ h\left(A', \frac{A'C}{A'B}\right) \circ h\left(C', \frac{C'B}{C'A}\right) = \text{translation}$. Comme elle fixe le point A' , c'est en fait l'identité. Donc :

$$h\left(C', \frac{C'B}{C'A}\right)^{-1} = h\left(C', \frac{C'A}{C'B}\right) = h\left(B', \frac{B'A}{B'C}\right) \circ h\left(A', \frac{A'C}{A'B}\right).$$

Les centres A' , B' et C' de ces trois homothéties sont donc alignés. □

À titre d'exercice, le lecteur pourrait démontrer le beau théorème qui suit et qui s'inscrit dans la même lignée que celui de Pappus.

4.4. Théorème de Desargues (*). *On se donne deux triangles ABC et $A'B'C'$ tels que tout sommet du premier soit distinct de tout sommet du second. On suppose que la droite (AB) est parallèle à $(A'B')$, (BC) parallèle à $(B'C')$ et (AC) parallèle à $(A'C')$. Alors les droites (AA') , (BB') et (CC') sont parallèles ou concourantes.*

5. Structure algébrique de $\text{Aff}(\mathcal{P})$

Le groupe affine $\text{Aff}(\mathcal{P})$ du plan $\mathcal{P}$ est un objet géométrique dont les éléments sont les "mouvements" qui font bouger les points tout en gardant l'alignement et l'ordre. Mais c'est aussi un objet algébrique bâti d'une certaine manière : par plusieurs morceaux, entre autres le sous-groupe des translations $\mathcal{T}$ et celui des automorphismes linéaires $\text{GL}(\vec{\mathcal{V}})$ (les automorphismes affines qui fixent le point O). Nous allons voir en fait comment les deux blocs $\mathcal{T}$ et $\text{GL}(\vec{\mathcal{V}})$ s'imbriquent pour constituer $\text{Aff}(\mathcal{P})$.

5.1. On a vu dans la sous-section 1.2 de ce chapitre qu'il existe un morphisme naturel de groupes $\pi : f \in \text{Aff}(\mathcal{P}) \mapsto \vec{f} \in \text{GL}(\vec{\mathcal{V}})$. Ce morphisme est surjectif ; il admet

(*) Girard DESARGUES : architecte et éminent géomètre français ayant vécu entre la fin du XVI^e siècle et le XVII^e siècle. On le considère comme le premier à avoir semé les germes de la géométrie projective. Dans le cadre de cette géométrie une version forte du théorème qu'on vient d'énoncer y occupe une place centrale.

même une *section* c'est-à-dire il existe un morphisme $\eta : \text{GL}(\vec{\mathcal{V}}) \longrightarrow \text{Aff}(\mathcal{P})$ tel que $\pi \circ \eta$ soit l'identité de $\text{GL}(\vec{\mathcal{V}})$; $\eta(\vec{f})$ n'est rien d'autre que l'application linéaire $\vec{f}$ vue comme application affine fixant O . Le noyau de π est le sous-groupe des translations $\mathcal{T}$; c'est donc un sous-groupe *normal* – on dit aussi *distingué* ou *invariant* – de $\text{Aff}(\mathcal{P})$ (cf. Appendice). La suite de groupes et de morphismes :

$$(8) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{T} \hookrightarrow \text{Aff}(\mathcal{P}) \xrightarrow{\pi} \text{GL}(\vec{\mathcal{V}}) \longrightarrow 1$$

est exacte. (Le 0 au début de la suite désigne la translation de vecteur $\vec{0}$ et le 1 à la fin désigne l'application linéaire identité de $\vec{\mathcal{V}}$.)

5.2. On a aussi vu que tout élément $f \in \text{Aff}(\mathcal{P})$ de direction $\vec{f} \in \text{GL}(\vec{\mathcal{V}})$ s'écrit de manière unique $f(M) = \vec{f}(M) + B$ avec $B = f(O)$. On a donc une bijection :

$$(9) \quad f \in \text{Aff}(\mathcal{P}) \mapsto (B, \vec{f}) \in \mathcal{P} \times \text{GL}(\vec{\mathcal{V}})$$

où $\mathcal{P}$ est vu comme l'espace vectoriel $\vec{\mathcal{P}}_O$ (grâce la bijection Φ_O) et sur lequel $\text{GL}(\vec{\mathcal{V}}) \simeq \text{GL}(\vec{\mathcal{P}}_O)$ agit.

Soient $f, f' \in \text{Aff}(\mathcal{P})$ avec $\zeta(f) = (B, \vec{f})$ et $\zeta(f') = (B', \vec{f}')$. Alors, pour tout $M \in \mathcal{P}$ on a $(f' \circ f)(M) = (\vec{f}' \circ \vec{f})(M) + \vec{f}'(B) + B'$ et donc :

$$(10) \quad \zeta(f' \circ f) = (\vec{f}'(B) + B', \vec{f}' \circ \vec{f}).$$

On munit l'ensemble $\mathcal{P} \times \text{GL}(\vec{\mathcal{V}})$ de la loi de composition interne :

$$(B', \vec{f}') \cdot (B, \vec{f}) = (\vec{f}'(B) + B', \vec{f}' \circ \vec{f}).$$

Elle est associative et a pour élément neutre (O, I) (I étant l'identité de $\vec{\mathcal{V}}$ et O le point de $\mathcal{P}$ vu comme le vecteur nul de $\vec{\mathcal{P}}_O$). Chaque élément $(B, \vec{f})$ a pour inverse $(-(\vec{f})^{-1}(B), (\vec{f})^{-1})$. Elle confère donc à $\mathcal{P} \times \text{GL}(\vec{\mathcal{V}})$ une structure de groupe qu'on notera $\mathcal{P} \rtimes \text{GL}(\vec{\mathcal{V}})$ et pour laquelle ζ devient un morphisme. En fait ζ est un isomorphisme. On dira que $\text{Aff}(\mathcal{P})$ est le *produit semi-direct* du groupe additif $(\mathcal{P}, +)$ par le groupe linéaire $\text{GL}(\vec{\mathcal{V}})$. Le groupe $\text{Aff}(\mathcal{P})$ n'est pas commutatif.

5.3. On se donne une base $\mathfrak{b} = (\vec{i}, \vec{j})$ de l'espace vectoriel $\vec{\mathcal{V}}$ et qu'on oriente en décrétant que cette base est directe.

On sait alors que tout automorphisme $\vec{f} \in \text{GL}(\vec{\mathcal{V}})$ est représenté, relativement à cette base, par une matrice $M(f, \mathfrak{b}) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. On sait que si on prend une autre base $\mathfrak{b}' = (\vec{i}', \vec{j}')$, il existe une matrice inversible P telle que $M(\vec{f}, \mathfrak{b}') = P^{-1}M(\vec{f}, \mathfrak{b})P$. Les matrices $M(\vec{f}, \mathfrak{b})$ et $M(\vec{f}, \mathfrak{b}')$ ont donc même déterminant ; ce sera par définition le déterminant de l'application $\vec{f}$ qu'on notera $\det(\vec{f})$.

On dira que $\vec{f}$ *préserve l'orientation* si $\det(\vec{f}) > 0$ (on sait déjà qu'il est toujours non nul puisque $\vec{f}$ est un automorphisme de $\vec{\mathcal{V}}$). On dira qu'un automorphisme affine f *préserve l'orientation* si sa direction $\vec{f}$ préserve l'orientation qu'on a choisie sur $\vec{\mathcal{V}}$.

Notons qu'une translation préserve toujours l'orientation puisqu'elle a l'identité de $\vec{\mathcal{V}}$ comme direction.

Les automorphismes linéaires qui préservent l'orientation forment un sous-groupe de $\text{GL}(\vec{\mathcal{V}})$ noté $\text{GL}^+(\vec{\mathcal{V}})$; les automorphismes affines qui préservent l'orientation forment un sous-groupe de $\text{Aff}(\mathcal{P})$ noté $\text{Aff}^+(\mathcal{P})$. On a aussi une suite exacte :

$$(11) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{T} \hookrightarrow \text{Aff}^+(\mathcal{P}) \xrightarrow{\pi} \text{GL}^+(\vec{\mathcal{V}}) \longrightarrow 1.$$

Rappelons que l'ensemble à deux éléments $\{1, -1\}$ muni de la multiplication est un groupe commutatif ; il est isomorphe au groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Soit $\varepsilon : \text{GL}(\vec{\mathcal{V}}) \longrightarrow \{1, -1\}$ l'application définie par $\varepsilon(\vec{f}) = \frac{\det(\vec{f})}{|\det(\vec{f})|}$; elle s'étend

à $\text{Aff}(\mathcal{P})$ par $\varepsilon(f) = \varepsilon(\vec{f})$. Un calcul facile montre que ε est un morphisme de groupes surjectif et qu'on a des suites exactes :

$$(12) \quad 1 \longrightarrow \text{GL}^+(\vec{\mathcal{V}}) \hookrightarrow \text{GL}(\vec{\mathcal{V}}) \xrightarrow{\varepsilon} \{1, -1\} \longrightarrow 1$$

et

$$(12)' \quad \{I\} \longrightarrow \text{Aff}^+(\mathcal{P}) \hookrightarrow \text{Aff}(\mathcal{P}) \xrightarrow{\varepsilon} \{1, -1\} \longrightarrow 1$$

où $\{I\}$ est le groupe réduit à l'identité de $\mathcal{P}$.

CHAPITRE IV

PLAN EUCLIDIEN, ISOMÉTRIES ET SIMILITUDES

Dans ce chapitre nous introduisons la notion de produit scalaire ; elle nous mène de façon naturelle vers celle de distance et d'angle.

On se donne un plan affine $(\mathcal{P}, \vec{\mathcal{V}}, \Phi)$ ($\Phi : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \longrightarrow \vec{\mathcal{V}}$ est l'application définie par $\Phi(M, N) = \overrightarrow{MN}$ qui donne la structure affine sur $\mathcal{P}$ dirigée par $\vec{\mathcal{V}}$). Nous commençons par définir un produit scalaire sur l'espace vectoriel $\vec{\mathcal{V}}$; on définit la notion d'orthogonalité au sens de celui-ci et on énonce le théorème de Pythagore. Ensuite, on définit la notion d'isométrie. On termine par l'étude complète du groupe des isométries, celui des similitudes et certains de leurs sous-groupes.

1. Structure euclidienne

1.1. Une *forme bilinéaire* sur $\vec{\mathcal{V}}$ est une application $g : \vec{\mathcal{V}} \times \vec{\mathcal{V}} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que, pour tous $\vec{u}, \vec{v} \in \vec{\mathcal{V}}$, les applications partielles :

$$g(., \vec{v}) : \vec{u} \in \vec{\mathcal{V}} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad g(\vec{u}, .) : \vec{v} \in \vec{\mathcal{V}} \longrightarrow \mathbb{R}$$

sont définies par $g(., \vec{v})(\vec{u}) = g(\vec{u}, \vec{v})$ et $g(\vec{u}, .)(\vec{v}) = g(\vec{u}, \vec{v})$ soient linéaires. On dira que g est *symétrique* si elle vérifie $g(\vec{u}, \vec{v}) = g(\vec{v}, \vec{u})$ pour tous $\vec{u}, \vec{v} \in \vec{\mathcal{V}}$. On appelle *noyau* d'une forme bilinéaire symétrique g sur $\vec{\mathcal{V}}$ l'ensemble

$$\left\{ \vec{u} \in \vec{\mathcal{V}} : g(\vec{u}, \vec{v}) = 0, \quad \forall \vec{v} \in \vec{\mathcal{V}} \right\} = \left\{ \vec{v} \in \vec{\mathcal{V}} : g(\vec{u}, \vec{v}) = 0, \quad \forall \vec{u} \in \vec{\mathcal{V}} \right\}.$$

Soit g une forme bilinéaire symétrique sur $\vec{\mathcal{V}}$. L'application

$$Q : \vec{u} \in \vec{\mathcal{V}} \longmapsto Q(\vec{u}) = g(\vec{u}, \vec{u}) \in \mathbb{R}$$

est appelée *forme quadratique* associée à g . On dira que g (ou Q) est *non dégénérée* si

$$\left(g(\vec{u}, \vec{v}) = 0 \text{ pour tout } \vec{v} \in \vec{\mathcal{V}} \right) \implies \vec{u} = \vec{0}.$$

Ce qui revient aussi à dire que le noyau de g est réduit à $\{\vec{0}\}$. On dira que g (ou Q) est *positive* si $Q(\vec{u}) \geq 0$ pour tout $\vec{u}$, *définie positive* si $Q(\vec{u}) > 0$ pour tout $\vec{u}$ non nul. Evidemment, si g est définie positive, elle est non dégénérée.

Une forme bilinéaire g symétrique définie positive sur $\vec{\mathcal{V}}$ est appelée *produit scalaire* sur $\vec{\mathcal{V}}$. Le plan vectoriel réel $\vec{\mathcal{V}}$ muni d'un produit scalaire g est appelé *plan vectoriel euclidien*. Ce produit scalaire sera noté dorénavant $\langle , \rangle$.

1.2. Proposition. Soit $\langle , \rangle$ un produit scalaire sur $\vec{\mathcal{V}}$ dont on notera Q la forme quadratique associée. Alors, pour $\vec{u}, \vec{v} \in \vec{\mathcal{V}}$, on a :

- i) $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle^2 \leq Q(\vec{u}) \cdot Q(\vec{v})$ (inégalité de Cauchy-Schwarz).
- ii) $\sqrt{Q(\vec{u} + \vec{v})} \leq \sqrt{Q(\vec{u})} + \sqrt{Q(\vec{v})}$ (inégalité de Minkowski).

Démonstration. Soient $\vec{u}, \vec{v} \in \vec{\mathcal{V}}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

i) Comme Q est définie positive, on a :

$$\begin{aligned} 0 &\leq Q(\lambda \vec{u} + \vec{v}) \\ &\leq \langle \lambda \vec{u} + \vec{v}, \lambda \vec{u} + \vec{v} \rangle \\ &\leq \lambda^2 \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle + 2\lambda \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \\ &\leq \lambda^2 Q(\vec{u}) + 2\lambda \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + Q(\vec{v}). \end{aligned}$$

Le polynôme du second degré en λ : $P(\lambda) = \lambda^2 Q(\vec{u}) + 2\lambda \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + Q(\vec{v})$ est positif pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$; son discriminant est donc négatif c'est-à-dire $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle^2 - Q(\vec{u})Q(\vec{v}) \leq 0$, ce qui donne l'inégalité cherchée.

ii) On a :

$$\begin{aligned} Q(\vec{u} + \vec{v}) &= Q(\vec{u}) + Q(\vec{v}) + 2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \\ &\leq Q(\vec{u}) + Q(\vec{v}) + 2\sqrt{Q(\vec{u})Q(\vec{v})} \text{ (d'après Cauchy-Schwarz)} \\ &\leq (\sqrt{Q(\vec{u})} + \sqrt{Q(\vec{v})})^2 \end{aligned}$$

ce qui donne $\sqrt{Q(\vec{u} + \vec{v})} \leq \sqrt{Q(\vec{u})} + \sqrt{Q(\vec{v})}$. □

1.3. On se donne maintenant un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur $\vec{V}$. Pour tout $\vec{u} \in \vec{V}$ on pose :

$$(13) \quad \|\vec{u}\| = \sqrt{Q(\vec{u})}.$$

Il est facile de voir que l'application $\|\cdot\| : \vec{V} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ ainsi définie est une *norme* sur $\vec{V}$.

À la norme $\|\cdot\|$ qu'on vient de définir sur l'espace vectoriel $\vec{V}$ est associée une distance d sur l'espace affine $\mathcal{P}$ donnée par :

$$(14) \quad d(M, N) = \|\overrightarrow{MN}\|.$$

Cette distance est bien entendu invariante par toute translation c'est-à-dire pour tous points $M, N \in \mathcal{P}$ et tout vecteur $\vec{u}$ on a $d(M + \vec{u}, N + \vec{u}) = d(M, N)$. Il est aussi facile de voir que la norme vérifie une égalité remarquable appelée *identité du parallélogramme* (sa démonstration est immédiate) :

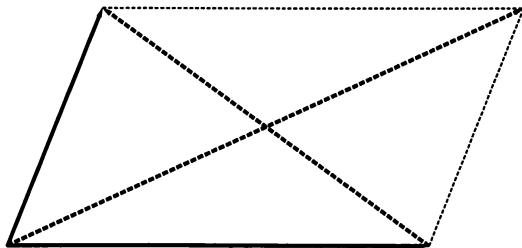


Fig. 17

$$(15) \quad \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 + \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 2(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2).$$

Une norme quelconque ne vérifie pas cette identité : il faut qu'elle provienne d'un produit scalaire ! Ce qui n'est pas toujours le cas.

Le plan affine $(\mathcal{P}, \vec{\mathcal{V}}, \Phi)$ muni d'un produit scalaire $\langle , \rangle$ est appelé *plan affine euclidien*.

Dans toute la suite, et jusqu'à la fin de ce chapitre, on supposera que $(\mathcal{P}, \vec{\mathcal{V}}, \Phi)$ est muni d'un produit scalaire $\langle , \rangle$ et de la norme $\| \cdot \|$ et la distance d qui lui sont associées

1.4. Orthogonalité

• On dira que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont *orthogonaux* (aussi : $\vec{u}$ est *orthogonal* à $\vec{v}$ ou $\vec{v}$ est *orthogonal* à $\vec{u}$) si $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$. Bien entendu, le vecteur nul $\vec{0}$ est orthogonal à n'importe quel vecteur $\vec{u}$. Soit $\vec{\mathcal{A}}$ une partie de $\vec{\mathcal{V}}$; on appelle *orthogonal* de $\vec{\mathcal{A}}$ l'ensemble :

$$(16) \quad \vec{\mathcal{A}}^\perp = \{ \vec{u} \in \vec{\mathcal{V}} : \langle \vec{u}, \vec{a} \rangle = 0 \text{ pour tout } \vec{a} \in \vec{\mathcal{A}} \}.$$

Il est facile de vérifier que $\vec{\mathcal{A}}^\perp$ est toujours un espace vectoriel (que $\vec{\mathcal{A}}$ le soit ou non).

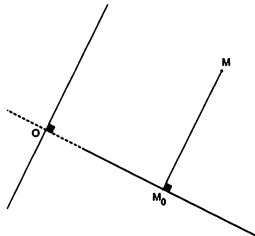
Si $\vec{\mathcal{A}}$ est une droite vectorielle, $\vec{\mathcal{A}}^\perp$ est aussi une droite vectorielle. On a alors une *décomposition orthogonale* $\vec{\mathcal{V}} = \vec{\mathcal{A}} \oplus \vec{\mathcal{A}}^\perp$; la projection $\vec{p}$ sur $\vec{\mathcal{A}}$ parallèlement à $\vec{\mathcal{A}}^\perp$ est ce qu'on appelle la *projection orthogonale* sur $\vec{\mathcal{A}}$. C'est une application linéaire et sa restriction à $\vec{\mathcal{A}}$ est l'identité ; elle vérifie en plus l'inégalité $\| \vec{p}(\vec{w}) \| \leq \| \vec{w} \|$ pour tout vecteur $\vec{w}$.

Soit maintenant $\mathcal{A}$ un sous-espace affine de $\mathcal{P}$. L'*orthogonal* de $\mathcal{A}$ au point $\omega \in \mathcal{P}$ est l'ensemble :

$$\mathcal{A}_\omega^\perp = \{ M \in \mathcal{P} : \langle \overrightarrow{\omega M}, \overrightarrow{AB} \rangle = 0 \text{ pour tous } A, B \in \mathcal{A} \}.$$

Il est clair que $\omega \in \mathcal{A}^\perp$. Il est aussi facile de voir que si $\mathcal{A}$ est réduite à un point, $\mathcal{A}^\perp$ est le plan affine $\mathcal{P}$ tout entier, si $\mathcal{A}$ est une droite, $\mathcal{A}^\perp$ est aussi une droite et si $\mathcal{A}$ est $\mathcal{P}$ tout entier, $\mathcal{A}^\perp$ est réduite à ω .

Soit $\mathcal{D}$ une droite affine. La projection p sur $\mathcal{D}$ de direction $\vec{\mathcal{D}}^\perp$ est la *projection orthogonale* sur $\mathcal{D}$; c'est une application affine et sa restriction à $\mathcal{D}$ est l'identité. Le projeté orthogonal M_0 d'un point M sur $\mathcal{D}$ réalise la distance entre M et la droite $\mathcal{D}$ c'est-à-dire $d(M, \mathcal{D}) = \inf_{D \in \mathcal{D}} d(M, D) = d(M, M_0)$.



Droite $\mathcal{D} = (OM_0)$ et $p(M) = M_0$

Fig. 18

1.5. Théorème de Pythagore (*). Soient A , B et C trois points de $\mathcal{P}$ tels que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ soient orthogonaux. Alors :

$$(17) \quad \|\overrightarrow{BC}\|^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{AC}\|^2 \text{ c'est-à-dire } d(B, C)^2 = d(A, B)^2 + d(A, C)^2.$$

Le théorème de Pythagore et le théorème de Thalès sont les piliers de la géométrie (peut-être même des mathématiques) ! Sa démonstration originale du premier est élégante ; celle par le calcul usant du produit scalaire est immédiate.

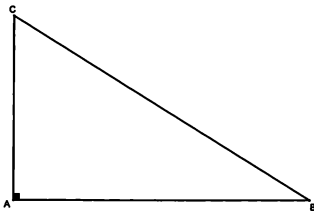


Fig. 19

2. Isométries

Nous commencerons par définir ce que c'est ; ensuite nous donnerons les exemples fondamentaux. Nous terminerons la section par quelques-unes de leurs propriétés les plus remarquables.

2.1. Définition. Une application affine $f : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ est une **isométrie** si elle préserve la distance entre les points i.e. si, pour tous points M et N , elle vérifie :

$$(18) \quad d(f(M), f(N)) = d(M, N) \text{ ou, de façon équivalente, } \|\overrightarrow{f(M)f(N)}\| = \|\overrightarrow{MN}\|.$$

On peut montrer que la direction $\vec{f}$ conserve le produit scalaire c'est-à-dire pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ on a l'égalité $\langle \vec{f}(\vec{u}), \vec{f}(\vec{v}) \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ c'est-à-dire, $\vec{f}$ est une isométrie de l'espace vectoriel euclidien $\vec{\mathcal{V}}$. Une telle transformation est forcément injective puisque $\vec{f}(\vec{u}) = \vec{0}$ implique :

$$\|\vec{u}\|^2 = \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = \langle \vec{f}(\vec{u}), \vec{f}(\vec{u}) \rangle = 0.$$

Donc $\vec{f}$ est bijective et par suite il en est de même pour f qui est alors un automorphisme affine de $\mathcal{P}$. Toute isométrie f de $\mathcal{P}$ est donc un élément de $\text{Aff}(\mathcal{P})$ et sa direction $\vec{f}$ est un élément de $\text{GL}(\vec{\mathcal{V}})$.

2.2. Les isométries affines de $\mathcal{P}$ forment un sous-groupe de $\text{Aff}(\mathcal{P})$ noté $\text{Isom}(\mathcal{P})$ et leurs directions forment un sous-groupe de $\text{GL}(\vec{\mathcal{V}})$ noté $\text{Isom}(\vec{\mathcal{V}})$. Le groupe $\text{Isom}(\mathcal{P})$ contient le groupe $\mathcal{T}$ des translations. L'application $\pi : f \in \text{Aff}(\mathcal{P}) \mapsto \vec{f} \in \text{GL}(\vec{\mathcal{V}})$ envoie surjectivement $\text{Isom}(\mathcal{P})$ sur $\text{Isom}(\vec{\mathcal{V}})$, a pour noyau $\mathcal{T}$ et on a une suite exacte :

$$(19) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{T} \hookrightarrow \text{Isom}(\mathcal{P}) \xrightarrow{\pi} \text{Isom}(\vec{\mathcal{V}}) \longrightarrow 1.$$

(*) PYTHAGORE : mathématicien et philosophe grec né en 580 avant av. J.C. et mort en 495 av. J.C. Connu évidemment par son "fameux théorème" mais aussi pour pas mal d'autres travaux en mathématiques, notamment en théorie des nombres.

Les éléments de $\text{Isom}(\vec{\mathcal{V}})$ qui préservent l'orientation forment un sous-groupe noté $\text{Isom}^+(\vec{\mathcal{V}})$; de même, les éléments de $\text{Isom}(\mathcal{P})$ qui préservent l'orientation forment un sous-groupe noté $\text{Isom}^+(\mathcal{P})$. On a des suites exactes :

$$(20) \quad 1 \longrightarrow \text{Isom}^+(\vec{\mathcal{V}}) \hookrightarrow \text{Isom}(\vec{\mathcal{V}}) \xrightarrow{\epsilon} \{1, -1\} \longrightarrow 1$$

et

$$(20)' \quad \{I\} \longrightarrow \text{Isom}^+(\mathcal{P}) \hookrightarrow \text{Isom}(\mathcal{P}) \xrightarrow{\epsilon} \{1, -1\} \longrightarrow 1$$

où ϵ est le morphisme de groupes décrit au III 5.3.

Le groupe $\text{Isom}(\vec{\mathcal{V}})$ est noté aussi $O(\vec{\mathcal{V}})$ et appelé *groupe orthogonal* du plan vectoriel euclidien $(\vec{\mathcal{V}}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$; de même, son sous-groupe $\text{Isom}^+(\vec{\mathcal{V}})$ est noté $SO(\vec{\mathcal{V}})$ et appelé *groupe orthogonal spécial* (bien sûr du plan vectoriel euclidien $(\vec{\mathcal{V}}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$).

On voit donc que pour comprendre comment est bâti le groupe $\text{Isom}(\mathcal{P})$, il suffit de voir comment l'est $O(\vec{\mathcal{V}})$ et même on peut se limiter à $SO(\vec{\mathcal{V}})$. C'est l'objet de la sous-section qui suit.

2.3. Pour ce faire, nous allons user de la représentation d'un élément $f \in GL(\vec{\mathcal{V}})$ à l'aide d'une matrice relativement à une base orthonormée $\mathfrak{b} = (\vec{i}, \vec{j})$. À tout élément $\vec{f} \in GL(\vec{\mathcal{V}})$ on associe une matrice $M(\vec{f}, \mathfrak{b}) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Sa transposée $M^*(\vec{f}, \mathfrak{b}) = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ est la matrice de l'application adjointe $\vec{f}^* \in GL(\vec{\mathcal{V}})$ de $\vec{f}$ qui est caractérisée par l'identité $\langle \vec{f}(\vec{u}), \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{f}^*(\vec{v}) \rangle$ pour tous $\vec{u}, \vec{v} \in \vec{\mathcal{V}}$. Un calcul élémentaire montre alors que $\vec{f}$ est une isométrie c'est-à-dire vérifie $\langle \vec{f}(\vec{u}), \vec{f}(\vec{v}) \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ si et seulement si $\vec{f} \circ \vec{f}^* = I$ (I est l'identité de $\vec{\mathcal{V}}$) ; ceci implique au niveau des coefficients de la matrice de $\vec{f}$:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ c^2 + d^2 = 1 \\ ac + bd = 0. \end{cases}$$

La résolution de ce système montre qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que cette matrice soit de la forme :

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

On a donc une application $\Lambda : \mathbb{R} \longrightarrow SO(\vec{\mathcal{V}})$ définie par $\Lambda(\theta) = \vec{f}_\theta$ où $\vec{f}_\theta$ est l'application dont la matrice (par rapport à la base $\mathfrak{b}$) est $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$. Un calcul immédiat montre que Λ est un morphisme de groupes ; et par construction même, il est surjectif ; son noyau est le sous-groupe (de $\mathbb{R}$) $2\pi\mathbb{Z}$ des réels multiples de 2π . Il induit donc un isomorphisme de groupes :

$$(21) \quad \Lambda : \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \xrightarrow{\simeq} SO(\vec{\mathcal{V}}).$$

On sait aussi que l'application naturelle $\tilde{p} : \theta \in \mathbb{R} \longmapsto e^{i\theta} \in U(1)$ est un morphisme surjectif du groupe additif $\mathbb{R}$ sur le groupe multiplicatif $U(1)$ des nombres complexes de

module 1 : le noyau de $\tilde{p}$ est exactement $2\pi\mathbb{Z}$ et $\tilde{p}$ induit un isomorphisme de groupes $p : \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \xrightarrow{\simeq} U(1)$. On a donc un isomorphisme :

$$(22) \quad \Lambda \circ p^{-1} : U(1) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{SO}(\vec{V}).$$

Comme $U(1)$ est un cercle dans le plan complexe, on peut voir aussi géométriquement le groupe $\mathrm{SO}(\vec{V})$ comme un cercle.

Remarque (qui nous servira par la suite) : si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs de normes égales, il existe une unique isométrie directe $\vec{f}$ telle que $\vec{v} = \vec{f}(\vec{u})$.

2.4. Exercice. Montrer que la norme $\|\cdot\|$ associée au produit scalaire sur le plan vectoriel $\vec{V}$ vérifie la propriété qui suit : si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont linéairement indépendants, alors on a $\|\vec{u} + \vec{v}\| < \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$. Utiliser cette propriété pour montrer qu'une isométrie (une application $\varphi : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ vérifiant a priori $d(\varphi(M), \varphi(N)) = d(M, N)$) est affine.

3. Notion d'angle

Le thème n'est pas assez clair et donne du fil à retordre aussi bien aux étudiants qu'aux enseignants. Alors on évite d'en parler et on fait comme si...! Nous allons essayer, dans la mesure du possible, d'en donner une définition rigoureuse en mêlant à cela un peu d'intuition de la vie quotidienne.

Comme la notion d'angle ne dépend pas du point où on se situe, on va travailler au point O (origine) c'est-à-dire qu'on va tout faire sur le plan vectoriel $\vec{V}$.

3.1. Tout le monde a une idée intuitive de la notion d'angle : angle de deux murs... mais curieusement les gens parlent très souvent d'angle lorsque celui-ci est de mesure au plus 180 degrés ! Si deux murs font un angle de 257 degrés par exemple, ils parleront plutôt de l'angle de la "façade de derrière" qui mesure 103 degrés ! Si on regarde les quatre dessins de la Fig. 20 on voit qu'un couple de vecteurs, de droites ou de demi-droites définit a priori "plusieurs angles" si on ne spécifie pas un "ordre d'écriture" (des éléments du couple). Mais écrire les éléments dans un ordre fait intervenir une orientation. Pour que les choses soient donc bien claires du point de vue mathématique, il est nécessaire d'en fixer une. On va alors se donner une base $(\vec{i}, \vec{j})$ du plan vectoriel $\vec{V}$ dont on décrètera qu'elle est directe : de cette façon on oriente $\vec{V}$ et par suite le plan affine $\mathcal{P}$.

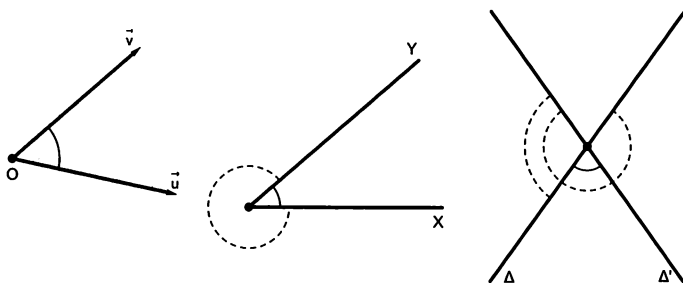


Fig. 20

3.2. Angles orientés

• Sur l'ensemble $U(\vec{\mathcal{V}}) \times U(\vec{\mathcal{V}})$ des couples de vecteurs unitaires (de norme 1) on considère la relation suivante : $(\vec{u}, \vec{v}) \mathcal{R} (\vec{u}', \vec{v}')$ si, et seulement si, il existe un élément $f \in \text{Isom}^+(\vec{\mathcal{V}})$ (isométrie directe) tel que $f(\vec{u}) = \vec{u}'$ et $f(\vec{v}) = \vec{v}'$; $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence (le vérifier). Par définition l'angle orienté formé par les vecteurs unitaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est la classe d'équivalence du couple $(\vec{u}, \vec{v})$.

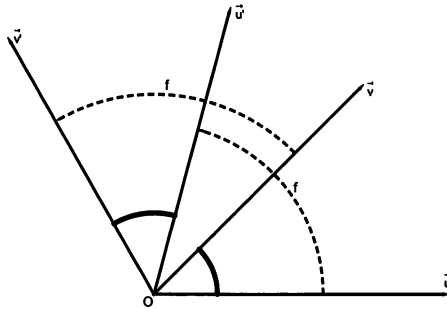


Fig. 21

• Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls mais a priori non unitaires, on pose $\vec{u}_0 = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$ et $\vec{v}_0 = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$; par définition l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$ de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sera l'angle orienté $(\vec{u}_0, \vec{v}_0)$ des deux vecteurs unitaires $\vec{u}_0$ et $\vec{v}_0$.

• Si $(OX)_+$ et $(OY)_+$ sont deux demi-droites, on prend les points $M \in (OX)_+$ et $N \in (OY)_+$ tels que les vecteurs $\vec{OM}$ et $\vec{ON}$ soient unitaires. L'angle orienté $((OX)_+, (OY)_+)$ des deux demi-droites $(OX)_+$ et $(OY)_+$ sera par définition l'angle $(\vec{OM}, \vec{ON})$ des deux vecteurs $\vec{OM}$ et $\vec{ON}$.

• Notons $\hat{\mathcal{A}}$ l'ensemble de tous les angles dans $\vec{\mathcal{V}}$. Soient $(\vec{u}, \vec{v})$ et $(\vec{u}', \vec{v}')$ représentant respectivement deux éléments $\hat{a}$ et $\hat{a}'$ de $\hat{\mathcal{A}}$. En vertu de la remarque de la fin de la sous-section 2.3, il existe une unique isométrie $f \in \text{SO}(\vec{\mathcal{V}})$ telle que $f(\vec{u}') = \vec{v}$. De même, si $\phi, \phi' \in \text{SO}(\vec{\mathcal{V}})$, il existe une unique isométrie $g \in \text{SO}(\vec{\mathcal{V}})$ telle que $g(\phi'(\vec{u}')) = \phi(\vec{v})$ c'est-à-dire $\vec{v} = \phi^{-1}(g(\phi'(\vec{u}')))$; donc $\vec{v} = \phi^{-1}(g(\phi'(\vec{u}')))$ = $f(\vec{u}')$. Par suite $\phi^{-1} \circ g \circ \phi' = f$ (car un élément de $\text{SO}(\vec{\mathcal{V}})$ qui n'est pas l'identité ne fixe aucun vecteur non nul). On en déduit que $g \circ \phi' = \phi \circ f$, d'où l'égalité $(\phi(\vec{u}), g(\phi'(\vec{u}'))) = (\phi(\vec{u}), \phi(f(\vec{v}')))$; donc $(\vec{u}, f(\vec{v}'))$ et $(\phi(\vec{u}), g(\phi'(\vec{u}')))$ sont équivalents c'est-à-dire représentent le même angle. On définit alors la somme $\hat{a} + \hat{a}'$ comme étant l'angle représenté par le couple $(\vec{u}, f(\vec{v}'))$. L'élément neutre de cette addition est représenté par n'importe quel couple $(\vec{u}, \vec{u})$; chaque $\hat{a}$ représenté par $(\vec{u}, \vec{v})$ a pour opposé $-\hat{a}$ représenté par $(\vec{v}, \vec{u})$; $(\hat{\mathcal{A}}, +)$ est donc un groupe ! Par abus de notation on écrira $(\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{u}', \vec{v}')$ pour $\hat{a} + \hat{a}'$.

On peut aussi remarquer que l'élément $(\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{u}', \vec{v}')$ est équivalent à l'élément $(\vec{u}', \vec{v}') + (\vec{f}(\vec{u}), \vec{f}(\vec{v}))$ où $\vec{f}$ est l'unique isométrie directe qui envoie $\vec{u}$ sur $\vec{v}'$. Par suite $(\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{u}', \vec{v}')$ et $(\vec{u}', \vec{v}') + (\vec{u}, \vec{v})$ sont équivalents et définissent donc le même angle ; ce qui montre que le groupe $(\hat{\mathcal{A}}, +)$ est abélien.

Évidemment, par définition même de l'addition, on a la relation de Chasles pour les angles orientés de vecteurs :

$$(23) \quad (\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{w}).$$

Soit $\psi : \text{SO}(\vec{\mathcal{V}}) \longrightarrow \hat{\mathcal{A}}$ l'application qui à $\vec{f}$ associe l'angle $\hat{a}$ représenté par $(\vec{u}, \vec{f}(\vec{u}))$ où $\vec{u}$ est n'importe quel vecteur unitaire. Là encore, on peut montrer facilement que ψ est un isomorphisme de groupes. En utilisant (21), on obtient un isomorphisme de groupes :

$$(24) \quad \Lambda^{-1} \circ \psi^{-1} : \hat{\mathcal{A}} \xrightarrow{\simeq} \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}.$$

À chaque angle orienté $\hat{a}$ on associe donc un élément du groupe abélien $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$; mais celui-ci est toujours représenté par un nombre réel θ (défini modulo 2π) ; ce sera par définition "la" *mesure* de l'angle $\hat{a}$ en radians.

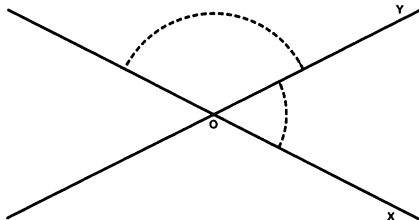
• Comment définir l'angle orienté de deux droites vectorielles $\vec{\mathcal{U}}$ et $\vec{\mathcal{W}}$? On pourrait être tenté de faire comme pour deux demi-droites en choisissant sur chacune des droites $\vec{\mathcal{U}}$ et $\vec{\mathcal{W}}$ un vecteur unitaire ! Seulement, sur une droite il y en a deux : si $\vec{u}$ en est un, $-\vec{u}$ en est un autre ! Pour pallier ce problème, nous allons modifier la relation d'équivalence que nous avons considérée sur $U(\vec{\mathcal{V}}) \times U(\vec{\mathcal{V}})$ mais cette fois-ci ce sera sur l'ensemble $\mathcal{D}(\vec{\mathcal{V}}) \times \mathcal{D}(\vec{\mathcal{V}})$ des couples de droites $(\vec{\mathcal{U}}, \vec{\mathcal{W}})$. On se donne alors deux couples de droites vectorielles $(\vec{\mathcal{U}}, \vec{\mathcal{W}})$ et $(\vec{\mathcal{U}}', \vec{\mathcal{W}}')$ et on choisit des vecteurs unitaires $\vec{u} \in \vec{\mathcal{U}}$, $\vec{w} \in \vec{\mathcal{W}}$ et $\vec{u}' \in \vec{\mathcal{U}}'$ et $\vec{w}' \in \vec{\mathcal{W}}'$; on considère la relation d'équivalence $\mathcal{Q}$ définie comme suit : $(\vec{\mathcal{U}}, \vec{\mathcal{W}}) \mathcal{Q} (\vec{\mathcal{U}}', \vec{\mathcal{W}}')$ si, et seulement si, il existe un élément $f \in \text{Isom}^+(\vec{\mathcal{V}}) = \text{SO}(\vec{\mathcal{V}})$ tel que :

$$\{f(\vec{u}) = \vec{u}' \text{ et } f(\vec{w}) = \vec{w}'\} \quad \text{ou} \quad \{f(\vec{u}) = \vec{u}' \text{ et } f(\vec{w}) = -\vec{w}'\}.$$

La classe d'équivalence du couple $(\vec{\mathcal{U}}, \vec{\mathcal{W}})$ est l'*angle orienté* des deux droites $\vec{\mathcal{U}}$ et $\vec{\mathcal{W}}$ qu'on notera toujours $(\vec{\mathcal{U}}, \vec{\mathcal{W}})$. L'ensemble des angles orientés de droites du plan vectoriel $\vec{\mathcal{V}}$ sera noté $\hat{\mathcal{A}}_d$. Comme pour les angles orientés de vecteurs, on peut le munir d'une addition qui en fait un groupe abélien et qui vérifie la relation de Chasles :

$$(25) \quad (\vec{\mathcal{U}}, \vec{\mathcal{W}}) + (\vec{\mathcal{W}}, \vec{\mathcal{Z}}) = (\vec{\mathcal{U}}, \vec{\mathcal{Z}}).$$

L'élément neutre de $(\hat{\mathcal{A}}_d, +)$ est la classe de $(\vec{\mathcal{U}}, \vec{\mathcal{U}})$ où $\vec{\mathcal{U}}$ est n'importe quelle droite vectorielle et l'opposé de $(\vec{\mathcal{U}}, \vec{\mathcal{W}})$ est la classe de $(\vec{\mathcal{W}}, \vec{\mathcal{U}})$.



Droite $\mathcal{U} = (OX)$ et droite $\mathcal{W} = (OY)$

Fig. 22

• Soit $\Pi : \hat{\mathcal{A}} \longrightarrow \hat{\mathcal{A}}_d$ l'application qui à l'angle orienté de vecteurs $(\vec{u}, \vec{w})$ associe l'angle orienté de droites $(\vec{\mathcal{U}}, \vec{\mathcal{W}})$ où $\vec{\mathcal{U}} = \mathbb{R}\vec{u}$ et $\vec{\mathcal{W}} = \mathbb{R}\vec{w}$. Il est facile de vérifier que $\Pi((\vec{u}, \vec{w}) + (\vec{u}', \vec{w}')) = \Pi(\vec{u}, \vec{w}) + \Pi(\vec{u}', \vec{w}')$ c'est-à-dire Π est un morphisme

de groupes. En plus, il est surjectif, par définition même de l'angle orienté $(\vec{U}, \vec{W})$ de deux droites. Son noyau $\text{Ker}\Pi$ est constitué de deux éléments : la classe de $(\vec{u}, \vec{u})$ et celle de $(\vec{u}, -\vec{u})$ où $\vec{u}$ est un vecteur unitaire quelconque. En composant Π et le morphisme inverse de l'isomorphisme (24), on obtient un morphisme surjectif de groupes :

$$(26) \quad \Pi \circ \psi \circ \Lambda : \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \longrightarrow \hat{\mathcal{A}}_d$$

dont le noyau est formé par les éléments qui s'envoient par le morphisme :

$$\psi \circ \Lambda : \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \longrightarrow \hat{\mathcal{A}}$$

sur les classes de $(\vec{u}, \vec{u})$ ou $(\vec{u}, -\vec{u})$ qui est la classe de $\pi \in \mathbb{R}$ dans le groupe quotient $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$; $\Pi \circ \psi \circ \Lambda$ permet de définir un isomorphisme :

$$(27) \quad \hat{\mathcal{A}}_d \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}.$$

À chaque angle orienté de droites $(\vec{U}, \vec{W})$ on associe donc un élément du groupe abélien $\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$; mais celui-ci est toujours représenté par un nombre réel θ (défini modulo π) ; ce sera par définition “la” *mesure* de l'angle $(\vec{U}, \vec{W})$ en radians.

3.3. Angles non orientés

On dit aussi *angle géométrique*. Sur l'ensemble $U(\vec{\mathcal{V}}) \times U(\vec{\mathcal{V}})$ des couples de vecteurs unitaires on considère la relation : $(\vec{u}, \vec{v}) \mathcal{R}' (\vec{u}', \vec{v}')$ si, et seulement si, il existe un élément $f \in \text{Isom}^+(\vec{\mathcal{V}})$ (isométrie directe) tel que $f(\vec{u}) = \vec{u}'$ et $f(\vec{v}) = \vec{v}'$ ou $f(\vec{u}) = \vec{v}'$ et $f(\vec{v}) = \vec{u}'$; $\mathcal{R}'$ est une relation d'équivalence (le vérifier). La classe d'équivalence de $(\vec{u}, \vec{v})$ est l'*angle géométrique* des vecteurs unitaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$. (En fait, on identifie les angles orientés $(\vec{u}, \vec{v})$ et $(\vec{v}, \vec{u})$.) La mesure d'un tel angle s'interprète comme la “distance angulaire” entre les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$; c'est donc un élément $\theta \in [0, \pi]$. Quand $\theta = 0$, c'est l'*angle nul* et quand $\theta = \pi$, c'est l'*angle plat*. On peut additionner les mesures des angles géométriques (même si ça dépasse π) ; la somme obtenue n'est pas représentée par un angle géométrique ! On ne peut donc pas mettre une structure de groupe sur l'ensemble des angles géométriques. Toutefois, ils jouent aussi un rôle fondamental en géométrie euclidienne plane.

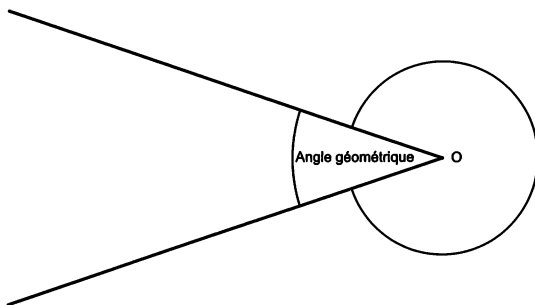


Fig. 23.1

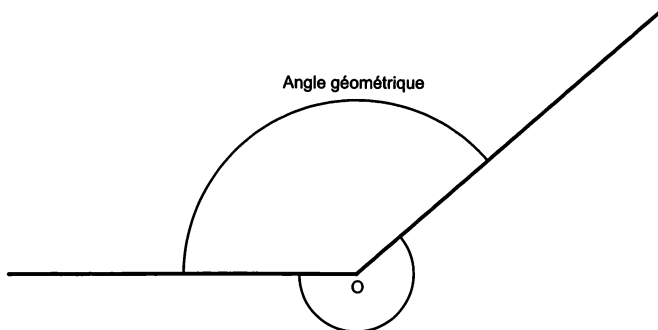


Fig. 23.2

4. Exemples d'isométries

Comme on va le voir dans ce qui suit, elles ne manquent pas même si elles ne sont pas “assez nombreuses”. On les connaît toutes, on sait comment elles se composent géométriquement et leur classification se fait de manière assez aisée.

4.1. Translations. On sait qu'une translation τ (de vecteur $\vec{u}$) de $\mathcal{P}$ est un élément du groupe affine $\text{Aff}(\mathcal{P})$; on sait aussi que, pour tous $M, N \in \mathcal{P}$ on a :

$$d(\tau(M), \tau(N)) = d(M, N)$$

par définition même de la distance d ; donc τ est une isométrie (propriété qu'on a déjà fait remarquer). Comme les translations forment un sous-groupe $\mathcal{T}$ de $\text{Aff}(\mathcal{P})$, celui-ci est en fait un sous-groupe de $\text{Isom}(\mathcal{P})$ et même de $\text{Isom}^+(\mathcal{P})$.

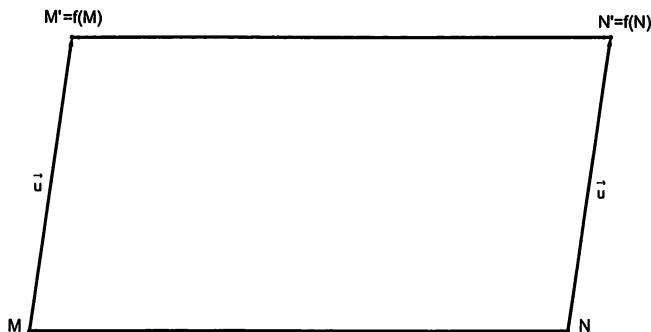


Fig. 24

4.2. Réflexions. Soit Δ une droite affine de $\mathcal{P}$. On appelle *réflexion* par rapport à Δ (ou d'axe Δ) l'application $s_\Delta : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$ qui à M associe M' tel que Δ soit la médiatrice du segment $[MM']$.

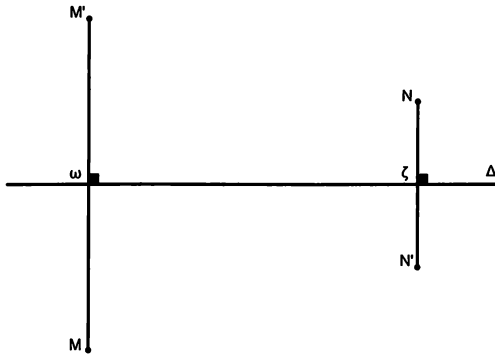


Fig. 25

(On appelle *médiatrice* d'un segment $[AB]$ l'ensemble des points $M \in \mathcal{P}$ tels que $d(M, A) = d(M, B)$. On montre que c'est la droite passant par le milieu du segment $[AB]$ et orthogonale à la droite (AB) .)

Comme on le voit facilement, une réflexion s est une transformation *involution* c'est-à-dire elle vérifie $s \circ s = \text{identité}$. Cette propriété nous sera très utile dans la décomposition des isométries planes.

4.3. Rotations. Soient $\omega \in \mathcal{P}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. On appelle *rotation* de *centre* ω et d'*angle* θ l'application $r = r(\omega, \theta) : M \in \mathcal{P} \mapsto M' \in \mathcal{P}$ telle que :

$$(28) \quad \begin{cases} \|\overrightarrow{\omega M'}\| = \|\overrightarrow{\omega M}\| \\ (\overrightarrow{\omega M}, \overrightarrow{\omega M'}) = \theta. \end{cases}$$

À partir des conditions (28) on peut montrer que, pour tous M et N d'images respectives M' et N' on a $\begin{cases} \|\overrightarrow{M'N'}\| = \|\overrightarrow{MN}\| \\ (\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'}) = \theta. \end{cases}$ et que ces conditions caractérisent

complètement une rotation ; cela signifie que si $r : M \mapsto M'$ est une transformation telle que $\|\overrightarrow{M'N'}\| = \|\overrightarrow{MN}\|$ et $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'}) = \theta$ alors r est une rotation d'angle θ (on verra après comment déterminer son centre et le construire géométriquement).

Une rotation r d'angle $\theta = \pi$ est une *symétrie centrale*. Son *centre* est celui de r .

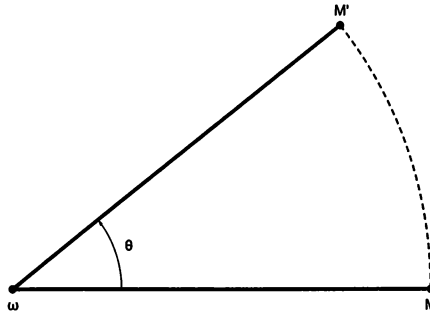


Fig. 26

4.4. Symétrie glissée. On appelle *symétrie glissée* le produit d'une translation $\tau = \tau_{\vec{u}}$ et d'une réflexion $s = s_{\Delta}$ d'axe Δ parallèle à $\vec{u}$ composées dans n'importe quel ordre car, comme on le voit sur la Fig. 27, on a toujours $s \circ \tau = \tau \circ s$.

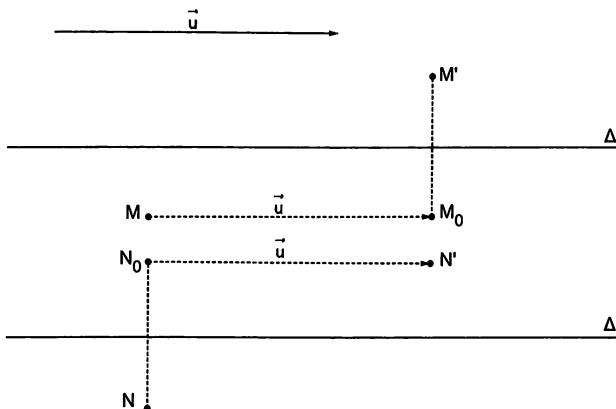


Fig. 27

Le fait qu'une réflexion par rapport à une droite affine et une rotation soient des isométries est un exercice facile qu'on laisse au soin du lecteur ! Il pourrait aussi montrer qu'une rotation préserve l'orientation et qu'une réflexion et une symétrie glissée la renversent !

On regarde le plan affine euclidien $\mathcal{P}$ comme la surface d'un sol parfaitement plan. On dépose dessus un objet $\mathcal{O}$ sans épaisseur, un triangle par exemple. Si on fait subir à $\mathcal{O}$ une isométrie directe c'est-à-dire un élément de $\text{Isom}^+(\mathcal{P})$ on ne fera que le déplacer tout en le gardant constamment sur le sol ! Mais si on lui fait subir une isométrie indirecte (ou négative), on le retourne et on est obligé, à cet effet, de le faire décoller du sol !

Le groupe $\text{Isom}^+(\mathcal{P})$ s'appelle aussi groupe des **déplacements** du plan et est noté quelquefois $\text{Dép}(\mathcal{P})$.

5. Composition des éléments de $\text{Isom}(\mathcal{P})$

Dans cette section nous allons déterminer explicitement le produit de deux éléments du groupe $\text{Isom}(\mathcal{P})$. Nous le ferons géométriquement sans aucune considération de repère, calcul *etc.* On sait déjà que deux translations de vecteurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ se composent en une translation de vecteur $\vec{u} + \vec{v}$; ce cas est donc réglé.

5.1. Deux réflexions

Soient Δ et Δ' deux droites distinctes du plan affine ; on note $s = s_{\Delta}$ et $s' = s_{\Delta'}$ les réflexions d'axes respectifs Δ et Δ' . On cherche à déterminer le produit $f = s' \circ s$. Le résultat dépend de la position relative de ces deux droites (parallèles ou sécantes).

Soient M un point du plan, $M' = s(M)$ et $M'' = s'(M) = s'(s(M))$. Notons I et I' les projections orthogonales de M respectivement sur Δ et Δ' .

• Axes parallèles

On a $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IM'} = 2\overrightarrow{IM'}$. De même $\overrightarrow{M'M''} = \overrightarrow{M'I'} + \overrightarrow{I'M''} = 2\overrightarrow{M'I'}$. Ce qui donne $\overrightarrow{MM''} = 2\overrightarrow{II'}$. Le vecteur $\overrightarrow{II'}$ ne dépend pas de M (il est égal au vecteur

$\overrightarrow{HH'}$). La transformation f est donc la translation de vecteur $2\overrightarrow{HH'}$. Il est facile de voir que $s \circ s'$ est la translation de vecteur $2\overrightarrow{H'H}$; donc, en général $s' \circ s \neq s \circ s'$.

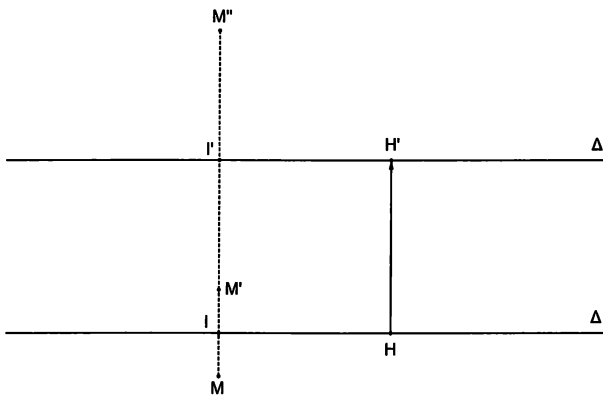


Fig. 28

• *Axes se coupant en ω*

On a (relation de Chasles) $(\overrightarrow{\omega M}, \overrightarrow{\omega M'}) = (\overrightarrow{\omega M}, \overrightarrow{\omega I}) + (\overrightarrow{\omega I}, \overrightarrow{\omega M'}) = 2(\overrightarrow{\omega I}, \overrightarrow{\omega M'})$. De même $(\overrightarrow{\omega M'}, \overrightarrow{\omega M''}) = (\overrightarrow{\omega M'}, \overrightarrow{\omega I'}) + (\overrightarrow{\omega I'}, \overrightarrow{\omega M''}) = 2(\overrightarrow{\omega M'}, \overrightarrow{\omega I'})$. Par suite $(\overrightarrow{\omega M}, \overrightarrow{\omega M''}) = (\overrightarrow{\omega M}, \overrightarrow{\omega M'}) + (\overrightarrow{\omega M'}, \overrightarrow{\omega M''}) = 2(\overrightarrow{\omega I}, \overrightarrow{\omega I'}) = 2\theta$. Comme $\|\overrightarrow{\omega M}\| = \|\overrightarrow{\omega M'}\| = \|\overrightarrow{\omega M''}\|$, la composée $s' \circ s$ est une rotation de centre ω et d'angle 2θ (θ est l'angle orienté des deux demi-droites $(\omega X)_+$ et $(\omega X')_+$).

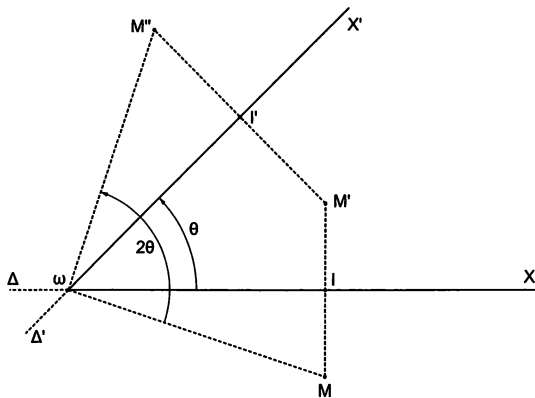


Fig. 29

5.2. Exercice

On vient de voir que le produit de deux réflexions (d'axes distincts) donne une translation si les axes sont parallèles et une rotation si les axes se coupent en un point. On pourrait se poser la question : *une translation est-elle toujours le produit de deux réflexions ? Si oui, de combien de façons ? A-t-on la même chose pour une rotation ?* La réponse est oui et la décomposition en deux réflexions (d'une translation et d'une rotation) se fait d'une infinité de manières ! C'est l'objet de cet exercice.

On suppose qu'on a résolu cet exercice. Cela nous permettra de continuer !

5.3. Deux rotations

• Soit ω un point de $\mathcal{P}$ et notons $\mathcal{R}(\omega)$ l'ensemble des rotations de centre ω . Alors la composition des applications confère à $\mathcal{R}(\omega)$ une structure de groupe commutatif isomorphe au groupe $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ (l'isomorphisme étant induit par l'application $\mathbb{R} \rightarrow \mathcal{R}(\omega)$ qui à θ associe la rotation de centre ω et d'angle θ).

Soient maintenant r et r' deux rotations de centres respectifs ω et ω' (avec $\omega \neq \omega'$) et d'angles respectifs θ et θ' . On pose $f = r' \circ r$. Soient σ la réflexion d'axe la droite $(\omega\omega')$. Soit Δ l'unique droite passant par ω dont l'image par la rotation de centre ω et d'angle $\frac{\theta}{2}$ soit la droite $(\omega\omega')$. De même, soit Δ' la droite passant par ω' image de $(\omega\omega')$ par la rotation de centre ω' et d'angle $\frac{\theta'}{2}$. On note s et s' les réflexions d'axes respectives Δ et Δ' . Alors $r = \sigma \circ s$ et $r' = s' \circ \sigma$. Par suite :

$$f = r' \circ r = (s' \circ \sigma) \circ (\sigma \circ s) = s' \circ (\sigma \circ \sigma') \circ s = s' \circ s.$$

Donc f sera soit une translation soit une rotation (cela dépend de θ et θ').

$$(*) \quad \frac{\theta + \theta'}{2} = 0 \pmod{\pi}$$

Dans ce cas les droites Δ et Δ' sont parallèles et donc $f = r' \circ r = s' \circ s$ est une translation (le lecteur est invité à déterminer son vecteur).

$$(*) \quad \frac{\theta + \theta'}{2} \neq 0 \pmod{\pi}$$

Dans ce cas les droites Δ et Δ' se coupent en un point Ω et donc $f = r' \circ r = s' \circ s$ est une rotation de centre Ω et d'angle $\theta + \theta'$.

On peut voir facilement qu'en général on a $r' \circ r \neq r \circ r'$.

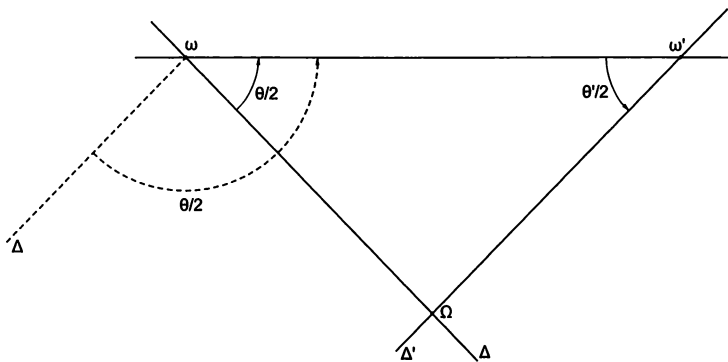


Fig. 30

5.4. Une rotation et une translation

On se donne une rotation r de centre ω et d'angle θ (non congru à 0 modulo 2π pour que r ne soit pas l'identité) et une translation τ de vecteur $\vec{u}$ (non nul pour que τ ne soit pas l'identité). Qu'est-ce que $r \circ \tau$? (On laissera au lecteur le produit $\tau \circ r$.)

L'idée est toujours de faire intervenir les réflexions. Soit Σ la droite passant par ω et orthogonale à $\vec{u}$. Notons Δ sa transformée par la translation de vecteur $-\frac{\vec{u}}{2}$ et Δ' sa transformée par la rotation de centre ω et d'angle $\frac{\theta}{2}$; σ , s et s' seront les réflexions d'axes respectives Σ , Δ et Δ' . On alors $\tau = \sigma \circ s$ et $r = s' \circ \sigma$; d'où :

$$r \circ \tau = (s' \circ \sigma) \circ (\sigma \circ s) = s' \circ (\sigma \circ \sigma') \circ s = s' \circ s.$$

Comme θ n'est pas congru à 0 modulo 2π , les droites Δ et Δ' ne sont pas parallèles et se coupent donc en un point Ω . Par suite le produit $\tau \circ \sigma$ est la rotation de centre Ω et d'angle θ .

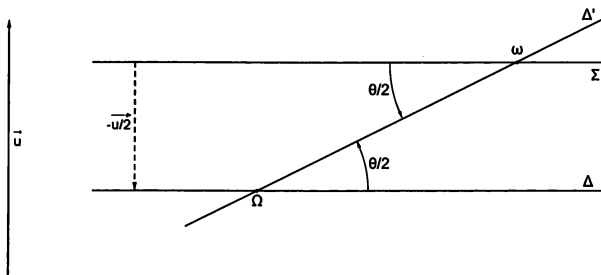


Fig. 31

5.5. Exercice.

- Montrer que le produit d'un nombre pair de réflexions est égal au produit de deux réflexions.
- Montrer que le produit d'un nombre impair de réflexions est égal à une réflexion ou au produit de trois réflexions.
- Montrer que toute isométrie est le produit d'au plus trois réflexions.

Soit f une isométrie du plan euclidien $\mathcal{P}$. Un point *fixe* de f est un point qui vérifie $f(M) = M$. On note :

$$\text{Fix}(f) = \{M \in \mathcal{P} : f(M) = M\}$$

l'ensemble des points fixes de f . (Cet ensemble joue un rôle important dans la description explicite de f comme on va le voir.)

- Montrer que le cardinal de $\text{Fix}(f)$ ne peut être que 0, 1 ou ∞ .
- Caractériser f en fonction de $\text{Fix}(f)$. (Est-ce une translation, rotation, réflexion ou symétrie glissée ?)

6. Le groupe des similitudes

Dans cette section nous quittons un peu le monde des isométries pour aller vers des transformations un peu plus générales et qui sont aussi importantes comme par exemple la similitude ; c'est une transformation qui garde les rapports : on agrandit ou on rapetisse une photo et on la bouge (tout en la gardant dans le plan ou la renversant). Nous n'en donnerons que les ingrédients essentiels.

6.1. Définition. On appelle *similitude (plane) de rapport $k > 0$* une application $S : M \in \mathcal{P} \mapsto M' \in \mathcal{P}$ telle que :

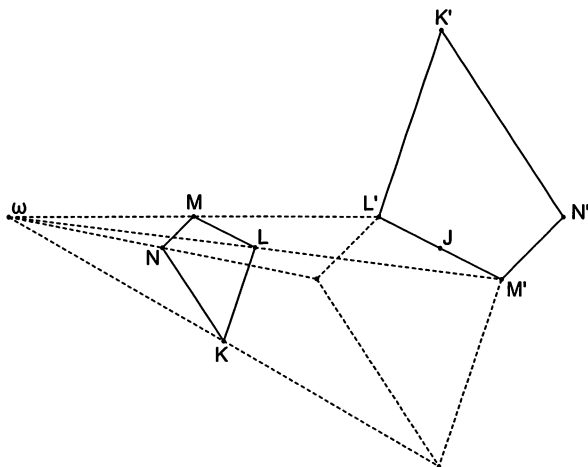
$$||\overrightarrow{M'N'}|| = k||\overrightarrow{MN}||.$$

Si elle préserve en plus l'orientation, on dira qu'elle est **directe** ou **positive** ; sinon elle est **indirecte** ou **négative**.

Une similitude de rapport $k = 1$ est une isométrie. Les isométries ont déjà été étudiées dans les sections précédentes ; nous ne regarderons désormais que le cas des similitudes qui ne le sont pas c'est-à-dire celles ayant un rapport $k \neq 1$.

Soit h une homothétie de rapport $\frac{1}{k}$; alors $f = S \circ h$ est une isométrie, donc une application affine et bijective ; comme h est affine bijective, $S = f \circ h^{-1}$ l'est aussi. Une similitude est donc toujours un automorphisme affine.

Il est immédiat de voir que la composée $S' \circ S$ de deux similitudes S et S' de rapports respectifs k et k' est une similitude de rapport $k'k$; l'inverse d'une similitude de rapport k est une similitude de rapport $\frac{1}{k}$. Les similitudes forment donc un sous-groupe $\text{Sim}(\mathcal{P})$ du groupe $\text{Aff}(\mathcal{P})$.



Une similitude transformant le quadrilatère $MNKL$ en $M'N'K'L'$. On voit que c'est une homothétie de centre ω et de rapport 2 suivie d'une rotation de centre J (milieu de $[M'L']$) et d'angle π qui est aussi une homothétie de centre J et de rapport -1 .

Fig. 32

Les similitudes planes directes forment un sous-groupe $\text{Sim}^+(\mathcal{P})$ de $\text{Sim}(\mathcal{P})$; il est le noyau du morphisme $\varepsilon : \text{Sim}(\mathcal{P}) \rightarrow \{-1, 1\}$ restriction de celui qu'on a défini au chapitre III et qui associe à un automorphisme affine le nombre 1 s'il préserve l'orientation et le nombre -1 sinon. On a une suite exacte :

$$(29) \quad \{I\} \longrightarrow \text{Sim}^+(\mathcal{P}) \hookrightarrow \text{Sim}(\mathcal{P}) \xrightarrow{\varepsilon} \{-1, 1\} \longrightarrow 1.$$

6.2. Proposition. Soit S une similitude de rapport $k \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. Alors S a un unique point fixe ω .

Démonstration. Pour une fois, on va donner une démonstration topologique ne tenant compte que du fait que S vérifie $d(S(M), S(N)) = kd(M, N)$ où d est la distance euclidienne sur le plan affine euclidien $\mathcal{P}$. On supposera $k < 1$; pour $k > 1$, on raisonne sur S^{-1} . Soit A un point quelconque de $\mathcal{P}$ et définissons la suite (M_n) par $M_0 = A$ et $M_n = S(M_{n-1})$ pour $n \geq 1$. Alors, pour tout $n \geq 1$, on a $d(M_n, M_{n-1}) =$

$k^{n-1}d(M_1, M_0)$ et par suite, pour tous entiers $n > p \geq 0$, on a :

$$\begin{aligned} d(M_n, M_p) &\leq d(M_n, M_{n-1}) + \cdots + d(M_{p+1}, M_p) \\ &\leq (k^{n-1} + \cdots + k^p)d(M_1, M_0) \\ &\leq \frac{k^p}{1-k}d(M_1, M_0). \end{aligned}$$

Comme $0 < k < 1$, $k^p \rightarrow 0$ quand $p \rightarrow +\infty$; la suite (M_n) est donc de Cauchy dans l'espace métrique $(\mathcal{P}, d)$ qui est complet ; elle y converge donc vers un point ω . On a :

$$\omega = \lim_{n \rightarrow +\infty} M_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S(M_{n-1}) = S(\lim_{n \rightarrow \infty} M_{n-1}) = S(\omega)$$

qui montre que ω est un point fixe de S .

ii) Supposons qu'il existe ω' distinct de ω tel que $S(\omega') = \omega'$. On a :

$$d(\omega, \omega') = d(S(\omega'), S(\omega')) = kd(\omega, \omega').$$

Comme $\omega \neq \omega'$, $d(\omega, \omega') > 0$ et l'inégalité donne donc $k = 1$, ce qui est faux ! Le point fixe est donc unique. Cette unicité montre aussi que sa construction est indépendante du choix du point $A = M_0$. $\square$

La proposition qui suit va nous permettre de caractériser une similitude du plan en fonction des homothéties, rotations et réflexions.

6.3. Proposition. Soit S une similitude de rapport $k \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. Notons ω son unique point fixe (cf. proposition 6.2).

- i) Si S est directe, elle est le produit de l'homothétie h de centre ω et de rapport k et d'une rotation r de centre ω . Évidemment $r \circ h = h \circ r$.
- ii) Si S est indirecte, elle est le produit de l'homothétie h de centre ω et de rapport k et d'une réflexion s d'axe contenant ω . Évidemment $s \circ h = h \circ s$.

Démonstration. On pose $f = h^{-1} \circ S$; alors f est une similitude de rapport 1, c'est donc une isométrie. Comme f fixe le point ω (elle pourrait en fixer d'autres), c'est soit une rotation centrée en ω (si S est directe) soit une réflexion s (si S est indirecte) d'axe contenant ω . Ce qui établit les assertions i) et ii). Bien sûr, dans les deux cas on a $r \circ h = h \circ r$ et $s \circ h = h \circ s$. $\square$

Pour étudier les isométries et les similitudes du plan affine euclidien on peut bien entendu utiliser les nombres complexes. Cela constitue un outil très puissant et permet de simplifier beaucoup de choses même si quelquefois l'aspect géométrique s'éclipse derrière le calcul. On en verra des exemples d'application.

CHAPITRE V

TRIANGLE ET CERCLE

Dans tout ce chapitre, on se donne un plan affine $(\mathcal{P}, \vec{\mathcal{V}}, \Phi)$ muni d'un produit scalaire $\langle , \rangle$ et de la norme $\| \cdot \|$ et la distance d qui lui sont associées. On suppose aussi qu'une orientation est donnée à l'aide d'une base $(\vec{i}, \vec{j})$ (qu'on prendra orthonormée si on a à en user pour autre chose). La norme d'un vecteur $\overrightarrow{MN}$ (ou la distance entre deux points M et N) sera noté quelquefois MN ; un angle géométrique de sommet A de deux demi-droites $(AB)_+$ et $(AC)_+$ peut être noté aussi $\widehat{BAC}$.

1. Généralités

1.1. On entend par *triangle* ABC la donnée de trois points A , B et C deux à deux distincts qu'on appelle *sommets* du triangle ; les segments $[AB]$, $[BC]$ et $[CA]$ sont les *côtés*. Il peut arriver que les trois points soient alignés, dans ce cas on dira que ABC est un *triangle plat* (ou *triangle dégénéré*) ; c'est un cas particulier qu'on ne considérera que rarement. Génériquement, les trois points A , B et C forment un repère affine du plan.

Un triangle est *isocèle* s'il a deux côtés ayant même longueur ; le troisième côté est la *base* du triangle isocèle ; il est *équilatéral* si ses trois côtés ont même longueur. Il est dit *rectangle* s'il a un angle droit ; le côté opposé à l'angle droit est l'*hypoténuse* du triangle rectangle.

1.2. Proposition. Soit ABC un triangle. Alors on a :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = \pi \quad (\text{modulo } 2\pi).$$

Démonstration. On écarte le cas du triangle plat où la démonstration est immédiate. On suppose donc que (A, B, C) est un repère affine.

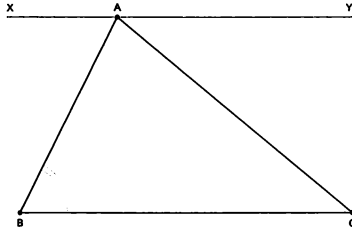


Fig. 33

Par le point A on trace la parallèle à (BC) et on y choisit deux points X et Y de part et d'autre de A (cf. Fig. 33). On a alors $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = (\overrightarrow{AX}, \overrightarrow{AB})$ et $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AY})$. D'où :

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) &= (\overrightarrow{AX}, \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AY}) \\ &= (\overrightarrow{AX}, \overrightarrow{AY}) \\ &= \pi \quad (\text{modulo } 2\pi) \end{aligned}$$

ce qui termine la démonstration de la proposition. □

1.3. Positions relatives de cercles et droites-cercles

Soient ω un point de $\mathcal{P}$ et ρ un réel positif ou nul. On appelle *cercle* de *centre* ω et de *rayon* ρ l'ensemble des points M du plan tels que $\omega M = \rho$.

On sait qu'il est important de savoir quelles sont les positions relatives de deux droites dans le plan (sécantes ou parallèles). Il est aussi important de savoir quelles sont les positions relatives de deux cercles dans le plan et celles d'un cercle et d'une droite.

Soient Γ et Γ' deux cercles de centres respectifs ω et ω' et de rayons respectifs ρ et ρ' . Leurs positions relatives sont données par les dessins qui suivent.

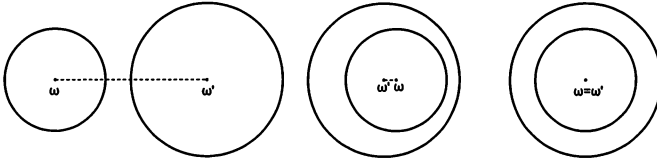


Fig. 34.1

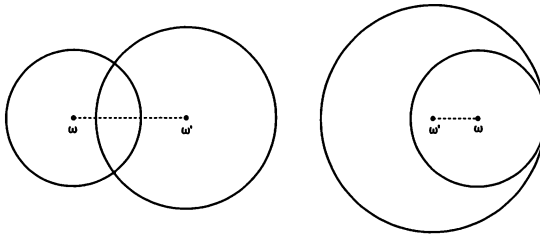


Fig. 34.2

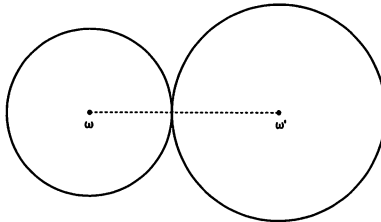


Fig. 34.3

Soient maintenant Γ un cercle de centre ω et de rayon ρ et Δ une droite. On pose $\delta = d(\omega, \Delta) = \inf_{M \in \Delta} d(\omega, M) = d(\omega, \omega_0)$ où ω_0 est la projection orthogonale de ω sur Δ .

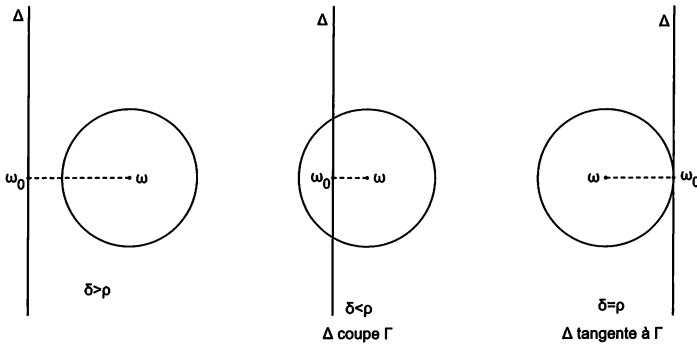


Fig. 35

1.4. Angle au centre, angle inscrit

Soit Γ un cercle de centre ω (et de rayon ρ). On appelle *angle inscrit* dans le cercle Γ tout angle ayant son sommet sur Γ . On appelle *angle au centre* tout angle ayant ω comme sommet. Si $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ est un angle inscrit avec $A, B \in \Gamma$, on dira que les angles $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ et $(\overrightarrow{\omega A}, \overrightarrow{\omega B})$ *interceptent* le même arc $\widehat{AB}$. On a toujours :

$$2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = (\overrightarrow{\omega A}, \overrightarrow{\omega B}).$$

En effet, la droite $(M\omega)$ coupe le cercle Γ en un point M' (cf. Fig. 36). On a :

$$(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MM'}) + (\overrightarrow{MM'}, \overrightarrow{MB}) \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{\omega A}, \overrightarrow{\omega B}) = (\overrightarrow{\omega A}, \overrightarrow{\omega M'}) + (\overrightarrow{\omega M'}, \overrightarrow{\omega B}).$$

D'autre part, ωMA étant isocèle de base $[MA]$, on a $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{M\omega}) = (\overrightarrow{A\omega}, \overrightarrow{AM})$. De la proposition 1.2 on déduit $(\overrightarrow{\omega A}, \overrightarrow{\omega M'}) = (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{M\omega}) + (\overrightarrow{A\omega}, \overrightarrow{AM}) = 2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{M\omega})$. De la même manière on établit que $(\overrightarrow{\omega M'}, \overrightarrow{\omega B}) = 2(\overrightarrow{M\omega}, \overrightarrow{MB})$. Finalement :

$$(\overrightarrow{\omega A}, \overrightarrow{\omega B}) = (\overrightarrow{\omega A}, \overrightarrow{\omega M'}) + (\overrightarrow{\omega M'}, \overrightarrow{\omega B}) = 2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{M\omega}) + 2(\overrightarrow{M\omega}, \overrightarrow{MB}) = 2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}).$$

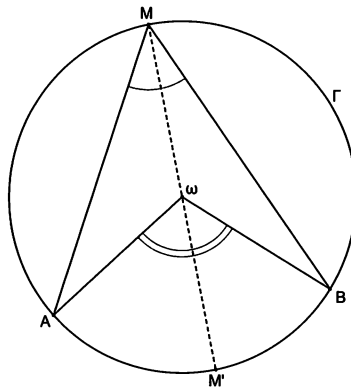


Fig. 36

• **Exercice.** Soient Γ un cercle de centre ω . On se donne un point S du plan non situé sur Γ . Par S on mène deux droites : la première coupe Γ en A' et A'' et la deuxième le coupe en B' et B'' (cf. Fig. 37). Montrer qu'on a :

$$\widehat{A'SB'} = \begin{cases} \frac{\widehat{A'\omega B'} + \widehat{A''\omega B''}}{2} & \text{si } S \text{ est intérieur à } \Gamma \\ \frac{\widehat{A''\omega B''} - \widehat{A'\omega B'}}{2} & \text{si } S \text{ est extérieur à } \Gamma. \end{cases}$$

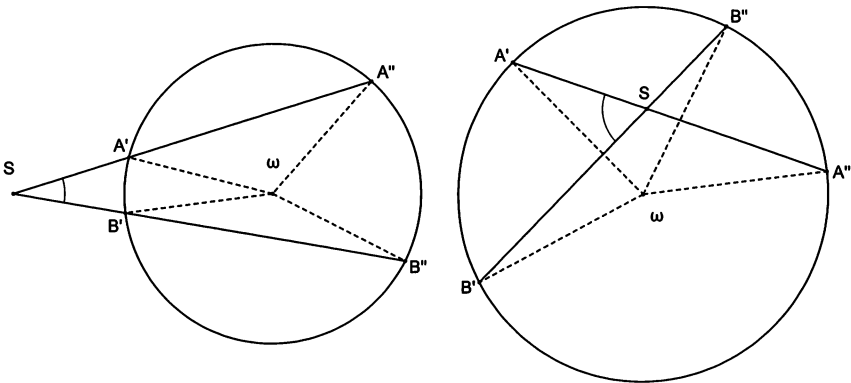


Fig. 37

2. Droites concourantes d'un triangle

2.1. Médiatrices

Soit ABC un triangle. La *médiatrice* du côté AB est l'ensemble des points à égale distance de A et de B . On définit de façon similaire les médiatrices des côtés AC et BC . Les trois médiatrices se coupent en un point qui est le centre du cercle *circonsrit* au triangle c'est-à-dire passant par les sommets A , B et C . En effet, soit ω le point d'intersection des médiatrices de $[AB]$ et $[AC]$; alors $\omega A = \omega B$ et $\omega A = \omega C$; donc $\omega B = \omega C$, par suite ω est aussi sur la médiatrice de $[BC]$.

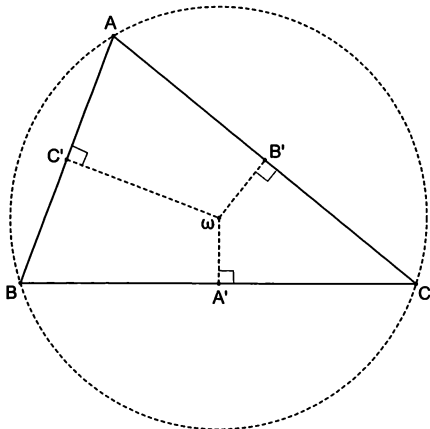


Fig. 38.1

2.2. Bissectrices

Soit ABC un triangle. La *bissectrice* (intérieure) de l'angle (géométrique) $\widehat{BAC}$ est la demi-droite passant par A et partageant $\widehat{BAC}$ en deux angles égaux. C'est aussi l'ensemble des points qui sont à égale distance des droites (AB) et (AC) . Soit K un point sur la droite (AC) de telle sorte que A soit entre K et C ; la bissectrice de l'angle géométrique $\widehat{BAK}$ s'appelle la *bissectrice extérieure* de l'angle $\widehat{BAC}$. Ainsi, un triangle a trois bissectrices intérieures et trois bissectrices extérieures. (Quand on dit simplement "bissectrice" on entend par là bissectrice intérieure.)

Les bissectrices du triangle ABC se coupent en un même point qui est le centre du cercle *inscrit* dans le triangle. En effet, soit I le point d'intersection des bissectrices des angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$; montrons qu'il est aussi sur celle de $\widehat{BAC}$. Soient A' , B' et C' les projections orthogonales de I respectivement sur les droites (BC) , (AC) et (AB) ; on a $IA' = IC'$ et $IA' = IB'$ et donc $IB' = IC'$. Le point I est donc sur la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$.

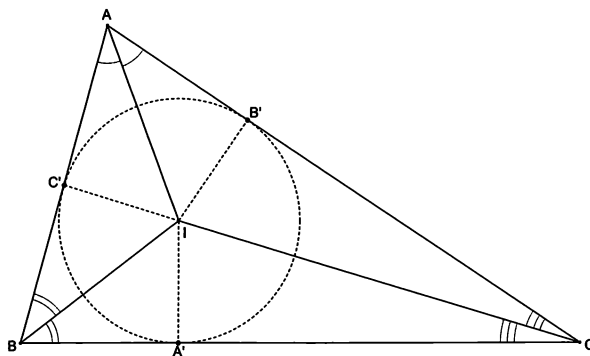


Fig. 38.2

2.3. Médianes

Soit ABC un triangle. La *médiane* issue de A est le segment qui joint A au milieu du côté (opposé) $[BC]$. Le triangle a donc trois médianes ; celles-ci se coupent en un même point G qui est son centre de gravité. Nous allons montrer cela géométriquement (sans utiliser des calculs de barycentres).

Soit G l'intersection des droites (AA') et (BB') . Notons A'' et B'' les symétriques de G respectivement par rapport aux points A' et B' . Le quadrilatère $GCB''A$ a ses diagonales qui se coupent en leurs milieux ; c'est donc un parallélogramme. On montre de même que $GCA''B$ est un parallélogramme. On en déduit que le quadrilatère $GB''CA''$ a ses côtés opposés parallèles deux à deux ; c'est donc un parallélogramme et par suite ses diagonales $[CG]$ et $[A''B'']$ se coupent en leurs milieux. Comme la droite (CG) passe par le milieu de $[A''B'']$ et est parallèle aux segments $[AB'']$ et $[BA'']$, elle passe aussi par le milieu C' de $[AB]$ en vertu du théorème de Thalès.

On peut remarquer que l'homothétie de centre G et de rapport $-\frac{1}{2}$ transforme les points A , B et C respectivement en A' , B' et C' .

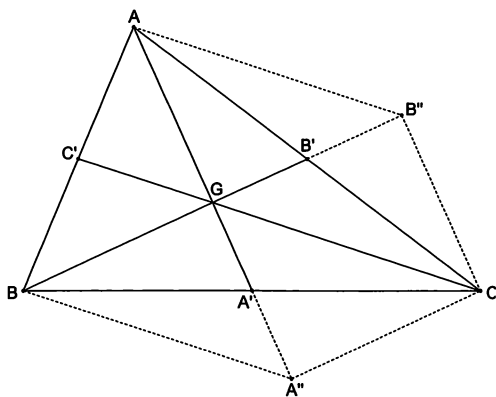


Fig. 38.3

2.4. Hauteurs

Soit ABC un triangle. La *hauteur* issue de A est le segment AA' où A' est la projection orthogonale de A sur le côté (opposé) $[BC]$. On définit de façon analogue les hauteurs $[BB']$ et $[CC']$ issues respectivement des sommets B et C .

Les hauteurs de ABC se coupent en un même point H appelé *orthocentre* du triangle. Pour le démontrer, on mène par A , B et C les parallèles respectivement à (BC) , (AC) et (AB) ; celles-ci se coupent deux à deux en des points A_1 , B_1 et C_1 (cf. Fig. 38 (d)). Il est facile de voir que les hauteurs de ABC deviennent les médiatrices du triangle $A_1B_1C_1$ et donc se coupent en un même point H .

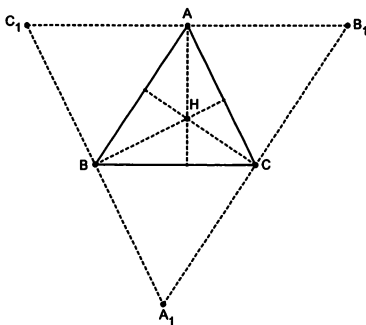


Fig. 38.4

2.5. Théorème de Ceva (*). Soient ABC un triangle et A' , B' et C' trois points respectivement sur les côtés $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$. Alors des droites (AA') , (BB') et (CC') se coupent en un même point si, et seulement si, on a :

$$(30) \quad \frac{\overline{A'C}}{\overline{A'B}} \cdot \frac{\overline{B'A}}{\overline{B'C}} \cdot \frac{\overline{C'B}}{\overline{C'A}} = -1.$$

(*) Giovanni CEVA : mathématicien italien né en 1647 et mort en 1734. Il est connu par le fameux théorème énoncé ci-dessus et par les liens qu'il a découverts entre mécanique et géométrie.

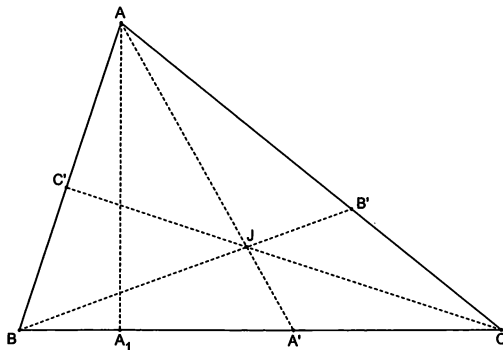


Fig. 39

Démonstration. On suppose les trois droites (AA') , (BB') et (CC') concourantes en un point J . Il est clair que les trois rapports qui interviennent dans la relation à établir sont négatifs ; il suffit donc de montrer que :

$$\frac{A'C}{A'B} \cdot \frac{B'A}{B'C} \cdot \frac{C'B}{C'A} = 1.$$

Soit A_1 la projection orthogonale de A sur la droite (BC) . Alors l'aire $\mathcal{A}(AA'B)$ du triangle $AA'B$ est égale à $\frac{AA_1 \cdot A'B}{2}$; de même l'aire $\mathcal{A}(AA'C)$ du triangle $AA'C$ est égale à $\frac{AA_1 \cdot A'C}{2}$, ce qui donne $\frac{A'C}{A'B} = \frac{\mathcal{A}(AA'C)}{\mathcal{A}(AA'B)}$. En considérant cette fois-ci la projection orthogonale du point J sur (BC) (qu'on n'a pas besoin d'écrire) on montre que $\frac{A'C}{A'B} = \frac{\mathcal{A}(JA'C)}{\mathcal{A}(JA'B)}$. On a donc :

$$\frac{A'C}{A'B} = \frac{\mathcal{A}(AA'C)}{\mathcal{A}(AA'B)} = \frac{\mathcal{A}(JA'C)}{\mathcal{A}(JA'B)} = \frac{\mathcal{A}(AA'C) - \mathcal{A}(JA'C)}{\mathcal{A}(AA'B) - \mathcal{A}(JA'B)} = \frac{\mathcal{A}(AJC)}{\mathcal{A}(AJB)}.$$

Par la même démarche on démontre que :

$$\frac{B'A}{B'C} = \frac{\mathcal{A}(AJB)}{\mathcal{A}(BJC)}$$

et :

$$\frac{C'B}{C'A} = \frac{\mathcal{A}(BJC)}{\mathcal{A}(AJC)}.$$

D'où :

$$\frac{A'C}{A'B} \cdot \frac{B'A}{B'C} \cdot \frac{C'B}{C'A} = \frac{\mathcal{A}(AJC)}{\mathcal{A}(AJB)} \cdot \frac{\mathcal{A}(AJB)}{\mathcal{A}(BJC)} \cdot \frac{\mathcal{A}(BJC)}{\mathcal{A}(AJC)} = 1.$$

La réciproque est très facile. On suppose qu'on a $\frac{A'C}{A'B} \cdot \frac{B'A}{B'C} \cdot \frac{C'B}{C'A} = 1$. A priori on ne sait pas si les droites (AA') , (BB') et (CC') sont concourantes. On note I le point d'intersection des droites (BB') et (CC') et A'' le point d'intersection de (AI) avec le segment $[BC]$. D'après ce qu'on vient d'établir, on a $\frac{A''C}{A''B} \cdot \frac{B'A}{B'C} \cdot \frac{C'B}{C'A} = 1$; comme on a aussi par hypothèse $\frac{A'C}{A'B} \cdot \frac{B'A}{B'C} \cdot \frac{C'B}{C'A} = 1$, on en déduit $\frac{A'C}{A'B} = \frac{A''C}{A''B}$. Les deux points A' et A'' sont situés entre B et C et divisent le segment $[BC]$ dans le même rapport ; ils sont donc confondus. $\square$

3. Cas d'isométrie des triangles

Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles. On dira qu'ils sont *isométriques* ou *égaux* (ancienne terminologie), s'il existe une isométrie f telle que $f(A) = A'$, $f(B) = B'$ et $f(C) = C'$. Question naturelle : *y a-t-il des critères permettant de dire quand les triangles ABC et $A'B'C'$ sont isométriques ?* Dans le temps on parlait de “cas d'égalité” des triangles ! Cela reste toujours valable, et il y en a trois. On va les énumérer en supposant que les triangles en question ne sont pas plats (pour simplifier et ne pas être dans des situations évidentes). D'abord, quelques petits rappels : soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs (tous deux non nuls) de $\vec{V}$ et $\varepsilon \in \{1, -1\}$; désignons par θ la mesure de l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$. Alors :

$$\langle \vec{u} + \varepsilon \vec{v}, \vec{u} + \varepsilon \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\varepsilon \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$$

et :

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cos \theta.$$

Si donc trois des quatre éléments $\|\vec{u}\|$, $\|\vec{v}\|$, $\|\vec{u} + \varepsilon \vec{v}\|$ et θ sont connus, le quatrième l'est aussi.

3.1. Premier cas

Si les triangles ABC et $A'B'C'$ ont leurs côtés égaux, par exemple $AB = A'B'$, $BC = B'C'$ et $AC = A'C'$, alors ils sont isométriques.

Les triplets (A, B, C) et (A', B', C') étant des repères affines, il existe une unique application affine f telle que $f(A) = A'$, $f(B) = B'$ et $f(C) = C'$. Comme, par hypothèse, $AB = A'B'$, $BC = B'C'$ et $AC = A'C'$, l'application f est en fait une isométrie (le lecteur est invité à regarder à la loupe pourquoi ceci est vrai). Ce qui démontre ce qu'on cherche.

3.2. Deuxième cas

Si les triangles ABC et $A'B'C'$ ont un angle égal compris entre deux côtés égaux, par exemple $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ et $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$, alors ils sont isométriques.

Des égalités $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{A'B'}\|$, $\|\overrightarrow{AC}\| = \|\overrightarrow{A'C'}\|$ et $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$, on déduit $\|\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{A'C'} - \overrightarrow{A'B'}\|$, c'est-à-dire $\|\overrightarrow{BC}\| = \|\overrightarrow{B'C'}\|$. Nous sommes donc dans les hypothèses du premier cas d'égalité ; il existe alors une isométrie f telle que $f(A) = A'$, $f(B) = B'$ et $f(C) = C'$.

3.3. Troisième cas

Si les triangles ABC et $A'B'C'$ ont un côté égal compris entre deux angles égaux, par exemple on a $BC = B'C'$, $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$ et $\widehat{ACB} = \widehat{A'C'B'}$, alors ils sont isométriques.

La démonstration est laissée cette fois au lecteur !

Attention ! Le deuxième dit qu'il faut “un angle égal compris entre deux côtés égaux”. Si l'angle égal n'est pas compris entre les côtés égaux, les triangles peuvent ne pas être isométriques (cf. Fig. 40 (a) : ABC' est isocèle de base BC') ! Même remarque pour le troisième cas (cf. Fig. 40 (b)).

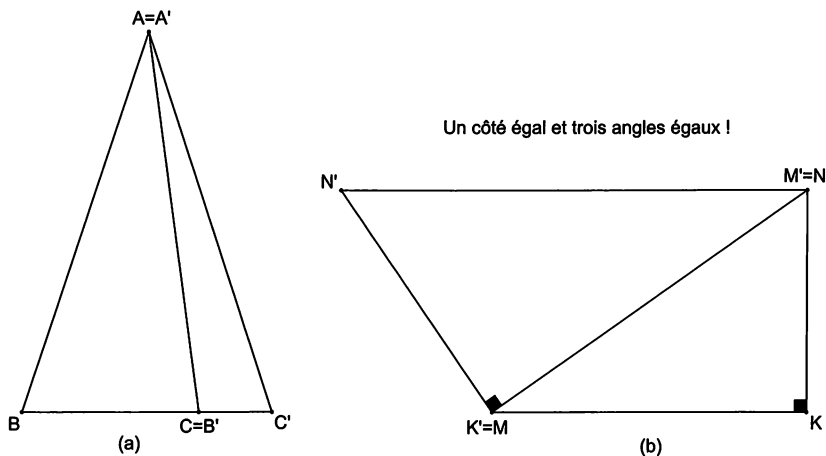


Fig. 40

4. Cas de similitude des triangles

Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles. On dira qu'ils sont *semblables* s'il existe une similitude s telle que $s(A) = A'$, $s(B) = B'$ et $s(C) = C'$. Comme pour l'égalité, une question naturelle se pose : *Y a-t-il des critères permettant de dire quand les triangles ABC et $A'B'C'$ sont semblables ?* Dans le temps on parlait de "cas de similitude" ! Il y en a trois. On va les énumérer en supposant que les triangles en question ne sont pas plats (là aussi pour simplifier et ne pas être dans des situations évidentes).

4.1. Premier cas

Si les triangles ABC et $A'B'C'$ ont leurs côtés proportionnels, c'est-à-dire il existe $k > 0$ tel que, par exemple $A'B' = kAB$, $B'C' = kBC$ et $A'C' = kAC$, alors ils sont semblables.

4.2. Deuxième cas

Si les triangles ABC et $A'B'C'$ ont un angle égal compris entre deux côtés proportionnels, c'est-à-dire il existe $k > 0$ tel que, par exemple $A'B' = kAB$, $A'C' = kAC$ et $\widehat{B'A'C'} = \widehat{BAC}$, alors ils sont semblables.

Attention ! Ce critère dit bien qu'il faut "un angle égal compris entre deux côtés proportionnels". Si l'angle égal n'est pas compris entre les côtés proportionnels, ça ne marche pas toujours (cf. Fig. 40 (a) : ABC' est isocèle de base BC') !

4.3. Troisième cas

Si les triangles ABC et $A'B'C'$ ont deux angles égaux (donc trois angles égaux), alors ils sont semblables.

Justification des trois critères. On note h l'homothétie de centre A et de rapport k . On pose $A'' = h(A) = A$, $B'' = h(B)$ et $C'' = h(C)$. Clairement, les triangles ABC et $A''B''C''$ sont semblables. Si ABC et $A'B'C'$ vérifient le premier cas de similitude, $A''B''C''$ et $A'B'C'$ vérifient le premier cas d'égalité ; il existe donc une isométrie f telle que $f(A'') = B'$, $f(B'') = B'$ et $f(C'') = C'$. On voit alors, de façon évidente, que $s = f \circ h$ est une similitude telle que $s(A) = A'$, $s(B) = B'$ et $s(C) = C'$; donc les triangles ABC et $A'B'C'$ sont semblables. Les autres cas se traitent de la même manière. $\diamond$

5. Cercles passant par 1, 2, 3 ou 4 points

On se donne des points et on se demande s'il existe un cercle qui les contient tous. Nous allons voir comment on répond à la question lorsque le nombre de points est assez petit.

5.1. Combien y a-t-il de cercles passant par un point A donné ? Une infinité et leurs centres peuvent être n'importe où dans le plan.

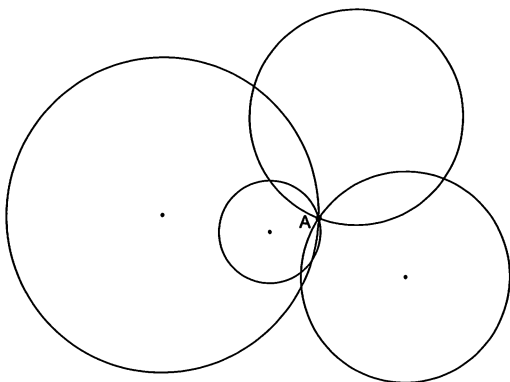


Fig. 41

5.2. Combien y a-t-il de cercles passant par deux points A et B donnés ? Une infinité et leurs centres sont exactement les points de la médiatrice du segment $[AB]$.

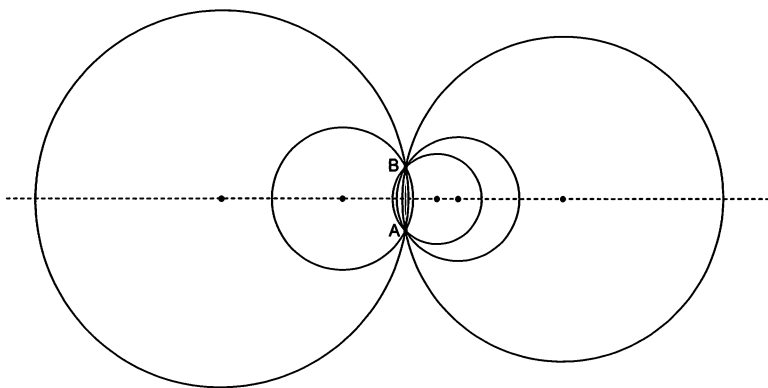


Fig. 42

5.3. Combien y a-t-il de cercles passant par trois points A , B et C donnés ? Aucun s'ils sont alignés. Sinon, un seul et il est centré au point de concours des médiatrices du triangle ABC : c'est son cercle circonscrit.

5.4. Combien y a-t-il de cercles passant par quatre points A , B , C et D donnés ? Au plus un ! Si on se donne un cercle Γ , trois points A , B et C sur Γ et un point D non situé sur Γ , il est clair qu'aucun cercle ne passe par A , B , C et D . Mais alors y a-t-il un critère qui puisse nous permettre de dire quand A , B , C et D sont sur un même cercle (on dira qu'ils sont *cocycliques*) ? Oui, le voici (on laisse la démonstration au lecteur) :

Les quatre points A, B, C et D sont cocycliques si, et seulement si, le quadrilatère $ABCD$ a ses angles $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB})$ et $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD})$ (ou, de façon équivalente, $(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA})$ et $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$) supplémentaires : $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}) = \pi$.

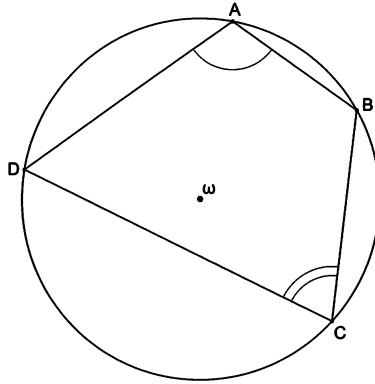


Fig. 43

6. Transformés de cercles

6.1. Soit Γ un cercle de centre ω et de rayon $\rho > 0$. Son transformé par une translation τ de vecteur $\overrightarrow{u}$ est un cercle Γ' de centre $\omega' = \omega + \overrightarrow{u}$ et de rayon ρ . Si on se donne deux cercles Γ et Γ' de centres respectifs ω et ω' et de rayons respectifs ρ et ρ' , alors il existe une unique translation (celle de vecteur $\overrightarrow{\omega\omega'}$) envoyant Γ sur Γ' si $\rho = \rho'$.

6.2. De même, le transformé d'un cercle $\Gamma = \Gamma(\omega, \rho)$ par une homothétie h de rapport $k \neq 0$ est un cercle de centre $\omega' = h(\omega)$ et de rayon $\rho' = |k|\rho$. Donnons-nous deux cercles $\Gamma = \Gamma(\omega, \rho)$ et $\Gamma' = \Gamma(\omega', \rho')$ avec $\rho, \rho' > 0$ et $\rho \neq \rho'$. Existe-t-il une homothétie envoyant Γ sur Γ' ? Si les centres sont distincts, il en existe exactement deux : une homothétie positive de rapport $k = \frac{\rho'}{\rho}$ et une homothétie négative de rapport $-k$ (cf. Fig. 44.1 et Fig. 44.2). Si les centres sont confondus, l'homothétie de centre ω et de rapport $\frac{\rho'}{\rho}$ transforme Γ en Γ' .

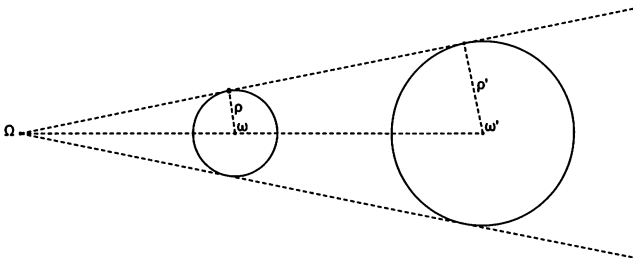


Fig. 44.1

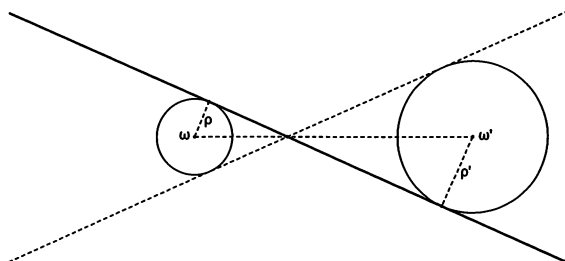


Fig. 44.2

Étudier le cas où les deux cercles sont tangents, extérieurement ou intérieurement (voir Fig. 44 (c) et Fig. 44 (d)).

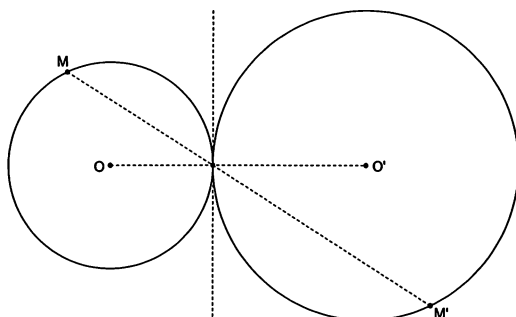


Fig. 44.3

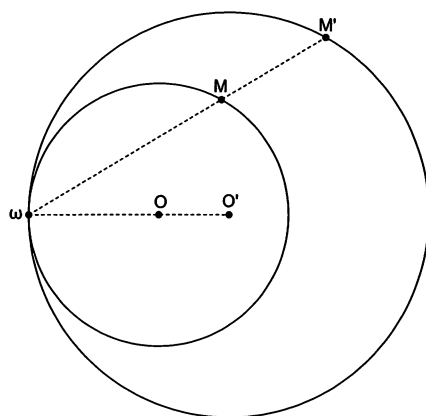


Fig. 44.4

6.3. Nous terminons ce chapitre par quelques questions que nous n'avons pas traitées précédemment. Il s'agit de l'équation d'une droite ou celle d'un cercle. Nous laisserons cela comme exercices au lecteur.

On munit le plan affine $\mathcal{P}$ d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Tout point M sera repéré par ses coordonnées (x, y) ; rappelons-le, cela signifie que $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

Soit Σ une partie stricte du plan $\mathcal{P}$. Lorsqu'on impose à M d'habiter Σ , ses coordonnées doivent vérifier une certaine relation ; cette relation est appelée *équation* de Σ . La condition $M \in \Sigma$ est *géométrique* et son équation est sa traduction *algébrique*. Les deux sont équivalentes.

1 – On suppose que Σ est une droite $\mathcal{D}$ qu'on pourrait supposer définie par un point $A_0 = (x_0, y_0)$ et un vecteur $\vec{u}$ de coordonnées (α, β) ou par deux points $A_0 = (x_0, y_0)$ et $A_1 = (x_1, y_1)$.

a - Montrer que l'équation de $\mathcal{D}$ est de la forme $ax + by + c = 0$ où les constantes réelles a , b et c sont déterminées en fonction des données.

b - Soient a , b et c des réels tels $a \neq 0$ ou $b \neq 0$. Montrer que la relation $ax + by + c = 0$ définit une droite $\mathcal{D}$ dont on déterminera sa direction et un point de passage.

On munit le plan $\mathcal{P}$ d'un produit scalaire (de façon à pouvoir mesurer les distances, les angles...) pour lequel la base $(\vec{i}, \vec{j})$ est orthonormée.

2 – On suppose cette fois-ci que Σ est un cercle $\mathcal{C}$ défini par son centre $\omega = (x_0, y_0)$ et son rayon $\rho \geq 0$.

a - Montrer que l'équation de $\mathcal{C}$ est de la forme $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ où les constantes réelles a , b et c sont déterminées en fonction de (x_0, y_0) et ρ .

b - Soient a , b et c des réels. Sous quelles conditions la relation $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ définit-elle un cercle $\mathcal{C}$? (On déterminera le centre ω et le rayon ρ de ce cercle.)

CHAPITRE VI

CONSTRUCTIONS GÉOMÉTRIQUES

Construire une figure géométrique revient à construire des points qui la déterminent complètement. Évidemment, on s'arrange pour que le nombre de points soit minimal. Par exemple, pour construire une droite, il faut deux points, pour construire un cercle il faut aussi deux points (le centre et un autre) *etc.* Un point est *constructible* si on peut l'obtenir à partir de points donnés comme intersection (après un nombre fini d'étapes) de deux droites, de deux cercles ou d'une droite et d'un cercle. D'où l'expression habituelle *construction à la règle et au compas* : le compas pour tracer les cercles et reporter des longueurs et la règle pour tracer des droites (et non pour utiliser sa graduation). Mais alors un point quelconque est-il toujours constructible ? La réponse est négative et elle est de nature arithmétique (c'est l'un des objets de la *Théorie de Galois*) ; regarder de près ce que c'est, nous mènerait vers un autre thème, très intéressant certes, mais qui n'est pas l'objet de ce chapitre ! Nous nous contenterons d'évoquer simplement trois problèmes célèbres sur lesquels d'éminents mathématiciens se sont cassé les dents pendant des siècles et qui n'ont trouvé réponse (négative) que "récemment" :

- La *trisection de l'angle*. Étant donné un angle (géométrique), construire ses trisectrices (demi-droites issues du sommet qui le partagent en trois angles égaux).
- La *duplication du cube* (ou problème de Délos). Étant donné un cube, construire un autre cube de volume double.
- La *quadrature du cercle*. Étant donné un cercle Γ , construire un carré ayant la même aire que Γ .

Le dernier est tellement difficile qu'il est devenu habituel d'entendre Madame ou Monsieur Tout Le Monde s'exclamer "Ah ! ce n'est quand même pas la quadrature du cercle !". Des approches de solutions à ce problème ont été données à partir du XIX^e siècle par Pierre-Laurent Wantzel (*) et Joseph Liouville (**) mais c'est finalement Ferdinand Von Lindemann (***) qui a marqué le pas décisif par sa démonstration de la *transcendance* du nombre π . (Un nombre réel est *transcendant* s'il n'est racine d'aucune équation (algébrique) du type $a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 = 0$ avec $a_n, \dots, a_0$ des nombres rationnels.) Le lecteur désireux d'en savoir un peu plus sur ces questions peut consulter [Felix KLEIN : *Leçons sur certaines questions de géométrie élémentaire*, Collection *La règle et le compas*, Diderot Éditeur, Arts et Sciences (1998)].

Bref...! fermons cette parenthèse de digressions et revenons à nos moutons ! Nous allons aborder le problème de la construction géométrique sur des exemples significatifs.

(*) Pierre-Laurent WANTZEL : mathématicien français né en 1814 et mort en 1848. Ses contributions principales portent sur l'algèbre et la théorie des nombres.

(**) Joseph LIOUVILLE : mathématicien français né en 1809 et mort en 1882. Ses travaux portent, entre autres, sur la théorie analytique des nombres, les équations différentielles et les fonctions d'une variable complexe.

(***) Ferdinand VON LINDEMANN : mathématicien allemand né en 1852 et mort en 1939. Sa contribution principale est la démonstration de la transcendance du nombre π . Il a dirigé la thèse de David Hilbert !

Nous les prendrons non triviaux mais tout de même assez simples pour bien comprendre comment on procède concrètement.

1. Constructions classiques élémentaires

1.1. Milieu d'un segment

Soit $[AB]$ un segment. Construire son milieu I . On sait que I est sur la droite (AB) mais aussi sur la médiatrice du segment $[AB]$, il est donc sur leur intersection. Il s'agit donc de construire cette médiatrice en construisant deux de ses points (différents de I et qu'on ne connaît pas encore). Pour cela on trace deux cercles centrés respectivement en A et B et de même rayon choisi de façon à ce qu'ils s'intersectent en deux points K et L . La médiatrice de $[AB]$ est alors la droite (KL) .

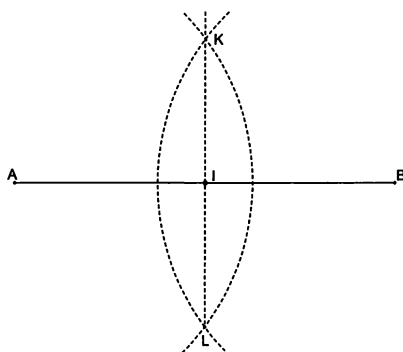


Fig. 45

On peut aussi utiliser le théorème de Thalès pour construire le milieu d'un segment. Sur une demi-droite (AX) , on construit deux points M et N tels que $\overline{AN} = 2\overline{AM}$. Par M on mène la parallèle à (NB) qui coupe (AB) en le point cherché I .

1.2. Projection orthogonale d'un point

Soient Δ une droite et A un point non situé sur Δ . Construire la projection orthogonale A_0 de A sur Δ .

On trace un cercle centré en A de rayon suffisamment grand de telle sorte qu'il coupe la droite Δ en deux points M et N . Le point A_0 est alors l'intersection de Δ et de la médiatrice du segment $[MN]$ qu'on sait construire (on vient juste de le voir en 1.1).

2. Un peu plus compliqué

Cette section concerne la construction des tangentes à un cercle par un point extérieur et celle des tangentes communes à deux cercles. On verra ainsi comment faire l'*analyse* du problème : on suppose la construction faite et on regarde ce que cela implique ; ce qui permet après de faire la *synthèse* et la construction effective.

2.1. Tangentes passant par un point donné

Soient Γ un cercle de centre ω et S un point du plan. Construire les tangentes au cercle passant par S . On ne peut mener aucune tangente passant par S s'il est à l'intérieur du cercle. S'il est sur le cercle, la tangente sera la perpendiculaire à la droite (ωS) passant par S . Reste le cas où S est à l'extérieur de Γ .

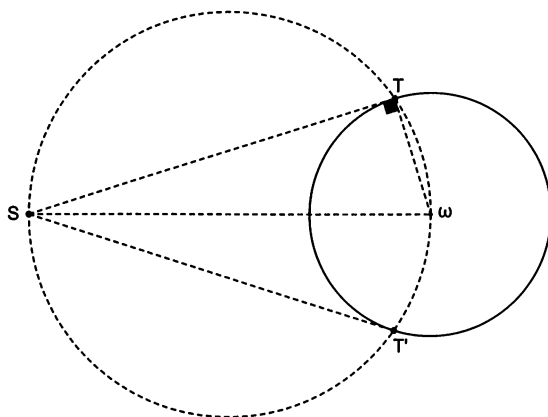


Fig. 46

Analyse. On suppose construite une tangente (ST') en T . Le rayon vecteur ωT est donc orthogonal à (ST') ; par suite T est sur le cercle de diamètre le segment $[S\omega]$.

Construction. On trace le cercle (on le construit) de diamètre $[S\omega]$; celui-ci coupe le cercle Γ en deux points T et T' qui sont les points de contact des tangentes à Γ passant par S .

2.2. Tangentes communes à deux cercles

On se donne deux cercles Γ et Γ' de centres respectifs ω et ω' et de rayon respectifs ρ et ρ' . Construire les tangentes communes à Γ et Γ' . Pour fixer les idées, on supposera $\rho' > \rho$; le cas $\rho = \rho'$ est laissé au lecteur.

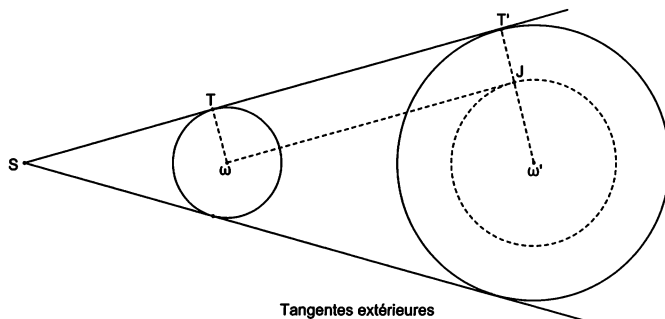


Fig. 47

Analyse. On suppose qu'on a construit une tangente commune (extérieure) (TT') (T et T' sont les points de contact respectivement avec Γ et Γ'). Les rayons vecteurs $[\omega T]$ et $[\omega' T']$ sont perpendiculaires à (TT') . La parallèle à (TT') passant par ω coupe la droite $(\omega' T')$ en J . Le quadrilatère $\omega J T' T$ est donc un rectangle ; par suite la droite (ωJ) est tangente en J au cercle de centre ω' et de rayon $\omega T' - JT' = \rho' - \rho$.

Construction. On trace le cercle de centre ω' et de rayon $\rho' - \rho$. Du point ω on construit la tangente à ce cercle (ce qu'on sait faire). On note J le point de contact. La droite

$(\omega'J)$ coupe le cercle Γ' en un point T' ; de T' on mène la parallèle à la droite (ωJ) qui sera donc une tangente commune à Γ et Γ' .

À peu de choses près le cas des tangentes intérieures se traite de la même manière.

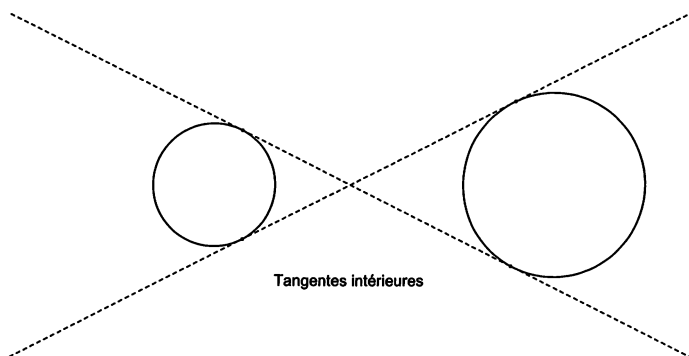


Fig. 48

2.3. Problème

Soient Δ une droite et Γ un cercle de centre ω (et de rayon $\rho > 0$) n'intersectant pas Δ . Construire les cercles tangents à la fois à Δ et Γ .

Il y a deux types de cercles tangents à la fois à Δ et à Γ : ceux qui ont Γ à l'intérieur et ceux qui lui sont extérieurs. Nous ne regarderons que ces derniers ; les autres se construisent de la même manière.

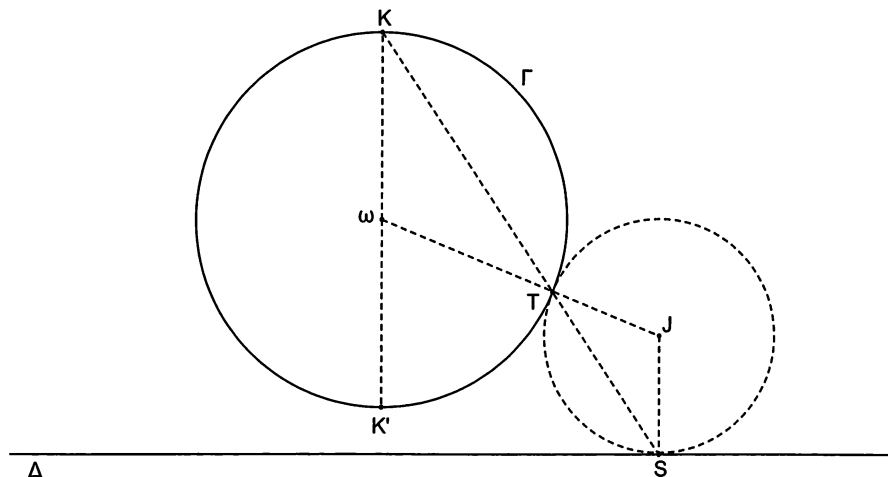


Fig. 49

Analyse. On suppose qu'on a construit un cercle C de centre J extérieur à Γ , qui lui est tangent en T et tangent à Δ en S . Alors T est le centre de l'homothétie négative qui transforme C en Γ . Cette homothétie transforme S en un point K sur le cercle Γ et la droite Δ en la tangente à Γ en K ; cette tangente est parallèle à Δ . La droite (ωK) est donc perpendiculaire à Δ .

Construction. Par ω on mène la perpendiculaire à Δ ; celle-ci coupe le cercle en deux points K et K' (sur Fig. 49) ; (K' servira à construire le cercle englobant Γ et dont on ne s'occupe pas). Par K on trace une droite qui coupe Γ en T et Δ en S . Le centre J du cercle cherché (qui va passer par T et S) est le point d'intersection de la droite (ωT) et la perpendiculaire à Δ en S .

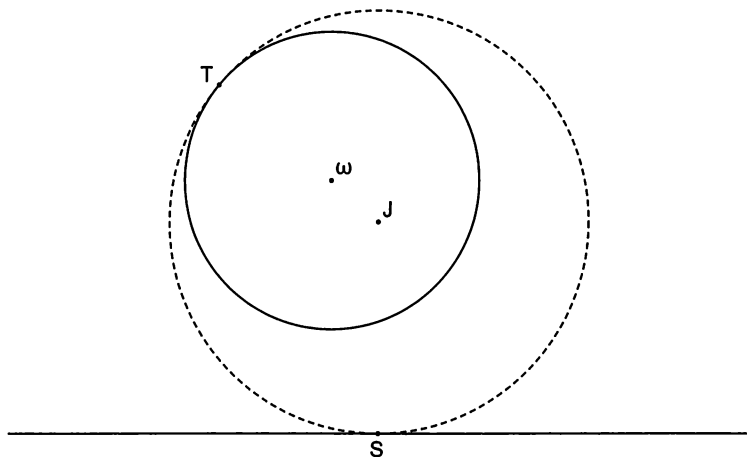


Fig. 50

La construction d'objets géométriques ne se fait pas toujours en procédant comme on vient de le faire : une analyse suivie d'une synthèse. On peut aussi quelquefois y aller directement, tâtonner un peu et arriver au résultat. Voici un exemple.

2.4. Problème

On se donne un cercle $\mathcal{C}$ et trois diamètres Δ_1 , Δ_2 et Δ_3 . Construire un triangle ABC inscrit dans $\mathcal{C}$ et ayant Δ_1 , Δ_2 et Δ_3 comme médiatrices.

Sur le cercle $\mathcal{C}$ on prend deux points B_0 et C_0 tels que Δ_1 soit médiatrice du segment $[B_0C_0]$. À partir de B_0 et C_0 on mène les perpendiculaires respectivement à Δ_2 et Δ_3 ; elles se coupent en A_0 et coupent le cercle respectivement en A_2 et A_1 .

Premier cas. Si A_0 est sur le cercle alors $A_0 = A_1 = A_2$ et on a fini : on prend $A = A_0$. On a donc notre triangle ABC avec en plus $B = B_0$ et $C = C_0$.

Deuxième cas. Le point A_0 n'est pas sur le cercle. Alors les points A_1 et A_2 sont distincts de A_0 bien sûr et distincts entre eux. À partir du point $A \in \mathcal{C}$, milieu de l'arc A_1A_2 on mène les parallèles respectivement aux droites A_0B_0 et A_0C_0 ; elles coupent le cercle respectivement en deux points B et C . Comme d'autre part A est le milieu de l'arc A_1A_2 les arcs B_0B et C_0C sont égaux et donc les droites (B_0C_0) et (BC) sont parallèles et par suite (BC) est perpendiculaire à Δ_1 ; la droite Δ_1 est donc médiatrice du segment $[BC]$. On voit de même que Δ_2 et Δ_3 sont médiatrices respectivement des segments $[AB]$ et $[AC]$. $\diamond$

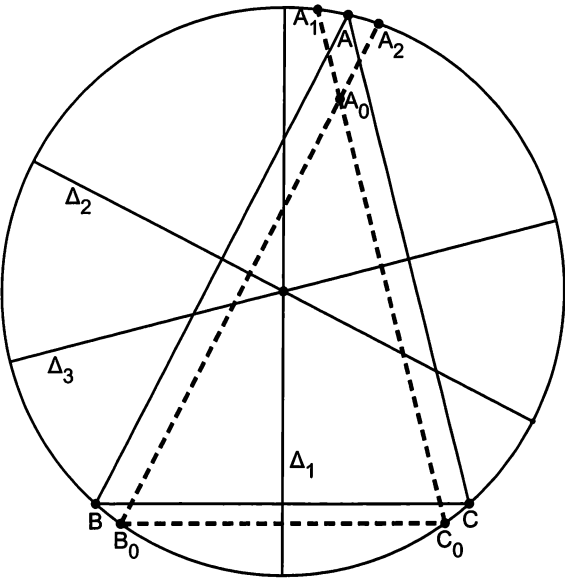


Fig. 51

DEUXIÈME PARTIE

FICHE DE TRAVAIL - 1

Isométries de l'espace

Dans tout ce texte, nous nous sommes limités au plan. Mais exceptionnellement dans cette première fiche on étudiera quelques éléments de l'espace euclidien $\mathcal{E}$ de dimension 3. C'est la seule digression qu'on fait et on la consacre à une étude assez sommaire des isométries de $\mathcal{E}$. On le fait car les mouvements de $\mathcal{E}$ sont importants et utilisent fortement la classification de ceux du plan. Il est indispensable de bien comprendre ces derniers avant d'aller en dimension supérieure. Les isométries du plan ont été étudiées dans leur ensemble dans la première partie ; on les complète un peu dans cette fiche.

1 - Écrire l'expression d'une isométrie affine ϕ en coordonnées (x, y) relativement à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan $\mathcal{P}$. Montrer que la matrice de la direction $\vec{\phi}$ de ϕ par rapport à la base $(\vec{i}, \vec{j})$ est de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

ou :

$$A = \begin{pmatrix} -\cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

avec θ un nombre réel.

On donnera aussi l'expression d'une telle isométrie ϕ en utilisant les nombres complexes (c'est-à-dire donner $z' = x' + iy'$ en fonction de $z = x + iy$.)

2 - En utilisant la question qui précède, donner de façon explicite tous les types d'isométries linéaires du plan.

On se place maintenant dans l'espace vectoriel euclidien $\mathcal{E}$ de dimension 3 muni de sa structure affine canonique. L'origine (vecteur nul) sera notée O et on se donnera une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Quand on parlera de coordonnées (x, y, z) d'un point de $\mathcal{E}$ ce sera toujours par rapport au repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On notera $\text{Isom}(\mathcal{E})$ le groupe des isométries de $\mathcal{E}$.

3 - Soit $f \in \text{Isom}(\mathcal{E})$. Notons O' l'image de O par f et τ la translation de vecteur $\overrightarrow{OO'}$. Montrer que f s'écrit $f = \tau \circ u$ avec $u : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ linéaire.

Comme on comprend parfaitement bien ce qui se passe pour une translation, en particulier on sait qu'elle ne possède aucun point fixe (quand elle n'est pas triviale), on peut se limiter à étudier les isométries linéaires dans un premier temps. En fait, le groupe $\text{Isom}(\mathcal{E})$ est le produit semi-direct $\mathcal{E} \rtimes \text{O}(\mathcal{E})$ où $\text{O}(\mathcal{E})$ est le groupe des isométries linéaires de $\mathcal{E}$. On sait d'ailleurs (on l'a fait dans le plan) que toute isométrie affine f est de la forme $x \in \mathcal{E} \mapsto u(x) + b \in \mathcal{E}$ où u est une isométrie linéaire et b un vecteur de $\mathcal{E}$.

4 - Montrer que u préserve une droite vectorielle Δ et son plan orthogonal Σ . (Si cette droite Δ est invariante point par point, l'étude de u se ramène complètement à sa restriction au plan Σ et là, on sait ce qui se passe !).

5 - Montrer qu'il existe toujours un nombre réel θ et une base orthonormée $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ par rapport à laquelle la matrice de u a l'une des formes suivantes :

– si u préserve l'orientation alors la matrice A est de la forme :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

– si u ne préserve pas l'orientation, A est de la forme :

$$A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

La matrice A_1 correspond au cas où u est une *rotation* (de l'espace) d'angle θ et d'axe la droite engendrée par le vecteur $\vec{e}_1$. Lorsque $\theta = \pi \pmod{2\pi}$, on dira que u est un *retournement* (ou un *demi-tour*).

6 - Montrer que toute translation est la composée (d'une infinité de manières) de deux réflexions. Même question pour une rotation (autour d'un axe).

7 - Étudier la composée de deux isométries affines de façon purement géométrique (et en faisant des dessins) dans les cas suivants :

- i) Deux rotations d'axes parallèles et qui ne sont pas des retournements.
- ii) Deux rotations d'axes concourants et qui ne sont pas des retournements.
- iii) Deux retournements d'axes parallèles.
- iv) Deux retournements d'axes concourants.

8 - Dresser la liste de toutes les isométries affines de l'espace euclidien $\mathcal{E}$.

Corrigé

1 - Toute application affine ϕ d'un plan euclidien (le produit scalaire sera noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$) muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ associe au point M de coordonnées (x, y) le point M' de coordonnées (x', y') avec :

$$\begin{cases} x' = ax + by + e \\ y' = cx + dy + f \end{cases}$$

où $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est la matrice par rapport à la base $(\vec{i}, \vec{j})$ de la direction $\vec{\phi}$ de ϕ ; ϕ est une isométrie si, et seulement si, $\vec{\phi}$ en est une. Quitte à composer avec une réflexion on peut supposer que $\vec{\phi}$ préserve l'orientation. La matrice A vérifie $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle A\vec{u}, A\vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, A^*A\vec{v} \rangle$ (où A^* est la matrice adjointe de A) pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$; on en déduit que A doit satisfaire $A^*A = I$ (matrice identité). Ce qui impose les relations qui suivent au niveau des coefficients de cette matrice :

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ c^2 + d^2 = 1 \\ ac + bd = 0. \end{cases}$$

Un calcul simple montre que la matrice A a la forme :

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \theta \in \mathbb{R}$$

si $ad - bc = 1$ c'est-à-dire $\vec{\phi}$ préserve l'orientation ou :

$$\begin{pmatrix} -\cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \theta \in \mathbb{R}$$

si $ad - bc = -1$ c'est-à-dire $\vec{\phi}$ renverse l'orientation.

Comme la bijection $(x, y) \mapsto z = x + iy$ identifie le plan euclidien $\mathcal{P}$ au plan complexe $\mathbb{C}$, tout point M peut être repéré par ses coordonnées (x, y) ou son *affiche* $z = x + iy$. Une transformation f du plan associe donc à tout point M d'affixe z un point M' d'affixe $z' = f(z)$. Il n'est pas alors difficile de voir qu'une isométrie directe s'écrit $f(z) = e^{i\theta}z + \beta$ où θ est un nombre réel et β un nombre complexe.

2 - Le cas où la matrice de $\vec{\phi}$ est $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$, $\vec{\phi}$ est la rotation $r(O, \theta)$ de centre O et d'angle θ . Dans l'autre cas, on peut écrire :

$$\begin{pmatrix} -\cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

et donc $\vec{\phi}$ est le produit $\sigma \circ r(O, \theta)$ où σ est la réflexion d'axe (Ox) . Soient Δ la droite vectorielle image de l'axe (Ox) par la rotation $r(O, -\frac{\theta}{2})$ et S_Δ la symétrie par rapport

à Δ ; alors $r(O, \theta) = \sigma \circ S_\Delta$ et donc $\vec{\phi} = \sigma \circ \sigma \circ S_\Delta = S_\Delta$. L'isométrie $\vec{\phi}$ est donc la symétrie S_Δ .

3 - L'application $u = \tau^{-1} \circ f$ est affine puisque composée de deux applications affines. Elle vérifie en plus $u(O) = \tau^{-1} \circ f(O) = \tau^{-1}(f(O)) = \tau^{-1}(O') = O$. Elle fixe donc l'origine ; par suite u est une isométrie linéaire.

4 - Dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ l'application linéaire u est décrite à l'aide d'une matrice carrée A d'ordre 3. Son polynôme caractéristique $P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ est à coefficients réels et de degré 3 (impair). Il admet donc une racine réelle λ . Par suite il existe un vecteur $\vec{e}_1$ non nul (qu'on peut choisir de norme 1) tel que $u(\vec{e}_1) = \lambda \vec{e}_1$. Comme u est une isométrie, on a forcément $|\lambda| = 1$ c'est-à-dire $\lambda = 1$ ou $\lambda = -1$. La droite vectorielle $\Delta = \mathbb{R} \vec{e}_1$ est donc globalement fixée par u . Soit Σ le plan vectoriel orthogonal à Δ . Alors Σ est stable par u . En effet, si $\vec{e} \in \Sigma$, on a :

$$\lambda \langle u(\vec{e}), \vec{e}_1 \rangle = \langle u(\vec{e}), \lambda \vec{e}_1 \rangle = \langle u(\vec{e}), u(\vec{e}_1) \rangle = \langle \vec{e}, \vec{e}_1 \rangle = 0.$$

Donc $u(\vec{e}) \in \Sigma$.

5 - On vient de voir que u fixe globalement la droite vectorielle Δ et le plan vectoriel Σ qui lui est orthogonal. On peut donc restreindre u à Σ ; on obtient une isométrie linéaire de Σ . Comme on connaît déjà ce qu'est une isométrie d'un plan euclidien, on va pouvoir donner toutes les formes que pourrait prendre la matrice A de u .

Soit $\vec{e}$ un vecteur unitaire de valeur propre λ avec $|\lambda| = 1$. On a donc $u(\vec{e}) = \vec{e}$ ou $u(\vec{e}) = -\vec{e}$.

Supposons $u(\vec{e}) = \vec{e}$. La restriction de u au plan Σ est une isométrie (d'après la question 1). Alors u est :

- une rotation (de centre l'origine bien entendu) et d'angle θ et dans ce cas la matrice A a la forme :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

- ou u est une réflexion par rapport par rapport à une droite vectorielle Δ (contenue dans Σ). Soient $\vec{e}_1$ un vecteur unitaire porté par Δ et $\vec{e}_2$ un autre vecteur unitaire dans Σ orthogonal à $\vec{e}_1$. Alors $u(\vec{e}) = \vec{e}$, $u(\vec{e}_1) = \vec{e}_1$ et $u(\vec{e}_2) = -\vec{e}_2$. On pose $\vec{e}_1 = \vec{e}_2$, $e_2 = \vec{e}_1$ et $\vec{e}_3 = \vec{e}$. Alors, dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, la matrice A a la forme :

$$A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ce qui est la forme cherchée avec $\theta = 0$. Dans ce cas la transformation u est une *réflexion* par rapport au plan vectoriel engendré par les vecteurs $\vec{e}_2$ et $\vec{e}_3$.

On fait presque le même raisonnement lorsque $u(\vec{e}) = -\vec{e}$, c'est-à-dire $\lambda = -1$ et on retrouve les deux formes annoncées de la matrice.

Une isométrie linéaire de l'espace euclidien de dimension 3 est donc une rotation autour d'une droite vectorielle ou une réflexion par rapport à un plan vectoriel.

6 - Soit τ une translation de vecteur $\vec{w}$ (non nul bien sûr). Prenons un plan Σ orthogonal à $\vec{w}$ et notons Σ' son transformé par la translation de vecteur $\frac{1}{2}\vec{w}$. Alors les deux plans Σ et Σ' sont parallèles et une droite orthogonale Δ coupant Σ en un point I coupe aussi Σ' orthogonalement en un point I' ; le vecteur $\vec{II'}$ est indépendant de cette perpendiculaire commune. La translation τ n'est alors rien d'autre que la composée $\sigma' \circ \sigma$ des deux réflexions σ et σ' par rapport respectivement aux plans Σ et Σ' . (On a une infinité de choix pour le plan Σ .)

Soit r une rotation d'axe Δ et d'angle θ . Prenons un plan Σ et notons Σ' son transformé par la rotation d'axe Δ et d'angle $\frac{1}{2}\theta$. La rotation r n'est alors rien d'autre que la composée $\sigma' \circ \sigma$ des deux réflexions σ et σ' par rapport respectivement aux plans Σ et Σ' . (On a une infinité de choix pour le plan Σ .)

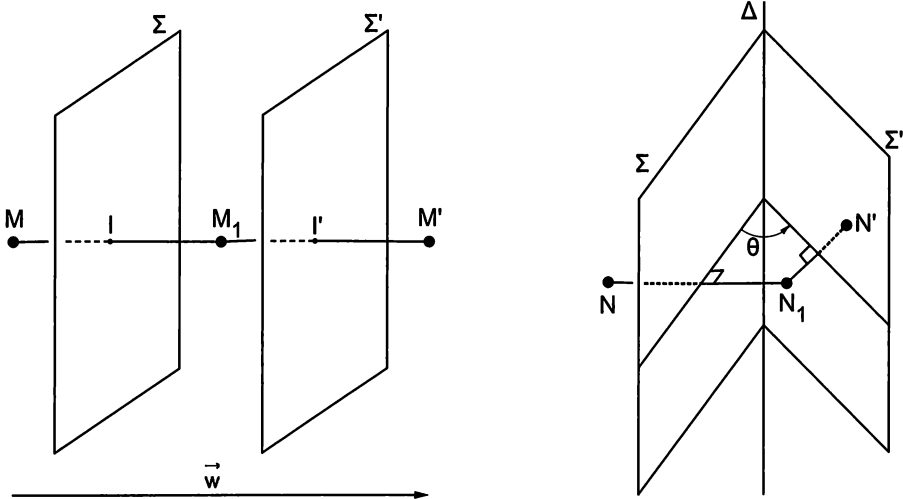


Fig. 1.1

7 - On se donne deux rotations r et r' d'axes respectifs Δ et Δ' et d'angles respectifs θ et θ' . On suppose qu'aucune des deux n'est l'identité et on pose $\rho = r' \circ r$.

i) On suppose que les droites Δ et Δ' sont parallèles (non confondues) et on note Σ le plan qu'elles déterminent. Soient Σ_1 et Σ_2 les plans transformés de Σ respectivement par les rotations d'axes respectifs Δ et Δ' et d'angles respectifs $-\frac{1}{2}\theta$ et $\frac{1}{2}\theta'$. On note σ la réflexion par rapport au plan Σ , σ_1 par rapport à Σ_1 et σ_2 celle par rapport à Σ_2 .

- Si $\frac{\theta + \theta'}{2} = 0$ (modulo π) les deux plans Σ_1 et Σ_2 sont parallèles disjoints et donc ρ est une translation (Fig.(1.2)).

- Si $\frac{\theta + \theta'}{2} \neq 0$ (modulo π) les deux plans Σ_1 et Σ_2 se coupent en une droite Λ et donc ρ est une rotation d'axe Λ et d'angle $\theta + \theta'$ (Fig.(1.2)).

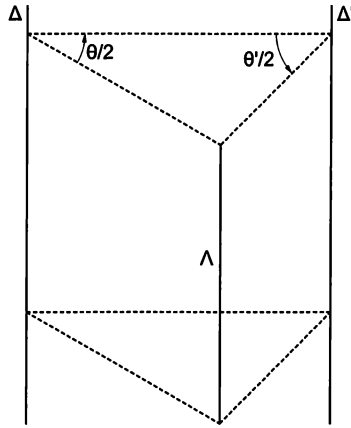


Fig. 1.2

ii) On suppose que les droites Δ et Δ' se coupent en un point ω . Soit Σ le plan qu'elles déterminent. Soient Σ_1 et Σ_2 les plans transformés de Σ respectivement par les rotations d'axes respectifs Δ et Δ' et d'angles respectifs $-\frac{1}{2}\theta$ et $\frac{1}{2}\theta'$. Les plans Σ_1 et Σ_2 sont distincts et passent tous les deux par le point ω ; ils se coupent donc suivant une droite Λ . Donc ρ est une rotation d'axe Λ et d'angle $\theta + \theta'$ (Fig.(1.3)).

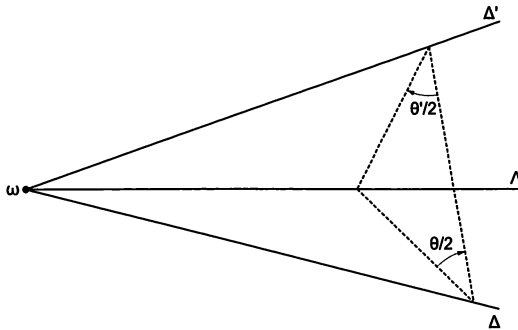


Fig. 1.3

iii) Soient r et r' deux retournements de l'espace $\mathcal{E}$ d'axes respectifs Δ et Δ' parallèles et disjointes. Soient M un point de $\mathcal{E}$ et Π le plan passant par M et orthogonal à Δ et Δ' . Notons K et K' les points d'intersection respectivement de Δ et Δ' avec Π . Par r , le point M se transforme en M_1 , son symétrique par rapport à K et qui reste sur Π ; par r' , M_1 se transforme en M' , son symétrique par rapport au point K' et qui reste aussi dans Π . Comme K et K' sont les milieux respectifs des segments MM_1 et $M'M_1$, on a $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{KK'}$. Il est facile de voir que le vecteur $\overrightarrow{u} = 2\overrightarrow{KK'}$ est indépendant de M ; donc la transformation $r' \circ r$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$.

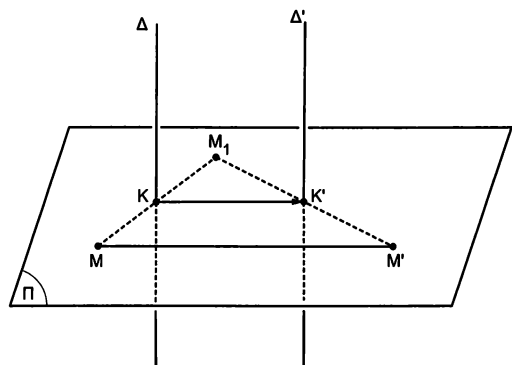


Fig. 1.4

iv) Soient r et r' deux retournements de l'espace $\mathcal{E}$ d'axes respectifs Δ et Δ' distincts mais se coupant en un point ω . Soit Π le plan défini par les droites Δ et Δ' . Soient M un point de $\mathcal{E}$ et M_0 sa projection orthogonale sur Π . Notons J le transformé de M_0 par r et K l'intersection de Δ avec la droite (M_0J) . Alors le transformé M_1 de M par r n'est rien d'autre que son symétrique par rapport à K . Le point J est donc la projection orthogonale de M_1 sur Π . Par r' , les points M_1 et J se transforment respectivement en M' et sa projection orthogonale M'_0 sur Π . Un examen immédiat montre que $MM_0 = M'M'_0$; donc le point M' est sur le plan passant par M et parallèle à Π . Pour voir comment on passe de M à M' , il suffit donc de voir comment se transforme M_0 en M'_0 ; mais là on voit clairement que ça se passe sur le plan Π par la réflexion d'axe Δ suivie de la réflexion d'axe Δ' , c'est-à-dire par la rotation de centre ω et d'angle $\theta = 2(\Delta, \Delta')$ ((Δ, Δ') est l'angle orienté des deux droites Δ et Δ'). La transformation $r' \circ r$ est donc la rotation d'axe Λ (droite perpendiculaire à Π et passant par ω) et d'angle θ .

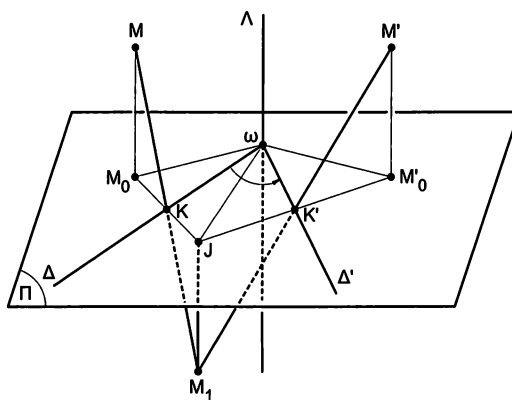


Fig. 1.5

8 - On peut facilement lister toutes les isométries affines de l'espace euclidien $\mathcal{E}$ de dimension 3. Celles qui fixent l'origine sont évidemment linéaires et sont :

- des réflexions (par rapport à un plan vectoriel) ou
- des rotations (par rapport à une droite vectorielle).

Celles qui ne sont pas linéaires sont composées d'une isométrie linéaire et d'une translation non triviale. Plus précisément, soit f une de ces isométries. Alors :

- f est une translation ou
- f est une rotation d'axe une droite affine ne passant pas par l'origine ou
- f est une réflexion par rapport à un plan affine ou
- f est la composée d'une rotation et d'une translation de vecteur orthogonal à l'axe de cette rotation. Une telle transformation est appelée *vissage* (c'est le mouvement d'un tournevis ou d'un tire-bouchon).

On peut remarquer (le lecteur vérifiera) que les réflexions engendrent le groupe $\text{Isom}(\mathcal{E})$ des isométries de $\mathcal{E}$. Elles sont pour le groupe $\text{Isom}(\mathcal{E})$ ce que sont les symétries axiales pour le groupe $\text{Isom}(\mathcal{P})$ (des isométries du plan euclidien $\mathcal{P}$).

FICHE DE TRAVAIL - 2

Autour du birapport

0. Le groupe symétrique $\mathfrak{S}_4$

L'ensemble des bijections de $\{1, \dots, n\}$ muni de la loi de composition des applications est un groupe qu'on note $\mathfrak{S}_n$ et qu'on appelle *groupe symétrique de n éléments*. L'ordre de $\mathfrak{S}_n$ (c'est-à-dire le nombre de ses éléments) est $n! = 1 \times 2 \times \dots \times n$. On notera e son élément neutre (c'est-à-dire la permutation identité) ; un élément $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ sera noté :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ \sigma(1) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

Une *transposition* est un élément $\tau \in \mathfrak{S}_n$ tel que $\tau(i) = j$, $\tau(j) = i$ et $\tau(k) = k$ pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$ différent de i et de j ; on l'écrit (ij) . Le groupe $\mathfrak{S}_n$ est engendré par les transpositions $(12), (23), \dots, ((n-1)n)$. Nous supposons désormais $n = 4$. Les 24 éléments de $\mathfrak{S}_4$ seront notés comme suit :

$$\begin{aligned} e &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} & \alpha_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} & \alpha_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ \alpha_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} & \beta_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} & \beta_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \\ \beta_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} & \beta_4 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} & \beta_5 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \\ \beta_6 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} & \beta_7 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} & \beta_8 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \\ \gamma_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} & \gamma_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} & \gamma_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \\ \gamma_4 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} & \gamma_5 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} & \gamma_6 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ \gamma_7 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} & \gamma_8 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} & \gamma_9 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \\ \gamma_{10} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} & \gamma_{11} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} & \gamma_{12} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

1 - Montrer que $V = \{e, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ est un sous-groupe distingué de $\mathfrak{S}_4$.

2 - Montrer que les éléments de $\mathfrak{S}_4$ qui fixent l'élément 4 forment un sous-groupe W isomorphe à $\mathfrak{S}_3$.

3 - Montrer que l'application $(v, w) \in V \times W \longmapsto vw \in \mathfrak{S}_4$ est une bijection et en déduire que $\mathfrak{S}_4 = V \rtimes W$ (c'est-à-dire $\mathfrak{S}_4$ est le produit semi-direct de V par W).

La deuxième projection $\pi : (u, w) \in \mathfrak{S}_4 = V \rtimes W \mapsto w \in W$ est un morphisme surjectif de noyau V et on a une suite exacte scindée (scindée signifie qu'il existe un morphisme $s : W \rightarrow \mathfrak{S}_4$ tel que $\pi \circ s = e$; s est dit *section* de π et n'est en fait que l'injection $\mathfrak{S}_3 \simeq W \rightarrow \mathfrak{S}_4$ qu'on a déjà évoquée) :

$$\{e\} \longrightarrow V \hookrightarrow \mathfrak{S}_4 \xrightarrow{\pi} W \longrightarrow \{e\}.$$

Dans toute la suite, on se donne un plan affine euclidien $(\mathcal{P}, \vec{V})$.

1. Préliminaires

1 - Soient A et B deux points distincts de $\mathcal{P}$ et $k \in \mathbb{R}_+$. Déterminer, suivant les valeurs de k , tous les points M de la droite (AB) tels que $\frac{MA}{MB} = k$.

On appelle *birapport* de quatre points alignés A_1, A_2, A_3, A_4 (on les supposera distincts deux à deux) pris dans cet ordre, le nombre :

$$(A_1, A_2, A_3, A_4) = \frac{\overline{A_3 A_1}}{\overline{A_3 A_2}} : \frac{\overline{A_4 A_1}}{\overline{A_4 A_2}}.$$

On dira que les quatre points A_1, A_2, A_3, A_4 forment une *division harmonique* si leur birapport (A_1, A_2, A_3, A_4) est égal à -1 . On dira aussi que A_3 et A_4 sont *conjugués harmoniques* par rapport à A_1 et A_2 (et donc aussi A_1 et A_2 le sont par rapport à A_3 et A_4 comme on peut le constater aisément).

Il est clair que le birapport de quatre points alignés A_1, A_2, A_3, A_4 dépend de l'ordre dans lequel on les écrit. Pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_4$, on pose $\rho_\sigma = (A_{\sigma(1)}, A_{\sigma(2)}, A_{\sigma(3)}, A_{\sigma(4)})$ et on note $\mathcal{R}$ l'ensemble $\{\rho_\sigma : \sigma \in \mathfrak{S}_4\}$. A priori le cardinal de $\mathcal{R}$ est 24 (ordre du groupe $\mathfrak{S}_4$). On définit une action $\Phi : \mathfrak{S}_4 \times \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ par $\Phi(g, \rho_\sigma) = \rho_{g\sigma}$.

2 - Montrer que le sous-groupe V agit trivialement sur $\mathcal{R}$ (c'est-à-dire $\Phi(v, \rho) = \rho$ pour tout $v \in V$ et tout $\rho \in \mathcal{R}$). En déduire que Φ induit une action de $W \simeq \mathfrak{S}_3$ sur $\mathcal{R}$.

3 - Le birapport (A_1, A_2, A_3, A_4) étant noté ρ , montrer que l'ensemble des valeurs de la fonction $\varphi : \sigma \in \mathfrak{S}_4 \mapsto \rho_\sigma \in \mathbb{R}$ est :

$$\left\{ \rho, \frac{1}{\rho}, 1 - \rho, \frac{1}{1 - \rho}, \frac{\rho}{\rho - 1}, \frac{\rho - 1}{\rho} \right\}.$$

Indication : Utiliser le fait que le groupe W est engendré par les deux transpositions $\tau_1 = (12)$ et $\tau_2 = (23)$. Regarder seulement l'effet de τ_1 et τ_2 sur la valeur initiale ρ .

2. Birapport d'un faisceau de quatre droites

Soient maintenant $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3, \mathcal{D}_4$ des droites distinctes de $\mathcal{P}$ formant un *faisceau* c'est-à-dire elles sont parallèles entre elles ou concourantes en un point O .

Soit $\mathcal{D}$ une droite coupant $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3, \mathcal{D}_4$ respectivement en A_1, A_2, A_3, A_4 .

4 - On suppose $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3, \mathcal{D}_4$ parallèles. Montrer que le nombre (A_1, A_2, A_3, A_4) ne dépend pas de la sécante $\mathcal{D}$.

Dans les questions 5, 6 et 7 qui suivent, on suppose que $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3, \mathcal{D}_4$ concourent en un point O . Par le point A_2 on mène la parallèle à $\mathcal{D}_1$.

5 - Dire pourquoi cette parallèle coupe les droites $\mathcal{D}_3$ et $\mathcal{D}_4$ chacune en un point. On notera G et F ses points d'intersection respectivement avec $\mathcal{D}_3$ et $\mathcal{D}_4$.

6 - Montrer que le birapport $(A_1, A_2, A_3, A_4) = \frac{\overline{A_3A_1}}{\overline{A_3A_2}} : \frac{\overline{A_4A_1}}{\overline{A_4A_2}}$ est égal à $\frac{\overline{A_2F}}{\overline{A_2G}}$.

Indication : remarquer que les triangles OA_1A_3 et OA_1A_4 sont homothétiques respectivement aux triangles GA_2A_3 et FA_2A_4 .

7 - Montrer que le nombre (A_1, A_2, A_3, A_4) est indépendant de la sécante $\mathcal{D}$.

Le nombre (A_1, A_2, A_3, A_4) , qui ne dépend que des droites $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3, \mathcal{D}_4$ prises dans cet ordre (qu'elles soient parallèles ou concourantes) et non de la sécante $\mathcal{D}$ qui permet de le définir, est appelé *birapport* du faisceau $\{\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3, \mathcal{D}_4\}$ et est noté $(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3, \mathcal{D}_4)$. On dira que le faisceau $\{\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3, \mathcal{D}_4\}$ est *harmonique* si son birapport $(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3, \mathcal{D}_4)$ vaut -1 .

Soient $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ deux droites distinctes et P un point de $\mathcal{P}$ n'appartenant à aucune de ces droites. Pour tout point M de $\mathcal{P}$, $\mathcal{D}_3$ et $\mathcal{D}_4$ seront :

- les droites parallèles à $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ passant respectivement par P et M si $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont elles-mêmes parallèles ;

- respectivement les droites (OP) et (OM) si $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ se coupent en un point O .

On dira que M est un *conjugué harmonique* de P par rapport à $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ si le faisceau $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3, \mathcal{D}_4$ est harmonique. On fixe P .

8 - Montrer que l'ensemble des points M conjugués harmoniques de P par rapport à $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ est une droite Δ :

- parallèle à $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ lorsque $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont parallèles ;
- passant par O lorsque $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ se coupent en O .

On dira que Δ est la *polaire* de P par rapport à $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$.

9 - Construire géométriquement la droite Δ en n'utilisant que la règle.

3. Quelques applications

10 - Soient $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ deux droites concourantes en O . On note $\mathcal{D}_3$ et $\mathcal{D}_4$ respectivement la bissectrice intérieure et la bissectrice extérieure de l'angle $(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)$. Montrer que le faisceau $\{\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3, \mathcal{D}_4\}$ est harmonique.

11 - Soit $\{\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3, \mathcal{D}_4\}$ un faisceau harmonique. On suppose que $\mathcal{D}_3$ est orthogonale à $\mathcal{D}_4$. Montrer que $\mathcal{D}_3$ et $\mathcal{D}_4$ sont respectivement la bissectrice intérieure et la bissectrice extérieure de l'angle $(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)$.

12 - Soit ABC un triangle. Les bissectrices intérieure et extérieure coupent la droite (BC) respectivement en D et E . Montrer que $\frac{DB}{DC} = \frac{EB}{EC} = \frac{AB}{AC}$.

13 - Soient A et B deux points distincts de $\mathcal{P}$ et k un réel strictement positif. Quel est le lieu géométrique $\mathcal{M}$ des points $M \in \mathcal{P}$ tels que $\frac{MA}{MB} = k$?

Corrigé

0. Le groupe symétrique $\mathfrak{S}_4$

1 - Pour montrer que V est un sous-groupe de $\mathfrak{S}_4$, il suffit de montrer qu'il est stable par composition et passage à l'inverse. Un calcul immédiat donne $\alpha_1\alpha_2 = \alpha_3$, $\alpha_2\alpha_3 = \alpha_1$, $\alpha_1\alpha_3 = \alpha_2$, $\alpha_1^{-1} = \alpha_1$, $\alpha_2^{-1} = \alpha_2$ et $\alpha_3^{-1} = \alpha_3$.

Le sous-groupe V est distingué s'il est stable par conjugaison $\varphi_\sigma : x \mapsto \sigma^{-1}x\sigma$ pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_4$. Comme les transpositions :

$$\gamma_7 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \gamma_{10} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \gamma_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

engendrent $\mathcal{S}_4$ et sont d'ordre 2 (c'est-à-dire composées à elles-mêmes, elles donnent l'identité), il suffit de montrer que $\gamma_k\alpha_\ell\gamma_k \in V$ pour tout $\ell \in \{1, 2, 3\}$ et tout $k \in \{7, 10, 12\}$. C'est effectivement le cas car :

$$\begin{cases} \gamma_7\alpha_1\gamma_7 = \alpha_2 \\ \gamma_7\alpha_2\gamma_7 = \alpha_1 \\ \gamma_7\alpha_3\gamma_7 = \alpha_3 \end{cases} \quad \begin{cases} \gamma_{10}\alpha_1\gamma_{10} = \alpha_3 \\ \gamma_{10}\alpha_2\gamma_{10} = \alpha_2 \\ \gamma_{10}\alpha_3\gamma_{10} = \alpha_1 \end{cases} \quad \begin{cases} \gamma_{12}\alpha_1\gamma_{12} = \alpha_2 \\ \gamma_{12}\alpha_2\gamma_{12} = \alpha_1 \\ \gamma_{12}\alpha_3\gamma_{12} = \alpha_3. \end{cases}$$

2 - On recense tous les éléments du groupe W c'est-à-dire les permutations qui fixent l'élément 4. Les voici :

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \beta_7 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \beta_8 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\gamma_7 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \gamma_8 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \gamma_{10} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

L'isomorphisme entre $\mathfrak{S}_3$ et W est immédiat :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \xi(1) & \xi(2) & \xi(3) \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_3 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \xi(1) & \xi(2) & \xi(3) & 4 \end{pmatrix} \in W.$$

3 - On a d'abord $V \cap W = \{e\}$. Montrons que l'application :

$$\Theta : (v, w) \in V \times W \mapsto vw \in \mathfrak{S}_4$$

est une bijection. Comme les ensembles $V \times W$ et $\mathfrak{S}_4$ ont même cardinal ($4 \cdot 6 = 24$), il suffit de montrer que Θ est injective. Soient (v, w) et (v', w') deux éléments de $V \times W$ tels que $vw = v'w'$; alors $(v'^{-1}v)(ww'^{-1}) = e$, donc l'inverse de ww'^{-1} (qui est dans W) est $v'^{-1}v$; ce qui implique $v'^{-1}v \in V \cap W$, par suite $v'^{-1}v = e$ et donc $v = v'$. De la même manière on montre que $w = w'$. L'application Θ est donc une bijection.

Le sous-groupe V est distingué, l'intersection de V et W est e et l'application $\Theta : (v, w) \in V \times W \mapsto vw \in \mathfrak{S}_4$ est une bijection ; ceci montre que $\mathfrak{S}_4 = V \rtimes W \simeq V \rtimes \mathfrak{S}_3$.

1. Préliminaires

1 - Le point M ne peut être B et n'est A que si $k = 0$; supposons donc $k > 0$. Alors :

$$\frac{MA}{MB} = k \iff \frac{\overrightarrow{MA}}{\overrightarrow{MB}} = k \text{ ou } \frac{\overrightarrow{MA}}{\overrightarrow{MB}} = -k.$$

Cherchons M tel que $\frac{\overrightarrow{MA}}{\overrightarrow{MB}} = k$ (M est extérieur au segment $[AB]$). L'égalité est équivalente à $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$. En décomposant $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}$, on obtient $(k-1)\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$. Si $k = 1$, le point M n'existe pas (ou est rejeté à l'infini comme on dit). Si $k \neq 1$, on a :

$$(1) \quad \overrightarrow{AM} = \frac{k}{k-1} \overrightarrow{AB}$$

qui définit donc M de façon unique. Un calcul similaire donne le point M tel que $\frac{\overrightarrow{MA}}{\overrightarrow{MB}} = -k$ (M est intérieur au segment $[AB]$) :

$$(2) \quad \overrightarrow{AM} = \frac{k}{k+1} \overrightarrow{AB}.$$

En conclusion : si $k = 0$, $M = A$; si $k = 1$, il y a un seul point qui est le milieu du segment $[AB]$; si $k \neq 0$ et $k \neq 1$, il y a deux points répondant à la question donnés par les relations (1) et (2). $\diamond$

2 - De façon évidente, on a :

$$(A_1, A_2, A_3, A_4) = (A_3, A_4, A_1, A_2) = (A_4, A_3, A_2, A_1) = (A_2, A_1, A_4, A_3).$$

Ceci montre que permuter en appliquant les éléments de V ne change pas le birapport : l'action de V sur l'ensemble des valeurs possibles du birapport est triviale. Elle induit donc une action du groupe quotient $\mathfrak{S}_4/V \simeq W \simeq \mathfrak{S}_3$ qui a 6 éléments.

3 - Comme W a 6 éléments, le birapport prend donc au plus 6 valeurs. Calculons-les. Le sous-groupe W étant engendré par les deux transpositions :

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix},$$

il suffit de voir l'effet de τ_1 et τ_2 sur le birapport (A_1, A_2, A_3, A_4) . Le cas de τ_1 est immédiat à voir :

$$(A_{\tau_1(1)}, A_{\tau_1(2)}, A_{\tau_1(3)}, A_{\tau_1(4)}) = \frac{1}{\rho}.$$

Voyons l'effet de τ_2 . Posons $\rho' = (A_{\tau_2(1)}, A_{\tau_2(2)}, A_{\tau_2(3)}, A_{\tau_2(4)})$ et cherchons une relation

entre ρ et ρ' . On a :

$$\begin{aligned}
 \rho' &= \frac{\overline{A_2 A_1} \cdot \overline{A_4 A_3}}{\overline{A_2 A_3} \cdot \overline{A_4 A_1}} \\
 &= \frac{(\overline{A_2 A_4} + \overline{A_4 A_1}) \cdot (\overline{A_4 A_1} + \overline{A_1 A_3})}{\overline{A_2 A_3} \cdot \overline{A_4 A_1}} \\
 &= \frac{\overline{A_4 A_2} \cdot \overline{A_3 A_1} + \overline{A_4 A_1} \cdot (\overline{A_2 A_4} + \overline{A_4 A_1} + \overline{A_1 A_3})}{\overline{A_2 A_3} \cdot \overline{A_4 A_1}} \\
 &= \frac{\overline{A_4 A_2} \cdot \overline{A_3 A_1}}{\overline{A_2 A_3} \cdot \overline{A_4 A_1}} + \frac{\overline{A_2 A_4} + \overline{A_4 A_1} + \overline{A_1 A_3}}{\overline{A_2 A_3} \cdot \overline{A_4 A_1}} \\
 &= -\rho + 1.
 \end{aligned}$$

De tout ce qui précède on déduit que, lorsqu'on applique une permutation de $\{1, 2, 3, 4\}$, on ne fait qu'inverser le birapport, le retrancher de 1 ou lui faire subir une combinaison de ces deux opérations. Ceci donne toutes les valeurs du birapport obtenues par permutation des points (lorsque $\rho \neq 0$ et $\rho \neq 1$) :

$$\rho, \quad \frac{1}{\rho}, \quad 1 - \rho, \quad \frac{1}{1 - \rho}, \quad \frac{\rho}{\rho - 1}, \quad \frac{\rho - 1}{\rho}.$$

2. Birapport d'un faisceau de quatre droites

4 - Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites coupant les 4 droites parallèles $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3, \mathcal{D}_4$ respectivement en A_1, A_2, A_3, A_4 et A'_1, A'_2, A'_3, A'_4 .

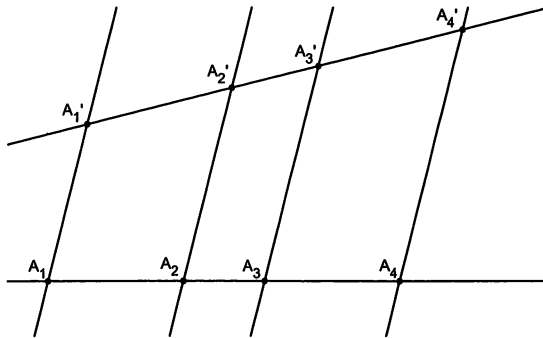


Fig. 2.1

Le théorème de Thalès nous donne :

$$\frac{\overline{A_3 A_1}}{\overline{A_3 A_2}} = \frac{\overline{A'_3 A'_1}}{\overline{A'_3 A'_2}} \quad \text{et} \quad \frac{\overline{A_4 A_1}}{\overline{A_4 A_2}} = \frac{\overline{A'_4 A'_1}}{\overline{A'_4 A'_2}}.$$

Divisant ces deux égalités membre à membre, on obtient l'égalité suivante entre les birapports $(A_1, A_2, A_3, A_4) = (A'_1, A'_2, A'_3, A'_4)$ qui est précisément celle qu'on cherche à établir. $\diamond$

5 - Notons Δ la droite parallèle à $\mathcal{D}_1$ passant par le point A_2 . Comme $\mathcal{D}_3$ et $\mathcal{D}_4$ coupent $\mathcal{D}_1$, Δ va nécessairement les couper aussi en deux points. On les notera respectivement G et F . $\diamond$

6 - Les triangles OA_1A_3 et GA_2A_3 étant homothétiques, on a $\frac{\overline{A_3A_1}}{\overline{A_3A_2}} = \frac{\overline{A_1O}}{\overline{A_2G}}$. De même les deux triangles OA_1A_4 et FA_2A_4 étant homothétiques, on a $\frac{\overline{A_4A_1}}{\overline{A_4A_2}} = \frac{\overline{A_1O}}{\overline{A_2F}}$.

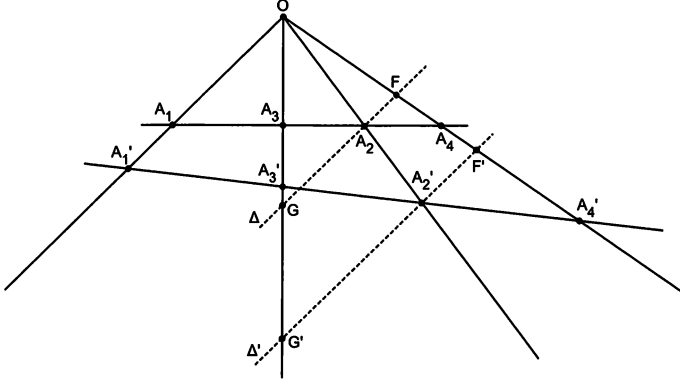


Fig. 2.2

En divisant membre à membre les deux égalités qu'on vient d'établir, on obtient :

$$(A_1, A_2, A_3, A_4) = \frac{\overline{A_3A_1}}{\overline{A_3A_2}} : \frac{\overline{A_4A_1}}{\overline{A_4A_2}} = \frac{\overline{A_2F}}{\overline{A_2G}}$$

ce qu'on cherche à établir. $\diamond$

7 - Soit $\mathcal{D}'$ une autre sécante aux droites $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$, $\mathcal{D}_3$, $\mathcal{D}_4$ les coupant en A'_1 , A'_2 , A'_3 , A'_4 ; soit Δ' la parallèle à $\mathcal{D}_1$ passant par le point A'_2 et coupant $\mathcal{D}_3$ et $\mathcal{D}_4$ respectivement en G' et F' . Comme précédemment on montre que :

$$(A'_1, A'_2, A'_3, A'_4) = \frac{\overline{A'_2F'}}{\overline{A'_2G'}}.$$

Mais, par le théorème de Thalès appliqué aux triangles OA_2G et OA_2F homothétiques respectivement aux triangles OA'_2G' et OA'_2F' , on a les égalités :

$$\frac{\overline{A_2F}}{\overline{A'_2F'}} = \frac{\overline{OA_2}}{\overline{OA'_2}} = \frac{\overline{A_2G}}{\overline{A'_2G'}}.$$

D'où l'on déduit l'égalité :

$$\frac{\overline{A_2F}}{\overline{A_2G}} = \frac{\overline{A'_2F'}}{\overline{A'_2G'}}$$

qui donne finalement, en vertu de ce qu'on a établi :

$$(A_1, A_2, A_3, A_4) = (A'_1, A'_2, A'_3, A'_4)$$

et qui montre bien que le birapport (A_1, A_2, A_3, A_4) ne dépend pas de la sécante Δ .
Ce qui justifie la définition :

$$(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3, \mathcal{D}_4) = (A_1, A_2, A_3, A_4)$$

où les points A_1, A_2, A_3, A_4 sont obtenus à partir d'une sécante quelconque Δ . $\diamond$

8 - Les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont données ainsi qu'un point P en dehors de ces deux droites. Nous laissons le soin au lecteur de faire lui-même les dessins sur lesquels nous allons raisonner.

Premier cas : $\mathcal{D}_1$ parallèle à $\mathcal{D}_2$

Soient $\mathcal{D}_3$ la parallèle à $\mathcal{D}_1$ (et donc aussi à $\mathcal{D}_2$) passant par P et Δ une sécante commune à $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_3$ passant par P et coupant $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ respectivement en A_1 et A_2 . Par la question 1, il existe un unique point $M \in \Delta$ tel que $(A_1, A_2, P, M) = -1$ i.e M est conjugué harmonique de P par rapport à $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$. D'après la question 7, tout point M' sur la droite $\mathcal{D}_4$ passant par M et parallèle à $\mathcal{D}_1$ (et donc aussi à $\mathcal{D}_2$) est aussi conjugué harmonique de P par rapport à $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$. Soit M'' un point non situé sur $\mathcal{D}_4$; soit Δ'' la droite (PM'') ; alors le conjugué harmonique de P par rapport à $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ et situé sur Δ'' est unique et est nécessairement le point M' , intersection de Δ'' et $\mathcal{D}_3$, donc M'' n'est pas conjugué harmonique de P par rapport à $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$. L'ensemble cherché est donc une droite parallèle aux 3 droites données.

Deuxième cas : $\mathcal{D}_1$ coupe $\mathcal{D}_2$ en O

Le raisonnement sera presque le même. On note $\mathcal{D}_3$ la droite (OP) et Δ une droite passant par P et coupant $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ en deux points qu'on notera respectivement en A_1 et A_2 . Par la question 1, il existe un unique point $M \in \Delta$ conjugué harmonique de P par rapport à $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$. En procédant exactement comme dans le cas précédent, on montre que l'ensemble cherché est la droite $\mathcal{D}_4$ passant par les points P et O . $\diamond$

9 - Dans les deux cas, pour construire la polaire de P par rapport à $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$, il suffit de construire un conjugué harmonique de P par rapport à ces droites. Pour bien comprendre la construction de la polaire, il suffit de regarder attentivement Fig.(2.3) et Fig.(2.4).

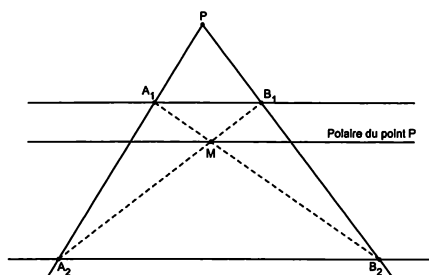


Fig. 2.3

Finalement, comme le faisceau $\{(AE), (AB), (AD), (AC)\}$ est harmonique, on a :

$$(4) \quad \frac{EB}{EC} = \frac{DB}{DC}.$$

Les relations (3), (4) et $AB = AK$ impliquent les égalités cherchées. $\diamond$

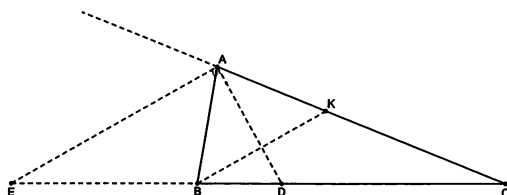


Fig. 2.6

13 - Si $k = 1$, l'ensemble $\mathcal{M}$ est celui des points $M \in E$ qui vérifient $MA = MB$; c'est donc la médiatrice du segment $[AB]$. Supposons $k \neq 1$.

On sait qu'il existe deux points $C, D \in (AB)$ tels que $\frac{CA}{CB} = -\frac{DA}{DB} = -1$; ce sont les conjugués harmoniques par rapport à A et B . Soit M un point extérieur à la droite (AB) et répondant à la question. Alors les points C et D sont forcément les pieds des bissectrices respectivement intérieure et extérieure de l'angle $\widehat{AMB}$ du triangle AMB . Par suite l'angle $\widehat{CMD}$ est droit. L'ensemble $\mathcal{M}$ cherché est donc exactement le cercle de diamètre $[CD]$. $\diamond$

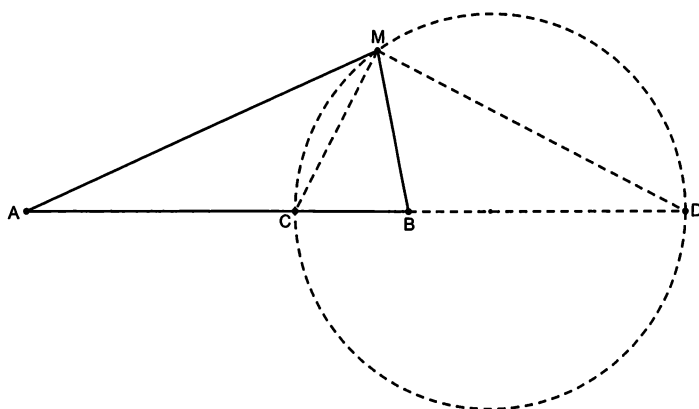


Fig. 2.7

Autour du triangle

Soit ABC un triangle non dégénéré. On note A' , B' et C' les milieux respectivement des côtés BC , AC et AB . On rappelle que :

- (i) Les droites (AA') , (BB') et (CC') (médianes de ABC) concourent en un point G appelé *centre de gravité* du triangle ABC .
- (ii) Les bissectrices des angles du triangle ABC concourent en un point I qui est le centre du cercle *inscrit* dans le triangle ABC .
- (iii) Les médiatrices du triangle ABC concourent en un point O qui est le centre du cercle *circonscrit* au triangle ABC .
- (iv) Les hauteurs du triangle ABC concourent en un point H appelé *orthocentre* du triangle ABC .

Exercice

Soit h le symétrique de H par rapport à la droite (BC) . Montrer que h est sur le cercle circonscrit au triangle ABC .

Cercle d'Euler (*)

Soit ABC un triangle non dégénéré. On note :

- a , b et c les pieds des hauteurs issues respectivement de A , B et C ;
- A'' , B'' et C'' les milieux respectivement des segments $[HA]$, $[HB]$ et $[HC]$.

1 - Montrer que le triangle $A'B'C'$ s'obtient en appliquant au triangle ABC l'homothétie de centre G et de rapport $-\frac{1}{2}$.

2 - Montrer que $\overrightarrow{GO} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GH}$ et en déduire que les points G , O et H sont alignés.

3 - On note ω le centre du cercle Γ' circonscrit au triangle $A'B'C'$. Montrer que $\overrightarrow{G\omega} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GO}$ et en déduire que les points G , O et ω sont alignés.

4 - Montrer que les quatre points G , H , O et ω forment une division harmonique.

5 - Montrer que les neuf points A' , B' , C' , a , b , c , A'' , B'' et C'' sont tous sur le cercle Γ' .

Le cercle Γ' est appelé *cercle d'Euler* ou *cercle des neuf points* du triangle ABC .

Bissectrices extérieures

Soit ABC un triangle non dégénéré. On sait que les bissectrices intérieures se coupent en un point I , centre du cercle inscrit dans le triangle ABC . Notons Δ_1 , Δ_2 et Δ_3 les bissectrices extérieures respectivement des angles $\hat{A}$, $\hat{B}$ et $\hat{C}$.

(*) LÉONARD EULER : mathématicien suisse né en 1707 et mort en 1783. Ses contributions en mathématiques sont assez diverses, du calcul infinitésimal à la théorie des graphes. Il est connu, entre autres, pour la solution qu'il a donnée du fameux problème des "sept ponts de Königsberg".

1 - Montrer que chacune des intersections $\Delta_2 \cap \Delta_3$, $\Delta_1 \cap \Delta_3$ et $\Delta_1 \cap \Delta_2$ est réduite exactement à un point.

On pose $\Delta_2 \cap \Delta_3 = J_1$, $\Delta_1 \cap \Delta_3 = J_2$ et $\Delta_1 \cap \Delta_2 = J_3$.

2 - Montrer que, pour tout $i = 1, 2, 3$, le point J_i est équidistant des droites (AB) , (BC) et (AC) . En déduire que $J_1 \in (AI)$, $J_2 \in (BI)$ et $J_3 \in (CI)$.

Le théorème de Steiner

Soient ABC un triangle non dégénéré et B' et C' deux points respectivement sur les côtés AC et AB tels que BB' et CC' soient les bissectrices intérieures respectivement des angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$. Si $BB' = CC'$, le triangle ABC est isocèle de base BC .

Démontrer ce théorème !

Corrigé

Exercice

Notons a , b et c les pieds des hauteurs issues respectivement des sommets A , B et C . Comme la droite (BC) est la médiatrice du segment Hh , les deux triangles HBC et hBC sont égaux et donc les angles $\widehat{BHC}$ et $\widehat{BhC}$ sont égaux. D'autre part, les angles $\widehat{BHC}$ et $\widehat{bHc}$ sont égaux car opposés. Par suite $\widehat{BhC} = \widehat{bHc}$. Le quadrilatère $bHcA$ est inscriptible dans un cercle car il a deux angles opposés qui sont droits ; par suite les angles $\widehat{bAc}$ et $\widehat{bHc}$ sont supplémentaires. Il en résulte que les angles opposés $\widehat{BAC}$ et $\widehat{BhC}$ du quadrilatère $ABhC$ sont supplémentaires et donc $ABhC$ est inscriptible, ce qui signifie que h est sur le cercle passant par les points A , B et C . $\diamond$

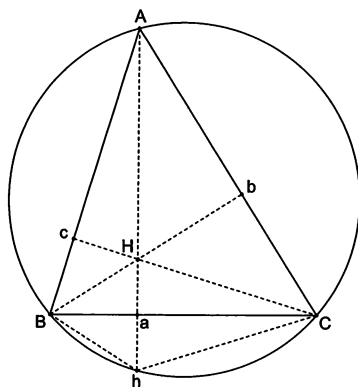


Fig. 3.1

Cercle d'Euler

1 - Comme A' , B' et C' sont les milieux respectivement des côtés $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$, on a : $\overrightarrow{A'B'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B'C'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{A'C'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. Donc le triangle $A'B'C'$ se déduit de ABC par l'homothétie de rapport $-\frac{1}{2}$ et centrée au point de concours des droites (AA') , (BB') et (CC') c'est-à-dire le point G . $\diamond$

2 - Les médiatrices du triangle ABC sont les hauteurs du triangle $A'B'C'$; donc le point O est l'orthocentre de $A'B'C'$. Il se déduit de l'orthocentre H de ABC par l'homothétie $h(G, -\frac{1}{2})$, d'où $\overrightarrow{GO} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GH}$. Ce qui montre que les points G , H et O sont alignés. $\diamond$

3 - L'homothétie $h(G, -\frac{1}{2})$ envoie le triangle ABC sur le triangle $A'B'C'$; elle envoie donc le cercle Γ sur le cercle Γ' . Par suite le centre O de Γ se transforme en le centre ω de Γ' c'est-à-dire on a : $\overrightarrow{G\omega} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GO}$. Ceci montre que les points G , O et ω sont alignés. $\diamond$

4 - D'après les questions qui précèdent, les quatre points G , H , O et ω sont alignés. Montrons qu'ils forment une division harmonique. On a :

$$\overrightarrow{HO} = \overrightarrow{HG} + \overrightarrow{GO} = 3\overrightarrow{GO}.$$

Or :

$$\overrightarrow{H\omega} = \overrightarrow{HG} + \overrightarrow{G\omega} = 2\overrightarrow{GO} - \frac{1}{2}\overrightarrow{GO} = \frac{3}{2}\overrightarrow{GO}.$$

Donc $\frac{\overrightarrow{H\omega}}{\overrightarrow{HO}} = \frac{1}{2}$. Finalement, on calcule le birapport :

$$(G, H, O, \omega) = \frac{\overrightarrow{GO}}{\overrightarrow{G\omega}} : \frac{\overrightarrow{HO}}{\overrightarrow{H\omega}} = (-2) : (+2) = -1$$

et on voit bien que les points G , H , O et ω forment une division harmonique. $\diamond$

5 - Les droites (OA') et (Ha) sont parallèles car toutes les deux sont orthogonales à (BC) . Comme ω est le milieu du segment $[OH]$, son projeté orthogonal sur (BC) est le milieu de $[A'a]$, donc ω est sur la médiatrice du segment $[A'a]$ et par suite le cercle Γ' qui passe par A' passe aussi par a . Un raisonnement analogue montre que Γ' passe aussi par b et c . Le point ω est le centre de l'homothétie négative (de rapport $-\frac{1}{2}$) qui envoie le cercle Γ sur Γ' et H est le centre de l'homothétie positive (de rapport $\frac{1}{2}$) qui envoie le cercle Γ sur Γ' . Le cercle Γ' passe donc par le milieu de $[AH]$ c'est-à-dire A'' ; il passera donc aussi par B'' et C'' .

En conclusion : le cercle Γ' passe par les milieux des côtés BC , AC et AB , par les milieux des segments qui joignent l'orthocentre H aux sommets A , B et C et par les pieds a , b et c des hauteurs. C'est le *cercle des neuf points* ou *cercle d'Euler*. $\diamond$

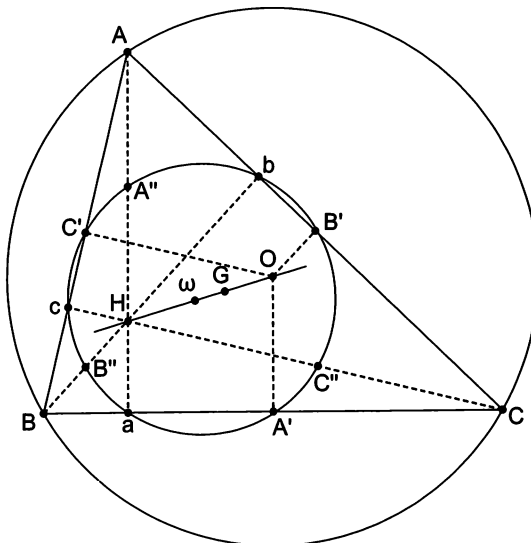


Fig. 3.2

Bissectrices extérieures

1 - Les droites Δ_2 et Δ_3 sont distinctes (Δ_2 passe par le point B par lequel Δ_3 ne passe pas). Il suffit donc de montrer qu'elles ne sont pas parallèles.

Supposons Δ_2 parallèle à Δ_3 . Comme les bissectrices intérieures (BI) et (CI) leur sont respectivement perpendiculaires, (BI) et (CI) seront forcément confondues ; mais ceci n'est pas le cas ! Donc Δ_2 et Δ_3 se coupent exactement en un point J_1 . Le même raisonnement vaut pour $\Delta_1 \cap \Delta_3$ et $\Delta_1 \cap \Delta_2$.

2 - Un point M du plan est sur une bissectrice (intérieure ou extérieure) d'un angle $\widehat{xOy}$ si, et seulement si, $\text{dist}(M, (Ox)) = \text{dist}(M, (Oy))$. Comme $J_1 \in \Delta_2 \cap \Delta_3$ on a :

$$\text{dist}(J_1, (AB)) = \text{dist}(J_1, (BC)) = \text{dist}(J_1, (AC)).$$

Ceci nous dit tout de suite que le point J_1 est sur la bissectrice intérieure (AI) de l'angle $\widehat{BAC}$. On démontre de façon analogue que J_2 est sur la bissectrice intérieure (BI) de l'angle $\widehat{ABC}$ et J_3 sur la bissectrice intérieure (CI) de l'angle $\widehat{BCA}$.

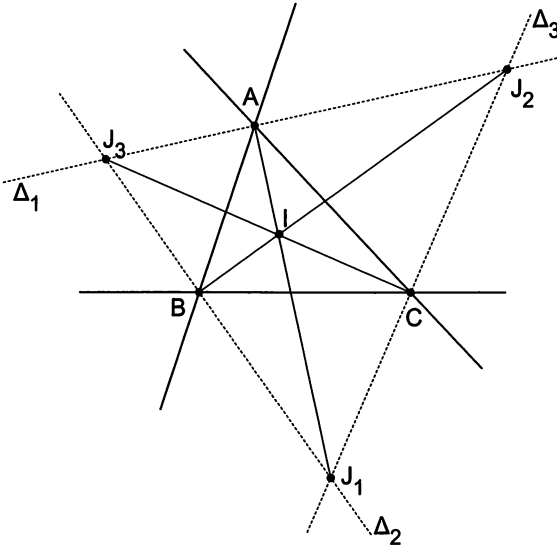


Fig. 3.3

Le théorème de Steiner

Avant de commencer la démonstration, on peut établir assez facilement les assertions suivantes :

- 1) Soit ABC un triangle. Alors : $\widehat{ABC} < \widehat{ACB} \iff AC < AB$.
- 2) Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles. On suppose que $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ et $\widehat{BAC} < \widehat{B'A'C'}$. Alors $BC < B'C'$ (cf. Fig.(3.4)).

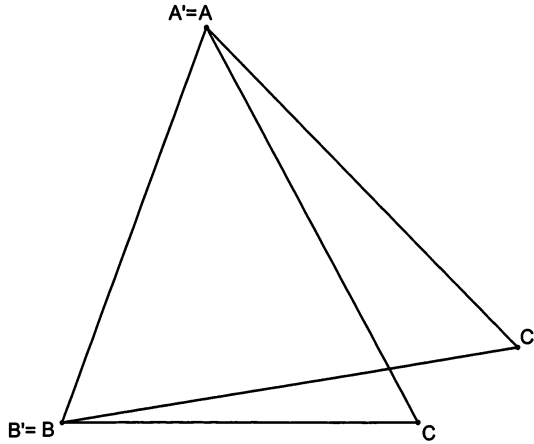


Fig. 3.4

Nous allons raisonner par l'absurde : le triangle ABC n'est pas isocèle de base BC en supposant par exemple que :

$$(\mathcal{H}) \quad \widehat{ABC} > \widehat{ACB}.$$

Soit D le point tel que les vecteurs $\overrightarrow{BB'}$ et $\overrightarrow{C'D}$ soient équipollents (cf. Fig.(3.5)). Le quadrilatère $BC'DB'$ est donc un parallélogramme. On a :

$$\widehat{ABB'} = \widehat{C'DB'} \text{ (angles opposés du parallélogramme } BC'DB'),$$

$$\widehat{ABB'} = \frac{1}{2}\widehat{ABC} \text{ (car } BB' \text{ est bissectrice de l'angle } \widehat{ABC}),$$

$$\widehat{ACC'} = \frac{1}{2}\widehat{ACB} \text{ (car } CC' \text{ est bissectrice de l'angle } \widehat{ACB}).$$

On obtient en vertu de l'hypothèse $(\mathcal{H})$:

$$(*) \quad \widehat{C'DB'} > \widehat{C'CB'}.$$

Considérons les triangles $BB'C$ et $CC'B$. Ils ont un côté commun qui est BC et un côté égal : $BB' = CC'$ (hypothèse du théorème). Comme $\widehat{B'BC} > \widehat{CC'B}$, on a $B'C > BC'$ c'est-à-dire $B'C > B'D$ (car $B'D = BC'$ car $BC'DB'$ est un parallélogramme). Dans le triangle $B'DC$ les angles $\widehat{B'CD}$ et $\widehat{B'DC}$ qui sont opposés respectivement aux côtés $B'D$ et $B'C$ vérifient :

$$(**) \quad \widehat{B'DC} > \widehat{B'CD}.$$

Les inégalités $(*)$ et $(**)$ impliquent $\widehat{C'DC} > \widehat{C'CD}$. Par conséquent :

$$BB' = C'D < CC'$$

ce qui contredit l'hypothèse du théorème. Donc le triangle ABC est isocèle. Ce qui termine la démonstration. $\diamond$

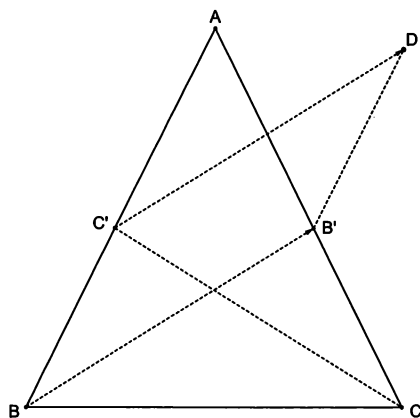


Fig.(3.5)

La puissance et l'inversion

Soit $(\mathcal{P}, \vec{V})$ un plan affine euclidien. Si M et N sont deux points de $\mathcal{P}$, la norme $\|\overrightarrow{MN}\|$ du vecteur $\overrightarrow{MN}$ sera notée simplement MN (c'est la longueur du segment $[MN]$).

1. Puissance d'un point par rapport à un cercle

Soient Γ un cercle de centre O et de rayon $\rho > 0$ et S un point de $\mathcal{P}$. Par S on mène deux sécantes Δ et Δ' à Γ ; Δ coupe Γ en A et B et Δ' le coupe en A' et B' .

1 - Montrer que les triangles SAB' et $SA'B$ sont semblables. En déduire que $\overline{SA} \cdot \overline{SB} = \overline{SA'} \cdot \overline{SB'}$. Ainsi le nombre réel $\overline{SA} \cdot \overline{SB}$ ne dépend pas de la sécante Δ mais seulement du point S et du cercle Γ ; on l'appelle *puissance* de S par rapport à Γ et on le note $p(S, \Gamma)$.

2 - Montrer que $p(S, \Gamma) = SO^2 - \rho^2$. (Penser au cas particulier où la sécante Δ passe par le centre O du cercle Γ .)

Soient maintenant Γ et Γ' deux cercles de centres respectifs O et O' et de rayons respectifs ρ et ρ' . On note $\mathcal{R}$ l'ensemble des points $M \in \mathcal{P}$ tels que $p(M, \Gamma) = p(M, \Gamma')$. Soient M un point de $\mathcal{P}$, M_0 sa projection orthogonale sur la droite (OO') et I le milieu du segment $[OO']$.

3 - Montrer que $M \in \mathcal{R}$ si, et seulement si, on a $2\overline{IM_0} \cdot \overline{OO'} = \rho^2 - \rho'^2$.

4 - Montrer que $\mathcal{R}$ est une droite passant par M_0 et orthogonale à (OO') . (La droite $\mathcal{R}$ est appelée *axe radical* des deux cercles Γ et Γ' .)

5 - Les deux cercles Γ et Γ' étant donnés, construire géométriquement leur axe radical. On le fera en se restreignant aux cas qui suivent :

- i) Γ et Γ' sécants en K et L ;
- ii) Γ et Γ' disjoints et l'un extérieur à l'autre.

6 - Soient Δ et Δ' deux droites sécantes en O . Soient A et B deux points sur Δ et A' et B' deux points sur Δ' . Montrer que les quatre points A, B, A' et B' sont sur un même cercle si, et seulement si, on a $\overline{OA} \cdot \overline{OB} = \overline{OA'} \cdot \overline{OB'}$.

2. Inversion

On appelle *inversion de pôle O et de puissance $k \in \mathbb{R}^*$* , la transformation de $\mathcal{P}$ notée $\mathcal{I}(O, k)$ qui à tout $M \in \mathcal{P}$ distinct de O associe le point M' sur la droite (OM) tel que $\overline{OM} \cdot \overline{OM'} = k$. On dira que M' est l'*inverse* de M .

1 - Montrer que $\mathcal{I}(O, k)$ est une transformation *involution* de $\mathcal{P} \setminus \{O\}$.

2 - Soient M et N deux points de $\mathcal{P} \setminus \{O\}$ d'inverses respectifs M' et N' . Établir la relation $M'N' = \frac{|k|}{\overline{OM} \cdot \overline{ON}} \cdot MN$.

3 - Soient $\mathcal{I}(O, k)$ et $\mathcal{I}(O, k')$ deux inversions de même pôle O . Dire ce qu'est leur produit $\mathcal{I}(O, k') \circ \mathcal{I}(O, k)$. A-t-on toujours $\mathcal{I}(O, k') \circ \mathcal{I}(O, k) = \mathcal{I}(O, k) \circ \mathcal{I}(O, k')$?

4 - Quels sont les points invariants d'une inversion $\mathcal{I}(O, k)$? Montrer que, si $k > 0$, les points invariants de $\mathcal{I}(O, k)$ forment un cercle qu'on appelle *cercle d'inversion* de $\mathcal{I}(O, k)$.

5 - Soit $\mathcal{I}(O, k)$ une inversion. Quel est l'inverse d'une droite Δ ? d'un cercle Γ ?

6 - Soient Δ et Δ' deux droites. Existe-t-il une inversion qui transforme Δ en Δ' ?

7 - Soient $\Gamma(\omega, R)$ et $\Gamma'(\omega', R')$ deux cercles. Existe-t-il une inversion qui transforme Γ en Γ' ? (On se contentera de regarder le cas où les cercles sont extérieurs l'un à l'autre et les rayons non égaux.)

On choisit un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ qui permet de repérer chaque point M à l'aide de ses coordonnées réelles (x, y) . Par l'identification $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x + iy \in \mathbb{C}$, tout M peut être repéré aussi par son affixe $z = x + iy$.

Soient ω un point d'affixe $z_0 = x_0 + iy_0$ et $\mathcal{I}(\omega, k)$ l'inversion de pôle ω et de puissance $k \in \mathbb{R}^*$.

8 - Calculer l'affixe z' de M' en fonction de l'affixe z de M . Calculer les coordonnées (x', y') de M' en fonction de celles (x, y) de M .

Exercice 1

Soit f la transformation qui à M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = \frac{2z+1}{z+1}$.

1 - Montrer que f est un produit de transformations géométriques élémentaires (translations, homothéties, rotations, inversions...) qu'on précisera.

2 - Soit Ω_- la partie du plan telle que $x^2 + y^2 < 1$. Quelle est son image par la transformation f ?

Exercice 2

Dans $\mathcal{P}$ on se donne un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Soient M et M' deux points d'affixes respectives $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$. On suppose que z et z' sont liés par la relation $z' = \frac{z-1}{z-2}$.

1 - Calculer (x', y') en fonction de (x, y) et inversement.

2 - On suppose que M varie sur une droite parallèle à l'un des axes de coordonnées. Quel est le lieu géométrique du point M' ?

Corrigé

1. Puissance d'un point

1 - Les deux triangles SAB' et $SA'B$ ont un angle commun $\widehat{ASB'}$ (ou $\widehat{A'SB}$) et les angles $\widehat{SBA'}$ et $\widehat{SB'A}$ interceptent le même arc d'extrémités A et A' . Ils sont donc semblables et par suite leurs côtés respectivement opposés aux angles égaux sont proportionnels. On a donc :

$$\frac{SA}{SA'} = \frac{SB'}{SB} = \frac{AB'}{A'B}$$

qui nous donne $SA \cdot SB = SA' \cdot SB'$. Comme les quantités $\overline{SA} \cdot \overline{SB}$ et $\overline{SA'} \cdot \overline{SB'}$ ont même signe, on obtient finalement ce qu'on cherche :

$$\overline{SA} \cdot \overline{SB} = \overline{SA'} \cdot \overline{SB'}.$$

2 - Si l'une des sécantes (disons Δ) passe par le centre O , on a $SA = SO - \rho$ et $SB = SO + \rho$. D'où :

$$p(S, \Gamma) = \overline{SA} \cdot \overline{SB} = (SO - \rho) \cdot (SO + \rho) = SO^2 - \rho^2.$$

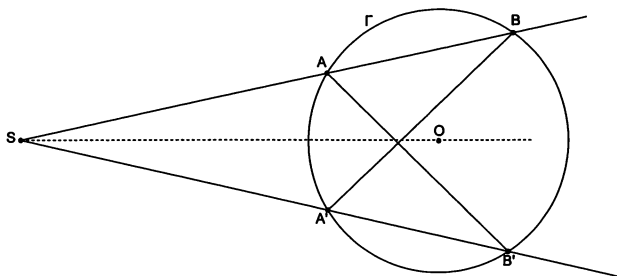


Fig. 4.1

3 - On a par définition $p(M, \Gamma) = OM^2 - \rho^2$ et $p(M, \Gamma') = O'M^2 - \rho'^2$. Donc les deux puissances sont égales (ce qui est équivalent à $M \in \mathcal{R}$) si, et seulement si, $OM^2 - \rho^2 = O'M^2 - \rho'^2$. Or :

$$OM^2 = OM_0^2 + MM_0^2 \quad \text{et} \quad O'M^2 = O'M_0^2 + MM_0^2.$$

Par suite, on obtient $OM_0^2 - O'M_0^2 = \rho^2 - \rho'^2$ ou encore, si on factorise la différence de deux carrés, $(\overline{OM_0} + \overline{M_0O'}) \cdot (\overline{OM_0} - \overline{M_0O'}) = \rho^2 - \rho'^2$. Mais $\overline{OM_0} + \overline{M_0O'} = \overline{OO'}$ et $\overline{OM_0} - \overline{M_0O'} = 2\overline{IM_0}$. On obtient alors :

$$2\overline{IM_0} \cdot \overline{OO'} = \rho^2 - \rho'^2.$$

4 - Le point M_0 est déterminé de façon unique par la relation qu'on vient d'établir $2\overline{IM_0} \cdot \overline{OO'} = \rho^2 - \rho'^2$. Donc tous les points qui sont sur $\mathcal{R}$ ont la même projection orthogonale M_0 ; $\mathcal{R}$ est par conséquent une droite, celle qui passe par M_0 et est orthogonale à la droite des centres (OO') . C'est l'*axe radical* des cercles Γ et Γ' .

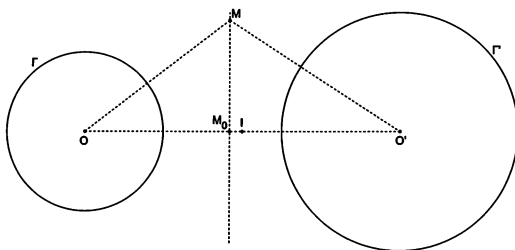


Fig. 4.2

5 - Les deux cercles Γ et Γ' étant donnés, il s'agit de construire géométriquement leur axe radical. Il suffit donc de trouver deux points qui ont même puissance par rapport à ces deux cercles.

i) Comme K est un point de rencontre de Γ et Γ' ses puissances par rapport à ces deux cercles sont nulles donc égales. Même chose pour L . L'axe radical n'est donc rien d'autre que la droite (KL) .

ii) On trace un troisième cercle $\mathcal{C}$ qui coupe Γ en K et L et Γ' en K' et L' de telle sorte que les droites (KL) et $(K'L')$ ne soient pas parallèles (c'est toujours possible) ; on note M le point de rencontre des droites (KL) et $(K'L')$. Le point M a même puissance par rapport aux cercles $\mathcal{C}$ et Γ et même puissance par rapport aux cercles $\mathcal{C}$ et Γ' ; il a donc même puissance par rapport aux cercles Γ et Γ' c'est-à-dire il est sur l'axe radical de Γ et Γ' . On fait la même chose avec un second cercle et on obtient un autre N qui est aussi sur l'axe radical de Γ et Γ' . L'axe radical de Γ et Γ' est alors la droite (MN) .

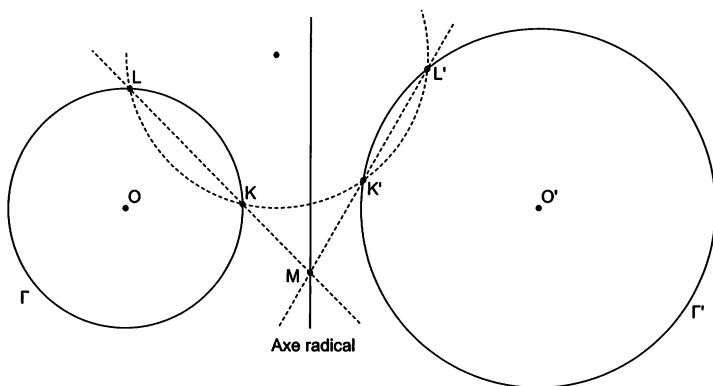


Fig. 4.3

6 - C'est une simple variante de la première question. Son intérêt est de donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'un quadrilatère ayant au moins deux côtés non parallèles soit inscriptible (dans un cercle).

1. Inversion

1 - L'inversion $\mathcal{I}(O, k)$ de pôle O et de puissance $k \in \mathbb{R}^*$ qui à M distinct de O associe M' (distinct aussi de O) est définie par les conditions : M' est sur la droite (OM) et $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OM'} = k$. Il est évident que $\mathcal{I}(O, k)$ est une bijection de $\mathcal{P} \setminus \{O\}$ et que l'application qui à M' associe M est caractérisée par : $M \in (OM')$ et $\overrightarrow{OM'} \cdot \overrightarrow{OM} = k$. C'est donc $\mathcal{I}(O, k)$ qui est par suite involutive.

2 - Soient M et N deux points distincts de $\mathcal{P} \setminus \{O\}$ et M' et N' leurs inverses respectifs (qui sont aussi distincts). On a :

$$OM \cdot OM' = |k| = ON \cdot ON',$$

donc $\frac{OM}{ON'} = \frac{ON}{OM'}$. Les deux triangles OMN et $ON'M'$ ont donc deux côtés proportionnels entourant un angle égal (l'angle commun $\hat{O}$). Ils sont donc semblables. Par suite :

$$\frac{OM}{ON'} = \frac{ON}{OM'} = \frac{MN}{M'N'}.$$

D'où :

$$\begin{aligned} M'N' &= MN \cdot \frac{OM'}{ON} \\ &= MN \cdot \frac{OM \cdot OM'}{OM \cdot ON} \\ &= MN \cdot \frac{|k|}{OM \cdot ON}. \end{aligned}$$

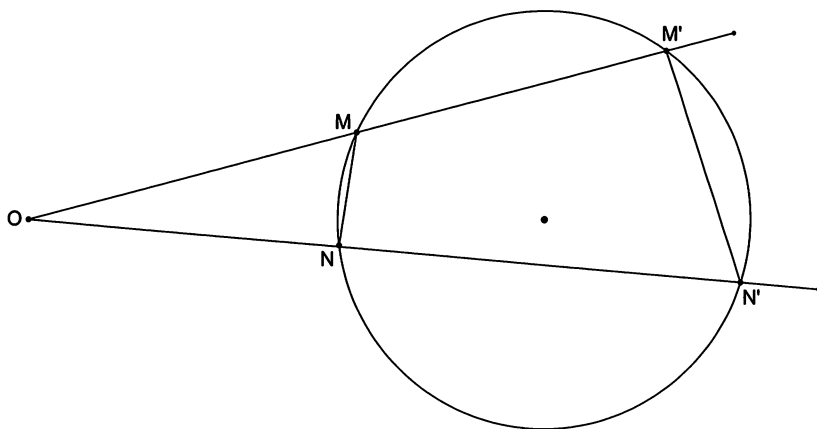


Fig. 4.4

3 - Si $k = k'$ alors $\mathcal{I}(O, k) = \mathcal{I}(O, k')$ et donc $\mathcal{I}(O, k) \circ \mathcal{I}(O, k) = \text{identité}$. Supposons $k \neq k'$ et soit $M \in \mathcal{P} \setminus \{O\}$. On pose $\mathcal{I}(O, k)(M) = M'$ et $\mathcal{I}(O, k')(M') = M''$.

Alors les quatre points O, M, M', M'' sont alignés et on a :

$$\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OM'} = k \quad \text{et} \quad \overrightarrow{OM'} \cdot \overrightarrow{OM''} = k'.$$

On en déduit $\overrightarrow{OM''} = \frac{k'}{k} \overrightarrow{OM}$ c'est-à-dire $\mathcal{I}(O, k') \circ \mathcal{I}(O, k)$ est l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{k'}{k}$. Bien sûr, on n'a $\mathcal{I}(O, k') \circ \mathcal{I}(O, k) = \mathcal{I}(O, k) \circ \mathcal{I}(O, k')$ que si $|k| = |k'|$.

4 - Les points invariants de $\mathcal{I}(O, k)$ sont les points M qui vérifient :

$$\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OM} = OM^2 = k.$$

Si $k < 0$, aucun point n'est invariant. Si $k > 0$, l'ensemble des points invariants est un cercle centré en O et de rayon $\sqrt{k}$.

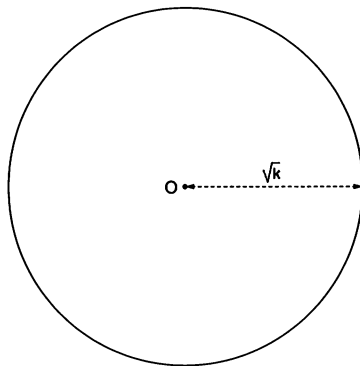


Fig. 4.5

5 - La réponse dépendra de la position relative de la droite Δ et du point O , pôle de l'inversion $\mathcal{I}(O, k)$. Il y aura deux cas.

Premier cas : $O \in \Delta$

Dans cette situation, si $M \in \Delta$, son inverse M' est aussi sur Δ (d'après la définition de l'inversion). La droite Δ est donc globalement invariante.

Deuxième cas : $O \notin \Delta$

Soient H la projection orthogonale de O sur Δ et H' l'inverse de O . Soit M un autre point de Δ d'inverse M' . On a alors $\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{OH'} = k = \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OM'}$. Le quadrilatère $HH'M'M$ est donc inscrit dans un cercle (cf. question 6, paragraphe précédent) ; par suite ses angles opposés sont supplémentaires deux à deux, ce qui implique que l'angle $\widehat{H'M'M}$ est droit. Lorsque M varie sur la droite Δ , son inverse varie donc de telle sorte que l'angle $\widehat{OM'H'}$ soit droit, c'est-à-dire sur le cercle de diamètre OH' . (Le point O ne peut pas être atteint : c'est l'image du point ∞ de la droite Δ .)

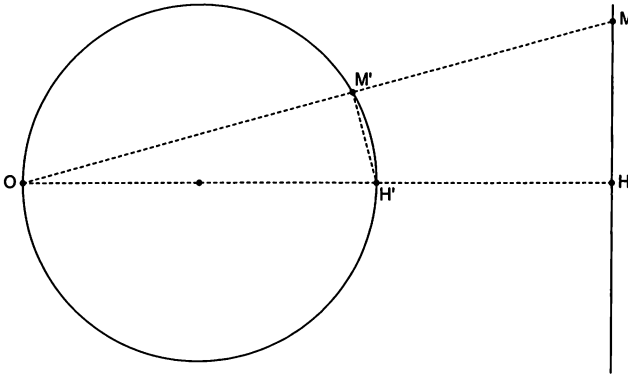


Fig. 4.6

Cherchons maintenant l'image du cercle Γ par l'inversion $\mathcal{I}(O, k)$. Si le point O est sur Γ , c'est une droite qui ne passe pas par O ; il suffit pour le voir de raisonner comme précédemment en utilisant le fait que $\mathcal{I}(O, k)$ est une transformation involutive. Nous allons traiter le cas où $O \notin \Gamma$.

Soient M un point de Γ et M' son inverse. On a $\overline{OM} \cdot \overline{OM'} = k$. Soit M_1 le point du cercle Γ où la droite (OM) le coupe. Si p est la puissance de O par rapport au cercle Γ , on a $\overline{OM} \cdot \overline{OM_1} = p$. Comme les quatre points O, M, M', M_1 sont alignés, les deux égalités $\overline{OM} \cdot \overline{OM'} = k$ et $\overline{OM} \cdot \overline{OM_1} = p$ nous donnent :

$$\overrightarrow{OM'} = \frac{k}{p} \overrightarrow{OM_1}.$$

Ceci montre que le cercle Γ a pour inverse son transformé par l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{k}{p}$.

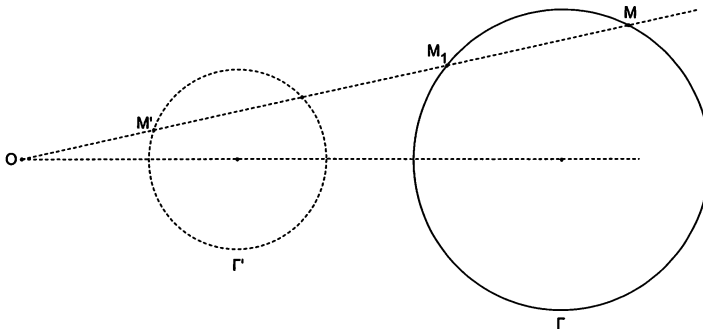


Fig. 4.7

6 - Une droite ne se transforme en une droite par une inversion $\mathcal{I}(O, k)$ que si elle passe par le pôle O ; O doit donc être sur Δ et en plus on doit avoir $\Delta = \Delta'$. Dans cette situation, n'importe quelle inversion de pôle sur Δ convient.

7 - Les rayons ρ et ρ' respectivement des cercles Γ et Γ' sont différents. Alors il existe une homothétie positive $h\left(O_1, \frac{\rho'}{\rho}\right)$ et une homothétie négative $h\left(O_2, -\frac{\rho'}{\rho}\right)$ qui envoient Γ sur Γ' . Soient p_1 et p_2 les puissances respectives des points O_1 et O_2 par rapport au cercle Γ . Si Γ et Γ' ne sont pas tangents, chacune des inversions $\mathcal{I}\left(O_1, p_1 \frac{\rho'}{\rho}\right)$ et $\mathcal{I}\left(O_2, -p_2 \frac{\rho'}{\rho}\right)$ envoie Γ sur Γ' . Si Γ et Γ' sont tangents, seule l'une des deux inversions susmentionnées convient (le lecteur cherchera lui-même à comprendre pourquoi).

8 - Comme M' est le transformé de M par $\mathcal{I}(\omega, k)$, les points ω , M et M' sont alignés et le produit $\overline{\omega M} \cdot \overline{\omega M'}$ est égal à k . On a donc $\arg(z' - z_0) = \arg(z - z_0)$ modulo π et $|z' - z_0| \cdot |z - z_0| = |k|$; par suite : $z' - z_0 = \frac{k}{\overline{z - z_0}}$ c'est-à-dire $z' = z_0 + \frac{k}{\overline{z - z_0}}$. Un calcul immédiat donne :

$$x' = x_0 + \frac{k(x - x_0)}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \quad \text{et} \quad y' = y_0 + \frac{k(y - y_0)}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

Exercice 1

1 - On peut écrire $f(z) = z' = \frac{2z+2-1}{z+1} = 2 - \frac{1}{z+1}$. On passe donc de z à z' par la suite d'applications qui suivent :

$$z \xrightarrow{f_1} z+1 \xrightarrow{f_2} \frac{1}{z+1} \xrightarrow{f_3} \frac{1}{z+1} \xrightarrow{f_4} -\frac{1}{z+1} \xrightarrow{f_5} 2 - \frac{1}{z+1}$$

où f_1 est la translation de vecteur (le nombre complexe) 1, f_2 est l'inversion de pôle l'origine et de puissance 1, f_3 est la symétrie par rapport à l'axe des abscisses, f_4 est la symétrie par rapport à l'origine et f_5 est la translation de vecteur 2.

2 - Pour voir comment se transforme Ω , il est nécessaire de voir comment ça se passe pour le cercle Γ d'équation $x^2 + y^2 = 1$ (c'est le cercle de centre O et de rayon 1 privé bien sûr du point $z = -1$ qui n'a pas d'image). Par f_1 , Γ devient Γ_1 , cercle de centre $O_1 = (1, 0)$ et de rayon 1 ; l'inversion f_2 le transforme en la droite Γ_2 d'équation $x = \frac{1}{2}$, f_3 laisse Γ_2 invariante, f_4 la ramène sur la droite Γ_4 d'équation $x = -\frac{1}{2}$ et enfin f_5 transforme cette dernière en la droite Δ d'équation $x = \frac{3}{2}$.

La transformation f est une bijection de l'ouvert $\mathbb{C} \setminus \{-1\}$ sur l'ouvert $\mathbb{C} \setminus \{2\}$. Elle a pour transformation inverse $f^{-1}(w) = \frac{-w+1}{w-2}$ (définie bien sûr sur $\mathbb{C} \setminus \{2\}$) ; $f : \mathbb{C} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{2\}$ est donc un homéomorphisme. Posons :

- $\Omega = \mathbb{C} \setminus (\{-1\} \cup \Gamma)$ et $\Omega' = \mathbb{C} \setminus (\{2\} \cup \Delta)$,
- $\Omega_- = \{z \in \Omega : |z| < 1\}$ et $\Omega_+ = \{z \in \Omega : |z| > 1\}$,
- $\Omega'_- = \{z = x + iy \in \Omega' : x < \frac{3}{2}\}$ et $\Omega'_+ = \{z = x + iy \in \Omega' : x > \frac{3}{2}\}$.

L'ouvert Ω est non connexe : ses composantes connexes sont Ω_- et Ω_+ ; de même l'ouvert Ω' est non connexe : ses composantes connexes sont Ω'_- et Ω'_+ . La restriction de f à Ω est un homéomorphisme sur Ω' ; f va donc envoyer homéomorphiquement la composante connexe Ω_- de Ω sur l'une des deux composantes connexes de Ω' . Pour savoir laquelle il suffit de voir où va le point $z_0 = 0$; celui-ci a pour image 1, il est donc dans Ω'_- . Le transformé par f de l'ouvert Ω_- est donc l'ouvert Ω'_- .

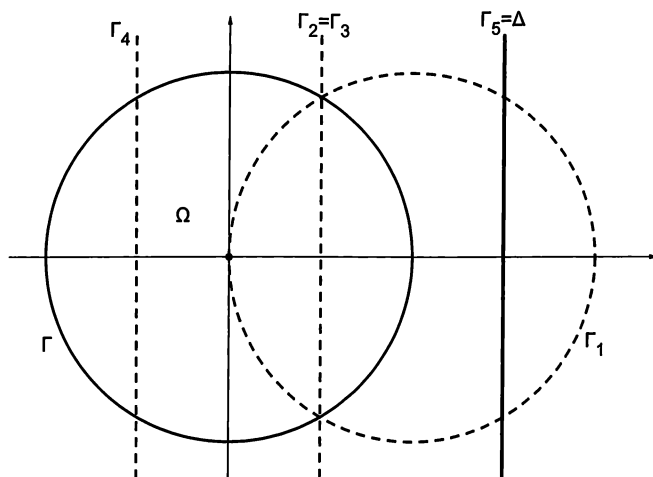
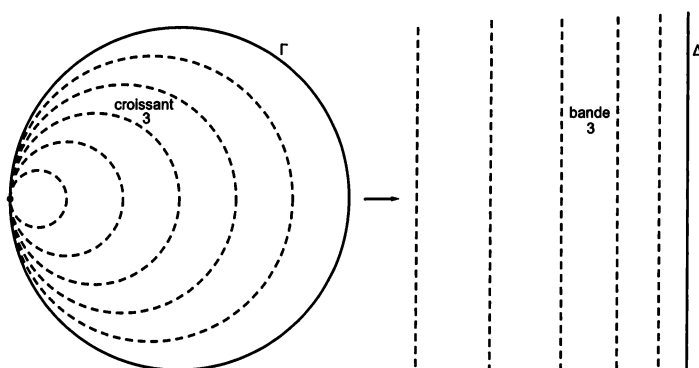


Fig. 4.8



Les cercles intérieurs au cercle Γ privés du point $z = -1$ et qui lui sont tangents en ce point forment un *feuilletage* du disque Ω_- . La transformation f les redresse en droites parallèles à Δ et situées à sa gauche. On peut voir aussi que f envoie par exemple le 3^{ème} croissant sur la 3^{ème} bande !

Fig. 4.9

Exercice 2

1 - On peut écrire $z' = \frac{z-2+1}{z-2} = 1 + \frac{1}{z-2} = 1 + \frac{\bar{z}-2}{(\bar{z}-2)(z-2)}$. Ce qui nous donne :

$$\begin{cases} x' = \frac{(x-2)^2 + y^2 + x - 2}{(x-2)^2 + y^2} \\ y' = -\frac{y}{(x-2)^2 + y^2} \end{cases}$$

Une démarche similaire nous donne :

$$\begin{cases} x = \frac{2(x'-2)^2 + 2y'^2 + x' - 1}{(x'-1)^2 + y'^2} \\ y = -\frac{y'}{(x'-1)^2 + y'^2} \end{cases}$$

2 - On suppose que M varie sur une droite horizontale Δ_λ ayant pour équation $y = \lambda$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Le point M' va donc varier sur un ensemble dont l'équation est $-\frac{y'}{(x'-1)^2+y'^2} = \lambda$. Si $\lambda = 0$, cet ensemble a pour équation $y = 0$, c'est donc Δ_0 . Si $\lambda \neq 0$, M' varie sur le cercle d'équation $(x' - 1)^2 + y'^2 + \frac{1}{\lambda}y' = 0$; il est centré au point $(1, -\frac{1}{2\lambda})$ et a pour rayon $\frac{1}{2|\lambda|}$.

Le cas où M varie sur une droite verticale se traite de façon similaire et est laissé aux bons soins du lecteur ! (C'est la droite d'équation $x = 2$ si $\lambda = 2$ et c'est un cercle centré sur l'axe des abscisses si $\lambda \neq 2$.)

Homographies

L'inversion $I(O, k)$ de pôle O et de puissance $k \in \mathbb{R}^*$ n'est pas définie sur le plan tout entier car son pôle O n'a pas d'image ! Pour pallier ce problème, on complète le plan complexe $\mathbb{C}$ en lui rajoutant ce qu'il faut. On pose $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ et on obtient alors ce qu'on appelle la *sphère de Riemann*. On prolonge une partie des opérations de l'addition et de la multiplication de $\mathbb{C}$ à $\widehat{\mathbb{C}}$ en posant :

$$z + \infty = \infty + z = \infty \quad \infty \times \infty = \infty \quad \text{et} \quad \frac{z}{\infty} = 0 \quad \text{pour tout } z \in \mathbb{C}$$

$$z \times \infty = \infty \times z = \infty \quad \text{et} \quad \frac{z}{0} = \infty \quad \text{pour tout } z \in \mathbb{C}^*.$$

Une *homographie* de $\widehat{\mathbb{C}}$ est une transformation h qui à M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' où :

$$z' = \begin{cases} \frac{az+b}{cz+d} & \text{si } z \in \mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\} \\ \infty & \text{si } z = -\frac{d}{c} \\ \frac{a}{c} & \text{si } z = \infty \end{cases}$$

où a, b, c, d sont des nombres complexes. On vérifie immédiatement que, si $ad - bc = 0$, la transformation h est constante ; on supposera donc $ad - bc \neq 0$.

1 - On suppose $c = 0$. Étudier alors la transformation obtenue : sa décomposition en transformations élémentaires et ses points fixes.

Désormais, dans toute la suite de cette fiche on suppose $c \neq 0$.

2 - Montrer qu'on peut toujours écrire h sous la forme $h(z) = \alpha + \frac{\beta}{cz+d}$. Utiliser cette écriture pour décomposer h en transformations géométriques bien connues.

3 - Montrer que l'ensemble $\mathcal{H}$ des homographies de $\widehat{\mathbb{C}}$ muni de la loi de composition des applications est un groupe. Vérifier qu'il n'est pas commutatif.

4 - Étudier l'existence des points fixes de h . En déduire que si h fixe trois points distincts alors elle coïncide avec l'identité.

Soit $\text{GL}(2, \mathbb{C})$ le groupe des matrices inversibles à coefficients complexes $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. L'application déterminant $\det : A \in \text{GL}(2, \mathbb{C}) \mapsto \det A \in \mathbb{C}^*$ est un morphisme de groupes ; son noyau est un sous-groupe normal de $\text{GL}(2, \mathbb{C})$ qu'on note $\text{SL}(2, \mathbb{C})$.

5 - Montrer que l'application $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}(2, \mathbb{C}) \mapsto \left(z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \right) \in \mathcal{H}$ est un morphisme (surjectif) de groupes. Quel est son noyau Σ ?

6 - Soient $z_1, z_2, z_3 \in \widehat{\mathbb{C}}$ distincts deux à deux. Montrer qu'il existe toujours une unique homographie $h \in \mathcal{H}$ telle que
$$\begin{cases} h(z_1) = \infty \\ h(z_2) = 0 \\ h(z_3) = 1. \end{cases}$$

7 - Montrer, à partir de ce qui précède, que l'action du groupe $\mathcal{H}$ sur la sphère de Riemann $\hat{\mathbb{C}}$ est 3-transitive c'est-à-dire, pour tous $z_1, z_2, z_3, z'_1, z'_2, z'_3 \in \hat{\mathbb{C}}$, il existe une homographie $h \in \mathcal{H}$ telle que
$$\begin{cases} h(z_1) = z'_1 \\ h(z_2) = z'_2 \\ h(z_3) = z'_3. \end{cases}$$

On appelle *birapport* de quatre points $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \hat{\mathbb{C}}$, la quantité :

$$\rho(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} : \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2}.$$

8 - Soit h une homographie qui envoie z_1 sur ∞ , z_2 sur 0 et z_3 sur 1. Montrer que $h(z_4) = \rho(z_1, z_2, z_3, z_4)$ et en déduire qu'une homographie $\phi \in \mathcal{H}$ préserve toujours le birapport c'est-à-dire on a $\rho(\phi(z_1), \phi(z_2), \phi(z_3), \phi(z_4)) = \rho(z_1, z_2, z_3, z_4)$.

9 - Montrer qu'une homographie est une transformation conforme c'est-à-dire elle préserve les angles (entre courbes différentiables).

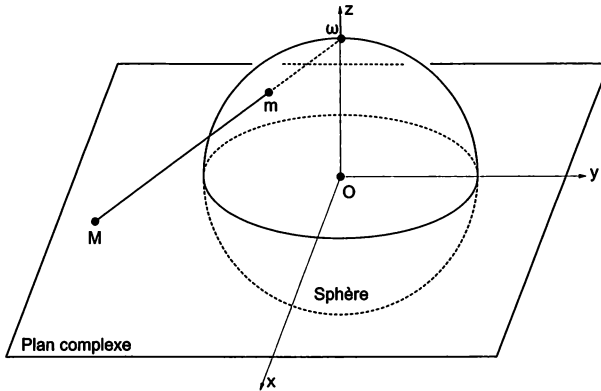


Fig. 5.1

L'application ψ de la sphère unité $\mathbb{S}^2$ de l'espace $\mathbb{R}^3$ privée du point ω sur le plan complexe $\mathbb{C}$ définie par $\psi(x, y, z) = \frac{x}{1-z} + i\frac{y}{1-z}$ est une bijection. Quand m se rapproche de plus en plus du point ω , le point M est rejeté à l'infini dans le plan complexe. Ainsi $\hat{\mathbb{C}}$ s'identifie à la sphère $\mathbb{S}^2$, ce qui justifie l'appellation **sphère de Riemann** pour $\hat{\mathbb{C}}$. L'application ψ s'appelle **projection stéréographique**.

Corrigé

On peut remarquer d'abord que si $ad - bc = 0$, la quantité $\frac{az+b}{cz+d}$ est constante ; h n'est pas une "vraie transformation". On supposera donc dans ce qui suit que $ad - bc \neq 0$.

1 - On suppose $c = 0$. Bien entendu $d \neq 0$ et $a \neq 0$ (puisque $ad - bc \neq 0$) ; h s'écrit alors $h(z) = \alpha z + \beta$ avec $\alpha = \frac{a}{d}$ et $\beta = \frac{b}{d}$. On voit clairement que $\omega_\infty = \infty$ est un point fixe de h . Voyons s'il en existe un autre ω_0 ; si tel est le cas, il doit vérifier $\alpha\omega_0 + \beta = \omega_0$. Si $\alpha = 1$, h est une translation si $\beta \neq 0$, donc pas de point fixe et l'identité si $\beta = 0$ donc tout point est fixe. Si $\alpha \neq 1$, h admet $\omega_0 = \frac{\beta}{1-\alpha}$ comme point fixe dans $\mathbb{C}$.

Regardons la décomposition de h en transformations élémentaires bien connues. En posant $\rho = |\alpha|$ et $\theta = \arg(\alpha)$, on voit clairement qu'on passe de z à $z' = h(z)$ par la suite de transformations :

$$z \mapsto z_1 = \rho z \mapsto z_2 = \rho e^{i\theta} z_1 = \alpha z \mapsto z_3 = z_2 + \beta = \alpha z + \beta = z'.$$

La transformation h s'écrit donc $h = \tau_\beta \circ r(0, \theta) \circ h(0, \rho)$ où $h(0, \rho)$ est l'homothétie de centre 0 et de rapport ρ , $r(0, \theta)$ la rotation de centre 0 et d'angle θ et τ_β la translation de vecteur β . L'homographie h est donc une *similitude directe*.

2 - Comme on suppose $c \neq 0$, on peut écrire :

$$\begin{aligned} h(z) &= \frac{az+b}{cz+d} \\ &= \frac{\frac{a}{c}(cz+d) + b - \frac{ad}{c}}{cz+d} \\ &= \frac{a}{c} + \frac{\frac{bc-ad}{c}}{cz+d} \\ &= \alpha + \frac{\beta}{cz+d} \end{aligned}$$

avec $\alpha = \frac{a}{c}$ et $\beta = \frac{bc-ad}{c}$. On pose $Z = cz + d$ et on note s la similitude directe qui à z associe Z . On a la décomposition qui suit :

$$z \mapsto Z = cz + d \mapsto z_1 = \frac{1}{Z} \mapsto z_2 = \bar{z}_1 = \frac{1}{\bar{Z}} \mapsto z_3 = \beta z_2 = \frac{\beta}{\bar{Z}} \mapsto \alpha + z_3 = \alpha + \frac{\beta}{Z}.$$

D'où $h = \tau_\alpha \circ r(0, \eta) \circ h(0, |\beta|) \circ s_{0x} \circ I(0, 1) \circ s$ où τ_α est la translation de vecteur α , s_{0x} est la réflexion par rapport à l'axe $(0x)$, $h(0, |\beta|)$ l'homothétie de centre 0 et de rapport $|\beta|$, $r(0, \eta)$ la rotation de centre O et d'angle $\eta = \arg(\beta)$ et $I(0, 1)$ l'inversion de pôle 0 et de puissance 1.

3 - Soient $h_1(z) = \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1}$ et $h_2(z) = \frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2}$ deux homographies. Un calcul simple donne :

$$h_2 \circ h_1(z) = \frac{(a_2 a_1 + b_2 c_1)z + (a_2 b_1 + b_2 d_1)}{(c_2 a_1 + d_2 c_1)z + (c_2 b_1 + d_2 d_1)}$$

qui montre bien que $h_2 \circ h_1$ est une homographie. L'élément neutre est l'identité donnée par $a = d = 1$ et $b = c = 0$ ou $a = d = -1$ et $b = c = 0$. Toute homographie $h(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ est inversible et a pour inverse $h^{-1}(z) = \frac{dz-b}{-cz+a}$. Ainsi l'ensemble $\mathcal{H}$ des homographies muni de la composition des applications est un groupe. Il n'est pas commutatif car, si on prend $h_1(z) = z + 1$ et $h_2(z) = \frac{1}{z}$, on a $h_1 \circ h_2(z) = \frac{z+1}{z}$ alors que $h_2 \circ h_1(z) = \frac{1}{z+1}$.

4 - Soit $h(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ une homographie qui n'est pas l'identité. Un point fixe de h vérifie $z = \frac{az+b}{cz+d}$.

- Si $c = 0$, on sait que h a un seul point fixe $= \infty$ si $\frac{a}{d} = 1$ et deux points fixes ∞ et $\frac{1}{1-\frac{a}{d}}$ si $\frac{a}{d} \neq 1$. Donc au plus deux points fixes.

- Supposons $c \neq 0$. Alors ∞ n'est pas un point fixe de h et $z \in \mathbb{C}$ en est un si, et seulement si, $cz^2 + (d-a)z - b = 0$. On résout cette équation en calculant le discriminant $\Delta = (a+d)^2 - 4(ad-bc) = (a+d)^2 - 4$.

- Si $\Delta = 0$, cette équation a une solution double, c'est-à-dire h a un seul point fixe.

- Si $\Delta \neq 0$, l'équation a deux solutions distinctes c'est-à-dire h a deux points fixes différents.

Aussi bien dans le cas $c = 0$ que $c \neq 0$, si h a trois points fixes distincts dans $\widehat{\mathbb{C}}$ (l'un de ces points peut très bien être ∞), h est l'identité. Par suite deux homographies qui coïncident sur trois points distincts sont égales.

5 - Par définition même, toute homographie $h(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ est définie par la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. On a donc une application $\Theta : A \in \text{SL}(2, \mathbb{C}) \mapsto h_A \in \mathcal{H}$. En utilisant la question 3, on montre facilement que Θ est un morphisme de groupes (et il est surjectif puisque toute homographie est associée à une matrice de $\text{SL}(2, \mathbb{C})$). Son noyau est constitué de toutes les matrices $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telles que, pour tout $z \in \widehat{\mathbb{C}}$, on ait $\frac{az+b}{cz+d} = z$ c'est-à-dire $cz^2 + (d-a)z - b = 0$. Ce qui implique $b = c = 0$ et $a = d$. Mais comme $ad = 1$ (car $ad - bc = 1$) on doit avoir $a = d = 1$ ou $a = d = -1$. Le noyau de Θ est constitué donc des deux matrices :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Comme $\ker \Theta = \{I, -I\}$ est un sous-groupe normal de $\text{SL}(2, \mathbb{C})$, le quotient de $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ par le sous-groupe $\{I, -I\}$ est un groupe noté $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$. On a donc un isomorphisme :

$$\Theta : \text{PSL}(2, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{H}$$

qui à tout élément de $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$ représenté par une matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ associe l'homographie $h(z) = \frac{az+b}{cz+d}$.

6 - On se donne $z_1, z_2, z_3 \in \widehat{\mathbb{C}}$ distincts deux à deux. On sait que la transformation qu'on cherche est de la forme $h(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ et qu'elle doit être telle que :

$$\begin{cases} h(z_1) = \infty \\ h(z_2) = 0 \\ h(z_3) = 1. \end{cases}$$

On suppose d'abord qu'aucun des z_1, z_2, z_3 n'est ∞ . Trois petites feintes alors : pour envoyer z_1 sur ∞ , on se débrouille pour que $(z - z_1)$ soit un facteur au dénominateur. De même, pour envoyer z_2 sur 0, on se débrouille pour que $(z - z_2)$ soit un facteur au numérateur. A priori l'homographie $\alpha \frac{z - z_2}{z - z_1}$ (où α est une constante complexe non nulle) fait le travail. Pour que finalement cette homographie envoie z_3 sur 1, il suffit de prendre $\alpha = \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}$. Ainsi notre homographie cherchée est :

$$h(z) = \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} : \frac{z - z_1}{z - z_2}.$$

Elle est unique d'après la question 4. On remarque que cette expression convient aussi même si l'un des z_1, z_2, z_3 est ∞ . Plus précisément, on prend :

- $h(z) = \frac{z - z_2}{z_3 - z_2}$ si $z_1 = \infty$;
- $h(z) = \frac{z_3 - z_1}{z - z_1}$ si $z_2 = \infty$;
- $h(z) = \frac{z - z_2}{z - z_1}$ si $z_3 = \infty$.

7 - Soient $z_1, z_2, z_3 \in \widehat{\mathbb{C}}$ distincts deux à deux et $z'_1, z'_2, z'_3 \in \widehat{\mathbb{C}}$ distincts deux à deux. D'après ce qui précède il existe une unique homographie h telle que :

$$\begin{cases} h(z_1) = \infty \\ h(z_2) = 0 \\ h(z_3) = 1 \end{cases}$$

et une unique homographie h' telle que :

$$\begin{cases} h'(z'_1) = \infty \\ h'(z'_2) = 0 \\ h'(z'_3) = 1. \end{cases}$$

Alors $\phi = h'^{-1} \circ h$ est l'unique homographie telle que :

$$\begin{cases} \phi(z_1) = z'_1 \\ \phi(z_2) = z'_2 \\ \phi(z_3) = z'_3. \end{cases}$$

L'action du groupe $\mathcal{H}$ sur la sphère de Riemann $\widehat{\mathbb{C}}$ est donc 3-transitive.

8 - Il existe une et une seule homographie h telle que $h(z_1) = \infty$, $h(z_2) = 0$ et $h(z_3) = 1$; elle est donnée dans la question 6 par $h(z) = \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} : \frac{z - z_1}{z - z_2}$. On voit donc tout de suite que :

$$\rho(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} : \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2} = h(z_4).$$

Soit ϕ une homographie. Il existe une unique homographie g telle que :

$$\begin{cases} g(\phi(z_1)) = \infty \\ g(\phi(z_2)) = 0 \\ g(\phi(z_3)) = 1. \end{cases}$$

Elle vérifie aussi :

$$\rho(\phi(z_1), \phi(z_2), \phi(z_3), \phi(z_4)) = g(\phi(z_4)).$$

On voit que $g \circ \phi$ et h coïncident sur les trois points distincts deux à deux z_1, z_2, z_3 , donc elles sont égales. En particulier $g(\phi(z_4)) = h(z_4)$, c'est-à-dire :

$$\rho(\phi(z_1), \phi(z_2), \phi(z_3), \phi(z_4)) = \rho(z_1, z_2, z_3, z_4).$$

qui montre bien que le birapport se conserve par toute homographie.

9 - Cette question est laissée au lecteur. Il prendra lui-même l'initiative de l'attaquer comme il le souhaite. Elle est très instructive et il est conseillé de ne pas la zapper !

Parabole

Soit $(\mathcal{P}, \vec{\mathcal{V}})$ un plan affine euclidien. Si M et N sont deux points de $\mathcal{P}$, la norme $||\overrightarrow{MN}||$ du vecteur $\overrightarrow{MN}$ sera notée simplement MN (c'est la longueur du segment $[MN]$).

1. Préliminaires

Soient Δ une droite et F un point non situé sur Δ . On cherche à étudier l'ensemble $\mathcal{B}$ des points M de $\mathcal{P}$ équidistants de F et Δ c'est-à-dire si H est la projection orthogonale de M sur Δ , alors $MH = MF$. Soit h la projection orthogonale de F sur Δ .

1 - Montrer que l'ensemble $\mathcal{B}$ est non vide et donner un procédé de construction de ses points. Montrer que $\mathcal{B}$ possède un axe de symétrie.

2 - On choisit un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ de telle sorte que O soit le milieu du segment $[hF]$ et que le vecteur $\vec{i}$ soit porté par Δ ; on note p la mesure $\overline{hF}$, qui fait donc que F a pour coordonnées $(0, \frac{p}{2})$. Donner l'équation cartésienne de l'ensemble $\mathcal{B}$ et montrer que c'est une courbe qui admet une tangente en chacun de ses points.

On dira que $\mathcal{B}$ est la *parabole* de *directrice* Δ et de *foyer* F . Le nombre p est appelé *paramètre* de la parabole.

2. Quelques propriétés géométriques

Soient Δ une droite et F un point extérieur à Δ . On note $\mathcal{B}$ la parabole de directrice Δ et de foyer F .

3 - Montrer que $\mathcal{B}$ est l'ensemble des centres M des cercles Γ tangents à Δ et passant par F .

4 - Montrer que la droite tangente à $\mathcal{P}$ en un point $M_0 \in \mathcal{B}$ est la bissectrice de l'angle $\widehat{FM_0H_0}$ où H_0 est la projection orthogonale de M_0 sur Δ .

5 - Soit A un point non situé sur $\mathcal{B}$. Construire les tangentes à $\mathcal{B}$ passant par A .

3. Exercice

Soient $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et de rayon ρ et Δ une droite qui ne coupe pas $\mathcal{C}$.

1 - Soit Γ un cercle de centre ω variant mais de telle sorte qu'il reste constamment tangent à la fois à $\mathcal{C}$ et Δ respectivement en K et L (ces points varient quand Γ varie). Montrer que la droite (KL) passe par le pôle de l'une des inversions qui transforment $\mathcal{C}$ en Δ .

2 - Montrer que l'ensemble où varie ω est constitué de deux paraboles de même foyer F . Déterminer leurs directrices respectives.

Corrigé

1. Préliminaires

1 - Si h est la projection orthogonale de F sur la droite Δ , il est clair que le milieu O du segment $[Fh]$ est sur l'ensemble $\mathcal{B}$ qui est donc non vide.

Soit H (distinct de h) un point quelconque de Δ . La droite orthogonale à Δ et passant par H coupe la médiatrice du segment $[HF]$ en un point M qui vérifie forcément : $\text{distance}(M, \Delta) = MH = MF$.

De façon évidente, si $M \in \mathcal{B}$, son symétrique par rapport à la droite (hF) est aussi sur $\mathcal{B}$; $\mathcal{B}$ possède donc la droite (hF) comme axe de symétrie.

2 - On note (x, y) les coordonnées d'un point du plan $\mathcal{P}$ par rapport au repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Un point $M = (x, y)$ est sur $\mathcal{P}$ si, et seulement si, on a l'égalité $||\vec{FM}|| = ||\vec{HM}||$ c'est-à-dire $x^2 + (y - \frac{p}{2})^2 = (y + \frac{p}{2})^2$ qui donne, après calcul et simplification $y = \frac{x^2}{2p}$. La parabole est donc le graphe d'une fonction polynôme du second degré dont l'étude est bien connue !

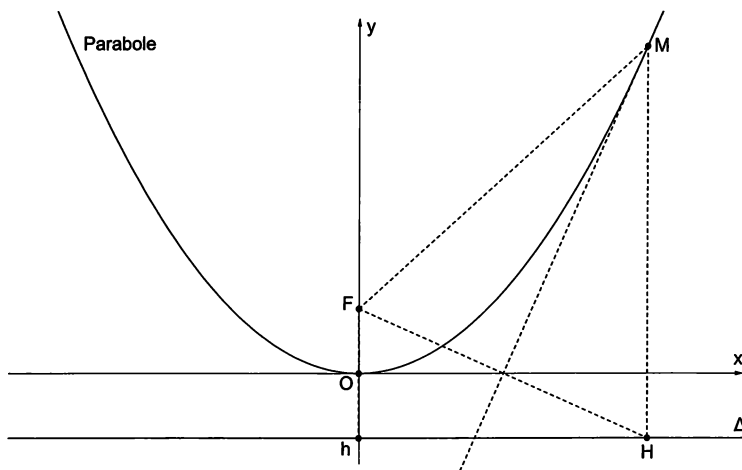


Fig. 6.1

2. Quelques propriétés géométriques

3 - La parabole $\mathcal{B}$ de directrice Δ et de foyer F est l'ensemble des points M du plan $\mathcal{P}$ tels que $MH = MF$ où H est la projection orthogonale de M sur Δ . Le cercle Γ de centre M et passant par F est donc tangent à Δ . Inversement, tout cercle qui possède cette propriété a son centre sur $\mathcal{B}$. Une parabole de directrice Δ et de foyer $F \notin \Delta$ est donc l'ensemble des centres des cercles tangents à Δ et passant F .

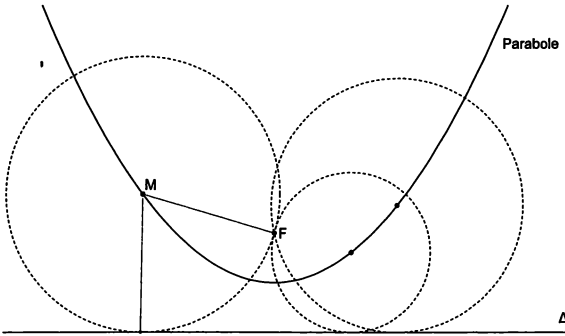


Fig. 6.2

4 - Soient M_0 un point fixé sur $\mathcal{B}$ et M un point variable sur $\mathcal{B}$. La tangente à la courbe $\mathcal{B}$ en M_0 (on sait qu'elle existe) est la limite, quand M tend vers M_0 , de la droite (MM_0) . Soient H_0 et H les projections orthogonales sur Δ respectivement des points M_0 et M . Les points M_0 et M sont les centres des cercles Γ_0 et Γ passant par F et tangents à Δ respectivement en H_0 et H . Soit K leur deuxième point d'intersection. La droite (FK) coupe Δ au milieu I du segment $[HH_0]$ et (MM_0) est médiatrice du segment $[FK]$. Quand M tend vers H_0 , H tend vers H_0 et, par suite, les points I et K tendent aussi vers H_0 . La droite (MM_0) tend alors vers la médiatrice du segment $[FH_0]$. Comme le triangle FM_0H_0 est isocèle de base FH_0 , cette médiatrice limite (qui est la tangente en M_0 à $\mathcal{B}$) est aussi la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{FM_0H_0}$.

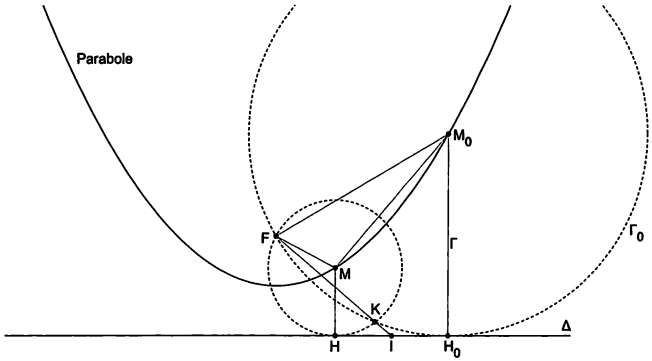


Fig. 6.3

5 - Commençons par une petite remarque. Le complémentaire $\mathcal{L}$ de la parabole $\mathcal{B}$ est constitué de deux parties ouvertes $\mathcal{L}_+$ et $\mathcal{L}_-$ disjointes ; on peut le voir comme suit. Si on suppose que $\mathcal{B}$ a pour équation $y = \alpha x^2$ (dans le repère que nous avons déjà utilisé et qui identifie $\mathcal{P}$ à $\mathbb{R}^2$), l'application :

$$\phi : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) : y = 0\} \longmapsto (x, \alpha x^2 + y) \in \mathcal{L}$$

est bijective, continue et d'inverse $\phi^{-1}(X, Y) = (X, -\alpha X^2 + Y)$ continue, donc ϕ est un homéomorphisme. Il est alors facile de voir qu'un point M du plan est sur $\mathcal{L}_+ \cup \mathcal{B}$ si, et seulement si, la distance de M à Δ est inférieure ou égale à MF .

On suppose qu'une droite (T) tangente à $\mathcal{B}$ en un point M et passant par A est construite. Alors, d'après ce qu'on a vu à la question 4, le triangle HMF (H étant la projection orthogonale de M sur Δ) est isocèle de base HF et (T) est médiatrice du segment $[HF]$ (les symétriques du foyer F par rapport aux différentes tangentes sont donc les points de Δ). Pour construire les tangentes à $\mathcal{B}$ passant par A , il suffit donc d'avoir les points de contact $M \in \mathcal{B}$; ils ont leurs projetés sur Δ situés sur le cercle de centre A et passant par F ; il y en a deux en général et ils existent si, et seulement si, $A \in \mathcal{L}_+ \cup \mathcal{B}$.

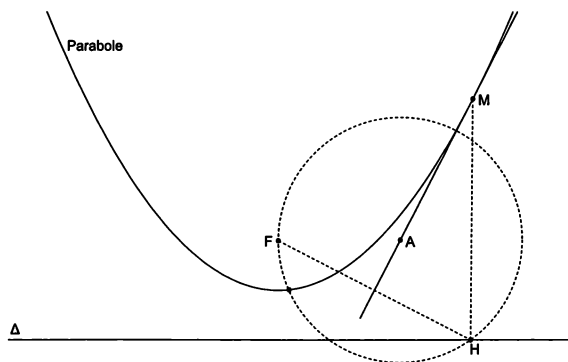


Fig. 6.4

3. Exercice

On traite seulement le cas où $\mathcal{C}$ et Γ sont tangents extérieurement, celui où ils le sont intérieurement est laissé au lecteur.

1 - Le point de tangence K est le centre de l'homothétie négative h qui envoie le cercle Γ sur le cercle $\mathcal{C}$. L'homothétie h envoie ω sur O et L sur un point Ω qui est sur Γ mais aussi sur la droite passant par O et parallèle à (ωL) , donc la droite $(O\Omega)$ est perpendiculaire à (D) ; par suite Ω est bien le pôle de l'inversion positive qui envoie $\mathcal{C}$ sur (D) .

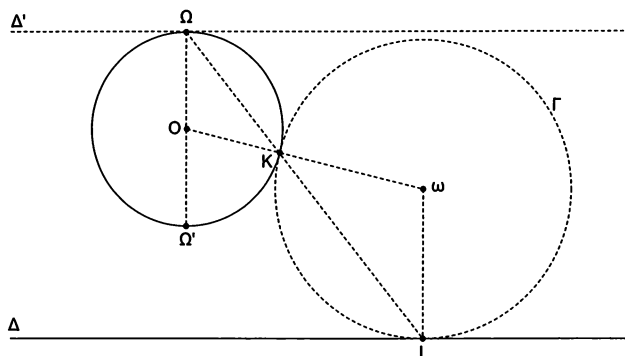


Fig. 6.5

2 - Soit Δ'' la droite parallèle à Δ et telle que sa distance à O soit $d(O, \Delta) + \rho$.
On a alors de façon immédiate :

$$\begin{aligned}\omega O &= \omega K + KO \\ &= \omega L + LL' \\ &= \text{distance}(\omega, \Delta'').\end{aligned}$$

Donc le point ω est le centre du cercle Γ' passant par O et tangent à Δ'' . Il varie donc sur la parabole de foyer O et de directrice Δ'' .

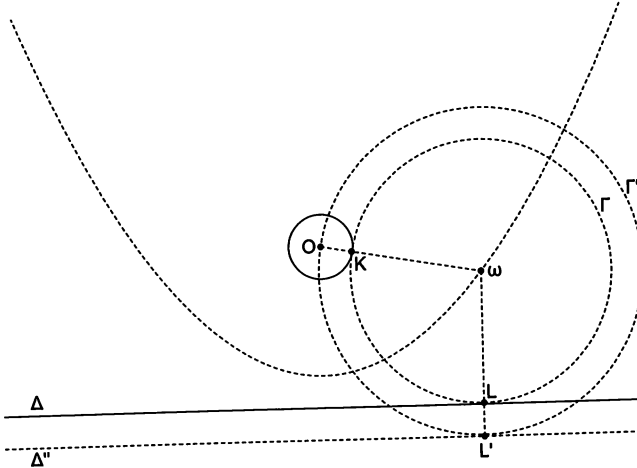


Fig. 6.6

Ellipse

Dans toute la suite $(\mathcal{P}, \vec{V})$ sera un plan affine euclidien. Pour simplifier la norme d'un vecteur $\overrightarrow{MN}$ sera notée simplement MN .

1. Préliminaires

Soient F et F' deux points de $\mathcal{P}$ tels que $FF' = 2c > 0$ et a un nombre réel tel que $a > c$. On cherche à étudier l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M de $\mathcal{P}$ tels que :

$$MF + MF' = 2a.$$

1 - Montrer que l'ensemble $\mathcal{E}$ est non vide et donner un procédé de construction de ses points. Montrer que $\mathcal{E}$ possède la droite (FF') et sa médiatrice comme axes de symétrie ; leur intersection O est centre de symétrie de $\mathcal{E}$. On dira que (FF') est l'*axe focal* de $\mathcal{E}$.

L'ensemble $\mathcal{E}$ est l'*ellipse* de foyers F et F' et de *grand axe* $2a$.

2 - On choisit un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ de telle sorte que le vecteur $\vec{i}$ soit porté par la droite (FF') . Donner l'équation cartésienne de l'ensemble $\mathcal{E}$ et montrer que c'est une courbe qui admet une tangente en chacun de ses points. Le cercle de centre O et de rayon a s'appelle *cercle principal* de l'ellipse $\mathcal{E}$.

2. Quelques propriétés géométriques

Soit $\mathcal{E}$ l'ellipse de foyers F et F' et de grand axe $2a$.

3 - Montrer que $\mathcal{E}$ est l'ensemble des centres M des cercles passant par F et tangents intérieurement au cercle $\mathcal{C}$ de centre F' et de rayon $2a$ qu'on appelle *cercle directeur* de l'ellipse $\mathcal{E}$ relativement au foyer F' .

4 - Montrer que la droite tangente à $\mathcal{E}$ en un point $M_0 \in \mathcal{E}$ est la bissectrice extérieure de l'angle $\widehat{FM_0F'}$.

5 - Montrer que $\mathcal{E}$ est toujours la transformée de son cercle principal par une affinité orthogonale dont on déterminera l'axe et le rapport. (Pour la définition et l'étude d'une *affinité*, voir Exercice 6 de la partie *Exercices en vrac*.)

6 - Soit A un point non situé sur $\mathcal{E}$ et qui lui est extérieur. Construire les tangentes à $\mathcal{E}$ passant par A .

7 - Donner une méthode géométrique de construction point par point de l'ellipse d'équation :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

(Pour répondre à cette question, il faudrait montrer que l'ellipse en question est la transformée d'un cercle par une transformation affine simple que l'on déterminera de façon explicite.)

3. Problème

On se donne deux droites Δ et Δ' se coupant orthogonalement en un point O . On prend deux points A et B variant respectivement sur les droites Δ et Δ' mais de telle sorte que la distance de A à B reste constante (strictement positive). On prend un point M sur le segment $[AB]$ dont la distance à A (et donc à B aussi) reste constante.

Où varie M quand les points A et B varient ? (Utiliser les questions 5 et 7.)

Corrigé

1. Préliminaires

1 - On trace deux cercles Γ et Γ' de centres respectifs F et F' et de rayons respectifs ρ et ρ' tels que $\rho + \rho' = 2a$. Alors Γ et Γ' se coupent (car la somme des rayons est supérieure à la distance entre les centres) en deux points M et M' qui vérifient $MF + MF' = 2a$ et $M'F + M'F' = 2a$. Ceci prouve que l'ensemble $\mathcal{E}$ est non vide, donne un procédé de construction de ses points et montre que la droite (FF') en est un axe de symétrie. Le fait que la médiatrice Δ du segment $[FF']$ soit aussi axe de symétrie est immédiat. Il en découle que le milieu O de $[FF']$ est centre de symétrie de $\mathcal{E}$.

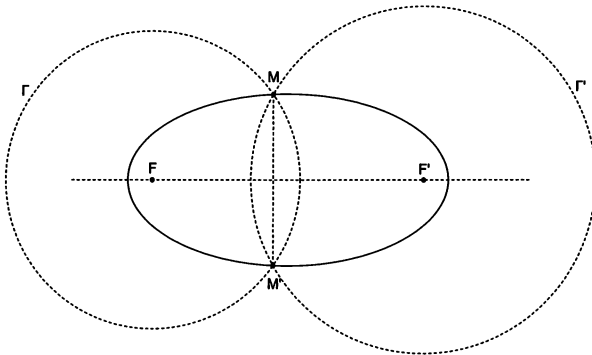


Fig. 7.1

2 - Dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, les points F et F' ont pour coordonnées respectives $(c, 0)$ et $(-c, 0)$. Soit M un point du plan de coordonnées (x, y) . Sa projection orthogonale M_0 sur la droite (FF') a pour coordonnées $(x, 0)$. Par le théorème de Pythagore, on a :

$$MF^2 = MM_0^2 + M_0F^2 \quad \text{et} \quad MF'^2 = MM_0^2 + M_0F'^2.$$

En faisant la différence membre à membre, on obtient :

$$MF^2 - MF'^2 = \overline{M_0F}^2 - \overline{M_0F'}^2 = (\overline{M_0F} + \overline{M_0F'}) \cdot (\overline{M_0F} - \overline{M_0F'}) = -4cx$$

qui donne $(MF - MF') \cdot (MF + MF') = -4cx$. On a $MF + MF' = 2a$ si en plus $M \in \mathcal{E}$. On déduit alors de ce qui précède que $MF - MF' = -2\frac{c}{a}x$. Les deux égalités $MF + MF' = 2a$ et $MF - MF' = -2\frac{c}{a}x$ nous donnent $MF = a - \frac{c}{a}x$. On a donc :

$$MF^2 = \left(a - \frac{c}{a}x\right)^2 = (x - c)^2 + y^2$$

et, en tenant compte du fait que $a^2 = b^2 + c^2$, on obtient l'équation :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Cette équation montre que l'ellipse $\mathcal{E}$ a pour représentation paramétrique $x(t) = a \cos t$ et $y(t) = b \sin t$ avec $t \in \mathbb{R}$; c'est donc une courbe de classe C^∞ qui admet en

tout point comme vecteur tangent celui ayant pour composantes $x'(t) = -a \sin t$ et $y'(t) = b \cos t$; il est donc partout non nul et par suite $\mathcal{E}$ a une tangente en tout point.

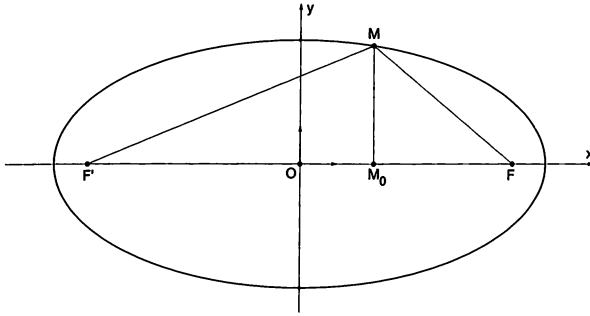


Fig. 7.2

2. Quelques propriétés géométriques

3 - Soit M le centre d'un cercle Γ passant par F et tangent intérieurement au cercle $\mathcal{C}$ en un point φ . On a alors $F'M + M\varphi = 2a$; comme $M\varphi = MF$, on a $MF + MF' = 2a$ qui montre que M est sur l'ellipse $\mathcal{E}$. Inversement, soit M un point de l'ellipse $\mathcal{E}$. Soit φ le point de rencontre de la droite $(F'M)$ et du cercle $\mathcal{C}$. Alors des deux égalités $MF + MF' = 2a$ et $MF' + M\varphi = 2a$, on déduit $MF = M\varphi$ qui montre bien que $M\varphi = MF$. Le point M est donc le centre du cercle passant par F et tangent intérieurement à $\mathcal{C}$.

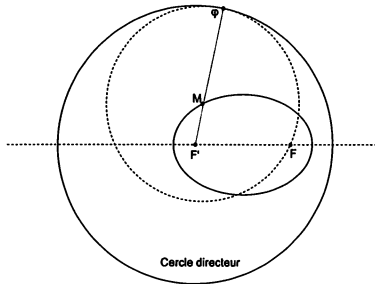


Fig. 7.3

4 - Soient M_0 un point fixé sur $\mathcal{E}$ et M un point variable sur $\mathcal{E}$. La tangente à la courbe $\mathcal{E}$ en M_0 (on sait qu'elle existe) est la limite, quand M tend vers M_0 , de la droite (MM_0) . Les points M_0 et M sont les centres respectifs de deux cercles Γ_0 et Γ passant par F et tangents au cercle $\mathcal{C}$ respectivement en φ_0 et φ . Les deux cercles Γ_0 et Γ se recoupent en un autre point F_1 ; la droite (FF_1) en est leur axe radical et passe par le centre radical I des trois cercles Γ_0 , Γ et $\mathcal{C}$; on a alors $I\varphi = I\varphi_0$. Le point I est donc sur la bissectrice intérieure de l'angle $\varphi_0 F' \varphi$. Quand M tend vers M_0 , I tend vers φ_0 et la droite $(F'I)$ tend vers $(F'\varphi_0)$. La droite (MM_0) est médiatrice du segment $[FF_1]$ et tend donc vers la médiatrice de $[F\varphi_0]$ qui est aussi la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{FM_0\varphi_0}$ donc la bissectrice extérieure de l'angle $\widehat{FM_0F'}$.

M'_1 et M'_2 à la droite (FF') coupent l'ellipse respectivement en M_1 et M_2 qui sont les images respectives de M'_1 et M'_2 par γ . Il est alors facile de voir que les tangentes issues de A à l'ellipse ne sont rien d'autres que les droites (AM_1) et (AM_2) .

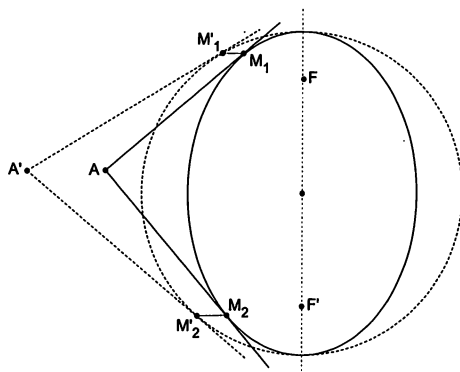


Fig. 7.6

7 - Notons Γ_1 le cercle principal de l'ellipse (il était noté C précédemment) et Γ_2 le cercle d'équation $x^2 + y^2 = b^2$; Γ_2 est tangent intérieurement à l'ellipse aux points de coordonnées respectives $(0, b)$ et $(0, -b)$. Par la question 5, l'ellipse s'obtient à partir de Γ_1 par l'affinité orthogonale d'axe l'axe des abscisses et de rapport $\frac{b}{a}$; les coordonnées (x, y) de M sont données en fonction de celles de M_1 par $x = x_1$ et $y = \frac{b}{a}y_1$. Il est aussi facile de voir que le cercle Γ_2 s'obtient à partir de l'ellipse par l'affinité orthogonale d'axe l'axe des ordonnées et de rapport $\frac{b}{a}$; les coordonnées (x_2, y_2) de M_2 sont données en fonction de celles de M par $x_2 = \frac{b}{a}x$ et $y_2 = y$. Ceci montre que $x_2 = \frac{b}{a}x_1$ et $y_2 = \frac{b}{a}y_1$ et donc que M_2 est le transformé de M_1 par l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{b}{a}$.

Pour construire le point M de l'ellipse en question, il suffit de tracer les deux cercles Γ_1 (principal) et le cercle Γ_2 , prendre un rayon qui coupe ces deux cercles respectivement en M_1 et M_2 ; le point M est alors l'intersection de la droite verticale passant par M_1 et la droite horizontale passant par M_2 .

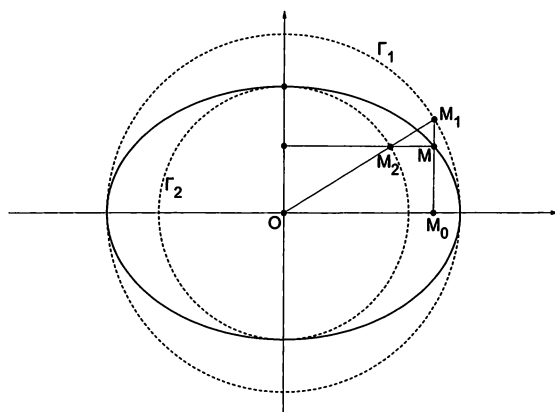


Fig. 7.7

3. Exercice

Posons $a = MA$ et $b = MB$; la distance entre A et B est donc $\ell = a + b$. Lorsque le point A est sur l'origine O , le point M a pour coordonnées $(a, 0)$ et lorsque B est sur O le point M a pour coordonnées $(0, b)$. Notons M_0 la projection orthogonale de M sur Δ' (représentée horizontalement) et M_1 l'intersection de la parallèle à (OA) passant M et la parallèle à (AB) passant par O . Il est alors facile de voir que le point M s'obtient toujours à partir de M_1 par l'affinité orthogonale d'axe Δ' et de rapport $-\frac{b}{a}$. Comme on a toujours $OM_1 = a$, M_1 varie sur le cercle de centre O et de rayon a , donc M varie sur l'ellipse de centre O de grand axe a et de petit axe b .

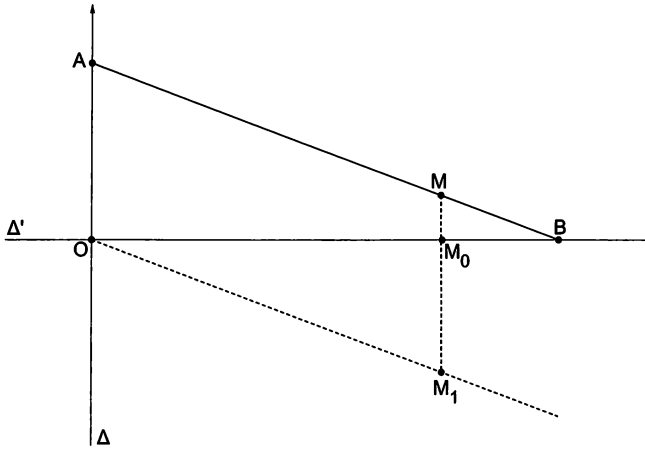


Fig. 7.8

Hyperbole

Dans toute la suite $(\mathcal{P}, \vec{V})$ sera un plan affine euclidien.

1. Définition

Soient F et F' deux points de $\mathcal{P}$ tels que $FF' = 2c > 0$, a un nombre réel tel que $a < c$ et $b = \sqrt{c^2 - a^2}$. On cherche à étudier l'ensemble $\mathcal{H}$ des points M de $\mathcal{P}$ tels que $|MF - MF'| = 2a$.

1 - Montrer que l'ensemble $\mathcal{H}$ est non vide et donner un procédé de construction de ses points. Montrer que $\mathcal{H}$ possède la droite (FF') et sa médiatrice comme axes de symétrie ; leur intersection O est centre de symétrie de $\mathcal{H}$. On dira que (FF') est l'*axe focal* de $\mathcal{H}$.

L'ensemble $\mathcal{H}$ est l'*hyperbole* de foyers F et F' et de paramètre $2a$.

On choisit un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ de telle sorte que le vecteur $\vec{i}$ soit porté par la droite (FF') .

2 - Donner l'équation cartésienne de l'ensemble $\mathcal{H}$ et montrer que c'est une courbe (non forcément connexe) qui admet une tangente en chacun de ses points.

3 - Montrer que $\mathcal{H}$ a deux composantes connexes $\mathcal{H}_+$ et $\mathcal{H}_-$ et qu'elle admet des asymptotes dont on déterminera explicitement les équations.

Lorsque les asymptotes sont orthogonales, l'hyperbole est dite *équilatère*.

4 - On choisit un nouveau repère normé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ (qui n'est pas forcément orthogonal si l'hyperbole n'est pas équilatère) où $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont portés respectivement par les asymptotes et de telle sorte que la branche $\mathcal{H}_+$ soit dans l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$. Déterminer l'équation cartésienne de $\mathcal{H}$ dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

2. Quelques propriétés géométriques

Soit $\mathcal{H}$ l'hyperbole de foyers F et F' et de paramètre $2a$.

5 - Montrer que $\mathcal{H}_+$ est l'ensemble des centres M des cercles passant par F et tangents extérieurement au cercle $\mathcal{C}$ de centre F' et de rayon $2a$ qu'on appelle *cercle directeur* de l'hyperbole $\mathcal{H}$ relativement au foyer F' .

6 - Montrer que la droite tangente à $\mathcal{H}$ en un point $M_0 \in \mathcal{H}$ est la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{FM_0F'}$.

Corrigé

1. Préliminaires

1 - On trace deux cercles Γ et Γ' de centres respectifs F et F' et de rayons respectifs ρ et ρ' tels que $|\rho - \rho'| = 2a$ et sécants en M et M' . Alors les deux points M et M' sont sur $\mathcal{H}$. L'ensemble $\mathcal{H}$ est donc non vide ; ceci donne aussi un procédé de construction de ses points et montre que la droite (FF') en est un axe de symétrie. Le fait que la méditrice Δ du segment $[FF']$ soit aussi axe de symétrie est immédiat. Il en découle que le milieu O de $[FF']$ est centre de symétrie de l'ensemble $\mathcal{H}$.

2 - Dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, les points F et F' ont pour coordonnées respectives $(c, 0)$ et $(-c, 0)$. Soit M un point du plan de coordonnées (x, y) . Sa projection orthogonale M_0 sur la droite (FF') a pour coordonnées $(x, 0)$. Par le théorème de Pythagore, on a :

$$MF^2 = MM_0^2 + M_0F^2 \quad \text{et} \quad MF'^2 = MM_0^2 + M_0F'^2.$$

En faisant la différence membre à membre, on obtient :

$$MF^2 - MF'^2 = \overline{M_0F}^2 - \overline{M_0F'}^2 = (\overline{M_0F} + \overline{M_0F'}) \cdot (\overline{M_0F} - \overline{M_0F'}) = -4cx$$

qui donne $(MF - MF') \cdot (MF + MF') = -4cx$. Supposons, pour fixer les idées, que $MF < MF'$; on a donc $MF - MF' = -2a$ si en plus $M \in \mathcal{H}$. On déduit alors de ce qui précède que $MF + MF' = 2\frac{c}{a}x$. Les deux égalités $MF - MF' = -2a$ et $MF + MF' = 2\frac{c}{a}x$ nous donnent $MF = \frac{c}{a}x - a$. On a donc :

$$MF^2 = \left(\frac{c}{a}x - a\right)^2 = (x - c)^2 + y^2$$

et, en tenant compte du fait que $c^2 = a^2 + b^2$, on obtient l'équation :

$$(**) \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Cette équation montre que l'hyperbole $\mathcal{H}$ a pour représentation paramétrique $x(t) = a \operatorname{ch}(t)$ et $y(t) = b \operatorname{sh}(t)$ pour $x > 0$ et $x(t) = -a \operatorname{ch}(t)$ et $y(t) = b \operatorname{sh}(t)$ pour $x < 0$ avec $t \in \mathbb{R}$; c'est donc une courbe C^∞ qui admet en tout point comme vecteur tangent celui ayant pour composantes $x'(t) = a \operatorname{sh}(t)$ et $y(t) = b \operatorname{ch}(t)$; il est donc partout non nul et par suite $\mathcal{H}$ a une tangente en tout point.

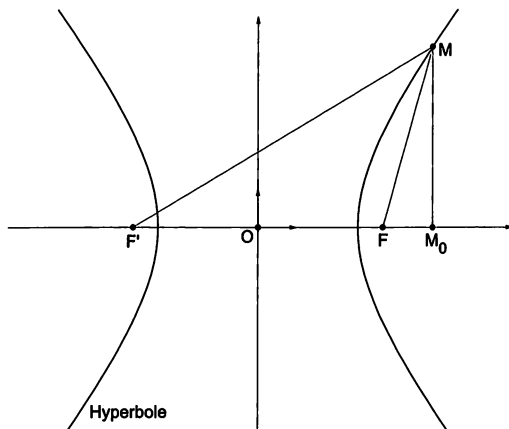


Fig. 8.1

3 - Comme on l'a déjà constaté, la méditrice du segment $[FF']$ (qui est aussi l'axe des ordonnées) est axe de symétrie de l'hyperbole $\mathcal{H}$ et ne l'intersecte pas ; $\mathcal{H}$ se trouve donc de part et d'autre de cet axe. Elle est constituée de deux courbes $\mathcal{H}_+$ et $\mathcal{H}_-$ qui sont les graphes respectifs des fonctions $f_+, f_- : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définies par :

$$x = f_+(y) = \frac{a}{b} \sqrt{y^2 + b^2} \quad \text{et} \quad x = f_-(y) = -\frac{a}{b} \sqrt{y^2 + b^2}.$$

L'étude (élémentaire) de ces deux fonctions montre l'existence de deux asymptotes Δ_+ et Δ_- ayant pour équations respectives $Y = \frac{b}{a}X$ et $Y = -\frac{b}{a}X$.

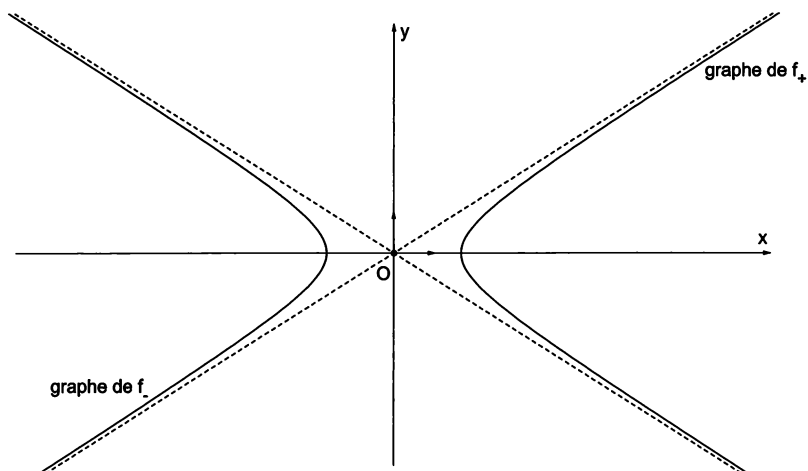


Fig. 8.2

4 - Soit $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$ la mesure de l'angle géométrique formé par la droite (FF') et l'asymptote Δ_+ . Il est tel que $\operatorname{tg} \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{b}{a}$. Dans cette situation on a :

$$\vec{u} = \cos \theta \vec{i} - \sin \theta \vec{j}$$

$$\vec{v} = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}.$$

Notons (X, Y) les coordonnées de M dans le nouveau repère ; un calcul très facile nous donne de façon immédiate :

$$x = (\cos \theta)(X + Y)$$

$$y = (\sin \theta)(Y - X).$$

Posons $\tau = \frac{a}{\cos \theta} = \frac{b}{\sin \theta}$. Alors en remplaçant dans l'équation (**) x et y par leurs expressions respectives en fonction de X et Y , on obtient l'équation :

$$(***) \quad XY = \frac{\tau^2}{4}.$$

2. Quelques propriétés géométriques

Cette partie se traite exactement de la même manière que pour le cas de l'ellipse. Il est cependant conseillé de ne pas l'omettre pour bien comprendre ce qui se passe !

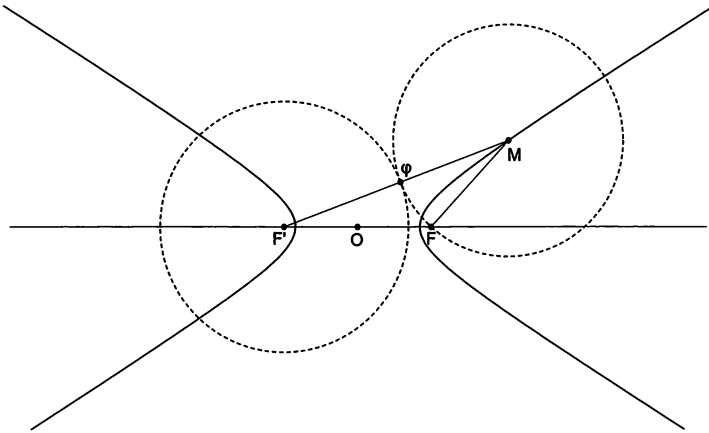


Fig. 8.3

EXERCICES RÉSOLUS

On désigne par $\vec{\mathcal{V}}$ le plan vectoriel. Lorsqu'on parlera de plan affine euclidien $\mathcal{P}$ dirigé par $\vec{\mathcal{V}}$, on sous-entendra qu'on a muni $\vec{\mathcal{V}}$ d'un produit scalaire qu'on notera $\langle , \rangle$ au besoin.

Exercice 1

On se donne un plan affine euclidien $(\vec{\mathcal{V}}, \mathcal{P}, \langle , \rangle)$ et on convient de noter MN la distance entre deux points M et N . On appelle *distance* entre deux droites Δ_1 et Δ_2 le nombre $d(\Delta_1, \Delta_2) = \inf\{M_1M_2 : M_1 \in \Delta_1 \text{ et } M_2 \in \Delta_2\}$.

1 - Montrer que si $d(\Delta_1, \Delta_2) > 0$ alors les deux droites Δ_1 et Δ_2 sont parallèles.

On se donne un segment $[AB]$ de longueur 1 et un segment $[CD]$ de longueur $k > 0$. (Ces deux segments permettront d'en construire d'autres de longueur 1 ou k .)

2 - Soit Δ une droite. Construire à la règle et au compas une droite Δ' telle que $d(\Delta, \Delta') = k$. (Détailler et justifier toutes les étapes de la construction.)

On se donne deux droites Δ_1 et Δ_2 se coupant en un point ω . Pour tout $M \in \mathcal{P}$, on note H_1 et H_2 ses projections orthogonales respectivement sur Δ_1 et Δ_2 .

3 - Décrire géométriquement l'ensemble $\Delta = \{M \in \mathcal{P} : MH_1 = kMH_2\}$ et le construire à la règle et au compas.

Exercice 2

On se donne un plan affine euclidien $(\vec{\mathcal{V}}, \mathcal{P}, \langle , \rangle)$ et un repère orthonormé $(O; \vec{u}_1, \vec{u}_2)$. On note Δ_0 et Δ_1 les droites d'équations respectives $x - y = 0$ et $x - y = 1$.

1 - Dire pourquoi Δ_0 et Δ_1 sont parallèles. On note τ la translation de vecteur $\vec{u}$ de norme minimale envoyant Δ_0 sur Δ_1 . Calculer les coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$.

Soient σ_0 et σ_1 les réflexions d'axes respectifs Δ_0 et Δ_1 . Si (x, y) sont les coordonnées d'un point M , (x_0, y_0) seront celles du point $M_0 = \sigma_0(M)$ et (x_1, y_1) celles du point $M_1 = \sigma_1(M)$.

2 - Calculer (x_0, y_0) en fonction de (x, y) . En déduire (x_1, y_1) en fonction de (x, y) . (Se rappeler que la composée de deux réflexions d'axes parallèles est une translation.)

3 - Soit $\mathcal{U}$ une droite affine d'équation $ax + by + c = 0$. Donner l'équation de sa transformée $\mathcal{U}_1$ par la réflexion σ_1 .

Exercice 3

Soit ABC un triangle (non plat) dans $\mathcal{P}$. Sur le segment $[BC]$ on prend un point M distinct de A et de B . Par B on mène la parallèle à la droite (AM) ; elle coupe (AC) en U . De même, par C on mène la parallèle à la droite (AM) ; elle coupe (AB) en V .

1 - Montrer que : $\frac{1}{BU} + \frac{1}{CV} = \frac{1}{AM}$.

2 - Deux poteaux verticaux de hauteurs respectives h_1 et h_2 sont plantés à une distance (strictement positive) l'un de l'autre. Une corde rectiligne joint le sommet du premier poteau au pied du second et une autre joint le sommet du second au pied du

premier. On note A le point d'intersection des deux cordes. Calculer la hauteur h de A . Donner sa valeur si $h_1 = 40m$ et $h_2 = 60m$.

Exercice 4

Soit $ABCD$ un trapèze convexe (qui n'est pas un parallélogramme) dans $\mathcal{P}$ dont les côtés parallèles sont AB et CD . On note I le point de rencontre des droites (AD) et (BC) et J celui des diagonales (AC) et (BD) . Soient M et N les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[CD]$.

1 - Montrer que les quatre points I, M, J, N sont alignés.

2 - Montrer que les points I et J sont *conjugués harmoniques* par rapport aux points M et N , c'est-à-dire qu'on a $\frac{IM}{IN} : \frac{JM}{JN} = -1$. (La notation $a : b$ signifie a divisé par b .)

Exercice 5

On note f l'application affine de $\mathcal{P}$ dans lui-même qui à tout point M de coordonnées (x, y) associe le point M' de coordonnées (x', y') données par :

$$(*) \quad \begin{cases} x' = x + 2y + 2 \\ y' = 2x + y - 2. \end{cases}$$

1 - Donner la direction $\vec{f}$ de f ainsi que la matrice A de $\vec{f}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$. Montrer que f n'est pas une isométrie du plan euclidien $\mathcal{P}$.

2 - Calculer les valeurs propres λ et μ ($\lambda \leq \mu$) de A et montrer qu'il existe une base $(\vec{u}, \vec{v})$ dans laquelle la matrice de $\vec{f}$ est diagonale.

3 - Montrer que f a un et un seul point fixe ; on le notera ω .

Notons (X, Y) les coordonnées d'un point M dans le nouveau repère $(\omega, \vec{u}, \vec{v})$ et (X', Y') celles de son transformé $M' = f(M)$.

4 - Sans utiliser les relations $(*)$, calculer (en justifiant bien entendu) les coordonnées (X', Y') en fonction de (X, Y) .

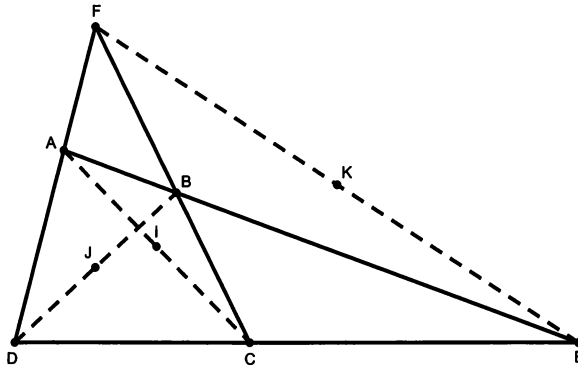
Exercice 6

Soient Γ et Γ' deux cercles se coupant en deux points A et B . Par A on mène une droite qui coupe Γ en un deuxième point M et Γ' en un deuxième point M' ; de même, par B on mène une droite qui coupe Γ en un deuxième point N et Γ' en un deuxième point N' .

Montrer que les droites (MN) et $(M'N')$ sont parallèles.

Exercice 7

Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe tel que les droites (AB) et (CD) se coupent en E et (AD) et (BC) se coupent en F (cf. figure). (On dira que $ABCD$ est un *quadrilatère complet*.) On note I, J et K les milieux respectifs des segments $[AC]$, $[BD]$ et $[EF]$. L'objet de l'exercice est de démontrer le Théorème de Newton : *les trois points I, J et K sont alignés*.



Soient G et H les points du plan tels que les quadrilatères $FDGB$ et $FAHC$ soient des parallélogrammes. Soient h l'homothétie de centre E qui envoie le point D sur C , h' l'homothétie de même centre qui envoie B sur A et $\phi = h \circ h'$.

1 - Montrer que ϕ transforme la droite (BG) en la droite (HC) .

2 - Quelle est l'image de la droite (DG) par ϕ ? En déduire le point $\phi(G)$.

3 - Montrer que les points E , G et H sont alignés.

4 - Soit f l'homothétie de centre F et de rapport $\frac{1}{2}$. Quelles sont les images respectives des points G et H par f ? En déduire le résultat (c'est-à-dire la conclusion du théorème de Newton).

Exercice 8

Dans un plan affine euclidien $(\vec{V}, \mathcal{P}, \langle, \rangle)$ on se donne un triangle ABC (avec A , B et C non alignés). Soient A' , B' et C' trois points respectivement sur les segments $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$. Soient Γ_1 le cercle circonscrit au triangle $AB'C'$, Γ_2 celui circonscrit au triangle $BA'C'$ et Γ_3 celui circonscrit au triangle $CA'B'$.

Montrer que les trois cercles Γ_1 , Γ_2 et Γ_3 se coupent en un même point ω .

Exercice 9

On se donne un demi-cercle Γ de diamètre AB . On choisit un point variable M sur Γ et on construit le carré $BMKL$ extérieur à Γ .

1 - Quel est le lieu géométrique décrit par le point L lorsque M décrit Γ ?

2 - Quel est le lieu géométrique décrit par le point K lorsque M décrit Γ ?

Exercice 10

On se donne trois droites Δ_1 , Δ_2 et Δ_3 parallèles et distinctes deux à deux.

1 - Construire un triangle équilatéral $\mathcal{T}_0 = M_1M_2M_3$ tel que $M_1 \in \Delta_1$, $M_2 \in \Delta_2$ et $M_3 \in \Delta_3$.

2 - Montrer comment, à partir de $\mathcal{T}_0$, on peut obtenir tous les autres triangles $\mathcal{T}$ répondant à la question. Peut-on voir l'ensemble de ces triangles $\mathcal{T}$ comme l'orbite de $\mathcal{T}_0$ sous l'action d'un sous-groupe G du groupe des isométries du plan $\mathcal{P}$?

Exercice 11

On se donne trois points non alignés A_1 , A_2 et A_3 du plan euclidien $\mathcal{P}$; ils en forment donc un repère affine.

Montrer que l'ensemble de toutes les transformations affines du plan qui laissent globalement invariant le triangle $T = A_1A_2A_3$ est un groupe G_T isomorphe au groupe symétrique $\mathfrak{S}_3$ des permutations de l'ensemble $\{1, 2, 3\}$.

Exercice 12

Sur le plan complexe épointé $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, on considère la transformation T qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par : $z' = T(z) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$.

1 - Construire géométriquement le point M' à partir du point M .

2 - Donner les coordonnées (x', y') du point M' en fonction du module r de z et de son argument θ .

3 - Quel est le lieu géométrique du point M' lorsque M varie sur le cercle de centre O et de rayon $\rho > 0$?

4 - Quel est le lieu géométrique du point M' lorsque M varie de telle sorte que θ (argument de z) reste constant ? (On se limitera au cas $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.)

Exercice 13

Soient ABC un triangle non dégénéré, O le centre du cercle Γ circonscrit, I le centre du cercle γ inscrit. On note ρ et r les rayons respectifs de Γ et γ et d la distance de O à I . Montrer que : $\rho^2 - d^2 = 2r\rho$. C'est la *relation d'Euler*. C'est aussi une version du *théorème de Poncelet* (*) pour un cercle.

Exercice 14

Dans $\mathcal{P}$ muni du repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère la transformation s qui au point M de coordonnées (x, y) associe le point M' de coordonnées $x' = x + \sqrt{3}y + 1$ et $y' = -\sqrt{3}x + y - 2$.

1 - Montrer que s est une application affine. Quelle est sa direction $\vec{s}$?

2 - Montrer que s est le produit d'une rotation r de centre O et dont on déterminera l'angle θ , d'une homothétie h de centre O et dont on déterminera le rapport k et d'une translation τ dont on déterminera le vecteur $\vec{u}$. Montrer que s a un point fixe unique ω que l'on déterminera.

3 - Donner l'expression de l'affixe $z' = x' + iy'$ du point M' en fonction de l'affixe $z = x + iy$ du point M .

Exercice 15

On se donne trois cercles Γ_1 , Γ_2 et Γ_3 concentriques et distincts deux à deux.

(*) Jean-Victor PONCELET : mathématicien et ingénieur français né en 1788 et mort en 1867. Il a été l'un des fondateurs de la géométrie projective.

1 - Construire un triangle équilatéral $T_0 = M_1M_2M_3$ tel que $M_1 \in \Gamma_1$, $M_2 \in \Gamma_2$ et $M_3 \in \Gamma_3$. (On précisera dans quelles conditions cette construction est possible.)

2 - Montrer comment, à partir de T_0 , on peut obtenir tous les autres triangles T répondant à la question. Peut-on voir l'ensemble de ces triangles T comme l'orbite de T_0 sous l'action d'un sous-groupe G du groupe des isométries du plan $\mathcal{P}$?

Exercice 16

Soit ABC un triangle non dégénéré (les trois points A , B et C ne sont pas alignés). On note M le milieu du côté BC . Montrer que :

$$AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + \frac{1}{2}BC^2.$$

Indication. *Penser à évaluer séparément les produits scalaires :*

$$\langle \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \rangle \quad \text{et} \quad \langle \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} \rangle.$$

Exercice 17

Soient Γ un cercle de centre O et de rayon ρ , A un point à l'intérieur de Γ à une distance a du centre O et B et C deux points sur Γ tels que le triangle ABC soit rectangle en A . On note M le milieu de BC .

1 - Montrer que $MO^2 + MA^2 = \rho^2$.

2 - On fait varier les points B et C sur le cercle Γ mais de façon à ce que le triangle ABC reste toujours rectangle en A . Où varie le point M ? (*Utiliser l'exercice 16.*)

Exercice 18

On note h l'application qui au point M d'affixe z du plan complexe $\mathbb{C}$ privé de $z_0 = 1$ associe le point M' d'affixe $z' = \frac{2z+1}{z-1}$. Quelle est l'image U par h du disque ouvert :

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\} \quad ?$$

Exercice 19

À tout point M du plan complexe $\mathbb{C}$ d'affixe z on associe le point M' d'affixe $z' = h(z)$ où $h(z) = \frac{z-2}{z-i}$. Où doit varier M pour que le point M' soit constamment sur l'axe imaginaire pur ? (Si on fait un dessin, on voit plus clair !)

Exercice 20

Soit ABC un triangle rectangle en A . Soit H le point sur le côté BC , pied de la hauteur issue de A . On pose $AC = b$ et $AB = c$.

1 - Montrer que les triangles ABH et ACH sont semblables. En déduire la relation $\frac{HB}{HC} = -\frac{c^2}{b^2}$.

On construit deux carrés $ABDE$ et $ACFG$ respectivement sur les côtés AB et AC du triangle ABC .

2 - Démontrer que les droites (BF) , (CD) et (AH) sont concourantes. (*Penser à utiliser le théorème de Ceva.*)

Exercice 21

On munit l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}$ de sa structure affine canonique. On se propose de décrire la nature algébrique de son groupe affine $\text{Aff}(\mathbb{R})$.

1 - Donner l'écriture générale d'un automorphisme affine $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

On munit l'ensemble $G = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ de la loi de composition interne :

$$(a, b) \cdot (a', b') = (aa', a'b + b').$$

2 - Montrer qu'elle confère à G une structure de groupe isomorphe à $\text{Aff}(\mathbb{R})$.

3 - Calculer le premier groupe dérivé $[G, G]$ de G .

4 - Montrer que G est résoluble et non nilpotent.

Exercice 22

1 - Soit ABC un triangle dont le périmètre $L > 0$ et le côté $BC = \ell > 0$ sont prescrits. Comment choisir ce triangle de façon à ce que son aire soit maximale ?

2 - Soit ABC un triangle dont le périmètre $L > 0$ est prescrit. Comment choisir ce triangle de façon à ce que son aire soit maximale ?

Exercice 23

Soit ABC un triangle équilatéral. On se donne un point ω intérieur à ce triangle et on suppose qu'on connaît $\omega A = a$, $\omega B = b$ et $\omega C = c$. Quelle est l'aire de ABC ?

Exercice 24

Soit $\mathfrak{P}_n$ un polygone régulier à $n \geq 2$ côtés inscrit dans un cercle de rayon 1 dans le plan complexe $\mathbb{C}$. On note $A_0, A_1, \dots, A_{n-1}$ ses sommets et $d_1, \dots, d_{n-1}$ les distances respectives de A_0 aux autres sommets $A_1, \dots, A_{n-1}$. Montrer que $\prod_{k=1}^{n-1} d_k = n$.

Exercice 25

Soient O_1 , O_2 et O_3 trois points non alignés. Construire trois cercles Γ_1 , Γ_2 et Γ_3 centrés respectivement en O_1 , O_2 et O_3 et orthogonaux deux à deux.

(Soient Γ_1 et Γ_2 deux cercles du plan se coupant en deux points A et B . On dira que Γ_1 et Γ_2 sont *orthogonaux* si les droites tangentes en tout point $M \in \{A, B\}$ respectivement à ces deux cercles sont orthogonales.)

Exercice 26

Soit $ABCD$ un quadriatère convexe. Montrer que, si $ABCD$ est inscrit dans un cercle ou si les quatre points A, B, C, D sont alignés, on a $AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$. Sinon $AB \cdot CD + AD \cdot BC > AC \cdot BD$.

Ceci est une généralisation du *Théorème de Ptolémée* (*).

Exercice 27

Soit ABC un triangle équilatéral. Soit P un point sur le cercle circonscrit à ce triangle situé entre B et C . Montrer que $PB + PC = AP$.

Exercice 28

Soit ABC un triangle. Déterminer le point (ou les points) M tels que la somme des distances $MA + MB + MC$ de M aux trois sommets soit minimale. (C'est le *Problème de Fermat* (**).)

Exercice 29

Soit $ABCD$ un carré de côté a . Soient P un point sur le côté AB et Q un point sur le côté BC tels que $BP = BQ$. Soit H le pied de la hauteur issue de B du triangle PBC . Montrer que l'angle $\widehat{DHQ}$ est droit.

Exercice 30

Soit ABC un triangle rectangle et isocèle en C . Soient D un point sur le côté AC et E un point sur le côté BC ; on suppose $CD = CE$. Les droites passant respectivement par D et C et perpendiculaires à la droite (AE) coupent le segment $[AB]$ respectivement en K et L . Montrer que L est le milieu du segment $[KB]$.

Exercice 31

Soient A et B deux points dans un plan affine euclidien $\mathcal{P}$ et ℓ un nombre réel strictement positif. Construire deux points C et D conjugués harmoniques de A et B et dont la distance soit 2ℓ .

Exercice 32

Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe inscrit dans un cercle. On pose $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$ et $DA = d$. On note λ le demi-périmètre $\frac{a+b+c+d}{2}$. L'objet de cet exercice est de démontrer la *Formule de Brahmagupta* (***) qui donne l'aire $\mathcal{A}$ du quadrilatère $ABCD$ en fonction des mesures de ses côtés a, b, c, d :

$$(FB) \quad \mathcal{A} = \sqrt{(\lambda - a)(\lambda - b)(\lambda - c)(\lambda - d)}.$$

On note θ et β les mesures respectives des angles $\widehat{DAB}$ et $\widehat{BCD}$.

1 - Montrer que $\mathcal{A}^2 = \frac{1}{4}(ad + bc)^2(1 - (\cos \theta)^2)$.

(*) Claude PTOLÉMÉE : mathématicien et astrologue grec. Né en l'an 90 et mort en l'an 168.

(**) Pierre DE FERMAT : mathématicien et juriste français né en 1601 et mort en 1665. Il a été, entre autres, à l'origine du fameux problème de la recherche des solutions de l'équation $x^p + y^p = z^p$ où $x, y, z, p \in \mathbb{N}$.

(***) Multân BRAHMAGUPTA (598-668) : l'un des plus grands mathématiciens indiens de son époque et l'un des premiers à avoir injecté l'algèbre dans la résolution de problèmes d'astronomie.

2 - Montrer que $(ad + bc)^2 (\cos \theta)^2 = \frac{1}{4} ((a^2 + d^2) - (b^2 + c^2))^2$. En injectant ceci dans la formule obtenue dans la question 1 établir la relation (FB).

3 - En déduire la *Formule de Héron* (**) donnant l'aire d'un triangle ABC dont les mesures des côtés sont a, b, c et de demi-périmètre λ :

$$(FH) \quad A(ABC) = \sqrt{\lambda(\lambda - a)(\lambda - b)(\lambda - c)}.$$

Exercice 33

Soit ABC un triangle inscrit dans un cercle Γ . Les tangentes à Γ respectivement en A , B et C coupent les droites (BC) , (CA) et (AB) respectivement en P , Q et R .

$$1 - \text{Etablir les relations } \frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} = \left(\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}\right)^2, \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} = \left(\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}\right)^2 \text{ et } \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = \left(\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}\right)^2.$$

2 - Montrer que les trois points P , Q et R sont alignés.

Exercice 34

Soient A et B deux points distincts d'un cercle Γ dans un plan affine euclidien. Un point M étant variable sur Γ on note P le point de la droite (BM) tel que : $\frac{\overline{MB}}{\overline{MP}} = k$ où k est un réel donné non nul. Soient J le milieu du segment $[AB]$ et Q l'intersection des droites (AM) et (JP) .

Quel est le lieu géométrique de Q lorsque M varie sur Γ ?

Exercice 35

Soient Γ un cercle de centre O et de rayon $\rho > 0$ et A et B deux points sur Γ diamétralement opposés. Un diamètre MN pivote autour de O . Soient P et Q les points d'intersection respectivement des droites (AM) et (AN) avec la tangente en B à Γ .

1 - Montrer que les quatre points M , N , P et Q sont cocycliques.

2 - Montrer que la médiane issue de A du triangle APQ est perpendiculaire à la droite (MN) .

3 - Où varie le centre du cercle circonscrit au quadrilatère $PMNQ$ (qui existe comme établi dans la question 1) quand M varie sur Γ ?

Exercice 36

Deux cercles Γ et Γ' de centres respectifs O et O' et de rayons respectifs ρ et ρ' se coupent en A et B . Une droite Δ passant par A les coupe respectivement en M et M' .

Montrer que le rapport $\frac{BM}{BM'}$ reste constant quand Δ pivote autour de A . Calculer ce rapport.

Exercice 37

Soient $MKM'L$ un losange et O un point tel que $OK = OL$. On pose $a = OK = OL$ et $b = MK$. On suppose $a > b$.

(**) HÉRON d'Alexandrie : ingénieur et mathématicien grec. Il vécut au I^{er} siècle ap. J.C.

1 - Dire pourquoi les points O , M et M' sont toujours alignés et montrer que $\overline{OM} \cdot \overline{OM'} = a^2 - b^2$.

2 - On suppose le point O fixé. Où varie le point M' lorsque M varie sur un cercle $\mathcal{C}$? À quoi pourrait servir ce résultat ?

Exercice 38

Soit $ABCD$ un trapèze isocèle dans lequel les côtés parallèles sont AB et CD et les côtés égaux AD et BC . On pose $x = AB$, $y = CD$, $a = AC = BD$ et $b = AD = BC$. On suppose $x < y$. Soient O , M et M' les milieux respectivement des côtés AD , BD et AC .

1 - Montrer que $xy = a^2 - b^2$

2 - On fixe le point O . Où varie le point M' lorsque M varie sur un cercle $\mathcal{C}$? À quoi pourrait servir ce résultat ?

Exercice 39

Soient Γ et Γ' deux cercles disjoints de centres respectifs O et O' . Les tangentes (OT') et (OS') à Γ' coupent Γ respectivement en A et B et les tangentes $(O'T)$ et $(O'S)$ à Γ coupent Γ' respectivement en A' et B' . Montrer que $AB = A'B'$.

Exercice 40

Soient Γ un cercle et A et A' deux points distincts sur Γ . On note M le milieu du segment $[AA']$. Une première droite passant par M coupe le cercle Γ en S et T' et une deuxième (passant aussi par M) le coupe en S' et T . Soient B et B' les points d'intersection du segment $[AA']$ respectivement avec les segments $[ST]$ et $[S'T']$.

Montrer que M est le milieu du segment $[BB']$. (C'est le *Théorème du papillon*.)

Exercice 41

Le plan affine euclidien $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On se donne un nombre réel strictement positif a , le point $A \in \mathcal{P}$ de coordonnées $(a, 0)$, $\mathcal{D}$ la droite d'équation $x = a$ et $f : t \in]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[\mapsto f(t) \in \mathbb{R}_+^*$ une fonction. Dans toute la suite $t \in]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$ jouera le rôle de paramètre. Un point M de $\mathcal{P}$ sera repéré par ses coordonnées (x, y) relativement à $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ou par son affixe $z = x + iy$.

Pour chaque t , on note s_t la transformation de $\mathcal{P}$ qui à tout point M d'affixe z fait correspondre le point $M_t = s_t(M)$ d'affixe $z_t = f(t)(\cos t + i \sin t)z$.

1 - Quelle est la nature de l'application s_t ? Donner les éléments géométriques qui la caractérisent.

2 - Donner les équations qui la définissent analytiquement dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ainsi que pour son inverse s_t^{-1} .

Dans toute la suite f sera la fonction $f(t) = \frac{1}{\cos t}$.

3 - Montrer que, pour tout point M distinct de O et tout t , le triangle OMM_t est rectangle en M .

4 - Le point M étant fixe, quel est l'ensemble $J(M)$ décrit par M_t lorsque le paramètre t varie ?

5 - Montrer que l'image de $\mathcal{D}$ par s_t est une droite $\mathcal{D}_t$ dont on donnera une équation cartésienne dépendant seulement des paramètres a et $\theta = \text{tg}(t)$.

6 - Montrer que la parabole $\mathcal{B}$ de foyer O , dont la tangente au sommet est $\mathcal{D}$, a pour équation :

$$y^2 = 4a(a - x).$$

7 - Montrer que, pour tout t , l'intersection de $\mathcal{D}_t$ et de $\mathcal{B}$ est formée d'un point unique K_t et que $\mathcal{D}_t$ est tangente à $\mathcal{B}$ en ce point.

8 - Montrer que lorsque t décrit $] -\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$, K_t décrit toute la parabole $\mathcal{B}$.

On note $\mathcal{C}$ un cercle de centre A dont le rayon ρ est strictement positif et différent de a et Γ la conique d'équation :

$$\frac{(x-a)^2}{\rho^2} + \frac{y^2}{\rho^2 - a^2} = 1.$$

9 - Indiquer, suivant les valeurs de ρ , la nature de la conique Γ . Déterminer son centre et ses foyers.

10 - Déterminer le centre et le rayon du cercle $\mathcal{C}_t$ image de $\mathcal{C}$ par s_t .

11 - Montrer que l'ensemble $\mathcal{C}_t$ est défini par l'équation :

$$(x-a)^2 + (y-a\theta)^2 = \rho^2(1+\theta^2).$$

12 - Montrer que lorsque $\mathcal{C}_t$ et Γ se coupent, leur intersection est formée de deux points L_t et N_t symétriques par rapport à $\mathcal{D}$ et dont on calculera l'ordonnée.

(Extrait de l'épreuve du Bac C, Clermont-Ferrand 1981)

Exercice 42

Soient Γ et Γ' deux cercles de centres respectifs O et O' et de rayons respectifs ρ et ρ' . On suppose $O \neq O'$ et que Γ' est intérieur à Γ et ne l'intersecte pas.

Quel est l'ensemble $\mathcal{E}$ des centres M des cercles $\mathcal{C}$ tangents intérieurement à Γ et extérieurement à Γ' ?

Exercice 43

Soient ABC un triangle isocèle de base BC et Δ une droite parallèle à la base. Soit M un point de Δ ; on note Y l'intersection de la droite (BM) avec le côté AC et X celle de la droite (CM) avec le côté AB .

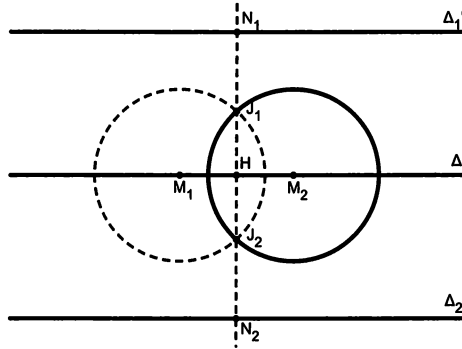
Démontrer que la quantité $\lambda = \frac{1}{BX} + \frac{1}{CY}$ est une constante (c'est-à-dire elle ne dépend pas de la position de M sur la droite Δ).

Solutions

Exercice 1

1 - Deux droites dans le plan sont parallèles disjointes, confondues ou sécantes ; ce sont les seules positions relatives possibles et qui s'excluent mutuellement bien entendu. Si Δ_1 et Δ_2 n'étaient pas parallèles disjointes elles auraient un point commun M ; dans ce cas $d(\Delta_1, \Delta_2) = \inf_{M_1 \in \Delta_1, M_2 \in \Delta_2} d(M_1, M_2) = d(M, M) = 0$, ce qui contredirait l'hypothèse $d(\Delta_1, \Delta_2) > 0$. Les droites Δ_1 et Δ_2 sont donc parallèles disjointes. $\diamond$

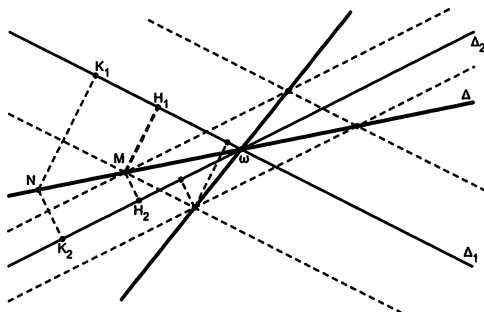
2 - Par la première question, les droites cherchées seront parallèles à Δ . Sur celle-ci on prend deux points distincts M_1 et M_2 . On trace les cercles de même rayon $\rho > \frac{M_1 M_2}{2}$ et de centres respectifs M_1 et M_2 ; ces deux cercles se coupent en deux points J_1 et J_2 et la droite $(J_1 J_2)$ coupe perpendiculairement Δ en un point H . Sur $(J_1 J_2)$ on construit les points N_1 et N_2 tels que $HN_1 = HN_2 = k$ (on reporte la longueur du segment $[CD]$ qui est donné). Les droites Δ'_1 et Δ'_2 parallèles à Δ et passant respectivement par N_1 et N_2 répondent à la question. $\diamond$



3 - On peut d'abord remarquer que le point ω appartient à l'ensemble cherché Δ . Si M est un autre point de Δ distinct de ω , la droite (ωM) est contenue dans Δ . En effet, soient N un point de (ωM) et K_1, K_2 ses projections orthogonales respectivement sur Δ_1 et Δ_2 . Les triangles $\omega M H_1$ et $\omega N K_1$ sont homothétiques (les droites $(M H_1)$ et $(N K_1)$ sont parallèles car toutes deux orthogonales à Δ_1) ; leurs côtés homologues sont donc proportionnels et en particulier on a $\frac{M H_1}{N K_1} = \frac{\omega M}{\omega N}$; de même, les triangles $\omega M H_2$ et $\omega N K_2$ sont homothétiques, d'où $\frac{M H_2}{N K_2} = \frac{\omega M}{\omega N}$. Ces deux égalités nous donnent $\frac{M H_1}{N K_1} = \frac{M H_2}{N K_2}$ c'est-à-dire $k = \frac{M H_1}{N K_1} = \frac{N K_1}{M H_2}$, ce qui montre que $N K_1 = k N K_2$ et donc $N \in \Delta$.

Pour construire l'ensemble Δ , il suffit de construire les points M qui sont à la distance 1 de Δ_2 et à la distance k de Δ_1 . Il y en a quatre a priori : ce sont les

intersections des deux droites qui sont à la distance 1 de Δ_2 et des deux droites qui sont à la distance k de Δ_1 . Les diagonales du parallélogramme formé par ces quatre points se coupent au point ω ; donc l'ensemble Δ qu'on cherche est la réunion des deux droites qui portent ces diagonales. $\diamond$



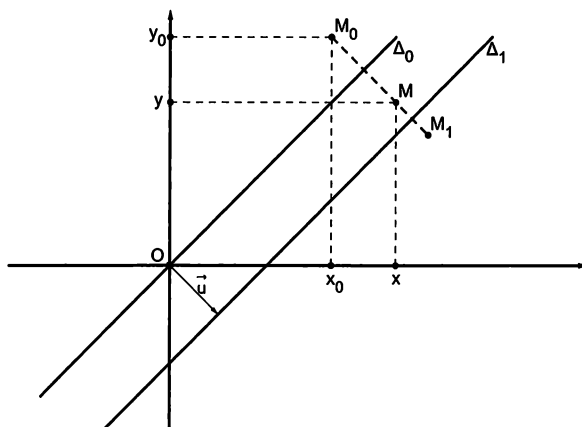
Exercice 2

1 - Les droites Δ_0 et Δ_1 ont toutes les deux le vecteur de coordonnées $(1, 1)$ comme vecteur directeur ; elles sont donc parallèles. Le vecteur $\vec{u}$ qui définit la translation τ est orthogonal à ces deux droites et donc au vecteur $(1, 1)$; par suite $\vec{u} = \lambda(1, -1)$ où λ est le réel positif tel que $\|\vec{u}\| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (distance entre Δ_0 et Δ_1). Le calcul donne $\lambda = \frac{1}{2}$; d'où $\vec{u} = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$. $\diamond$

2 - La droite Δ_0 est la première bissectrice de l'angle droit formé par les axes de coordonnées. Si donc M est un point de coordonnées (x, y) , son symétrique par rapport à Δ_0 a pour coordonnées $(x_0, y_0) = (y, x)$.

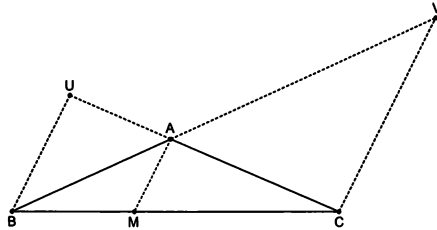
Soit t la translation de vecteur $2\vec{u} = (1, -1)$; on sait que $\sigma_1 \circ \sigma_0 = t$. Par suite $\sigma_1 = t \circ \sigma_0^{-1} = t \circ \sigma_0$. D'où $(x_1, y_1) = (y, x) + (1, -1) = (y + 1, x - 1)$. $\diamond$

3 - De la question précédente on déduit $(x, y) = (y_1 + 1, x_1 - 1)$. On reporte x et y dans l'équation $ax + by + c = 0$ et on obtient l'équation de la droite $\mathcal{U}_1$, transformée de $\mathcal{U}$ par la réflexion σ_1 : $bx_1 + ay_1 + a - b + c = 0$. $\diamond$



Exercice 3

1 - Comme les deux droites (BU) et (CV) sont parallèles à la droite (AM) , on a d'une part $\frac{BM}{AM} = \frac{BC}{CV}$ et d'autre part $\frac{CM}{AM} = \frac{BC}{BU}$. En faisant la somme membre à membre de ces deux égalités on obtient $\frac{BM+CM}{AM} = \frac{BC}{CV} + \frac{BC}{BU}$ et donc $\frac{BC}{AM} = \frac{BC}{CV} + \frac{BC}{BU}$. On simplifie par BC et on obtient l'égalité cherchée.



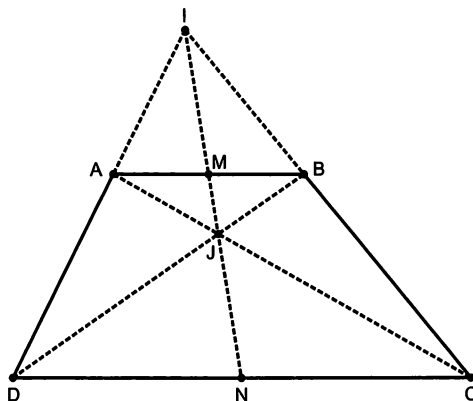
2 - Nous sommes exactement dans la situation de la question 1 : les poteaux étant verticaux (donc perpendiculaires au sol), ils sont parallèles entre eux et aussi à la droite joignant A à sa projection orthogonale M sur le sol. On a donc $\frac{1}{h} = \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2}$. Ce qui donne : $h = \frac{h_1 h_2}{h_1 + h_2}$.

Pour $h_1 = 40m$ et $h_2 = 60m$, on trouve $h = 24m$.

Exercice 4

1 - Comme les droites (AB) et (CD) sont parallèles, l'homothétie centrée en I qui envoie A sur D envoie aussi B sur C ; elle envoie donc le milieu M du segment $[AB]$ sur le milieu N du segment $[DC]$. Par suite, les trois points I , M et N sont alignés. De même, l'homothétie centrée en J qui envoie A sur D envoie aussi B sur C ; elle envoie donc le milieu M du segment $[AB]$ sur le milieu N du segment $[DC]$. Par suite, les trois points J , M et N sont alignés.

Conclusion : Les quatre points I , M , J et N sont alignés.



2 - Posons $k = \frac{AB}{CD} = \frac{AM}{DN} = \frac{BM}{CN}$. Comme les triangles IAM et IDN sont positivement homothétiques, on a :

$$\frac{\overline{IM}}{\overline{IN}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{DN}} = k.$$

De même, les triangles JAM et JCN étant négativement homothétiques, on a :

$$\frac{\overline{JM}}{\overline{JN}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{CN}} = -k.$$

Par suite, en faisant le quotient membre à membre, on obtient :

$$\frac{\overline{IM}}{\overline{IN}} : \frac{\overline{JM}}{\overline{JN}} = -1.$$

Exercice 5

1 - La direction $\vec{f}$ de f est l'application de $\vec{V}$ dans lui-même qui au vecteur $\vec{u}$ de coordonnées (x, y) dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ associe le vecteur $\vec{u}'$ de coordonnées :

$$\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = 2x + y. \end{cases}$$

Sa matrice A dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ est $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Le vecteur $\vec{i}$ est de norme $\|\vec{i}\| = 1$. Son image par $\vec{f}$ est le vecteur $\vec{i}' = (1, 2)$ dont la norme est $\|\vec{i}'\| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$; donc $\vec{f}$ n'est pas une isométrie et par suite f ne l'est pas non plus.

2 - Les valeurs propres de A (donc de $\vec{f}$) sont les racines du polynôme en t :

$$\det \begin{pmatrix} (1-t) & 2 \\ 2 & (1-t) \end{pmatrix} = (1-t)^2 - 4 = (t+1)(t-3).$$

Ce sont donc $\lambda = -1$ et $\lambda = 3$. Un calcul immédiat montre que $\vec{u} = \vec{i} - \vec{j}$ et $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j}$ sont des vecteurs propres associés respectivement λ et μ . Dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$ l'application linéaire $\vec{f}$ a pour matrice :

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

3 - Soient (x_0, y_0) les coordonnées d'un point fixe de f . Elles doivent satisfaire le système :

$$\begin{cases} x_0 + 2y_0 + 2 = x_0 \\ 2x_0 + y_0 - 2 = y_0 \end{cases}$$

dont la résolution immédiate donne l'unique solution $x_0 = 1$ et $y_0 = -1$. Il y a donc un unique point fixe ω dont les coordonnées sont $(1, -1)$.

4 - Comme (X, Y) et (X', Y') sont les coordonnées respectivement des points M et M' dans le repère $(\omega; \vec{u}, \vec{v})$, on a $\overrightarrow{\omega M} = X\vec{u} + Y\vec{v}$ et $\overrightarrow{\omega M'} = X'\vec{u} + Y'\vec{v}$. D'où :

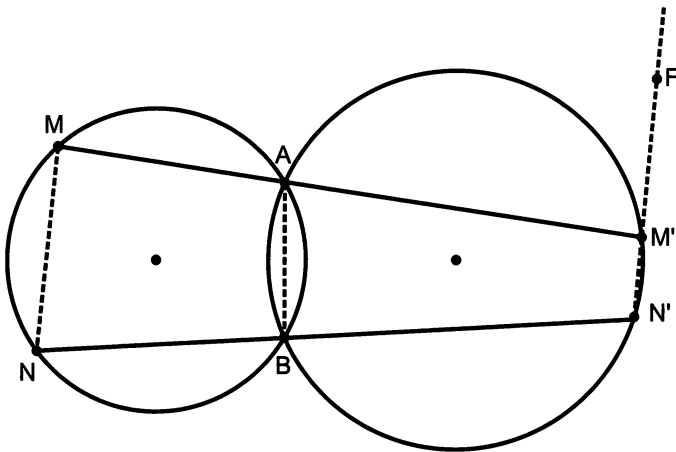
$$\begin{aligned}
 X'\vec{u} + Y'\vec{v} &= \overrightarrow{\omega M'} \\
 &= M' - \omega \\
 &= f(M) - f(\omega) \quad (\omega \text{ étant fixé par } f) \\
 &= \vec{f}(\overrightarrow{\omega M}) \quad (\vec{f} \text{ étant la direction de } f) \\
 &= \vec{f}(X\vec{u} + Y\vec{v}) \\
 &= X\vec{f}(\vec{u}) + Y\vec{f}(\vec{v}) \\
 &= X\lambda\vec{u} + Y\mu\vec{v} \quad (\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ étant des vecteurs propres de } \vec{f}) \\
 &= -X\vec{u} + 3Y\vec{v}.
 \end{aligned}$$

Ce qui donne $X' = -X$ et $Y' = 3Y$.

Exercice 6

Sur la droite $(M'N')$ prenons un point F (distinct de M' et de N') sur la demi-droite qui ne contient pas N' .

Le quadrilatère $ABNM$ est inscrit dans le cercle Γ ; ses deux angles (géométriques) opposés $\widehat{AMN}$ et $\widehat{ABN}$ sont donc supplémentaires. Par suite l'angle $\widehat{AMN}$ est égal à l'angle $\widehat{ABN'}$; mais comme ce dernier est suppléménataire à l'angle $\widehat{AM'N'}$ (car le quadrilatère $ABN'M'$ est inscrit dans le cercle Γ'), les angles $\widehat{AMN}$ et $\widehat{AM'N'}$ sont supplémentaires. Par suite les angles $\widehat{AMN}$ et $\widehat{AM'F}$ sont égaux. Ceci implique que les droites (MN) et $(M'N')$ sont parallèles.



Exercice 7

1 - L'homothétie h' envoie la droite (BG) sur une droite qui lui est parallèle et passant par le point $A = h'(B)$; c'est donc la droite (AD) . Celle-ci se transforme par h en une droite qui lui est parallèle et qui passe par $C = h(D)$; c'est donc la droite (HC) . En résumé on a $\phi((BG)) = (HC)$. $\diamond$

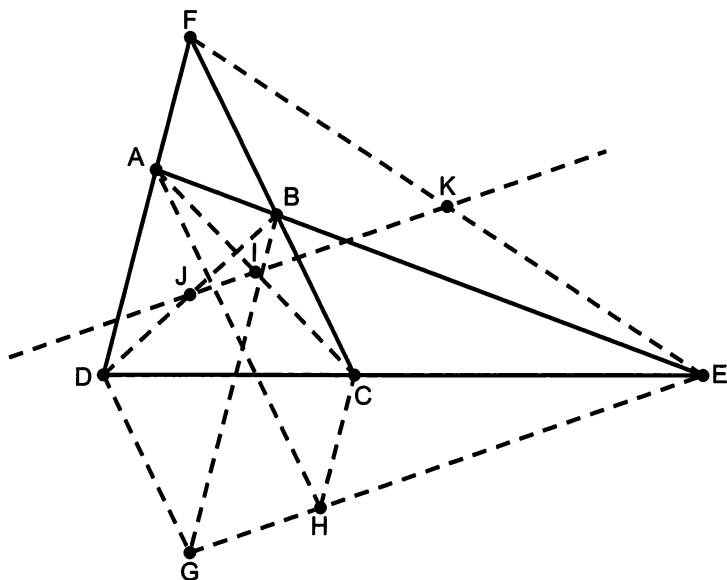
2 - Comme h et h' ont même centre (le point E), elles commutent ; on a donc aussi $\phi = h' \circ h$. L'homothétie h envoie la droite (DG) sur une droite qui lui est parallèle et passant par le point $C = h(D)$; c'est donc la droite (BC) . Celle-ci se transforme par h' en une droite qui lui est parallèle et qui passe par $A = h'(B)$; c'est donc la droite (AH) . En résumé on a $\phi((DG)) = (AH)$.

Comme on vient de le voir $\phi((BG)) = (HC)$ et $\phi((DG)) = (AH)$. On a donc :

$$\phi(G) = \phi((BG) \cap (DG)) = (HC) \cap (AH) = H.$$

3 - L'homothétie ϕ est centrée en E et envoie le point G sur le point H ; les trois points E , H et G sont donc alignés. $\diamond$

4 - Le quadrilatère $FDGB$ est un parallélogramme, donc ses diagonales $[DB]$ et $[FG]$ se coupent en leurs milieux qui n'est rien d'autre que le point J (milieu de $[DB]$ par hypothèse). Donc $f(G) = J$. De la même manière on montre que $f(H) = I$. Comme K est le milieu de $[FE]$ on a $f(E) = K$. L'homothétie f transforme donc les trois points alignés H , G et E respectivement en I , J et K . Il en résulte que les points I , J et K sont alignés, ce qui démontre le théorème de Newton. $\diamond$



Exercice 8

Notons ω le deuxième point d'intersection des cercles Γ_2 et Γ_3 et montrons qu'il est sur Γ_1 . Comme les quatre points $A'C'B'\omega$ sont cocycliques, on a :

$$(\mathcal{R}_1) \quad (\overrightarrow{\omega A'}, \overrightarrow{\omega B'}) + (\overrightarrow{CB'}, \overrightarrow{CA'}) = \pi.$$

De même les quatre points C', B, A' et ω étant cocycliques, on a :

$$(\mathcal{R}_2) \quad (\overrightarrow{\omega C'}, \overrightarrow{\omega A'}) + (\overrightarrow{BA'}, \overrightarrow{BC'}) = \pi.$$

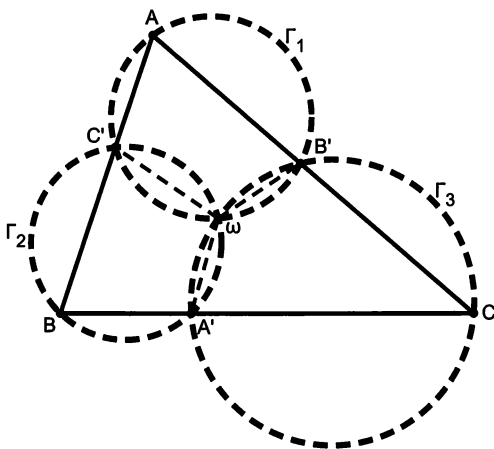
D'autre part, on a clairement :

$$(\mathcal{R}_3) \quad (\overrightarrow{\omega B'}, \overrightarrow{\omega C'}) + (\overrightarrow{\omega C'}, \overrightarrow{\omega A'}) + (\overrightarrow{\omega A'}, \overrightarrow{\omega B'}) = 2\pi$$

et (somme des angles du triangle ABC) :

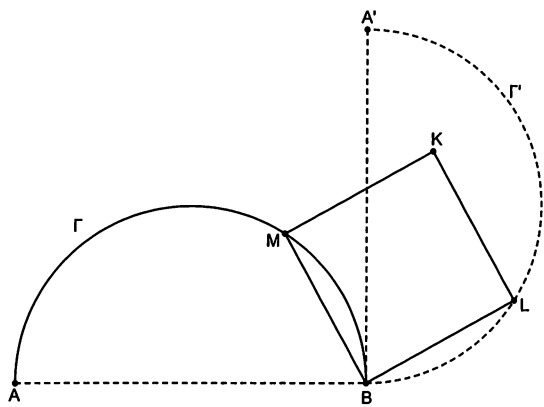
$$(\mathcal{R}_4) \quad (\overrightarrow{AC'}, \overrightarrow{AB'}) + (\overrightarrow{BA'}, \overrightarrow{BC'}) + (\overrightarrow{CB'}, \overrightarrow{CA'}) = \pi.$$

En sommant membre à membre les égalités $(\mathcal{R}_3)$ et $(\mathcal{R}_4)$ et tenant compte de $(\mathcal{R}_1)$ et $(\mathcal{R}_2)$, on voit que $(\overrightarrow{\omega B'}, \overrightarrow{\omega C'}) + (\overrightarrow{AC'}, \overrightarrow{AB'}) = \pi$; les quatre points A, C', ω et B' sont donc cocycliques, c'est-à-dire le point ω est sur le cercle Γ_1 . Conclusion : les trois cercles Γ_1, Γ_2 et Γ_3 se coupent au point ω . $\diamond$

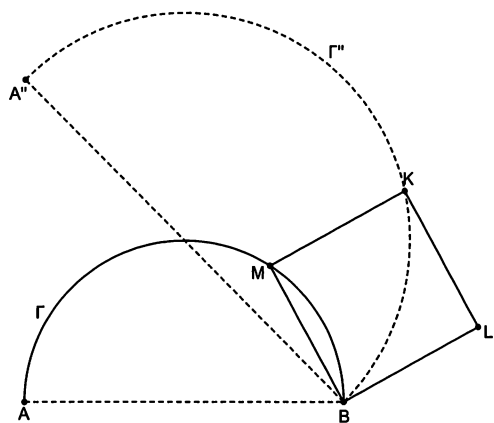


Exercice 9

1 - Le point B est fixe ; le point L est l'image de M par la rotation r de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{2}$. Donc L décrit l'image Γ' de Γ par r ; c'est un demi-cercle de diamètre BA' où $A' = r(A)$.



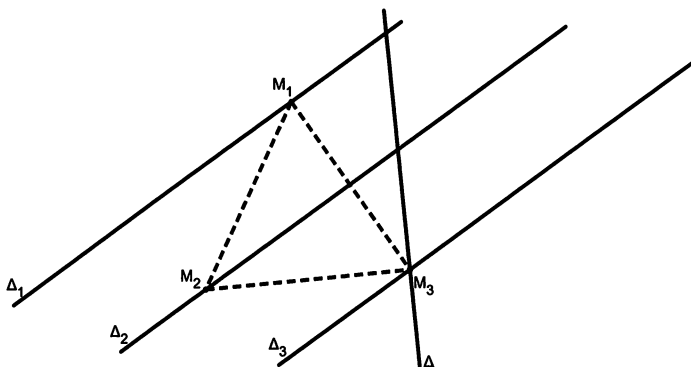
2 - Cette fois-ci le point K est l'image de M par la similitude s de centre B , d'angle $-\frac{\pi}{4}$ et de rapport $\sqrt{2}$. Donc K décrit l'image Γ'' de Γ par s ; c'est un demi-cercle de diamètre BA'' où $A'' = s(A)$.



Exercice 10

1 - Comme c'est un problème de construction géométrique, on commencera par le supposer résolu. On voit alors que le point M_3 est à la fois sur la droite Δ_3 et sur la droite Δ , transformée de Δ_2 par la rotation r_+ de centre M_1 et d'angle $\frac{\pi}{3}$ ou la rotation r_- de centre M_1 et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.

Pour construire effectivement le triangle $M_1M_2M_3$, on prend un point M_1 quelconque sur la droite Δ_1 , on construit la droite Δ , image de Δ_2 par la rotation r_+ ou r_- ; Δ coupe Δ_3 en un point M_3 . Le point M_2 est alors l'image de M_3 par la rotation r_- ou r_+ . Nous avons donc notre triangle $\mathcal{T}_0 = M_1M_2M_3$.



2 - Si $\mathcal{T}'_0 = M'_1M'_2M'_3$ est un autre triangle répondant à la question, on a forcément $M_1M_3 = M'_1M'_3$ car les droites, transformées respectives de Δ_2 par r_+ (ou r_-) sont parallèles et donc le quadrilatère $M_1M'_1M'_3M_3$ est un parallélogramme. Le point M'_3 est donc l'un des deux points constituant l'intersection de la droite Δ_3 avec le cercle de centre M'_1 et de rayon la longueur de M_1M_3 ; cela montre que M'_3 est soit le transformé de M_3 par la translation de vecteur $\overrightarrow{M_1M'_1}$ ou le symétrique de M_3 par rapport à la médiatrice de $M_1M'_1$. Le même raisonnement s'applique au point M'_2 .

On fixe une droite $\mathcal{D}$ perpendiculaire à Δ_1 (et donc aussi à Δ_2 et Δ_3), on note s la symétrie d'axe $\mathcal{D}$ et G le groupe des isométries de $\mathcal{P}$ engendré par s et toutes les translations de vecteurs parallèles à Δ_1 . Alors tout triangle $\mathcal{T}$ solution au problème posé est le transformé de $\mathcal{T}_0$ par un élément du groupe G . En termes savants : l'orbite de $\mathcal{T}_0$ sous l'action de G est l'ensemble des solutions de notre problème ! (On peut vérifier facilement que, si $\mathcal{D}'$ est une autre droite $\mathcal{D}$ perpendiculaire à Δ_1 , alors le groupe des isométries de $\mathcal{P}$ engendré par la symétrie s' d'axe $\mathcal{D}'$ et toutes les translations de vecteurs parallèles à Δ_1 est égal à G .)

Exercice 11

Dire que les points A_1, A_2 et A_3 forment un repère affine de $\mathcal{P}$, c'est dire que tout point M de $\mathcal{P}$ s'écrit sous la forme $M = a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3$ où a_1, a_2, a_3 sont des réels tels que $a_1 + a_2 + a_3 = 1$ (qu'on appelle *coordonnées affines* de M dans le repère (A_1, A_2, A_3)). Ou, sous forme vectorielle, $\overrightarrow{A_1M} = \alpha\overrightarrow{A_1A_2} + \beta\overrightarrow{A_1A_3}$ avec α et β des réels. À toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_3$ on associe l'application de $\mathcal{P}$ dans lui-même définie par :

$$f_\sigma(M) = f_\sigma(a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3) = a_1A_{\sigma(1)} + a_2A_{\sigma(2)} + a_3A_{\sigma(3)}.$$

Il est clair que f_σ est affine ; elle est en plus bijective et préserve l'ensemble $\{A_1, A_2, A_3\}$ et par suite un élément du groupe $G_{\mathcal{T}}$. On a donc une application $\phi : \mathfrak{S}_3 \longrightarrow G_{\mathcal{T}}$. Montrons que c'est un isomorphisme de groupes. Soient σ, τ des éléments de $\mathfrak{S}_3$ et

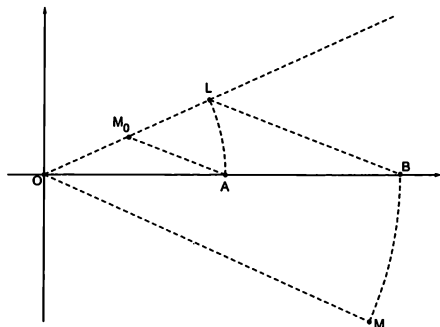
$M = a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3$. On a :

$$\begin{aligned}
 f_{\tau\sigma}(M) &= a_1 A_{\tau\sigma(1)} + a_2 A_{\tau\sigma(2)} + a_3 A_{\tau\sigma(3)} \\
 &= a_1 A_{\tau(\sigma(1))} + a_2 A_{\tau(\sigma(2))} + a_3 A_{\tau(\sigma(3))} \\
 &= f_\tau(a_1 A_{\sigma(1)} + a_2 A_{\sigma(2)} + a_3 A_{\sigma(3)}) \\
 &= f_\tau(f_\sigma(M)) \\
 &= (f_\tau \circ f_\sigma)(M)
 \end{aligned}$$

ce qui montre que $\phi(\tau\sigma) = \phi(\tau) \circ \phi(\sigma)$ c'est-à-dire ϕ est un homomorphisme de groupes. Reste à montrer que ϕ est bijectif. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_3$ tel que $f_\sigma =$ identité de $\mathcal{P}$; alors f_σ fixe en particulier chaque point du repère i.e $f_\sigma(A_i) = A_i$ pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, donc $\sigma(i) = i$. Par suite σ est l'élément neutre de $\mathfrak{S}_3$, donc ϕ est injectif. Par définition même de G_T , chacun de ses éléments g permute les points A_1, A_2, A_3 donc correspond à une permutation σ de $\{1, 2, 3\}$; ce qui donne $g = f_\sigma$. Ceci montre que ϕ est surjectif et donc un isomorphisme.

Exercice 12

1 - Soit M_0 le point d'affixe $z_0 = \frac{1}{z}$; alors M' est le milieu du segment $[MM_0]$ et tout le monde sait comment il se construit ! Reste seulement à contruire le point M_0 . Comme $\arg(z_0) = -\arg(z)$, le point M_0 est sur la demi-droite Δ_+ symétrique par rapport à l'axe des abscisses de la demi-droite passant par O et par M . Il suffit donc de construire sur Δ_+ le point dont la distance au point O est $\frac{1}{|z|}$. Sur l'axe des abscisses, on note A et B les points d'abscisses respectives 1 et $|z|$ et sur Δ_+ , L sera le point dont la distance à O est égal à 1. Par A on mène la parallèle à (BL) . Celle-ci coupe Δ_+ en un point dont on peut vérifier facilement (à l'aide du théorème de Thalès) que ce n'est rien d'autre que le point M_0 cherché !



2 - Si $z = x + iy = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ (avec $r = |z|$ et $\theta = \arg(z)$), on a $z' = x' + iy' = \frac{1}{2} \left(\left(r + \frac{1}{r}\right) \cos \theta + i \left(r - \frac{1}{r}\right) \sin \theta \right)$. Donc :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right) \cos \theta \\ y' = \frac{1}{2} \left(r - \frac{1}{r} \right) \sin \theta \end{cases}$$

3 - Dans ce cas le module r est constant égal à ρ . Si $\rho = 1$, $y' = 0$ et $x' = \cos \theta$ et décrit l'intervalle $[-1, 1]$. Donc l'image du cercle unité par T est l'ensemble :

$$\{x' + iy' : y' = 0 \text{ et } -1 \leq x' \leq 1\}.$$

Supposons $\rho \neq 1$. On pose $a = \frac{1}{2}(\rho + \frac{1}{\rho})$ et $b = \frac{1}{2}(\rho - \frac{1}{\rho})$; a et b sont des constantes réelles non nulles et :

$$\begin{cases} \frac{x'}{a} = \cos \theta \\ \frac{y'}{b} = \sin \theta \end{cases}$$

ce qui donne $\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$ et qui montre que l'image du cercle de centre O et de rayon ρ par l'application T est une ellipse de grand axe $2a = \rho + \frac{1}{\rho}$ et de petit axe $2b = |\rho - \frac{1}{\rho}|$ et de foyers les points $F = (c, 0)$ et $F' = (-c, 0)$ avec $c = \sqrt{a^2 - b^2} = 1$.

4 - Cette fois-ci θ reste constant dans $]0, \frac{\pi}{2}[$; on pose $a = \cos \theta$ et $b = \sin \theta$; a et b sont des constantes réelles strictement positives et :

$$\begin{cases} \frac{x'}{a} = \frac{1}{2}(r + \frac{1}{r}) \\ \frac{y'}{b} = \frac{1}{2}(r - \frac{1}{r}), \end{cases}$$

ce qui donne :

$$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1$$

et qui montre que l'image de la droite en question est une hyperbole ayant O comme centre de symétrie, comme foyers les points $F = (c, 0)$ et $F' = (-c, 0)$ avec $c = \sqrt{a^2 + b^2} = 1$ et comme asymptotes les droites d'équations $y = (\operatorname{tg} \theta)x$ et $y = -(\operatorname{tg} \theta)x$.

Exercice 13

Avant de donner la preuve de la relation d'Euler, rappelons ce qu'est la puissance d'un point par rapport à cercle.

Soient Γ un cercle de centre O , de rayon ρ et I un point du plan à une distance d du point O . Par le point I traçons une droite (D) coupant Γ en deux points A et A' (l'un de ces points est confondu avec I si $I \in \Gamma$). Alors :

*Le produit $\overline{IA} \cdot \overline{IA'}$ est constamment égal à $d^2 - \rho^2$. Cette quantité ne dépend donc que du cercle et c'est ce qu'on a appelé la **puissance** de I par rapport au cercle Γ et notée $p(I, \Gamma)$.*

Passons maintenant à la preuve de la relation en question. Notons A' le point d'intersection de la droite IA avec le cercle Γ et A'' le point diamétralement opposé à A' sur ce même cercle. Comme I est le centre du cercle γ inscrit dans le triangle ABC , il est le point de concours des bissectrices des angles de ce triangle ; en particulier la droite (IA) (donc (IA')) est bissectrice de $\widehat{BAC}$ et la droite (IB) est bissectrice de $\widehat{ABC}$. D'où :

$$(1) \quad \widehat{BAA'} = \widehat{A'AC} = \theta \quad \text{et} \quad \widehat{ABI} = \widehat{IBC} = \theta'.$$

Comme les cercles Γ_2 et Λ se coupent (en au moins A_2) la distance de leurs centres doit être comprise entre la différence et la somme de leurs rayons, c'est-à-dire $\rho_3 - \rho_2 \leq \omega O \leq \rho_2 + \rho_3$. Mais $\omega O = \rho_1$; donc $\rho_3 - \rho_2 \leq \rho_1 \leq \rho_2 + \rho_3$. La relation $\rho_1 \leq \rho_2 + \rho_3$ étant évidente, il reste simplement $\rho_3 \leq \rho_1 + \rho_2$. On a donc une condition nécessaire et suffisante pour que le problème ait une solution. Pour la construction effective on procède comme suit.

- On choisit un point A_1 sur Γ_1 .
- On applique à Γ_3 la rotation r qui le transforme en le cercle Λ .
- La condition $\rho_3 \leq \rho_1 + \rho_2$ nous garantit que le cercle Λ coupe effectivement Γ_2 en au moins un point ; notons-le A_2 . Sur Γ_3 on prend alors $A_3 = r^{-1}(A_2)$.
- Le triangle $\mathcal{T}_0 = A_1 A_2 A_3$ répond à la question.

2 - Soit Σ une droite passant par le centre commun O aux trois cercles Γ_1 , Γ_2 et Γ_3 . Si $\mathcal{T}_0$ est une solution du problème, son symétrique $\mathcal{T}_1$ par rapport à Σ est aussi une solution. De même, tout triangle $\mathcal{T}_\theta$ obtenu à partir de $\mathcal{T}_0$ par une rotation de centre O et d'angle θ est encore une solution. Réciproquement, toute solution au problème est obtenue en appliquant à $\mathcal{T}_0$ ou $\mathcal{T}_1$ une rotation centrée en O . On peut donc conclure : l'ensemble des solutions est l'orbite de $\mathcal{T}_0$ sous l'action du groupe d'isométries G engendré par la réflexion d'axe un diamètre quelconque Σ (commun aux trois cercles) et les rotations de centre O . Le groupe G est isomorphe au produit semi-direct $\text{SO}(2) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. $\diamond$

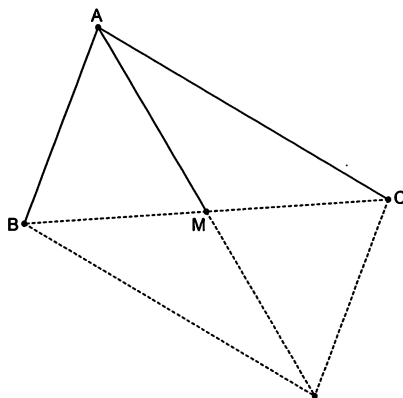
Exercice 16

On a :

$$\langle \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \rangle = AB^2 + AC^2 + 2\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle$$

$$\langle \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} \rangle = AB^2 + AC^2 - 2\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle$$

En faisant la somme membre à membre et en tenant compte du fait que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$ on obtient $AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + \frac{BC^2}{2}$.



Exercice 17

1 - Le triangle OMB est rectangle en M . On a donc :

$$\rho^2 = OB^2 = OM^2 + BM^2.$$

Mais $AM = BM$ (car le triangle ABC est rectangle en A et AM en est médiane).
D'où l'égalité :

$$OM^2 + AM^2 = \rho^2.$$

2 - Soit ω le milieu de OA (on a donc $O\omega = \frac{a}{2}$). D'après l'exercice 3, on a :

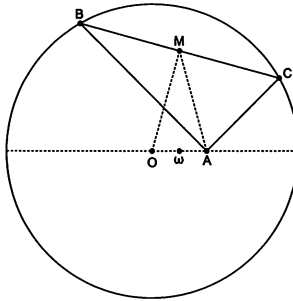
$$\rho^2 = MO^2 + MA^2 = 2M\omega^2 + \frac{OA^2}{2}$$

ce qui donne :

$$\omega M^2 = \frac{1}{2} \left(\rho^2 - \frac{a^2}{2} \right) = \frac{2\rho^2 - a^2}{4}.$$

Donc M varie sur le cercle de centre ω et de rayon $r = \frac{1}{2}\sqrt{2\rho^2 - a^2}$.

◇



Exercice 18

On peut remarquer que $h(z)$ peut s'écrire $h(z) = \frac{2z+1}{z-1} = \frac{2z-2+3}{z-1} = 2 + \frac{3}{z-1}$. On décompose donc h comme suit :

$$z \xrightarrow{\tau_1} z-1 \xrightarrow{I} \frac{1}{z-1} \xrightarrow{s} \frac{1}{z-1} \xrightarrow{h} \frac{3}{z-1} \xrightarrow{\tau_2} \frac{3}{z-1} + 2$$

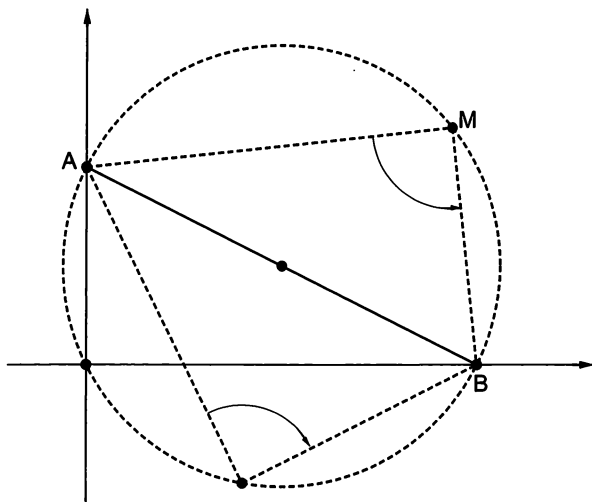
où τ_1 est la translation de vecteur 1, I est l'inversion de pôle l'origine et de puissance 1, s est la réflexion par rapport à l'axe des abscisses, h est l'homothétie de centre l'origine et de rapport 3 et τ_2 est la translation de vecteur 2.

Pour déterminer le transformé du disque unité ouvert U , il faut d'abord déterminer le transformé du cercle unité. Par τ_1 il devient le cercle de centre $(-1, 0)$ et de rayon 1 qui se transforme par I en la droite d'équation $x = -\frac{1}{2}$; celle-ci reste invariante par s , par h elle devient la droite d'équation $x = -\frac{3}{2}$ qui se transforme par τ_2 en la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$. Cette droite partage le plan en deux demi-plans ; l'un est l'image

de l'intérieur du cercle unité et l'autre est l'image de l'extérieur de ce cercle. Comme $h(0) = -1$, l'image de U par h est le demi-plan d'inéquation $x < \frac{1}{2}$. $\diamond$

Exercice 19

On a $z' = \frac{z-2}{z-i} = \frac{2-z}{i-z}$; donc $\arg(z') = \arg(2-z) - \arg(i-z)$. Dire que z' varie sur l'axe imaginaire pur, c'est équivalent à dire que son argument est congru à $\frac{\pi}{2}$ modulo π . Soient A et B les points ayant respectivement pour affixes i et 2 . La mesure de l'angle $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ est donc congrue à $\frac{\pi}{2}$ modulo π ; par suite le point M est sur le cercle de diamètre le segment AB .



On peut aussi retrouver le même résultat de la façon suivante. On calcule la partie réelle de z' en fonction des coordonnées réelles (x, y) du point z . On trouve $\Re z = x^2 - 2x + y^2 - y = (x-1)^2 + (y - \frac{1}{2})^2 - \frac{5}{4}$. Dire que z' est imaginaire pur, c'est dire que $(x-1)^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{5}{4}$ c'est-à-dire z est sur le cercle de centre $\omega = (1, \frac{1}{2})$ et de rayon $R = \frac{\sqrt{5}}{2}$ qui est exactement le même cercle.

Exercice 20

1 - Les triangles ABH et ACH sont rectangles en H ; en plus l'angle $\widehat{ABH}$ (dans le triangle ABH) a le même complémentaire que l'angle $\widehat{HAC}$ (dans le triangle ACH) et donc $\widehat{ABH} = \widehat{HAC}$. Les deux triangles ABH et ACH sont alors semblables en vertu du troisième cas de similitude ; par suite leurs côtés homologues (ceux opposés respectivement aux angles égaux) sont proportionnels :

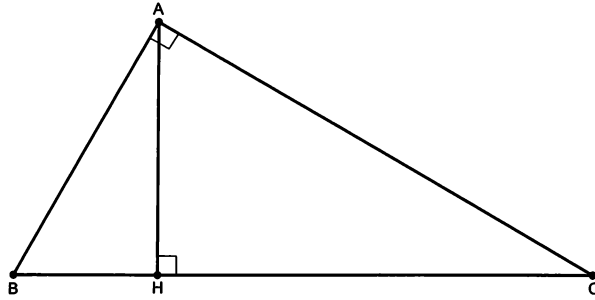
$$\frac{AB}{AC} = \frac{AH}{CH} = \frac{BH}{AH}$$

ou alors :

$$\frac{AB}{AC} = \frac{HB}{AH} \quad \text{et} \quad \frac{AB}{AC} = \frac{AH}{HC}.$$

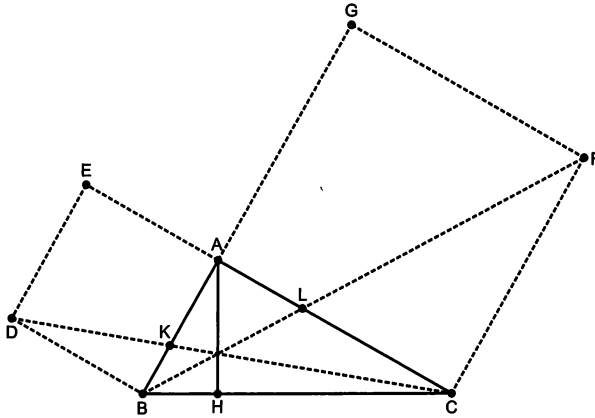
En multipliant ces deux égalités membre à membre on obtient :

$$\frac{\overline{HB}}{\overline{HC}} = -\frac{c^2}{b^2}.$$



2 - Les droites (AB) et (CF) étant parallèles (elles sont perpendiculaires à une même troisième), on a, d'après le théorème de Thalès :

$$\frac{\overline{LC}}{\overline{LA}} = \frac{\overline{CF}}{\overline{AB}} = -\frac{b}{c}.$$



Le même raisonnement donne : $\frac{\overline{KA}}{\overline{KB}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BD}} = -\frac{b}{c}$. D'où :

$$\frac{\overline{HB}}{\overline{HC}} \cdot \frac{\overline{LC}}{\overline{LA}} \cdot \frac{\overline{KA}}{\overline{KB}} = \left(-\frac{c^2}{b^2}\right) \cdot \left(-\frac{b}{c}\right) \cdot \left(-\frac{b}{c}\right) = -1.$$

D'après le théorème de Ceva les trois droites (BF) , (CD) et (AH) sont concourantes.

Exercice 21

1 - L'espace vectoriel $\mathbb{R}$ est de dimension 1 ; le singleton $\{1\}$ en est une base. Toute application affine est donc du type $f(x) = ax + b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. C'est un automorphisme affine si, et seulement si, $a \in \mathbb{R}^*$.

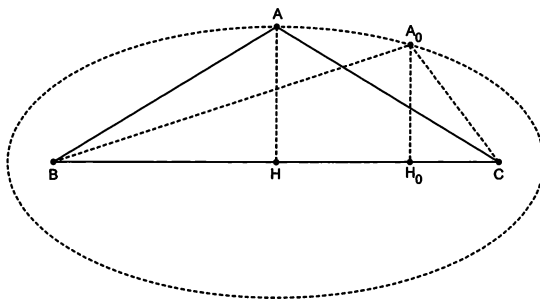
2 - Un calcul immédiat montre que la multiplication $(a, b) \cdot (a', b') = (a'a, a'b + b')$ dans $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ est une loi de composition interne associative, que $(1, 0)$ est élément neutre et que tout (a, b) a pour inverse $(\frac{1}{a}, -\frac{b}{a})$. Donc $(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, \cdot)$ est un groupe. L'application ϕ de $\text{Aff}(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ qui à un automorphisme affine $f(x) = ax + b$ associe le couple (a, b) est clairement bijective. D'autre part comme la composée $f' \circ f$ de $f(x) = ax + b$ et $f'(x) = a'x + b'$ s'écrit $f' \circ f(x) = f'(f(x)) = f'(ax + b) = a'ax + a'b + b$, ϕ est un morphisme de groupes, donc un isomorphisme.

3 - Soient (a, b) et (a', b') deux éléments de G . On a $(a, b)^{-1} = (\frac{1}{a}, -\frac{b}{a})$, $(a', b')^{-1} = (\frac{1}{a'}, -\frac{b'}{a'})$ et $(a, b)(a', b')(a, b)^{-1}(a', b')^{-1} = (1, \frac{b}{a} - \frac{b'}{a'} + \frac{1}{aa'}(b' - b))$. Ceci montre que le premier groupe dérivé $[G, G]$ de G est contenu dans le sous-groupe $\{1\} \times \mathbb{R}$. En fait il y a égalité car, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $(1, \lambda)$ est le commutateur $[(\frac{1}{2}, \lambda), (2, 0)]$.

4 - Comme $G_1 = [G, G]$ est abélien, $G_2 = [G_1, G_1]$ est réduit à $(1, 0)$; donc G est résoluble. Un calcul similaire au précédent permet de montrer $G^2 = [G_1, G] = G_1$ et donc $G^3 = [G^2, G] = \dots = [G^n, G] = \dots = G_1$. Par suite G n'est pas nilpotent.

Exercice 22

1 - On prescrit le périmètre $L > 0$ du triangle et la mesure $\ell > 0$ de son côté BC . La somme $AB + AC = 2a = L - \ell$. (On supposera que $\ell < L$ sinon le problème est non seulement trivial mais aussi sans intérêt.) Le point A varie donc sur l'ellipse de foyers B et C et de grand axe $2a$. L'aire du triangle ABC vaut $\frac{BC \cdot A_0 H_0}{2}$; elle sera donc maximale lorsque A_0 est en A , c'est-à-dire lorsque ABC est isocèle de base BC .



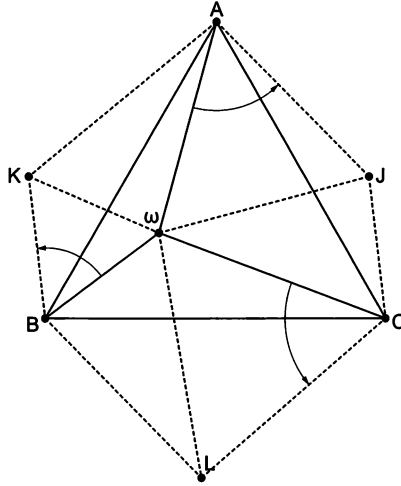
2 - À périmètre prescrit $L > 0$, c'est le triangle équilatéral qui maximise l'aire. En effet supposons ABC non équilatéral. Il a alors deux côtés non égaux ; quitte à renommer les sommets on peut supposer $AB \neq AC$. Alors le triangle isocèle qui a même base BC et même périmètre $L > 0$ a une aire strictement plus grande. L'hypothèse " ABC non équilatéral" est donc fausse. En conclusion, à périmètre prescrit, c'est le triangle équilatéral qui maximise l'aire.

Exercice 23

L'idée est bien entendu d'exploiter la donnée (a, b, c) ; comme il s'agit du calcul d'une aire, il est un peu naturel d'essayer de faire intervenir un triangle dont les côtés mesurent

a , b et c et de faire usage de la formule de Héron (donnant l'aire d'un triangle en fonction des mesures des trois côtés).

• Soient ρ_A , ρ_B et ρ_C les rotations d'angle $\frac{\pi}{3}$ et de centres respectifs A , B et C et posons $J = \rho_A(\omega)$, $K = \rho_B(\omega)$ et $L = \rho_C(\omega)$. La rotation ρ_A envoie isométriquement le triangle $A\omega B$ sur le triangle AJC , ρ_B envoie isométriquement le triangle $B\omega C$ sur le triangle BKA et ρ_C envoie isométriquement le triangle $A\omega C$ sur le triangle CLB .



• L'hexagone $AKBLCJ$ est constitué du triangle ABC et d'une copie de chacun des triangles $A\omega B$, $B\omega C$ et $C\omega A$ (constituant ABC) ; son aire $\mathcal{A}(AKBLCJ)$ est donc le double de l'aire $\mathcal{A}(ABC)$ du triangle ABC . Or :

$$\alpha = \mathcal{A}(AKBLCJ) = \mathcal{A}(A\omega CJ) + \mathcal{A}(B\omega AK) + \mathcal{A}(C\omega BL)$$

c'est-à-dire :

$$(*) \quad \alpha = \{\mathcal{A}(A\omega J) + \mathcal{A}(\omega JC)\} + \{\mathcal{A}(B\omega K) + \mathcal{A}(\omega KA)\} + \{\mathcal{A}(C\omega L) + \mathcal{A}(\omega LB)\}.$$

• Les triangles ωJC , ωKA et ωLB sont égaux car les mesures des côtés de chacun d'eux sont a , b et c . Quant aux triangles $A\omega J$, $B\omega K$ et $C\omega L$, ils sont tous les trois équilatéraux de côtés mesurant respectivement a , b et c .

• On pose $\lambda = \frac{a+b+c}{2}$. La formule de Héron appliquée aux différents triangles intervenant dans la relation (*) donne finalement :

$$(**) \quad \mathcal{A}(ABC) = \frac{1}{2} \left\{ 3\sqrt{\lambda(\lambda-a)(\lambda-b)(\lambda-c)} + \frac{\sqrt{3}}{4}(a^2 + b^2 + c^2) \right\}.$$

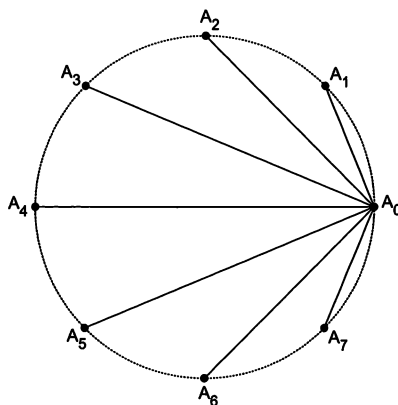
Par exemple si $a = 3$, $b = 4$ et $c = 5$, on trouve :

$$\mathcal{A}(ABC) = \frac{1}{2} \left\{ 3\sqrt{6 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} + \frac{\sqrt{3}}{4}(9 + 16 + 25) \right\} = 9 + \frac{25}{4}\sqrt{3} \simeq 19,8253.$$

Exercice 24

Quitte à effectuer une translation et une rotation, on peut supposer que le centre du cercle exinscrit au polygone est à l'origine du plan complexe et que le point A_0 a pour affixe $z_0 = 1$. Les sommets de $\mathcal{P}_n$ ont donc pour affixes respectivement les racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité $z_k = a^k$ où $a = e^{2i\pi \frac{k}{n}}$ pour $k = 0, 1, \dots, n-1$. On a clairement $d_k = |z_0 - z_k|$ pour $k = 1, \dots, n-1$. Soit f le polynôme $f(z) = 1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1}$. On a $f(z) = \frac{z^n - 1}{z - 1} = \prod_{k=1}^{n-1} (z - z_k)$. D'où : $\prod_{k=1}^{n-1} d_k = \left| \prod_{k=1}^{n-1} (z_0 - z_k) \right| = |f(z_0)| = |f(1)| = n$.

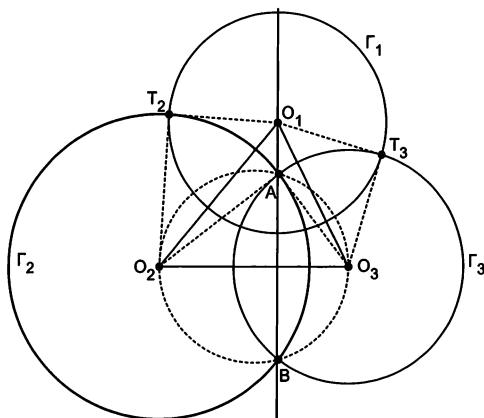
Ce qui démontre le théorème. En fait on a établi plus : $\prod_{k=1}^{n-1} (1 - z_k) = n$. $\diamond$



$$A_0 A_1 \cdot A_0 A_2 \cdot A_0 A_3 \cdot A_0 A_4 \cdot A_0 A_5 \cdot A_0 A_6 \cdot A_0 A_7 = 8$$

Exercice 25

Comme pour tout problème de construction géométrique, on supposera qu'il est résolu *i.e.* les cercles construits. On note T_2 et T_3 les points d'intersection du cercle Γ_1 respectivement avec les cercles Γ_2 et Γ_3 et A et B ceux des cercles Γ_2 et Γ_3 entre eux.



• Les deux cercles Γ_1 et Γ_2 étant orthogonaux, leurs rayons respectifs O_1T_2 et O_2T_2 le sont aussi ; donc la droite (O_1T_2) est tangente au cercle Γ_2 . De la même manière, la droite (O_1T_3) est tangente au cercle Γ_3 ; donc $O_1T_2^2 = \rho_1^2 = O_1T_3^2$ (ρ_1 est le rayon de Γ_1). Par suite le point O_1 est sur l'axe radical des cercles Γ_2 et Γ_3 qui n'est rien d'autre que la droite (AB) .

• Comme les deux cercles Γ_2 et Γ_3 sont orthogonaux les angles $\widehat{O_2AO_3}$ et $\widehat{O_2BO_3}$ sont droits ; les deux points A et B sont donc sur le cercle $\mathcal{C}$ de diamètre le segment $[O_2O_3]$.

• Pour construire les deux cercles Γ_2 et Γ_3 il suffit donc d'avoir les points A ou B . Mais ces derniers sont les points d'intersection du cercle $\mathcal{C}$ avec la hauteur issue de O_1 du triangle $O_1O_2O_3$. La construction de Γ_1 se fait de façon similaire.

• *La construction est-elle toujours possible ?* Non ! Il faut que le point O_1 soit en dehors des deux cercles Γ_2 et Γ_3 et donc que l'angle $\widehat{O_2O_1O_3}$ soit aigu. Le même raisonnement vaut pour les deux autres angles $\widehat{O_1O_2O_3}$ et $\widehat{O_1O_3O_2}$. Si l'un de ces trois angles est droit, disons $\widehat{O_2O_1O_3}$ par exemple, le cercle Γ_1 se réduit au point O_1 . $\diamond$

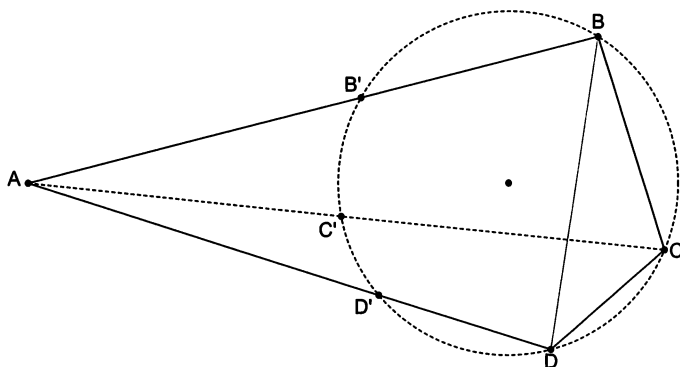
Exercice 26

Nous commençons par rappeler une relation entre la distance de deux points et leurs transformés par une inversion (cf. Fiche 4 de la *Deuxième partie*). Soit $\mathcal{I}(\omega, k)$ l'inversion de pôle ω et de puissance $k \in \mathbb{R}_+^*$. Soient A et B deux points du plan et A' et B' leurs transformés respectifs par cette inversion. Alors :

$$(*) \quad A'B' = \frac{k}{\omega A \cdot \omega B} AB.$$

Revenons maintenant à la question posée. Le cas A, B, C, D alignés se règle par un calcul assez facile utilisant les mesures algébriques par exemple sur la droite qui les porte. On le laisse au lecteur.

On suppose A, B, C, D non alignés. L'inversion de pôle A et de puissance 1 transforme les points B, C et D en trois points B', C' et D' (cf. la figure qui suit).



L'inégalité du triangle appliquée aux points B' , C' et D' donne $B'D' \leq B'C' + C'D'$. En utilisant la formule (*) avec $k = 1$ et A jouant le rôle de ω on obtient :

$$\frac{BD}{AB \cdot AD} \leq \frac{CD}{AC \cdot AD} + \frac{BC}{AB \cdot AC}.$$

On multiplie les deux membres par le produit $AB \cdot AC \cdot AD$ et on arrive à la relation :

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC \geq AC \cdot BD.$$

Si A est sur le cercle passant par les points B , C et D , les points B' , C' et D' sont alignés et on a $B'C' + C'D' = B'D'$ et donc :

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD.$$

Si A n'est pas sur le cercle passant par les points B , C et D on a :

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC > AC \cdot BD.$$

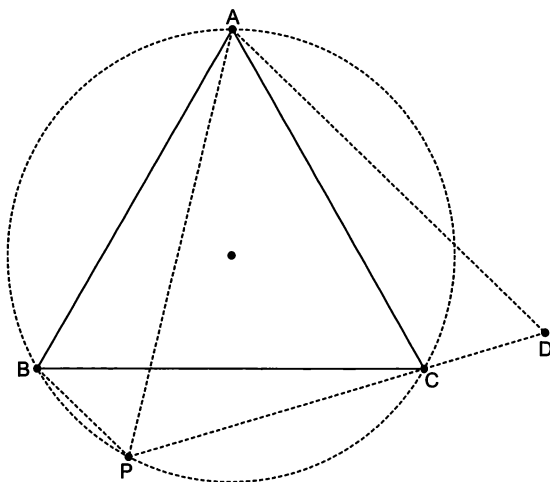
C'est l'inégalité cherchée.



Exercice 27

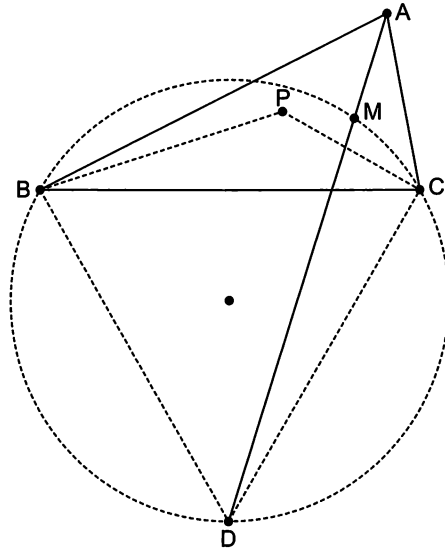
Sur la droite (PC) on note D le point situé du côté de C et tel que $PD = AP$. Le triangle APD est donc isocèle ; comme l'angle $\widehat{APD}$ mesure $\frac{\pi}{3}$, ce triangle est en fait équilatéral ; par suite $AP = AD$. D'autre part $AB = AC$ (ABC étant équilatéral par hypothèse). En plus, les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{PAD}$ sont égaux (à $\frac{\pi}{3}$) donc $\widehat{BAP}$ et $\widehat{CAD}$ sont aussi égaux. En définitive : les triangles BAP et CAD ont un angle égal compris entre deux côtés égaux ; ils sont donc égaux ; ce qui donne $BP = CD$. Finalement :

$$AP = PD = PC + CD = PC + PB.$$



Exercice 28

Nous allons montrer qu'un tel point M existe et est unique ; nous le construirons aussi.



Deux au moins des angles du triangle sont aigus ; supposons que ce sont $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$. La droite (BC) partage alors le plan en deux demi-plans ; l'un des deux contient le point A ; sur l'autre on prend le point D tel que le triangle BCD soit équilatéral. Le cercle Γ circonscrit au triangle BCD coupe la droite (AD) en un point M . Par le théorème de Ptolémée pour tout autre point P du plan on a :

$$PB \cdot CD + PC \cdot BD > BC \cdot PD.$$

Mais $BD = CD = BC$, ce qui nous donne $PB + PC > PD$. Et comme $MD = MB + MC$, on a :

$$PA + PB + PC > MA + MB + MC.$$

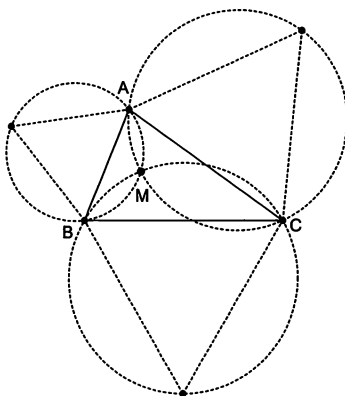
Donc le point M réalise bien le minimum de la somme des distances de P aux trois sommets A , B et C .

Le point M est unique et c'est le point de concours des trois cercles circonscrits respectivement aux trois triangles équilatéraux construits extérieurement sur chaque côté du triangle ABC . C'est le *point de Torricelli* (*) du triangle ABC .

Si l'angle $\widehat{A}$ est obtus, le point M est en A .

◇

(*) Evangelista TORRICELLI : mathématicien et physicien italien né en 1608 et mort en 1647. Aussi bien en mathématiques qu'en physique ses contributions ont été substantielles. On lui doit par exemple l'invention du baromètre.

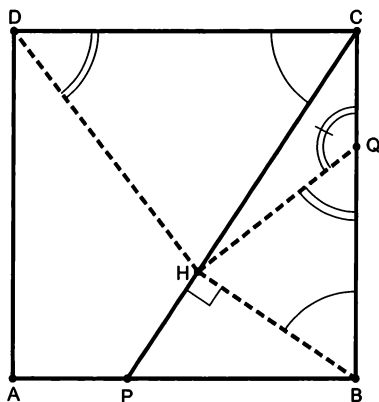


Le point de Torricelli !

Exercice 29

Les angles $\widehat{HBQ}$ et $\widehat{HCD}$ sont égaux car chacun d'eux est complémentaire de l'angle $\widehat{HCB}$. D'autre part :

$$\begin{aligned} \frac{CD}{CH} &= \frac{BC}{CH} \quad (\text{car } CD = a = BC) \\ &= \frac{BP}{BH} \quad (\text{car } HCB \text{ et } HPB \text{ sont semblables}) \\ &= \frac{BQ}{BH} \quad (\text{car } BQ = BP) \end{aligned}$$



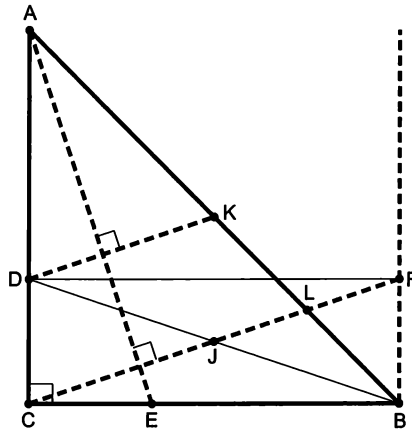
Les triangles CDH et BQH ont un angle égal $\widehat{HBQ} = \widehat{HCD}$ compris entre deux côtés proportionnels $\frac{CD}{CH} = \frac{BQ}{BH}$; ils sont donc semblables. Par suite les angles $\widehat{HDC}$ et $\widehat{HQB}$ sont égaux. Comme les angles $\widehat{HQB}$ et $\widehat{HQC}$ sont supplémentaires, $\widehat{HDC}$ et $\widehat{HQC}$ le sont aussi. Le fait que la somme des angles du quadrilatère $CDHQ$ est 2π

donne alors :

$$\begin{aligned}\widehat{DHQ} &= 2\pi - (\widehat{HDC} + \widehat{HQC}) - \widehat{DCQ} \\ &= 2\pi - \pi - \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

Exercice 30

Soit F le point d'intersection de la droite (CL) et la perpendiculaire à (BC) passant par B . La droite (CF) est perpendiculaire à (AE) et la droite (CB) est perpendiculaire à (AC) ; donc les angles $\widehat{CAE}$ et $\widehat{BCF}$ sont égaux. Les triangles ACE et CBF ont un côté égal $AC = BC$ (par hypothèse sur le triangle ABC) compris entre deux angles égaux : $\widehat{CAE} = \widehat{BCF}$ comme on vient de le voir et $\widehat{ACE} = \widehat{CBF} = \frac{\pi}{2}$. Ils sont donc égaux. On en déduit l'égalité $BF = CE = CD$; comme en plus les droites (CD) et (BF) sont parallèles car toutes deux perpendiculaires à (BC) , le quadrilatère $CBFD$ est un parallélogramme (c'est en fait un rectangle). Les deux diagonales CF et DB se coupent donc en leurs milieux ; soit J ce milieu commun. Comme la droite (CL) (qui est aussi (CF)) est parallèle à (DK) et passe par J , elle passe aussi par le milieu du segment $[BK]$. Donc le point L est le milieu du segment $[BK]$. $\diamond$



Exercice 31

Soient C et D des points répondant à la question et I le milieu du segment CD . Un calcul simple utilisant la relation :

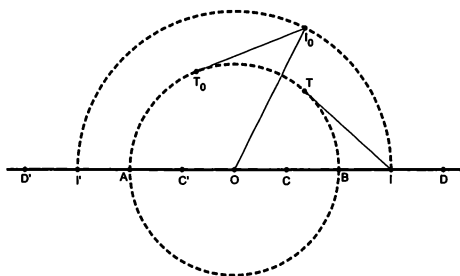
$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} : \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = -1$$

(les points A, B, C, D forment une division harmonique) donne :

$$\overline{IA} \cdot \overline{IB} = IC^2 = ID^2 = \ell^2.$$

Soit Γ le cercle de diamètre AB . Alors l'égalité $\overline{IA} \cdot \overline{IB} = \ell^2$ montre que si (IT') est une tangente à Γ au point T on doit avoir $IT^2 = \ell^2$ (puissance de I par rapport à Γ). Cette remarque nous permet de faire facilement la construction des points C et D cherchés.

Sur le cercle Γ on prend un point quelconque T_0 ; on mène la tangente à Γ passant par T_0 sur laquelle on prend un point I_0 tel que $T_0 I_0 = \ell$. Le point I est alors sur l'intersection de la droite (AB) et du cercle de centre O milieu de AB et de rayon $O I_0$; il y en a deux (I et I'). Le problème a donc deux solutions (C, D) et (C', D') (symétriques par rapport à O).

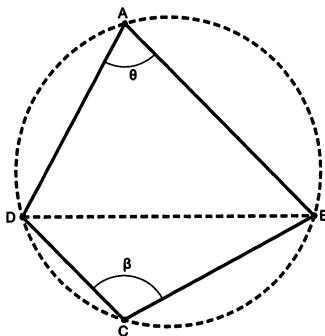


Exercice 32

1 - L'aire du quadrilatère $ABCD$ est la somme des aires $\mathcal{A}(DAB)$ et $\mathcal{A}(DCB)$ respectivement des triangles DAB et DCB :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \mathcal{A}(DAB) + \mathcal{A}(DCB) \\ &= \frac{1}{2}ad \sin \theta + \frac{1}{2}bc \sin \beta \\ &= \frac{1}{2}ad \sin \theta + \frac{1}{2}bc \sin \theta \quad (\text{car } \beta = \pi - \theta) \\ &= \frac{1}{2}(ad + bc) \sin \theta \end{aligned}$$

ce qui nous donne $\mathcal{A}^2 = \frac{1}{4}(ad + bc)^2(1 - (\cos \theta)^2)$ en utilisant la relation trigonométrique bien connue $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$. $\diamond$



2 - On utilise la formule de Al-Kashi (*) appliquée au côté BD une fois dans le triangle BAB et une autre fois dans le triangle DCB :

$$a^2 + d^2 - 2ad \cos \theta = BD^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \beta.$$

Comme $\beta = \pi - \theta$ on a $\cos \beta = -\cos \theta$, d'où $(a^2 + b^2) - (b^2 + c^2) = 2(ad + bc) \cos \theta$. Ce qui nous donne finalement la relation cherchée :

$$(ad + bc)^2 (\cos \theta)^2 = \frac{1}{4} ((a^2 + d^2) - (b^2 + c^2))^2.$$

On injecte alors ceci dans la quantité obtenue à la question 1 :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^2 &= \frac{1}{4} (ad + bc)^2 (1 - (\cos \theta)^2) \\ &= \frac{1}{4} \left\{ (ad + bc)^2 - \frac{((a^2 + d^2) - (b^2 + c^2))^2}{4} \right\} \\ &= \frac{1}{16} \left\{ 4(ad + bc)^2 - ((a^2 + d^2) - (b^2 + c^2))^2 \right\} \\ &= \frac{1}{16} \{ (b + c)^2 - (a - d)^2 \} \{ (a + d)^2 - (b - c)^2 \} \\ &= \frac{1}{16} (b + c + a - d)(b + c - a + d)(a + d - b + c)(a + d + b - c) \\ &= (\lambda - a)(\lambda - b)(\lambda - c)(\lambda - d). \end{aligned}$$

De cette expression on déduit la formule de Brahmagupta cherchée :

$$(FB) \quad \mathcal{A} = \sqrt{(\lambda - a)(\lambda - b)(\lambda - c)(\lambda - d)}.$$

3 - Le cas d'un triangle ABC s'obtient à partir d'un quadrilatère convexe $ABCD$ dans lequel les sommets C et D sont confondus (qui est toujours inscriptible). Dans cette situation $d = 0$ et la formule (FB) se réduit à celle de Héron (qui, bien sûr, a été démontrée indépendamment de (FB)) :

$$(FH) \quad \mathcal{A}(ABC) = \sqrt{\lambda(\lambda - a)(\lambda - b)(\lambda - c)}.$$

Exercice 33

1 - Les triangles PAB et PCA ont l'angle $\widehat{BPA} = \widehat{CPA}$ en commun et les angles $\widehat{PCA}$ et $\widehat{BAP}$ égaux car ils interceptent le même arc (puisque la droite (AP) est tangente au cercle Γ). Ils sont donc semblables ; d'où :

$$\frac{PA}{PC} = \frac{PB}{PA} = \frac{AB}{AC}.$$

(*) Ghiyath ad-Din AL-KASHI : mathématicien perse né en 1380 et mort en 1429. Connue pour ses travaux en géométrie mais aussi pour avoir donné les 16 premières décimales du nombre π qui fut une grande avancée à son époque.

Le produit des deux premiers rapports est donc égal au carré du troisième rapport :

$$\frac{PA}{PC} \cdot \frac{PB}{PA} = \frac{PB}{PC} = \left(\frac{AB}{AC} \right)^2.$$

Comme la tangente à Γ au point A coupe la droite (BC) forcément à l'extérieur du segment $[BC]$ le rapport $\frac{PB}{PC}$ (qui est indépendant de tout repère affine sur la droite (BC)) est positif. Ce qui nous donne :

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} = \left(\frac{AB}{AC} \right)^2.$$

Un raisonnement analogue donne les deux autres relations. Ce qui nous fait en tout :

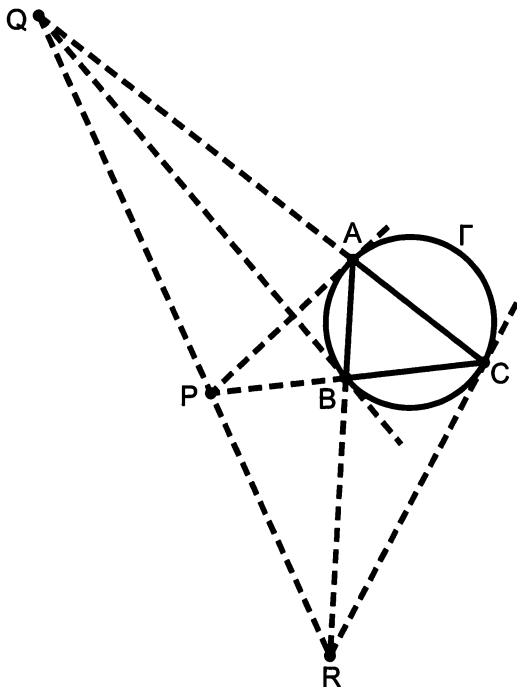
$$\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} = \left(\frac{AB}{AC} \right)^2, \quad \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} = \left(\frac{BC}{AB} \right)^2 \quad \text{et} \quad \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = \left(\frac{AC}{BC} \right)^2.$$

2 - Les trois points P , Q et R sont respectivement sur les droites portant les côtés BC , CA et AB du triangle ABC . On a en plus la relation :

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \cdot \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} \cdot \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = \left(\frac{AB}{AC} \right)^2 \cdot \left(\frac{BC}{AB} \right)^2 \cdot \left(\frac{AC}{BC} \right)^2 = 1.$$

Ils sont donc alignés en vertu du théorème de Ménélaüs.

◇



Exercice 34

Si $k = 2$, P est le milieu du segment $[MB]$; les droites (JP) et (AM) sont alors parallèles et ne peuvent donc pas se couper : le point Q est rejeté à l'infini ! D'autre part, si $k = 1$, P est en B et le point Q est confondu avec le point A indépendamment de la position de M sur Γ . Supposons donc $k \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1, 2\}$.

Considérons le triangle ABM . Les points J , P et Q sont alignés et tels que $J \in (AB)$, $P \in (BM)$ et $Q \in (AM)$; d'après le théorème de Ménélaüs on a :

$$\frac{\overline{QM}}{\overline{QA}} \cdot \frac{\overline{PB}}{\overline{PM}} \cdot \frac{\overline{JA}}{\overline{JB}} = 1.$$

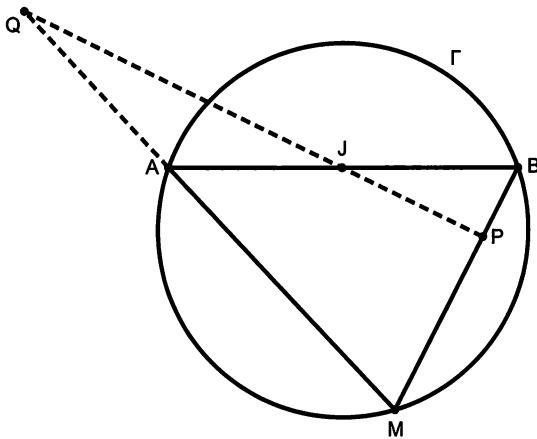
Or $\frac{\overline{JA}}{\overline{JB}} = -1$ puisque J est le milieu de AB et $\frac{\overline{PB}}{\overline{PM}} = \frac{\overline{PM} + \overline{MB}}{\overline{PM}} = 1 - k$. Ceci nous donne $\frac{\overline{QM}}{\overline{QA}} = \frac{1}{k-1}$. Ce qui nous permet de calculer :

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{AQ}} = \frac{\overline{AQ} + \overline{QM}}{\overline{AQ}} = 1 + \frac{\overline{QM}}{\overline{AQ}} = 1 - \frac{1}{k-1} = \frac{k-2}{k-1}$$

et par suite :

$$\frac{\overline{AQ}}{\overline{AM}} = \frac{k-1}{k-2}.$$

Le point Q est donc le transformé de M par l'homothétie de centre A et de rapport $\lambda = \frac{k-1}{k-2}$. Il varie donc sur le cercle transformé de Γ par cette homothétie. $\diamond$



Exercice 35

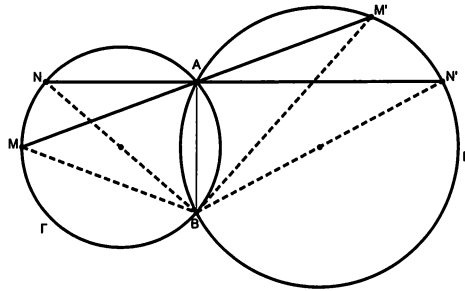
1 - Les demi-droites $(PQ)_+$ et $(PA)_+$ qui délimitent l'angle $\widehat{BPA}$ coupent le cercle

Exercice 36

• Soient N le point de Γ diamétralement opposé à B et N' l'intersection de la droite (NA) et le cercle Γ' . L'angle $\widehat{BAN}$ est droit et donc $\widehat{BAN'}$ l'est aussi ; par suite le segment $[BN']$ est diamètre de Γ' .

• Soit M un point quelconque sur le cercle Γ et M' l'intersection de la droite (MA) et le cercle Γ' . Les angles $\widehat{BM'M}$ et $\widehat{BN'N}$ sont égaux car ils interceptent le même arc dans le cercle Γ' . De même, Les angles $\widehat{BMM'}$ et $\widehat{BNN'}$ interceptent le même arc dans le cercle Γ ; ils sont donc égaux. Par suite les triangles MBM' et NBN' sont semblables ; leurs côtés homologues sont donc proportionnels ; en particulier, on a :

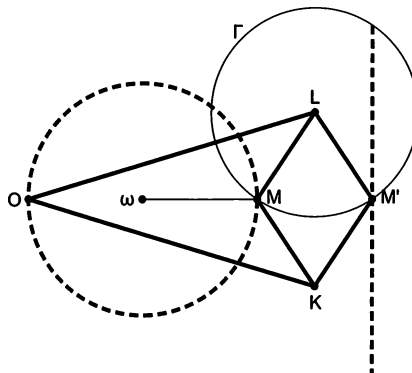
$$\frac{BM}{BM'} = \frac{BN}{BN'} = \frac{2\rho}{2\rho'} = \frac{\rho}{\rho'}.$$



Exercice 37

1 - On a $OK = OL$, $MK = ML$ et $M'K = M'L$. Donc les points O , M et M' sont tous les trois sur la médiatrice du segment $[KL]$; par suite ils sont alignés.

Soit Γ le cercle de centre L et de rayon b . Alors le produit $\overline{OM} \cdot \overline{OM'}$ n'est rien d'autre que la puissance $p(O, \Gamma)$ du point O par rapport au cercle Γ . Elle est aussi donnée par : $\overline{OM} \cdot \overline{OM'} = p(O, \Gamma) = OL^2 - LM^2 = a^2 - b^2$.

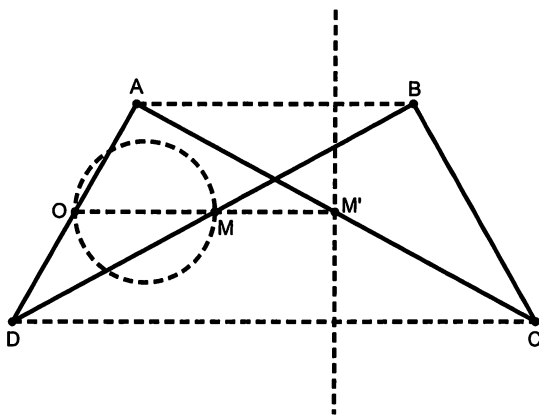


2 - De la question précédente on déduit que M' est le transformé de M par l'inversion de pôle O et de puissance $k = a^2 - b^2$. Si $O \notin C$, M' varie aussi sur un cercle qu'on peut déterminer explicitement (cf. Fiche de travail 4). Si $O \in C$, M' varie sur une droite qu'on sait déterminer explicitement.

Ce résultat est la base géométrique de l'*inverseur de Peaucellier*. C'est un instrument qui sert à transformer un mouvement circulaire en mouvement rectiligne. On suppose que le système formé par les 5 points O , M , M' , K et L et les segments $[OK]$, $[OL]$, $[MK]$, $[ML]$, $[M'K]$ et $[M'L]$ est articulé. On fixe un point ω de telle sorte que $\omega O = \omega M$ reste une distance fixe. Si le point M varie sur le cercle de centre ω et passant par O , le point M' varie alors sur une droite. Ceci est théorique : en réalité M ne peut varier que sur un arc de cercle et donc M' reste sur un segment !

Exercice 38

1 - Comme $a = AC = BD$ et $b = AD = BC$ et que a et b sont des constantes, les médiatrices respectivement des segments $[AD]$ et $[BC]$ se coupent sur la médiatrice commune des segments $[AB]$ et $[CD]$. Le quadrilatère convexe $ABCD$ est donc inscriptible dans un cercle. D'après le théorème de Ptolémée (cf. Exercice 26 dans la partie *Exercices résolus*) $AD \cdot BC + AB \cdot CD = AC \cdot BD$, c'est-à-dire $xy = a^2 - b^2$.



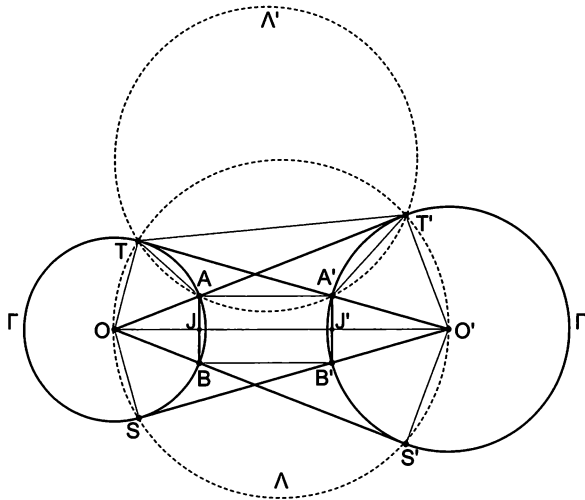
2 - Comme $OM = \frac{1}{2}AB = \frac{x}{2}$ et $OM' = \frac{1}{2}CD = \frac{y}{2}$, on a $\overline{OM} \cdot \overline{OM'} = \frac{xy}{4} = \frac{a^2 - b^2}{4}$. Le point M' est donc le transformé de M par l'inversion de pôle O et de puissance $k = \frac{a^2 - b^2}{4}$. Si $O \notin C$, M' varie aussi sur un cercle. Si $O \in C$, M' varie sur une droite.

De façon similaire à l'*inverseur de Peaucellier*, ce résultat est la base géométrique de l'*inverseur de Hart*. C'est aussi un instrument qui sert à transformer un mouvement circulaire en mouvement rectiligne. On suppose que le quadrilatère non convexe $ACBD$ est articulé. Si le point M varie sur un cercle passant par O , le point M' varie sur une droite. C'est aussi théorique : en réalité M ne peut varier que sur un arc de cercle et donc M' reste sur un segment !

Exercice 39 (Théorème du face à face)

Première méthode. Elle est un peu longue et tortueuse mais elle met en évidence quelques quadruplets de points cocycliques qui montrent la richesse de la situation.

Les angles $\widehat{OTO'}$ et $\widehat{OT'O'}$ sont droits ; le quadrilatère $OTT'O'$ est donc inscrit dans un cercle Λ (de diamètre le segment $[OO']$). Ceci implique que les angles $\widehat{AOT}$ et $\widehat{A'O'T'}$ sont égaux car ils interceptent le même arc dans Λ . Par suite les angles $\widehat{ATA'}$ et $\widehat{AT'A'}$ sont égaux car respectivement égaux à $\frac{1}{2}\widehat{AOT}$ et $\frac{1}{2}\widehat{A'O'T'}$. Le quadrilatère (non convexe) $TAT'A'$ est donc inscrit dans un cercle Λ' . On en déduit que les angles $\widehat{A'AT'}$ et $\widehat{A'TT'}$ sont égaux car ils interceptent le même arc dans le cercle Λ' . Mais $\widehat{A'TT'} = \widehat{O'TT'} = \widehat{O'OT'}$ (angles interceptant le même arc dans le cercle Λ). Ceci nous donne finalement $\widehat{A'AT'} = \widehat{O'OT'}$; par conséquent la droite (AA') est parallèle à la droite (OO') . On démontre de la même manière que la droite (BB') est parallèle à la droite (OO') . Comme les droites (AB) et $(A'B')$ sont orthogonales à (OO') le quadrilatère $AA'B'B$ est un rectangle. Donc $AB = A'B'$. $\diamond$

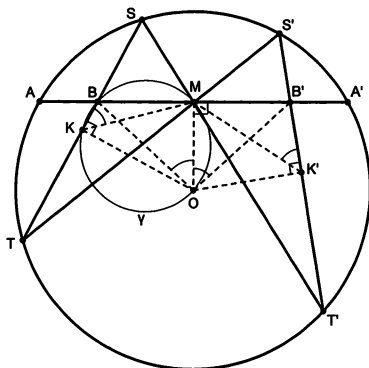


Deuxième méthode (trouvée suite à une discussion avec mon ami Valerio). Le milieu J du segment $[AB]$ est sur la droite (OO') . Les deux triangles $OO'T'$ et OAJ sont rectangles et ont l'angle $\widehat{JOA}$ en commun ; ils sont donc semblables. Par suite $\frac{OA}{OO'} = \frac{AJ}{O'T'}$, d'où $AJ = \frac{OA \cdot O'T'}{OO'}$ et donc $AB = \frac{2\rho \cdot \rho'}{OO'}$. (Ici ρ et ρ' sont les rayons respectifs de Γ et Γ' .) En considérant les triangles $O'OT$ et $O'A'J'$, on montre de la même manière que $A'B' = \frac{2\rho \cdot \rho'}{OO'}$. $\diamond$

Exercice 40 (Théorème du papillon)

Comme M est le milieu de $[AA']$, la droite (OM) est perpendiculaire à ce segment ; $[OM]$ est donc hauteur du triangle BOB' . Pour montrer que M est le milieu de $[BB']$, il suffit de montrer que la droite (OM) est la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{BOB'}$.

c'est-à-dire que les angles $\widehat{BOM}$ et $\widehat{B'OM}$ sont égaux. Soient K et K' les milieux respectifs des segments $[ST]$ et $[S'T']$.



• Les triangles MST et $MS'T'$ sont semblables car $\widehat{MTS} = \widehat{MT'S'}$ (interceptent le même arc) et $\widehat{MST} = \widehat{MS'T'}$ (interceptent aussi le même arc). D'où $\frac{SM}{ST} = \frac{S'M}{S'T'}$.

• De la relation qui précède, on déduit que $\frac{SM}{SK} = \frac{SM}{\frac{ST}{2}} = \frac{S'M}{\frac{S'T'}{2}} = \frac{S'M}{S'K'}$. Les deux triangles SKM et $S'K'M$ ont donc un angle égal $\widehat{MSK} = \widehat{MS'K'}$ compris entre deux côtés proportionnels ; ils sont donc semblables. On en déduit alors $\widehat{SKM} = \widehat{S'K'M}$.

• Comme K est le milieu du segment $[ST]$, la droite (OK) est perpendiculaire à ce segment. Le quadrilatère $OMBK$ a deux angles opposés droits ; il est donc inscrit dans un cercle γ . Par suite les angles $\widehat{MKB}$ et $\widehat{MOB}$ sont égaux car ils interceptent le même arc que sous-tend la corde $[BM]$. De la même manière on montre que $\widehat{MK'B'} = \widehat{MOB'}$. Finalement, on a :

$$\widehat{MOB} = \widehat{MKB} = \widehat{MK'B'} = \widehat{MOB'}$$

ce qui termine la démonstration. ◇

Exercice 41

1 - On a $z_t = f(t)e^{it}z$. L'application s_t est donc la composée de la rotation r de centre l'origine O et d'angle t et de l'homothétie h de centre l'origine et de rapport $f(t)$; s_t est donc la similitude de centre O , de rapport $f(t)$ et d'angle t .

2 - Notons (x_t, y_t) les coordonnées cartésiennes du point M_t . Alors :

$$\begin{cases} x_t = f(t)((\cos t)x - (\sin t)y) \\ y_t = f(t)((\sin t)x + (\cos t)y). \end{cases}$$

Il n'est pas difficile de voir que l'application inverse s_t^{-1} associe au point de coordonnées (x, y) le point :

$$\frac{1}{f(t)}((\cos t)x + (\sin t)y, -(\sin t)x + (\cos t)y).$$

3 - Comme $f(t) = \frac{1}{\cos t}$, $x_t = x - \theta y$ et $y_t = \theta x + y$ avec $\theta = \operatorname{tg}(t)$. Le triangle OMM_t est rectangle en M si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{MM_t}$ sont orthogonaux. Les coordonnées de ces derniers sont :

$$\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{MM_t} = \begin{pmatrix} -\theta y \\ \theta x \end{pmatrix}$$

Le calcul immédiat de leur produit scalaire $\langle \overrightarrow{OM}, \overrightarrow{MM_t} \rangle$ montre qu'il est nul.

4 - Comme les points O et M sont fixes, la droite (OM) l'est aussi. Donc, le point M_t varie (lorsque t varie dans $]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$) de telle sorte que le vecteur $\overrightarrow{MM_t}$ reste orthogonal à (OM) , donc sur la droite passant par M et orthogonale à (OM) . Comme d'autre part t décrit tout l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$, M_t décrit toute cette perpendiculaire. Finalement $J(M)$ est la droite passant par M et perpendiculaire à la droite (OM) .

5 - Des relations $x_t = x - \theta y$ et $y_t = \theta x + y$ on tire $x = \frac{1}{1+\theta^2}(x_t + \theta y_t)$ et $y = \frac{1}{1+\theta^2}(-\theta x_t + y_t)$. L'équation $x = a$ de la droite $\mathcal{D}$ donne automatiquement celle de sa transformée $\mathcal{D}_t$ par la similitude s_t :

$$x_t + \theta y_t = a(1 + \theta^2).$$

6 - Comme $\mathcal{B}$ est tangente à la droite $\mathcal{D}$ d'équation $x = a$ et qu'elle a pour foyer le point O , sa directrice Δ est parallèle à $\mathcal{D}$ et a pour équation $x = 2a$. Comme tout point $M = (x, y)$ de $\mathcal{B}$ vérifie $\text{distance}(M, O) = \text{distance}(M, \Delta)$ on a $OM^2 = MM_0^2$ où M_0 est la projection orthogonale de M sur Δ . En faisant intervenir les coordonnées des divers points on obtient la relation $x^2 + y^2 = (x - 2a)^2$; ce qui nous donne l'équation cherchée :

$$y^2 = 4a(a - x).$$

7 - Les points d'intersection K_t de la droite $\mathcal{D}_t$ et de la parabole $\mathcal{B}$ ont leurs coordonnées (x, y) solutions du système :

$$\begin{cases} y^2 = 4a(a - x) \\ x + \theta y = a(1 + \theta^2). \end{cases}$$

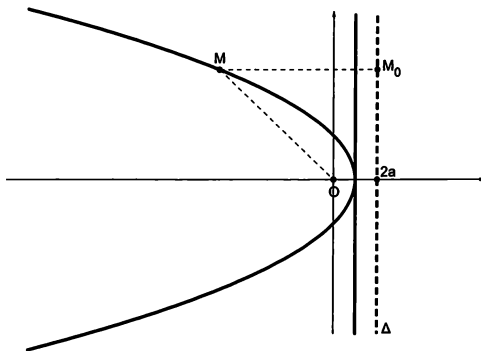
Pour résoudre ce système, on reporte dans la première équation la valeur de x prise dans la seconde. On obtient l'équation du second degré en y :

$$y^2 - 4a\theta y + 4a^2\theta^2 = 0$$

qui admet comme seule solution $y = 2a\theta$; par suite $x = a(1 - \theta^2)$. Il n'y a donc qu'un seul point d'intersection entre la parabole $\mathcal{B}$ et la droite $\mathcal{D}_t$; comme cette dernière n'est jamais (pour tout t) parallèle à l'axe de $\mathcal{B}$, elle lui est forcément tangente. Le point de tangence est $K_t = (a(1 - \theta^2), 2a\theta)$. (Pour se rafraîchir la mémoire, le lecteur peut faire l'exercice qui consiste à étudier la position relative d'une droite par rapport à une parabole.)

8 - D'après la question 7, les coordonnées du point K_t (qui est sur la parabole $\mathcal{B}$) sont données en fonction de t (on se rappelle que $\theta = \text{tg}(t)$) par :

$$\begin{cases} x = a(1 - \theta^2) \\ y = 2a\theta. \end{cases}$$



Quand t tend vers $-\frac{\pi}{2}$, θ tend vers $-\infty$ et donc x et y tendent vers $-\infty$; pour $t = 0$, K_t est au point de coordonnées $(a, 0)$; le point mobile K_t décrit donc toute la partie de $\mathcal{B}$ en dessous de l'axe des x lorsque $t \in]-\frac{\pi}{2}, 0]$. De la même manière on montre que K_t décrit toute la partie de $\mathcal{B}$ au-dessus de l'axe des x lorsque $t \in [0, \frac{\pi}{2}[$.

9 - On pose $\beta = \sqrt{|\rho^2 - a^2|}$. La conique Γ est une ellipse si $\rho > a$ et une hyperbole si $\rho < a$.

• $\rho > a$. Alors Γ est l'ellipse d'équation :

$$\frac{(x - a)^2}{\rho^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1.$$

Le centre de cette ellipse est le point $\omega = (a, 0)$. Pour $y = 0$, on a deux sommets dont les abscisses respectives sont $a + \rho$ et $a - \rho$, donc le grand axe est égal à 2ρ . De même, pour $x = a$, on a deux sommets d'ordonnées respectives β et $-\beta$, donc le petit axe est égal 2β . Par suite les foyers (qui sont sur l'axe des x) ont pour abscisses respectives $a + c$ et $a - c$ avec $c = \sqrt{\rho^2 - \beta^2} = a$. Donc $F = (2a, 0)$ et $F' = (0, 0)$.

• $\rho < a$. Alors Γ est l'hyperbole d'équation :

$$\frac{(x - a)^2}{\rho^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1.$$

Là aussi, le centre de la conique est le point $\omega = (a, 0)$; de façon presque similaire que précédemment, on montre que les foyers F et F' ont pour abscisses respectives $a + c$ et $a - c$ avec $c = \sqrt{\rho^2 + (a^2 - \rho^2)} = a$. Donc $F = (2a, 0)$ et $F' = (0, 0)$.

10 - Comme s_t est une similitude, le centre O_t du cercle $\mathcal{C}_t$ est le transformé de A c'est-à-dire le point O_t de coordonnées $(a, \theta a)$; quant à son rayon ρ_t il est égal au produit du rayon de $\mathcal{C}$ et du rapport de similitude, c'est-à-dire $\rho_t = \frac{\rho}{\cos t}$.

11 - Comme on vient de le voir, le cercle $\mathcal{C}_t$ a pour centre le point $O_t = (a, a\theta)$ et pour rayon $\rho_t = \frac{\rho}{\cos t}$. Il a donc pour équation :

$$(x - a)^2 + (y - a\theta)^2 = \rho_t^2$$

c'est-à-dire :

$$(x - a)^2 + (y - a\theta)^2 = \rho^2(1 + \theta^2).$$

12 - Comme les centres de $\mathcal{C}_t$ et Γ sont tous les deux sur la droite $\mathcal{D}$ (qui est un axe de symétrie commun à $\mathcal{C}_t$ et Γ), leurs points d'intersection sont forcément symétriques par rapport à $\mathcal{D}$. Les coordonnées (x, y) de ces points sont les solutions du système :

$$\begin{cases} (x - a)^2 + (y - a\theta)^2 = \rho^2(1 + \theta^2) \\ \frac{(x - a)^2}{\rho^2} + \frac{y^2}{\rho^2 - a^2} = 1. \end{cases}$$

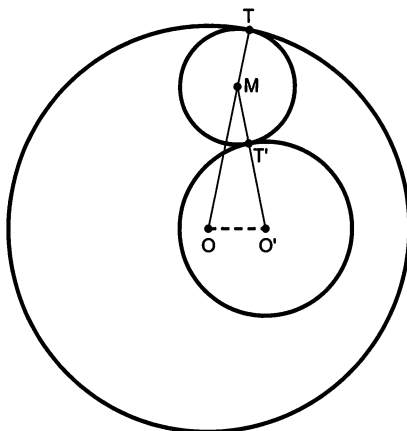
Sa résolution donne $y = \frac{\theta(a^2 - \rho^2)}{a}$. En reportant dans la deuxième équation on trouve $(x - a)^2 = \rho^2 \left(1 - \frac{\theta^2}{a^2}(\rho^2 - a^2)\right)$; comme $\rho > a$, la quantité $\tau = \rho^2 \left(1 - \frac{\theta^2}{a^2}(\rho^2 - a^2)\right)$ n'est pas toujours positive ; elle l'est pour $|\theta| \leq \frac{a}{\sqrt{\rho^2 - a^2}}$. Les points L_t et N_t ont alors pour abscisses respectives $a - \tau$ et $a + \tau$.

Exercice 42

Soit M un point de l'ensemble $\mathcal{E}$ cherché. On note T le point de tangence de $\mathcal{C}$ avec Γ et T' celui avec Γ' . On a $MO + MT = \rho$ et $MO' - MT' = \rho'$. En faisant la somme membre à membre de ces deux égalités et en tenant compte du fait que $MT = MT'$, on obtient la relation :

$$MO + MO' = \rho + \rho'$$

qui montre que l'ensemble cherché $\mathcal{E}$ est l'ellipse de foyers O et O' et de grand axe $\rho + \rho'$.



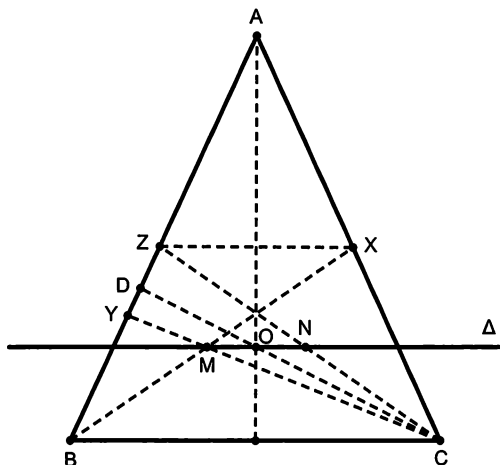
Exercice 43

La parallèle à la base BC et passant par X coupe le côté AB en un point Z . Soient O le point de rencontre de la hauteur AH issue de A et la droite Δ et N le symétrique de M par rapport à O ; O est aussi le point d'intersection de Δ avec la droite (CZ) . Le faisceau $\{(CB), (CO), (CM), (CN)\}$ est harmonique car la parallèle Δ (par le point O) à la première droite coupe les droites (CM) et (CN) de telle sorte que O est le milieu du segment $[MN]$ (cf. la fiche sur le birapport). D'autre part, le faisceau harmonique $\{(CB), (CO), (CM), (CN)\}$ est coupé par la droite (AB) respectivement en les quatre points B, D, Y et Z ; donc ces derniers forment une division harmonique c'est-à-dire :

$$\frac{\overline{YB}}{\overline{YD}} : \frac{\overline{ZB}}{\overline{ZD}} = -1.$$

Un calcul simple nous donne $\frac{1}{\overline{BY}} + \frac{1}{\overline{BZ}} = \frac{2}{\overline{BD}}$. Comme les quantités $\overline{BY}$, $\overline{BZ}$ et $\overline{BD}$ ont même signe, on peut écrire $\frac{1}{\overline{BY}} + \frac{1}{\overline{BZ}} = \frac{2}{\overline{BD}}$. Or $BZ = CX$; et finalement :

$$\frac{1}{\overline{BY}} + \frac{1}{\overline{CX}} = \frac{2}{\overline{BD}} = \text{constante}.$$



QUELQUES EXERCICES EN VRAC

On désigne par $\vec{\mathcal{V}}$ le plan vectoriel. Lorsqu'on parlera de plan affine euclidien dirigé par $\vec{\mathcal{V}}$, on sous-entendra qu'on a muni $\vec{\mathcal{V}}$ d'un produit scalaire noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Exercice 1

On munit le plan vectoriel $\vec{\mathcal{V}}$ d'une base $(\vec{i}, \vec{j})$. On pose :

$$\vec{k} = \vec{i} + \vec{j} \quad \text{et} \quad \vec{\ell} = \vec{i} - \vec{j}.$$

1 - Montrer que $(\vec{k}, \vec{\ell})$ est une base de $\vec{\mathcal{V}}$.

2 - Soit $\vec{u}$ un vecteur de $\vec{\mathcal{V}}$ de coordonnées (x, y) dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$. Calculer ses coordonnées (x', y') dans la base $(\vec{k}, \vec{\ell})$.

Exercice 2

Rappel : on dira qu'un ensemble $\mathcal{P}$ est un *plan affine* de *direction* le plan vectoriel $\vec{\mathcal{V}}$ si le groupe $(\vec{\mathcal{V}}, +)$ opère *simplement* et *transitivement* sur $\mathcal{P}$ c'est-à-dire s'il existe une application $\Psi : (\vec{u}, M) \in \vec{\mathcal{V}} \times \mathcal{P} \mapsto \Psi(\vec{u}, M) \in \mathcal{P}$ telle que :

- a) $\Psi(\vec{0}, M) = M$ pour tout $M \in \mathcal{P}$;
- b) $\Psi(\vec{u}, \Psi(\vec{v}, M)) = \Psi(\vec{u} + \vec{v}, M)$ pour tous $\vec{u}, \vec{v} \in \vec{\mathcal{V}}$ et tout $M \in \mathcal{P}$;
- c) $\Psi(\vec{u}, M) = M$ implique $\vec{u} = \vec{0}$ (*simplicité* de l'action) ;
- d) pour tous $M, N \in \mathcal{P}$ il existe $\vec{u} \in \vec{\mathcal{V}}$ tel que $N = \Psi(\vec{u}, M)$ (*transitivité* de l'action).

Soit $\mathcal{P}$ un ensemble. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.

- 1 - L'ensemble $\mathcal{P}$ a une structure d'espace affine de direction $\vec{\mathcal{V}}$.
- 2 - Il existe une application $(M, N) \in \mathcal{P} \times \mathcal{P} \mapsto \overrightarrow{MN} \in \vec{\mathcal{V}}$ telle que :
 - a) pour tous $M, N, L \in \mathcal{P}$ on a $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NL} = \overrightarrow{ML}$ (relation de Chasles) ;
 - b) pour tout $M \in \mathcal{P}$, l'application $N \in \mathcal{P} \mapsto \overrightarrow{MN} \in \vec{\mathcal{V}}$ est une bijection.
- 3 - Le groupe abélien $(\vec{\mathcal{V}}, +)$ est isomorphe à un groupe de bijections de l'ensemble $\mathcal{P}$ agissant transitivement et simplement (sur $\mathcal{P}$).

Exercice 3

Soient $\mathcal{P}$ un ensemble et $f : \mathcal{P} \longrightarrow \vec{\mathcal{V}}$ une bijection.

1 - Montrer que l'application $\mathcal{P} \times \mathcal{P} \longrightarrow \vec{\mathcal{V}}$ qui à (M, N) associe $f(M) - f(N)$ munit $\mathcal{P}$ d'une structure de plan affine de direction $\vec{\mathcal{V}}$.

2 - Montrer que deux bijections $f, g : \mathcal{P} \longrightarrow \vec{\mathcal{V}}$ définissent la même structure affine si, et seulement si, $g \circ f^{-1}$ est une translation de $\vec{\mathcal{V}}$.

Exercice 4

Dans le plan affine on se donne quatre points alignés A, B, C et D tels que les segments $[AB]$ et $[CD]$ aient le même milieu I . Soit E un point non situé sur la droite qui porte les quatre points A, B, C et D . Montrer que les triangles EAB et ECD ont même centre de gravité.

Exercice 5

Dans le plan affine $\mathcal{P}$ on se donne trois points massiques (A, α) , (B, β) et (C, γ) de telle sorte que (A, B, C) soit un repère affine et $\alpha + \beta + \gamma \neq -1$. On note $\varphi : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$ l'application qui à tout point M associe le barycentre G des points massiques (A, α) , (B, β) , (C, γ) et $(M, 1)$.

- 1 - Montrer que φ est affine et donner sa direction $\vec{\varphi}$.
- 2 - Donner la matrice de $\vec{\varphi}$ dans la base $\mathfrak{b} = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.
- 3 - Donner la nature de l'application φ (translation, homothétie ou autre).

Exercice 6

Dans le plan affine $\mathcal{P}$ on se donne une droite affine Δ et un vecteur non nul $\vec{u}$ non parallèle à Δ et k un réel non nul. On appelle *affinité d'axe Δ , de direction $\vec{u}$ et de rapport k* l'application $a : M \in \mathcal{P} \longmapsto M' \in \mathcal{P}$ avec $\overrightarrow{M_0 M'} = k \overrightarrow{M_0 M}$ où M_0 est la projection de M sur Δ parallèlement à $\vec{u}$. Lorsque $k = -1$, on dira que a est la *symétrie d'axe Δ dans la direction de $\vec{u}$* .

- 1 - Montrer que a est affine et donner sa direction $\vec{a}$.
- 2 - Soit $\vec{v}$ un vecteur non nul parallèle à Δ . Quelle est la matrice de $\vec{a}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$?

Exercice 7

Soit $f : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$ une application injective telle que :

- a) L'image $\text{Im}(f) = f(\mathcal{P})$ engendre affinement $\mathcal{P}$.
- b) f conserve l'alignement et l'ordre des points alignés.

- 1 - Montrer que l'image par f d'un repère affine est un repère affine.

Dans toute la suite on supposera que f est bijective.

- 2 - Soient Δ_1 et Δ_2 deux droites parallèles et Δ'_1 et Δ'_2 les droites engendrées par leurs images respectives par l'application f . Montrer que Δ'_1 et Δ'_2 sont parallèles.

- 3 - Soient A et B deux points distincts, $[AB]$ le segment d'origine A et d'extrémité B et (AB) la droite définie par A et B . Montrer que si J est le milieu de $[AB]$ alors $J' = f(J)$ est le milieu de $[A'B']$.

Soient A et B des points distincts et J le milieu du segment $[AB]$. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on note M le point $\lambda A + (1 - \lambda)B$ et M' son image par f .

- 4 - On suppose que M est situé entre A et B (c'est-à-dire $\lambda \in [0, 1]$). En utilisant le fait que M appartient à l'un des segments $[AJ]$ ou $[BJ]$, construire deux suites adjacentes (A_n) et (B_n) de points de $[AB]$ qui convergent vers M .

- 5 - Montrer à l'aide de cette construction que $M' = \lambda A' + (1 - \lambda)B'$.

- 6 - Examiner le cas où M est à l'extérieur du segment $[AB]$.

- 7 - Dédire de ce qui précède que f est une application affine.

On a ainsi établi le résultat : *Toute bijection $f : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$ qui conserve l'alignement et l'ordre des points alignés est une application affine.*

Exercice 8

On dira qu'une partie $\mathcal{C}$ d'un plan affine est *convexe* si, pour tous points $M, N \in \mathcal{C}$, le segment $[MN]$ est entièrement contenu dans $\mathcal{C}$ c'est-à-dire, pour $\lambda \in [0, 1]$, $(1 - \lambda)M + \lambda N \in \mathcal{C}$.

1 - Donner des exemples de parties convexes et de parties non convexes.

2 - Montrer qu'une intersection quelconque de parties convexes est convexe. Qu'en est-il pour une réunion ?

Soit $\mathcal{C}_0$ une partie non vide de $\mathcal{P}$. On appelle *enveloppe convexe* de $\mathcal{C}_0$ la plus petite (au sens de l'inclusion) partie convexe contenant $\mathcal{C}_0$; on la note $\widehat{\mathcal{C}}_0$.

3 - Montrer que $\widehat{\mathcal{C}}_0$ est l'ensemble de toutes les combinaisons affines finies $\sum_{k=1}^n \lambda_k C_k$ où les C_k sont des points de $\mathcal{C}_0$ et les λ_k des éléments de $[0, 1]$ tels que $\lambda_1 + \dots + \lambda_k = 1$.

4 - Soit $f : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$ une application affine. Montrer que l'image par f d'une partie convexe est convexe.

Exercice 9

On note $(\mathcal{P}, \vec{V})$ un plan affine. Un *parallélogramme* dans $\mathcal{P}$ est la donnée de quatre points A, B, C et D tels que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ ou $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$. On se donne quatre points A, B, C et D tels que trois quelconques d'entre eux soient affinement indépendants. Soient K, L, M et N les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$.

1 - Montrer que les quatre points K, L, M et N forment un parallélogramme.

On note (a_1, a_2) , (b_1, b_2) , (c_1, c_2) et (d_1, d_2) les coordonnées respectivement de A, B, C et D dans un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

2 - Calculer les coordonnées cartésiennes (k_1, k_2) , (ℓ_1, ℓ_2) , (m_1, m_2) et (n_1, n_2) respectivement des points K, L, M et N .

3 - On note Δ l'enveloppe convexe des points A, B, C et D . Montrer que Δ est définie par un système d'inéquations linéaires dont chacune est du type $\alpha x + \beta y + \gamma \geq 0$ où (x, y) sont les coordonnées d'un point de $\mathcal{P}$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Exercice 10

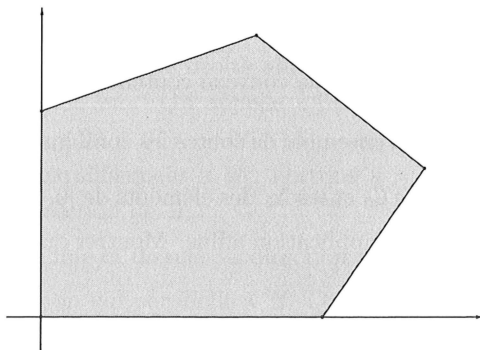
Une entreprise de meubles fabrique des tables de salle à manger $\mathcal{T}_1$ et des tables de cuisine $\mathcal{T}_2$ en utilisant trois machines $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$ et $\mathcal{M}_3$.

Pour fabriquer une table $\mathcal{T}_1$, il faut utiliser la machine $\mathcal{M}_1$ pendant une heure, la machine $\mathcal{M}_2$ pendant une heure et la machine $\mathcal{M}_3$ pendant trois heures. Pour une table $\mathcal{T}_2$ il faut une heure de $\mathcal{M}_1$, deux heures de $\mathcal{M}_2$ et une heure de $\mathcal{M}_3$.

Les seules contraintes sont que, pour la période à venir, les machines $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$ et $\mathcal{M}_3$ ne sont respectivement disponibles que 60 heures, 90 heures et 150 heures.

Sachant qu'une table T_1 rapporte 50 euros et une table T_2 rapporte 25 euros, calculer ce que doit produire l'entreprise pour réaliser le bénéfice maximal. Calculer ce bénéfice.

Ceci est un vrai problème de géométrie affine plane contrairement à ce qu'on pourrait penser ! Il s'agit de trouver un couple (x, y) de réels positifs pour lequel une certaine fonction linéaire (qui représente le bénéfice) $f(x, y) = \alpha x + \beta y$ (les nombres α et β sont connus) atteint son maximum. Le couple varie sur un polygone convexe imposé par les contraintes du temps d'utilisation des machines. Le problème devient alors complètement géométrique : régionnement du plan.



Exercice 11

On considère l'espace vectoriel $\mathcal{P} = \mathbb{R}^2$ muni de sa structure canonique d'espace affine. On l'identifie à $\mathbb{C}$ via l'application $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto z = x + iy \in \mathbb{C}$; on peut ainsi voir $\mathcal{P}$ comme espace complexe ou comme espace réel. On considère l'application $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par :

$$f(z) = uz + v\bar{z} + w$$

où u, v et w sont des nombres complexes.

- 1 - Montrer que f est une application affine réelle. Déterminer sa direction $\vec{f}$.
- 2 - Donner une condition nécessaire et suffisante sur u, v et w pour que f soit un automorphisme affine. Dire aussi quand f est une translation, une rotation ou une homothétie.

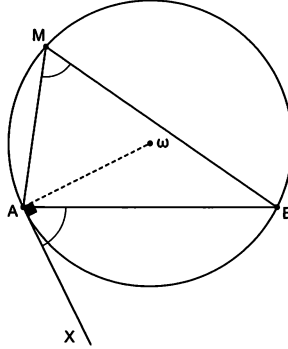
Exercice 12

On considère le plan affine euclidien $\mathcal{P}$ orienté à l'aide d'une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$. Soit C_n un groupe de n isométries fixant toutes un même point ω .

- 1 - Montrer que si tous les éléments de C_n préservent l'orientation alors C_n est un groupe de rotations isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
- 2 - Montrer que si au moins un élément de C_n ne préserve pas l'orientation alors n est pair $n = 2p$ et contient un sous-groupe distingué d'ordre p formé de rotations.

Exercice 13

Soient Γ un cercle de centre ω . On prend deux points A et B sur Γ ; par A on mène la tangente (AX) à Γ (cf. Figure ci-dessous). Pour tout M sur Γ , montrer que l'angle géométrique $\widehat{XAB}$ est égal à $\widehat{AMB}$ ou à $\pi - \widehat{AMB}$.

**Exercice 14**

Le plan $\mathcal{P}$ étant rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère les 3 points $A = (4, 0)$, $B = (9, 0)$ et $C = (0, 3)$.

- 1 - Déterminer l'équation du cercle circonscrit au triangle ABC .
- 2 - Donner les équations des cercles passant par A et B et tangents à l'axe des ordonnées.

Exercice 15

On considère deux points A et B distincts sur un cercle et M un point variable de l'arc d'extrémités A et B . Sur la demi-droite issue de B contenant M on considère le point N tel que $BN = AM$.

- 1 - Montrer que l'angle $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BN})$ reste constant quand M varie.
- 2 - En déduire qu'il existe une rotation qui transforme A en B et M en N dont le centre ω et l'angle ne dépendent pas de M .
- 3 - Quel est le lieu géométrique du point N ?

Exercice 16

Soit ABC un triangle. On note ω , G et H respectivement le centre du cercle Γ circonscrit à ABC , le centre de gravité et l'orthocentre du triangle ABC . Soit ρ le rayon du cercle Γ .

- 1 - Montrer que la longueur du segment $[AH]$ est égale à 2 fois la distance de ω à la droite (BC) . Montrer que ω , G et H sont sur une même droite (qu'on appelle la droite d'Euler du triangle ABC).

2 - Montrer que les cercles circonscrits respectivement aux triangles AHC , BHC et AHB ont même rayon égal à ρ .

Exercice 17

On se donne deux cercles Γ et Γ' de centres respectifs ω et ω' . Construire un cercle tangent à Γ et Γ' .

Exercice 18

Soit ABC un triangle. Sur les côtés BC , AC et BA on se donne trois points notés respectivement A' , B' et C' . Par ces trois points on trace les perpendiculaires Δ_1 , Δ_2 et Δ_3 respectivement aux côtés BC , AC et BA . Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que Δ_1 , Δ_2 et Δ_3 soient concourantes est :

$$(A'B^2 - A'C^2) + (B'C^2 - B'A^2) + (C'A^2 - C'B^2) = 0.$$

Exercice 19

Soient r et r' deux rotations de centres respectifs ω et ω' et d'angles respectifs θ et θ' tels que $\frac{\theta+\theta'}{2}$ ne soit pas congru à 0 modulo π . La composée $r = r' \circ r'$ est alors une rotation d'angle $\theta + \theta'$; construire géométriquement son centre Ω .

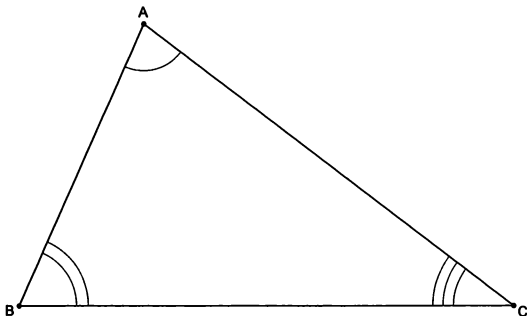
Exercice 20

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs (tous les deux non nuls) du plan vectoriel euclidien $\vec{V}$. On appelle *cosinus* de l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$ le nombre : $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}$. C'est un nombre réel compris entre -1 et $+1$. Il est clair que $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \cos(\vec{u}_0, \vec{v}_0)$ où $\vec{u}_0 = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$ et $\vec{v}_0 = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$; on peut donc supposer les vecteurs de norme 1 pour définir le cosinus. Une autre façon de faire est la suivante. On se donne un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ avec $\vec{u} = \vec{i}$. Alors $\cos(\vec{u}, \vec{v})$ est l'abscisse du point M tel que $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$. L'ordonnée de M est le *sinus* de $(\vec{u}, \vec{v})$ qu'on note $\sin(\vec{u}, \vec{v})$.

Soient ABC un triangle (non plat). Établir la relation :

$$\frac{\sin(\widehat{BAC})}{BC} = \frac{\sin(\widehat{ABC})}{AC} = \frac{\sin(\widehat{ACB})}{AB} = \frac{1}{2\rho}$$

où ρ est le rayon du centre circonscrit au triangle ABC .



Exercice 21

On se donne deux segments de longueurs respectives a et b . Construire deux segments de longueurs respectives x et y (avec $y \geq x$) vérifiant $\sqrt{xy} = a$ et $x + y = b$. Même question si on impose à x et y de vérifier $\sqrt{xy} = a$ et $y - x = b$.

Exercice 22

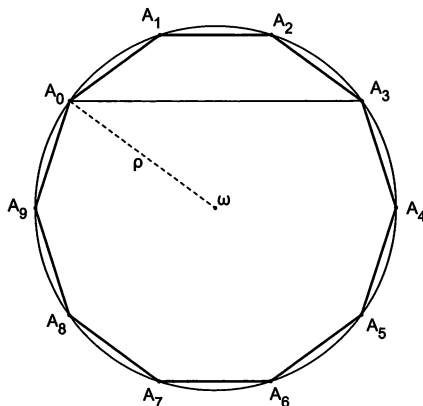
On appelle *polygone régulier* à n côtés (on suppose $n \geq 3$), qu'on note $\mathfrak{P}_n$, tout polygone convexe ayant tous ses côtés égaux et tous ses angles égaux. Un tel polygone est toujours inscrit dans un cercle (le vérifier).

1 - Donner une construction géométrique de $\mathfrak{P}_3$ (*triangle équilatéral*), $\mathfrak{P}_4$ (*carré*), $\mathfrak{P}_6$ (*hexagone régulier*) et $\mathfrak{P}_8$ (*octogone régulier*).

Pour $\mathfrak{P}_{10}$ (*décagone régulier*) la construction n'est pas immédiate et c'est l'objet de ce qui va suivre. Soit donc $A_0A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8A_9$ un décagone régulier. On note ρ le rayon de son cercle circonscrit et on pose $A_0A_1 = x$ et $A_0A_3 = y$.

2 - Montrer que x et y vérifient les relations $\sqrt{xy} = \rho$ et $y - x = \rho$.

3 - Donner la construction géométrique du décagone régulier $\mathfrak{P}_{10}$ et en déduire celle de $\mathfrak{P}_5$ (*pentagone régulier*).



Juste pour la culture !

Théorème (Gauss & Wantzel). *Un polygone régulier à n côtés est constructible si, et seulement si, n est un produit fini d'une puissance de 2 et d'entiers premiers ≥ 3 distincts deux à deux et de la forme $2^p + 1$.*

Les nombres premiers de la forme $n = 2^p + 1$ sont appelés *premiers de Gauss*. Par exemple, la construction de $\mathfrak{P}_n$ est possible pour $n = 17 = 2^4 + 1$, $n = 257 = 2^8 + 1$ etc. Mais qu'en est-il de la construction effective ? Elle n'est pas si évidente ! Gauss (*) l'a faite pour $n = 17$ (il avait 19 ans) et c'était déjà un véritable tour de force !

(*) Carl Friedrich GAUSS (1777-1855) : mathématicien génial ! Il a travaillé dans presque tous les domaines des mathématiques et y a apporté des contributions extrêmement profondes.

Exercice 23

Soit $(G, +)$ un groupe d'élément neutre 0. On note $\text{Aut}(G)$ l'ensemble de tous les automorphismes de G c'est-à-dire tous les homomorphismes bijectifs $G \longrightarrow G$ muni de la composition.

1 - Montrer que $\text{Aut}(G)$ est un groupe.

Soient Γ un autre groupe dont l'élément neutre sera noté 1. Une *représentation* de Γ dans G est un homomorphisme $\rho : \Gamma \longrightarrow \text{Aut}(G)$. Elle permet de définir une action de Γ sur G :

$$\Phi : (\gamma, g) \in \Gamma \times G \longmapsto \rho(\gamma)(g) \in G.$$

On munit $\Gamma \times G$ de la loi de composition :

$$(\gamma, g) \cdot (\gamma', g') = (\gamma\gamma', \rho(\gamma')(g) + g').$$

2 - Montrer que $(\Gamma \times G, \cdot)$ est un groupe. (Préciser son élément neutre et l'écriture de l'inverse de (γ, g) .) Qu'en est-il si ρ est le morphisme constant $\rho = \text{id}_G$?

Le groupe ainsi construit se note $G \rtimes_{\rho} \Gamma$ et s'appelle *produit semi-direct* du groupe G par le groupe Γ .

Soit $\mathfrak{P}_n$ un polygône régulier à n côtés du plan euclidien.

3 - Déterminer toutes les isométries du plan qui laissent $\mathfrak{P}_n$ invariant globalement.

4 - Montrer que le groupe D_n qu'elles engendrent est d'ordre $2n$ et qu'il est isomorphe à un produit semi-direct $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \rtimes_{\rho} (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

Le groupe D_n est appelé *groupe diédral* d'indice n .

Exercice 24

Déterminer le groupe de toutes les isométries du plan qui laissent globalement invariant un carré $A_1A_2A_3A_4$.

Exercice 25

Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles isométriques. Montrer qu'on obtient $A'B'C'$ en appliquant à ABC au plus 3 réflexions (on déterminera leurs axes respectifs).

Exercice 26

Soient ABC un triangle et M un point. Construire la droite Δ passant par M et coupant les droites (BC) , (AC) et (AB) respectivement en A' , B' et C' de telle sorte que le birapport (A', B', C', M) soit égal à -1 .

Exercice 27

Soient ABC un triangle et Γ son cercle circonscrit dont le centre sera noté O . Les bissectrices intérieure et extérieure de l'angle $\widehat{BAC}$ recoupent le cercle Γ en D et D' .

1 - Montrer que la droite (DD') est la médiatrice du côté BC .

2 - Soit H l'orthocentre du triangle ABC . Montrer que la droite (AD) est la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{HAO}$.

Exercice 28

Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe. Soient (Ax) , (By) , (Cz) et (Dt) les bissectrices intérieures respectivement des angles $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ et $\widehat{D}$. Ces bissectrices se coupent deux à deux en 4 points :

$$(Ax) \cap (By) = K, \quad (By) \cap (Cz) = L, \quad (Cz) \cap (Dt) = M \quad \text{et} \quad (Dt) \cap (Ax) = N.$$

Montrer que les quatre points K , L , M et N sont sur un même cercle.

Exercice 29

Soient ABC un triangle et Γ son cercle circonscrit. Par C on mène la perpendiculaire à (AB) qui coupe Γ en D . Par D on mène la perpendiculaire à (BC) qui coupe Γ en E . Montrer que C est le milieu de l'un des arcs $\widehat{AE}$.

Exercice 30

On considère la transformation T qui à un point $M(z)$ associe le point $M'(z')$ tel que $z' = \frac{z+1}{1-z}$ (bien sûr, ceci exige $z \neq 1$).

- 1 - Calculer (x', y') en fonction de (x, y) puis (x, y) en fonction de (x', y') .
- 2 - Quel ensemble le point M décrit-il lorsque M' décrit l'axe réel ?
- 3 - Quel ensemble le point M décrit-il lorsque M' décrit le cercle de centre l'origine 0 et de rayon R ?

Exercice 31

Soient A , B et C trois points distincts ayant respectivement pour affixes a , b et c . Pour tout point variable M d'affixe z , on pose $\rho = \frac{z-b}{z-c} : \frac{a-b}{a-c}$.

- 1 - Quel est l'ensemble des points M pour lesquels on a $|\rho| = 1$?
- 2 - Quel est l'ensemble des points M pour lesquels $\rho \in \mathbb{R}$?

Exercice 32

On note $\mathbb{H}$ le demi-plan supérieur $\{z \in \mathbb{C} : \Im z > 0\}$ et on considère l'application $h : z \in \mathbb{H} \mapsto \frac{z-i}{z+i} \in \mathbb{C}$.

- 1 - Pour tout $z \in \mathbb{H}$, calculer le module de $h(z)$ et montrer qu'il est strictement inférieur à 1.
- 2 - Montrer que h est une transformation bijective de $\mathbb{H}$ sur le disque unité ouvert $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.
- 3 - Quelle est l'image par h de la demi-droite $\delta = \{z \in \mathbb{H} : \Re z = 0\}$?

Exercice 33

Quel est le lieu (dans $\mathbb{C}$) des points M d'affixe z tel que l'argument du nombre complexe $\frac{z-i}{z+i}$ soit inférieur ou égal à $\frac{\pi}{2}$. Résoudre le problème géométriquement.

Exercice 34

Dans le plan complexe $\mathbb{C}$, on considère trois points A , B et C ayant pour affixes respectives a , b et c .

Démontrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que le triangle ABC soit équilatéral et de sens direct est que l'on ait la relation :

$$a + bj + cj^2 = 0 \quad \text{avec} \quad j = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}.$$

Exercice 35

Soient $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$ et Δ trois droites du plan euclidien $\mathcal{P}$ telles que :

$$\text{angle}(\mathcal{D}, \mathcal{D}') = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \text{angle}(\mathcal{D}, \Delta) = \frac{\pi}{4}.$$

Soient O le point d'intersection de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ et $a \in \mathbb{R}_+^*$; on note A le point de $\mathcal{D}$ tel que $OA = a$, A' son symétrique par rapport à O et U le point de Δ qui se projette orthogonalement sur A .

1 - Déterminer la similitude s dans laquelle les points A' et O se transforment respectivement en les points O et U . Quelle est la transformée de la droite $\mathcal{D}$ par cette similitude ?

2 - Donner une construction simple du transformé N d'un point M de $\mathcal{D}$.

3 - Notons S le centre de la similitude s . Quelle est la projection orthogonale de S sur la droite (MN) ?

On suppose qu'on a choisi un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ porté par les deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ et de telle sorte que l'abscisse de U soit a .

4 - Soit P un point sur la droite d'équation $y = -a$. Construire le point $M \in \mathcal{D}$ et son transformé N de telle sorte que P appartienne à la droite (MN) .

5 - Donner l'expression analytique $f(z) = \alpha z + \beta$ associée à s et retrouver l'affixe du point S .

Exercice 36

Soient $\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{F}'$ deux figures géométriques négativement isométriques. Montrer qu'il existe une droite Δ et un vecteur $\vec{u}$ parallèle à Δ tels que la transformation $f = \tau \circ s$ envoie $\mathfrak{F}$ sur $\mathfrak{F}'$ où s est la réflexion d'axe Δ et τ la translation de vecteur $\vec{u}$.

Exercice 37

Soient ABC un triangle et Γ son cercle inscrit. On note A' , B' et C' les points de tangence de Γ respectivement avec les côtés BC , CA et AB .

Montrer que les droites (AA') , (BB') et (CC') sont concourantes.

Exercice 38

Soient ABC un triangle et D et E deux points respectivement sur les côtés AB et AC tels que $AD = AE$. La bissectrice de l'angle $\widehat{ACB}$ coupe la droite (ED) en F . On note θ la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$. Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{CFE}$?

Exercice 39

Soient A et B deux points du plan et Γ un cercle passant par A et B . Soient MN le diamètre de Γ parallèle à la droite (AB) .

Où varient les points M et N lorsque le cercle Γ varie (en passant toujours par A et B bien sûr) ?

Exercice 40

Soient B et C deux points distincts et fixes du plan euclidien. Où varie le point A tel que $\left| \widehat{ABC} - \widehat{ACB} \right| = \frac{\pi}{2}$?

Exercice 41

Soient Δ une droite d'un plan euclidien $\mathcal{P}$, F un point en dehors de Δ et e un réel strictement positif. Pour tout $M \in \mathcal{P}$, on note H sa projection orthogonale sur Δ . On munit $\mathcal{P}$ d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ tel que le vecteur $\vec{i}$ soit parallèle à Δ .

On appelle *conique de foyer F , de directrice Δ et d'excentricité e* l'ensemble $\mathcal{C}$ des points $M \in \mathcal{C}$ tels que $\frac{MF}{MH} = e$.

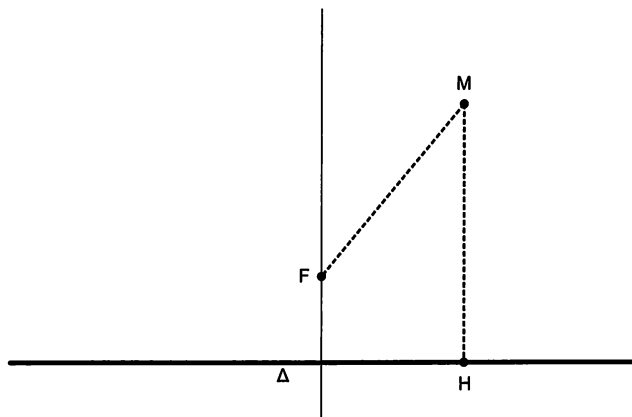
1 - Donner l'équation de $\mathcal{C}$ et montrer que $\mathcal{C}$ est une courbe (connexe ou non) ayant une tangente en chaque point. (Le choix de l'origine O est laissé au lecteur !)

2 - En fonction de e , donner la nature de la conique $\mathcal{C}$ (parabole, ellipse, hyperbole).

3 - Soient $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ deux coniques de même excentricité e . Exhiber, de façon géométrique, une similitude du plan $\mathcal{P}$ envoyant :

– $\mathcal{C}_1$ sur $\mathcal{C}_2$ si $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont connexes (c'est-à-dire lorsque $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont des paraboles ou des ellipses),

– une branche de $\mathcal{C}_1$ sur une branche de $\mathcal{C}_2$ si $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ ne sont pas connexes (c'est-à-dire lorsque $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont des hyperboles).



TROISIÈME PARTIE

PAVAGES DU PLAN

Un *pavage* est une partition du plan en polygones ne pouvant ni se chevaucher ni laisser de place vide. Ses *symétries* sont des mouvements qui consistent à pousser, faire tourner, renverser, mais tout en préservant le décor. Elles se composent, donnent lieu à de nouvelles symétries et forment un groupe d'isométries du plan. La classification de ce type de groupes est maintenant établie : il y a exactement 17 groupes paveurs ! On sait aussi que les seuls polygones réguliers qui pavent le plan sont le triangle équilatéral, le carré et l'hexagone !

Dans cette dernière partie, nous avons choisi de présenter le thème *pavages* pour trois raisons : il est intimement lié à des choses familières telles que les carrelages qu'on rencontre souvent dans la vie quotidienne ; il contient pléthore de notions géométriques importantes, en premier lieu les isométries du plan qui sont au cœur de la géométrie euclidienne et les revoir dans ce cadre ne peut être que bénéfique ; il y a un aspect ludique dans le traitement du sujet.

1. Généralités et définitions

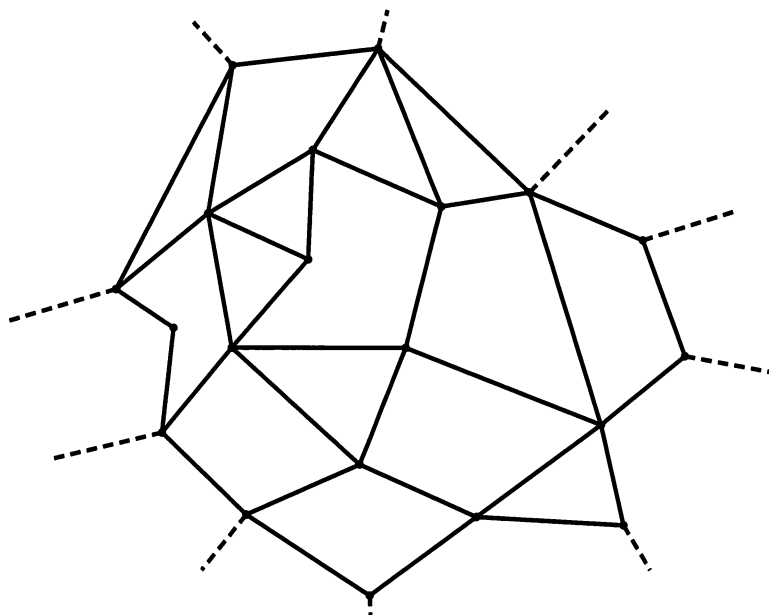
Comme toujours on se donne un plan affine $\mathcal{P}$ dirigé par un plan vectoriel $\vec{\mathcal{V}}$ muni d'un produit scalaire. Ce produit scalaire induit, comme on le sait, une norme $|| \cdot ||$ sur $\vec{\mathcal{V}}$ et donc une distance $d(M, N) = ||\overrightarrow{MN}||$ sur $\mathcal{P}$. Un pavage se définit de façon générale en utilisant la notion de *disque topologique* mais on se contentera du cas où celui-ci est un polygone.

1.1. Définition. *Un pavage du plan $\mathcal{P}$ est une décomposition de $\mathcal{P}$ en parties toutes homéomorphes à un disque et telles que deux quelconques d'entre elles aient leurs intérieurs disjoints.*

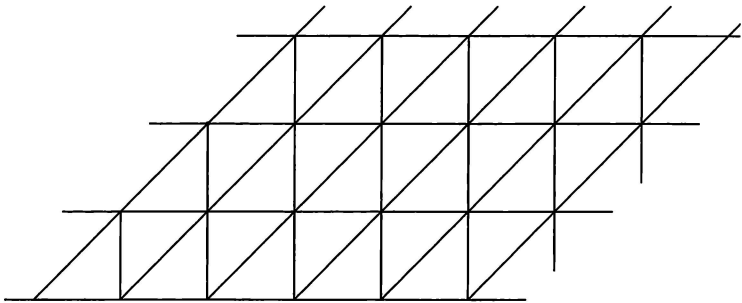
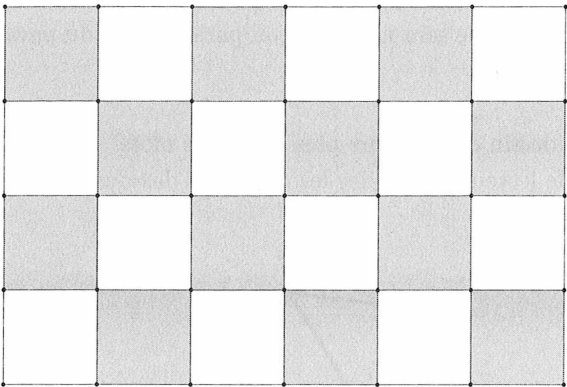
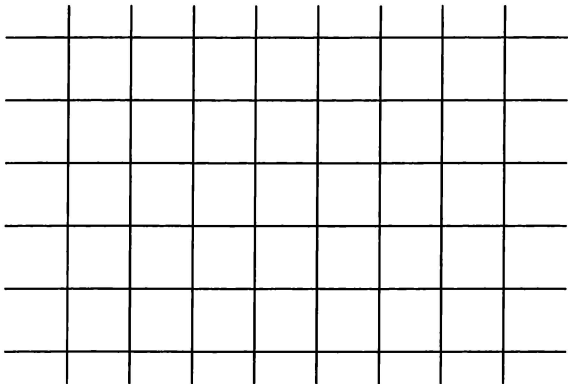
On se contentera donc du cas où ces “disques topologiques” sont des polygones. *Paver* un plan, c'est donc tout simplement le couvrir par des polygones qui n'ont en commun que des arêtes ou des sommets. On pourrait en obtenir à partir d'une distribution discrète de points du plan qu'on joint par des segments de telle sorte que deux quelconques d'entre eux ne se coupent pas. Chacun d'eux est appelé *pavé* (on dit aussi *tuile*). Leur ensemble sera noté $\mathcal{T}$ et on parlera donc du pavage $\mathcal{T}$.

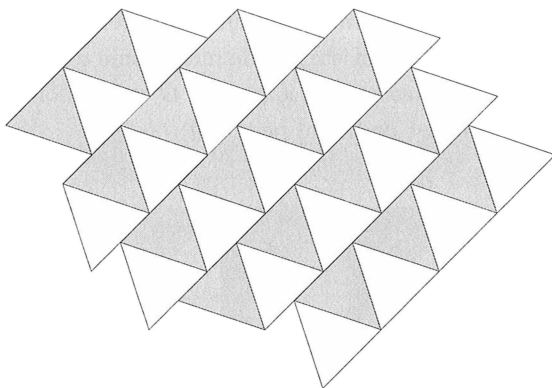
1.2. Exemples

Comme “Un dessin dit toujours plus que mille mots” (proverbe anglais), invitons tout simplement le lecteur à regarder les dessins ci-dessous. Le premier est un pavage tout à fait quelconque.



Les autres exemples qui suivent ont un peu plus de particularité. On verra après dans quel sens.

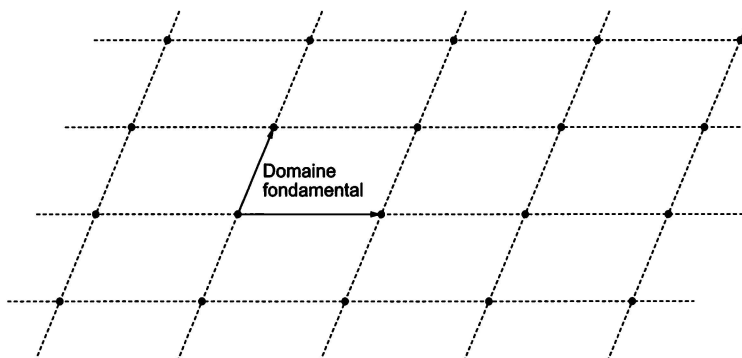




On remarque que sur ce dernier pavage, les côtés des polygones se croisent en des points qui ne sont pas a priori des sommets. On s'interdira dans la suite ce genre de situation (juste pour simplifier les choses).

1.3. Définition. Un *automorphisme* d'un pavage $\mathcal{T}$ est une isométrie du plan $\mathcal{P}$ qui envoie pavé sur pavé.

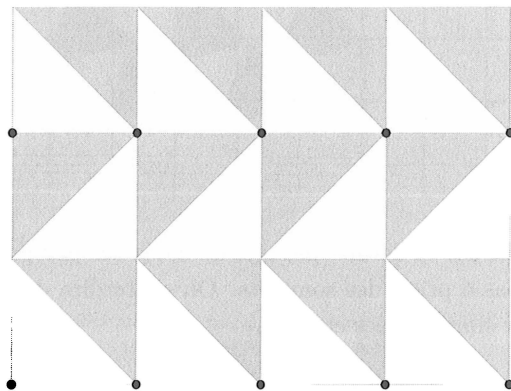
Les automorphismes de $\mathcal{T}$ forment un groupe (sous-groupe donc de $\text{Isom}(\mathcal{P})$) qu'on notera $G_{\mathcal{T}}$. On dira que $\mathcal{T}$ est *périodique* si $G_{\mathcal{T}}$ contient un *réseau* $\Gamma = \mathbb{Z}t_1 \oplus \mathbb{Z}t_2$ (t_1 et t_2 sont des translations linéairement indépendantes) de $\vec{\mathcal{V}}$ (sinon on dira que $\mathcal{T}$ est *apériodique*). Le groupe Γ possède alors un *parallélogramme fondamental* (on dit aussi *cellule unitaire*) Δ et par suite le nombre de types de pavés qui permettent de construire $\mathcal{T}$ est fini : il suffit de voir ce qui se passe sur Δ .



Le sous-groupe Γ est normal dans $G_{\mathcal{T}}$ et y est d'indice fini c'est-à-dire le groupe quotient $G = G_{\mathcal{T}}/\Gamma$ est fini ; on a donc une extension :

$$0 \longrightarrow \Gamma \hookrightarrow G_{\mathcal{T}} \xrightarrow{\pi} G \longrightarrow 1$$

où π est le morphisme de groupes qui à tout automorphisme affine associe sa direction qui est un automorphisme linéaire de $\vec{\mathcal{V}}$ (cf. Chapitre III & 5). En général, π n'admet pas de *section* c'est-à-dire il n'existe pas de morphisme $\sigma : G \longrightarrow G_{\mathcal{T}}$ tel que $\pi \circ \sigma$ soit l'identité de G ; en d'autres termes le groupe G ne se plonge pas toujours dans $G_{\mathcal{T}}$ (voir l'exemple qui suit tiré de [Arm] page 149).

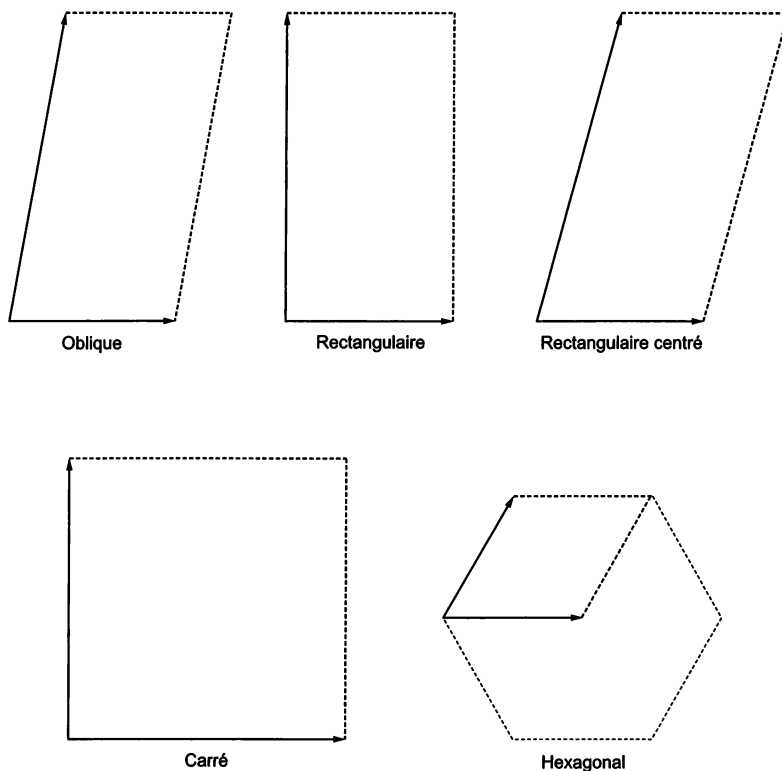


Le groupe des automorphismes $G_{\mathcal{T}}$ du pavage ci-dessus est engendré par la translation $\tau : (x, y) \longmapsto (x + 1, y)$ et par la symétrie glissée $f : (x, y) \longmapsto (-x, y + 1)$. Le groupe fini G consiste lui en l'identité et la symétrie par rapport à l'axe des abscisses $(x, y) \longmapsto (-x, y)$; il ne peut donc pas être plongé dans $G_{\mathcal{T}}$ puisque tous les éléments de ce dernier sont d'ordre infini.

L'orbite de l'origine de $\mathbb{R}^2$ (qu'on identifie à un vectoriel de $\mathcal{P}$) sous l'action de Γ détermine aussi un réseau $\mathcal{R}$. Le groupe G (qui est un sous-groupe du groupe $O(2)$ des isométries linéaires de $\mathbb{R}^2$) agit sur $\mathcal{R}$. La classification des réseaux se décline en fonction de la "forme" de leur domaine fondamental Δ .

Soit $\vec{a}$ un vecteur de Γ de norme $\|\vec{a}\|$ minimale ; soit $\vec{b}$ un deuxième vecteur ayant une norme $\|\vec{b}\| \geq \|\vec{a}\|$ minimale et tel que $(\vec{a}, \vec{b})$ soit une base. (Il est facile de vérifier que $\vec{a}$ et $\vec{b}$ engendrent Γ .) Voici la liste des formes possibles du domaine fondamental (qu'on peut trouver par exemple dans [Arm]) :

- a - *Oblique* : $\|\vec{a}\| < \|\vec{b}\| < \|\vec{a} - \vec{b}\| < \|\vec{a} + \vec{b}\|$.
- b - *Rectangulaire* : $\|\vec{a}\| < \|\vec{b}\| < \|\vec{a} - \vec{b}\| = \|\vec{a} + \vec{b}\|$.
- c - *Rectangulaire centré* : $\|\vec{a}\| < \|\vec{b}\| = \|\vec{a} - \vec{b}\| < \|\vec{a} + \vec{b}\|$.
- d - *Carré* : $\|\vec{a}\| = \|\vec{b}\| < \|\vec{a} - \vec{b}\| = \|\vec{a} + \vec{b}\|$.
- e - *Hexagonal* : $\|\vec{a}\| = \|\vec{b}\| = \|\vec{a} - \vec{b}\| < \|\vec{a} + \vec{b}\|$.



2. Les groupes paveurs

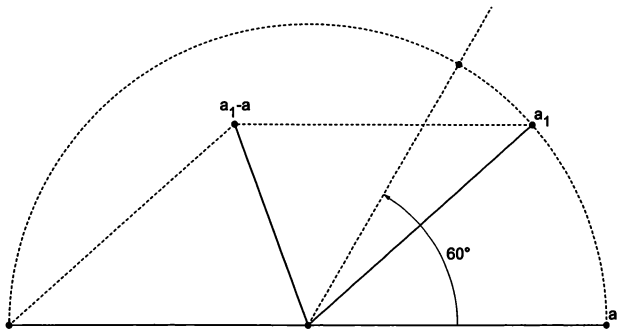
Dans un pavage périodique le motif essentiel se trouve dans le domaine fondamental du réseau. Celui-ci peut aussi posséder une “certaine symétrie interne”. Comme nous l’avons vu, le groupe des automorphismes du pavage est une “extension” du réseau Γ et d’un groupe fini G . Ce dernier est constitué de réflexions ou de rotations ; son action sur Γ lui impose des restrictions et, par là même, le nombre des groupes paveurs sera limité : il y en a 17 exactement !

Notons G^+ le sous-groupe de G dont les éléments préservent l’orientation. C’est un sous-groupe d’indice 2 et il ne contient que des rotations.

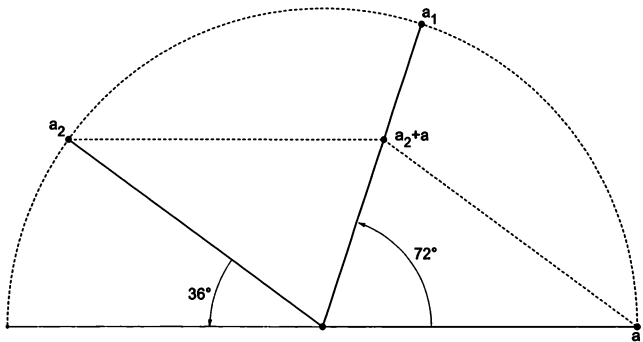
2.1. Théorème. *L’ordre d’une rotation dans le groupe G^+ est 2, 3, 4 ou 6.*

Démonstration. Le groupe fini G^+ agit en préservant le réseau Γ . Soit ρ son générateur. Soit $\vec{a}$ un élément de Γ de norme minimale.

1 - Supposons que l’ordre n de G est strictement supérieur à 6. Dans ce cas l’angle de rotation de ρ est strictement inférieur à $\frac{\pi}{3}$. Posons $\vec{a}_1 = \rho(\vec{a})$; alors le vecteur $\vec{a}_1 - \vec{a}$ appartient à Γ et a une longueur strictement inférieure à celle de $\vec{a}$; ce qui contredit le choix de celui-ci.



2 - Supposons maintenant $n = 5$. Dans ce cas l'angle de rotation de ρ est $\frac{2\pi}{5}$. Posons $\vec{a}_1 = \rho(\vec{a})$ et $\vec{a}_2 = \rho(\vec{a}_1)$. Alors le vecteur $\vec{a}_2 + \vec{a}$ appartient à Γ et a une longueur strictement inférieure à celle de $\vec{a}$; ce qui contredit encore une fois le choix de $\vec{a}$.



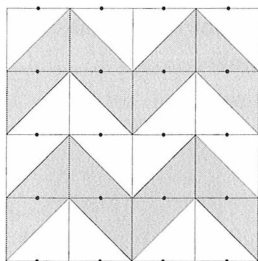
Les contraintes (que nous venons de voir) imposées aux réseaux font que les groupes d'isométries qui “permettent” de paver le plan périodiquement sont assez limités. Ce sont les :

2.2. Groupes paveurs

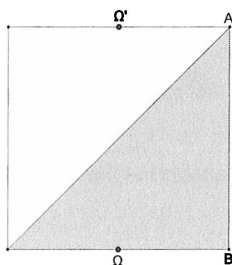
On rappelle qu'un groupe d'isométries du plan est exactement un ensemble de mouvements (y compris celui qui est sans effet) stable par compositions successives et par passage à leurs inverses :

- Les translations poussent,
- les rotations font tourner,
- les réflexions symétrisent par rapport à des axes.

Quand on prend une “brique” avec un motif dedans, qu'on lui applique de toutes les manières possibles les mouvements du groupe et qu'on arrive à paver le plan de façon périodique, on dit alors que le groupe en question est *paveur*. Regardons en détail le pavage ci-dessous.



La brique de départ est celle de la figure qui suit sur laquelle on opère certains mouvements :



- on symétrise par rapport au point Ω et tous ses translatés horizontaux et verticaux par un carreau,
- on symétrise par rapport à l'axe vertical (AB) et tous ses translatés horizontaux et verticaux par un carreau.

Le groupe paveur est engendré par le réseau Γ dont les translations sont données par un vecteur horizontal et un vecteur vertical de deux carreaux (deux briques) chacun, de la symétrie centrée en Ω et la réflexion d'axe la droite (AB) .

On obtient tous les groupes en regardant les diverses formes (qu'on a énumérées) des domaines fondamentaux (de leurs réseaux) ainsi que tous les sous-groupes finis de $O(2)$ qui se projettent par le morphisme π sur une symétrie axiale ou sur l'un des groupes G^+ donnés par le théorème 2.1. Ils sont 17 en tout. On peut trouver la classification dans [Arm] ou dans le site :

<http://www.scienceu.com/geometry/articles/tiling/wallpaper.html>

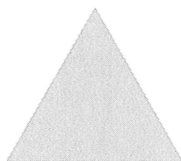
3. Pavages réguliers

On dira que $\mathcal{T}$ est *monoiédral* si tous ses pavés sont isométriques à un seul d'entre eux τ . On peut alors se poser naturellement la :

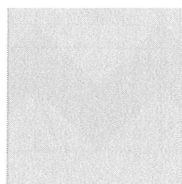
3.1. Question. *Quel polygone τ permet d'obtenir un tel pavage ?*

Beaucoup de gens (géomètres ou pas) répondront oui pour un rectangle, pour un parallélogramme de façon générale, un triangle (puisque un parallélogramme se

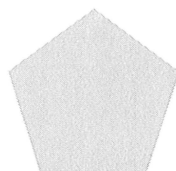
décompose en deux triangles égaux le long de l'une de ses diagonales)... leur réponse est bien sûr exacte et justifiée : ils ont déjà vu pas mal de sols carrelés ! Mais regardons d'abord le cas d'un polygone régulier.



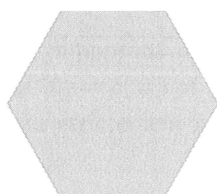
Triangle équilatéral



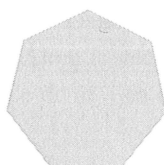
Carré



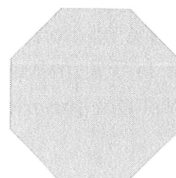
Pentagone



Hexagone



Heptagone



Octogone

Un pavage monoiédral est dit *régulier* si le pavé τ qui permet de le composer est un polygone régulier.

3.2. Question. *Quels sont les polygones réguliers qui permettent de paver le plan ?*

C'est une jolie question ! La réponse est donnée par le théorème qui suit et dont la démonstration est assez facile comme nous allons le voir.

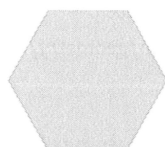
3.3. Théorème. *Les seuls polygones réguliers qui pavent le plan sont le triangle équilatéral, le carré et l'hexagone régulier.*



Triangle équilatéral



Carré

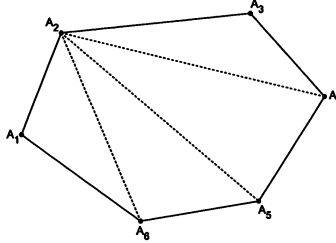


Hexagone régulier

Polygones réguliers paveurs

Démonstration. C'est une conséquence de quelques petites remarques se basant sur des notions élémentaires de la géométrie euclidienne plane.

• La mesure commune des angles d'un polygone régulier à n côtés vaut $\frac{(n-2)}{n}\pi$. Cela découle immédiatement du fait que la somme des angles d'un polygone convexe à n côtés vaut $(n-2)\pi$. Il suffit en effet de décomposer le polygone en $(n-2)$ triangles comme sur le dessin ci-dessous et constater que la somme de ses angles est égale à la somme des angles de tous ces triangles qui le composent.



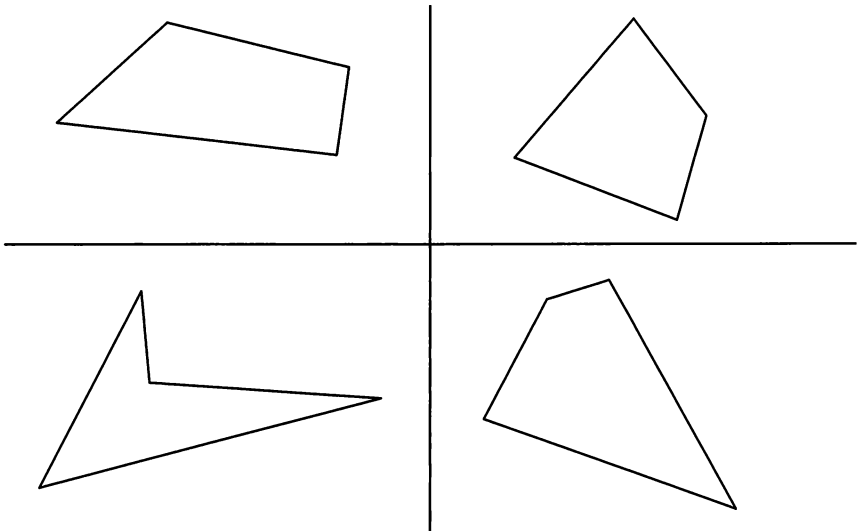
• Si le polygone pave, d'un sommet partent un certain nombre k d'arêtes. Il est donc sommet de k angles égaux valant chacun $\frac{(n-2)}{n}\pi$. D'où $k \cdot \frac{(n-2)}{n}\pi = 2\pi$.

• Cette équation, dont les inconnues sont les nombres entiers naturels n et k , est équivalente à $2(n+k) = kn$. Ses seules solutions sont les couples $(n, k) = (3, 6)$, $(n, k) = (4, 4)$ et $(n, k) = (6, 3)$. $\diamond$

4. Un quadrilatère quelconque pave périodiquement !

Laissons de côté le cas d'un n -polygone avec $n \geq 5$. C'est un problème non trivial dans toute sa généralité. Qu'en est-il alors d'un quadrilatère quelconque ? Aussi bien en géométrie que dans la vie quotidienne on pourrait poser à un carreleur la :

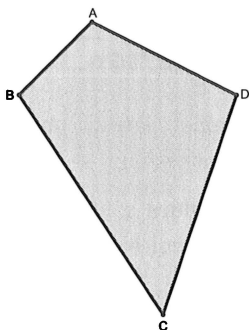
4.1. Question. *Peut-on, par exemple, carrelers le sol avec des carreaux tous "égaux" et ayant l'une des formes suivantes ?*



Il serait effectivement curieux d'avoir sa réponse. Il est probablement rare de voir de tels carrelages dans les endroits qu'on visite quotidiennement ! Mais on peut jouer mathématiquement à cela : on va montrer qu'un quadrilatère convexe quelconque pave toujours périodiquement et on va donner son groupe d'automorphismes ! Cela se fera sous forme d'atelier, c'est-à-dire sous forme d'exercice collectif. (Le cas non convexe se traite de la même manière.)

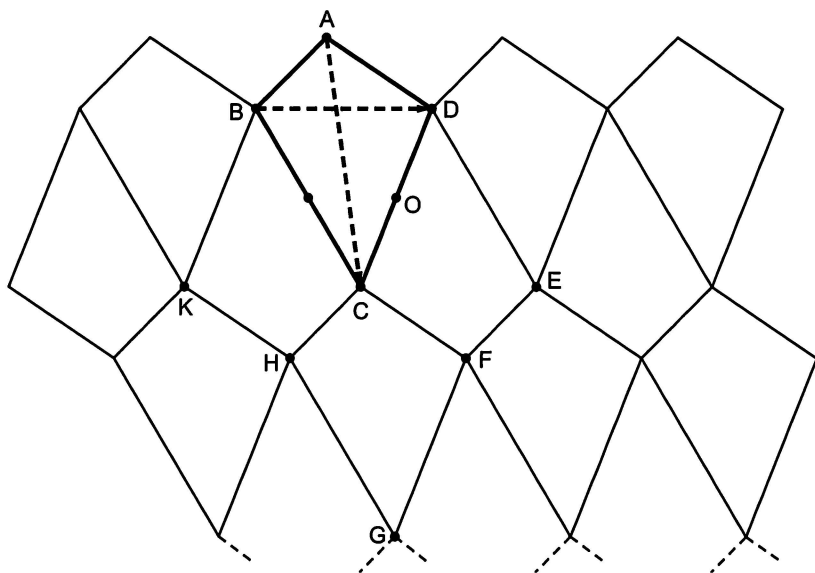
4.2. L'opération carrelage

1 - Prendre une vingtaine de quadrilatères convexes isométriques en papier cartonné du type par exemple celui dessiné ci-dessous. Commencer à les placer côte à côte pour couvrir une portion du plan.



2 - Constaté qu'il n'y a aucune obstruction au niveau des angles à chacun des sommets et que l'opération est toujours possible. Expliquer pourquoi.

3 - Donner les vecteurs des deux translations qui déterminent le réseau du pavage périodique. Voir s'il y a éventuellement d'autres symétries (c'est-à-dire des symétries axiales, des rotations ou autres...)



Ce qu'on fait en réalité :

On se donne un quadrilatère convexe $\tau = ABCD$. On pose :

$$t_1 = \overrightarrow{AC} \quad \text{et} \quad t_2 = \overrightarrow{BD}.$$

(Un vecteur sera confondu avec la translation qu'il définit.) Les deux vecteurs t_1 et t_2 sont linéairement indépendants et définissent donc un réseau :

$$\Gamma = \mathbb{Z}t_1 \oplus \mathbb{Z}t_2$$

de notre plan euclidien $\mathcal{P}$. Pour tout couple $(i, j) \in \mathbb{Z}^2$, on note t_{ij} la translation $it_1 + jt_2$, s la symétrie de centre O , milieu du segment $[CD]$ et on pose :

$$\tau_{ij} = t_{ij}(\tau) \quad \text{et} \quad \tau'_{ij} = t_{ij}(s(\tau)).$$

4.3. Théorème. *L'ensemble $\mathcal{T} = \{\tau_{ij}, \tau'_{ij} : i, j \in \mathbb{Z}\}$ est un pavage périodique du plan dont le groupe d'automorphismes $G_{\mathcal{T}}$ contient au moins le groupe engendré par les translations t_1 et t_2 et la symétrie s .*

Démonstration. Il suffit qu'on montre que les différents quadrilatères qui ont C comme un des sommets sont isométriques à τ . Mais ceci est immédiat : $CFGH$ est son translaté par t_1 , $CDEF$ son symétrique par s et $BCHK$ est le translaté de ce dernier par t_2^{-1} . Les trois angles de τ , $\widehat{BAD}$, $\widehat{CBA}$ et $\widehat{ADC}$ se retrouvent adjacents au quatrième angle $\widehat{BCD}$ (et la somme de ces quatre derniers est bien entendu égale à 2π) :

$$\widehat{BAD} = \widehat{HCF}, \quad \widehat{CBA} = \widehat{HCB} \quad \text{et} \quad \widehat{ADC} = \widehat{DCF}.$$

La situation est reproduite périodiquement par la translation t_2 "horizontalement" et la translation t_1 "verticalement" ; cela permet ainsi de paver tout le plan par des quadrilatères isométriques à τ .

Par construction même de $\mathcal{T}$, les translations t_1 et t_2 et la symétrie s sont des automorphismes du pavage $\mathcal{T}$. Les translations t_1 et t_2 sont imposées et on n'y peut rien ! Mais qu'obtiendrait-on si on avait choisi la symétrie σ par rapport au milieu du segment $[BC]$ (ou celui de $[AB]$ ou $[AD]$) ? La même chose ! En effet, on jette un simple regard sur la figure et on constate que $\sigma = t_2^{-1} \circ s$. Un raisonnement similaire montre que toute symétrie par rapport au milieu de n'importe quelle arête du pavage est dans le groupe engendré par t_1 , t_2 et s . $\square$

5. Pavages hexagonaux

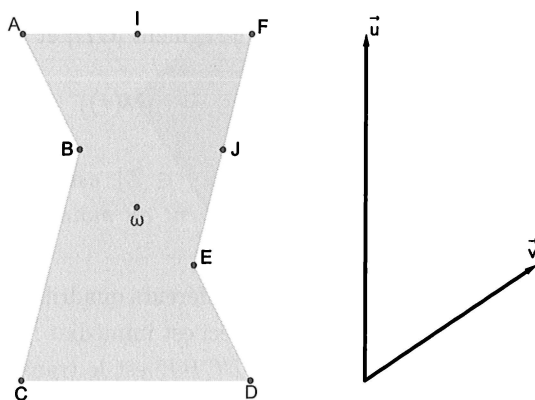
Nous avons déjà vu qu'un hexagone régulier pave toujours et de façon périodique ! La question qui suit est alors naturelle.

5.1. Question. *Existe-t-il des hexagones non réguliers qui pavent ? Si oui, donnent-ils des pavages périodiques comme dans le cas régulier ?*

Évidemment, un hexagone quelconque ne pave pas : on peut construire des exemples à cet effet. Mais il en existe qui pavent même périodiquement. Ceux-là ont bien entendu une certaine particularité. Nous allons en voir un exemple.

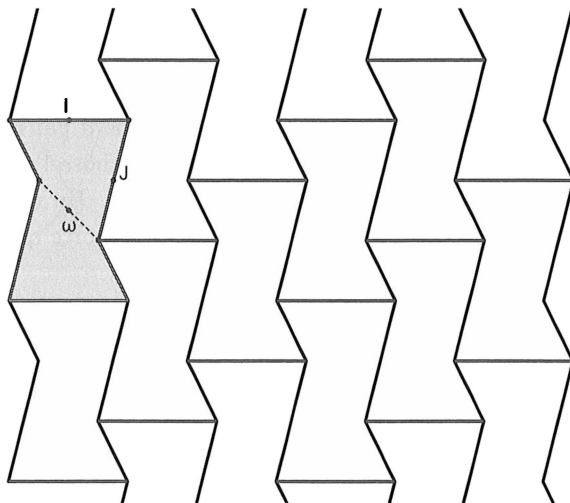
5.2. Théorème. Soit $\Delta = ABCDEF$ un hexagone ayant un centre de symétrie ω . Alors Δ pave périodiquement le plan.

Démonstration. Elle est presque immédiate. Soient I et J les milieux respectifs des segments $[AF]$ et $[FE]$, posons $\vec{u} = 2\vec{\omega I}$ et $\vec{v} = 2\vec{\omega J}$ et notons τ_1 et τ_2 les translations associées respectivement à $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Si σ_ω , σ_I et σ_J sont les symétries de centres respectifs ω , I et J alors $\tau_1 = \sigma_I \circ \sigma_\omega$ et $\tau_2 = \sigma_J \circ \sigma_\omega$.



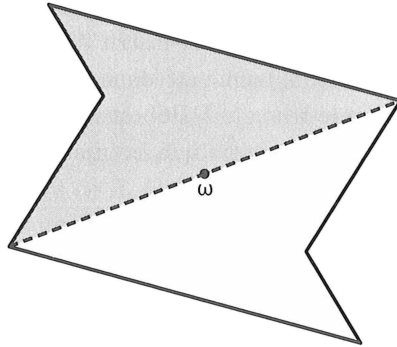
Hexagone avec un centre de symétrie ω

Nous laissons alors au lecteur le soin de voir que les translatsés de Δ par le groupe Γ engendré par les translations τ_1 et τ_2 forment un pavage $\mathcal{T}$ du plan dont le groupe des automorphismes $\text{Aut}(\mathcal{T})$ contient (par construction même) le réseau Γ , donc $\mathcal{T}$ est périodique (cf. dessin qui suit). $\square$



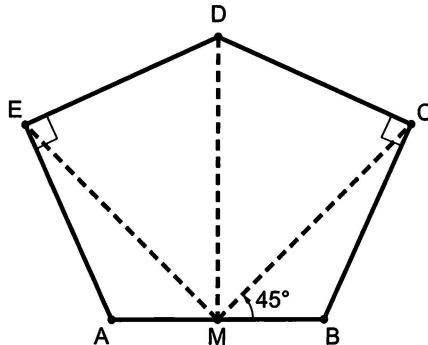
5.3. Première application : *tout quadrilatère convexe ou non pave périodiquement.*

Pour voir comment cela marche, il suffit de symétriser ce quadrilatère par rapport au milieu ω d'un côté dont la droite qui le contient détermine un demi-plan ouvert ne le contenant pas. La réunion des deux quadrilatères (l'initial et son symétrisé) donne un hexagone ayant ω comme centre de symétrie. On applique alors ce qui précède.



5.4. Deuxième application : *Le pavage du Caire*

Il s'agit d'un pavage par un pentagone équilatéral (les 5 côtés sont égaux). On le trouve assez fréquemment dans les rues du Caire, d'où son appellation.



Pavé du Caire

Les angles de sommets C et E sont droits
La somme des angles de sommets A, B et D
est donc égale à 360°

Nous construisons d'abord ce pentagone, ensuite nous montrerons comment on peut l'utiliser pour paver le plan.

6. En guise de petite conclusion

Le thème des *pavages* a beaucoup intéressé les géomètres, les artistes, les artisans... à travers la symétrie et la beauté des objets dont il fait usage. Il a aussi de nombreuses applications en plus de son utilisation pour décorer les sols, les murs et pas mal d'autres surfaces. Il est très ancien, de caractère universel et a tenu une place centrale dans le développement de beaucoup de civilisations : les décors somptueux qu'on peut admirer par exemple au Palais de l'Alhambra à Grenade (Espagne) montrent à quel point l'art islamique a été à la fois précurseur, bâtisseur et porteur d'excellence dans ce domaine.

L'étude des pavages est aussi centrale en cristallographie. Depuis quelques années elle a constitué presque une branche propre des mathématiques combinant géométrie et théorie des groupes. (Le lecteur qui aimerait plonger plus profondément dans le sujet pourrait consulter le beau livre de B. Grünbaum et G. Shephard [GS].) Une question principale reste toujours la suivante : *quels sont les polygones qui donnent des pavages monoédraux* (c'est-à-dire tous les pavés sont isométriques). Précédemment nous avons plus ou moins indiqué quelques éléments de réponse ; nous allons les résumer ci-après.

6.1. Il a été démontré par I. Niven [Niv] en 1978 qu'un polygone convexe ayant un nombre de côtés supérieur ou égal à 7 ne pave jamais. Il faut donc se limiter au triangle, au quadrilatère, au pentagone et à l'hexagone.

6.2. Un parallélogramme pave toujours le plan comme on peut le voir sur l'un des dessins de la section 1 de ce chapitre. Donc tout triangle pave : il suffit de prendre deux exemplaires, de les coller de façon à obtenir un parallélogramme et paver ensuite.

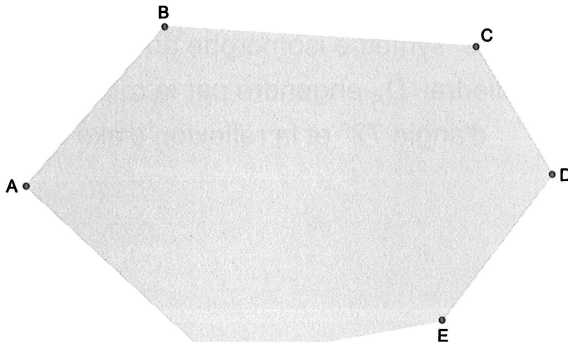
6.3. Tout quadrilatère pave : c'était l'objet de notre atelier et on l'a même fait de façon périodique (pour le cas convexe et le cas non convexe).

6.4. Un hexagone $\Delta = ABCDEF$ pave si, et seulement si, il fait partie de l'une des classes qui suivent :

$$1) \widehat{FAB} + \widehat{ABC} + \widehat{BCD} = 2\pi \text{ et } CD = FA.$$

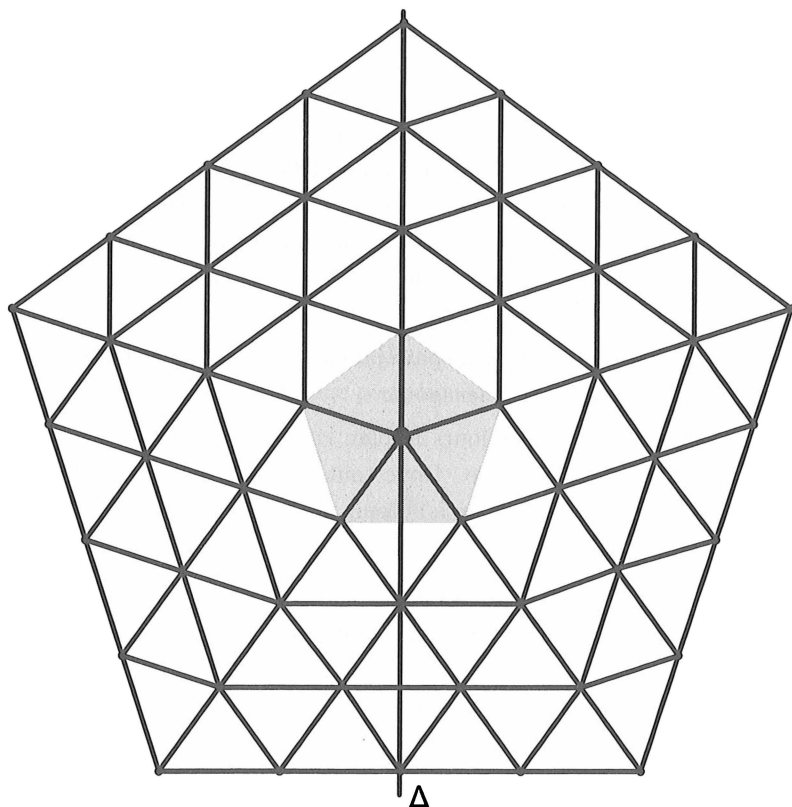
$$2) \widehat{FAB} + \widehat{ABC} + \widehat{CDE} = 2\pi \text{ et } BC = DE \text{ et } CD = FA.$$

$$3) \widehat{FAB} + \widehat{BCD} + \widehat{DEF} = \frac{2\pi}{3} \text{ et } AB = BC, CD = DE \text{ et } EF = FA.$$



La classe 1) englobe le cas de l'hexagone ayant un centre de symétrie que nous avons traité dans la section 5.

6.5. Reste le cas du pentagone. On sait qu'il y en a pas mal qui pavent comme celui qui donne le pavage du Caire que nous avons vu. Mais tous ne sont pas connus à l'heure actuelle et leur détermination est toujours une question ouverte.



Pavage non périodique ayant un groupe de symétrie isomorphe au groupe diédral D_5 engendré par la rotation d'angle 72° et la réflexion d'axe Δ

APPENDICE

RAPPELS SUR LES GROUPES

Les groupes interviennent de façon massive dans ce texte. Dans beaucoup d'endroits nous les avons évoqués avec diverses propriétés qui leur sont rattachées. Il est donc utile de faire quelques rappels là-dessus.

1. Définition et exemples

1.1. Définition. On appelle **groupe** tout ensemble G muni d'une loi de composition interne $(x, y) \in G \times G \mapsto xy \in G$ telle que :

- i) $(xy)z = x(yz)$ pour tous $x, y, z \in G$ (**associativité**) ;
- ii) il existe un élément $e \in G$ (dit **élément neutre**) tel que $ex = x$ et $xe = x$ pour tout $x \in G$;
- iii) pour tout élément $x \in G$ il existe un élément unique $x' \in G$ tel que $xx' = e$ et $x'x = e$. On dira que x' est l'**inverse** de x et on le note x^{-1} .

On démontre que l'élément neutre est unique. Lorsque $xy = yx$ pour tous $x, y \in G$, on dira que le groupe G est *commutatif* ou *abélien* (terminologie utilisée lorsque la loi de groupe est notée additivement : $x + y$). Dans le cas où la loi est additive $+$, l'inverse de x est noté $-x$ et appelé *opposé* de x .

Un groupe est dit *trivial* s'il est réduit à l'élément neutre. On le note indifféremment $\{e\}$, $\{1\}$, $\{0\}$, 1 ou 0.

1.2. Exemples

Il y en a plein. Voici une liste de ceux que l'on rencontre le plus que ce soit en algèbre, géométrie ou analyse.

- $G = \mathbb{R}^n$ muni de l'addition :

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n).$$

L'élément neutre est $(0, \dots, 0)$ et l'opposé de $(x_1, \dots, x_n)$ est $(-x_1, \dots, -x_n)$.

- $G = \mathbb{R}^*$ muni de la multiplication habituelle des réels xy .
- $G = \mathbb{C}^*$ des nombres complexes non nuls muni de la multiplication zw .

- Soient X un ensemble non vide quelconque et $G = \text{Bij}(X)$ l'ensemble de ses bijections $X \rightarrow X$. On munit G de la composition des applications $g \circ f(x) = g(f(x))$. Cette loi confère à G une structure de groupe d'élément neutre la bijection identité $e(x) = x$. Ce groupe est non commutatif dès que X a au moins 3 éléments.

- Le groupe des bijections de l'ensemble $X = \{1, \dots, n\}$ ou de tout autre ensemble de cardinal n se note $\mathfrak{S}_n$ et s'appelle *groupe symétrique* de n éléments. Il a exactement $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-1) \times n$ éléments. C'est un objet fondamental en algèbre et géométrie.

- Soit $\mathcal{M}(2)$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels. On le munit de la multiplication :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ a'c + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix}.$$

C'est une loi de composition interne ayant la matrice $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ comme élément neutre. Mais un élément $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ n'est inversible que si, et seulement si, son déterminant $ad - bc$ est non nul. Ainsi :

$$\text{GL}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}(2) : ad - bc \neq 0 \right\}$$

muni de la multiplication qu'on vient de définir est un groupe. L'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est :

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

1.3. Sous-groupes

Soit G un groupe (la loi sera notée multiplicativement et l'élément neutre 1). Une partie H (non vide) de G est appelée *sous-groupe* de G si elle est stable par multiplication et par passage à l'inverse : $x, y \in H \implies xy \in H$ et $x \in H \implies x^{-1} \in H$. Ces deux conditions sont équivalentes à $x, y \in H \implies xy^{-1} \in H$, ce qui implique $1 \in H$. Par exemple :

- $(\mathbb{Z}^n, +)$ est un sous-groupe du groupe $(\mathbb{R}^n, +)$.
- $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$ est un sous-groupe du groupe multiplicatif $(\mathbb{R}^*, \cdot)$.
- $\text{SL}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{GL}(2) : ad - bc = 1 \right\}$ est un sous-groupe du groupe $\text{GL}(2)$.

• Une intersection quelconque de sous-groupes d'un groupe G est un sous-groupe de G . Par contre la réunion de deux sous-groupes n'est pas toujours un sous-groupe.

- Soient G un groupe et $a \in G$. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on pose $a^0 = 1$, $a^n = \overbrace{a \cdots a}^{n \text{ fois}}$

si $n > 0$ et $a^n = \overbrace{a^{-1} \cdots a^{-1}}^{n \text{ fois}}$ si $n < 0$. Alors $\langle a \rangle = \{a^n : n \in \mathbb{Z}\}$ est un sous-groupe de G ; c'est le sous-groupe engendré par a . Si ce sous-groupe est fini, on dira que a est un élément d'*ordre fini* et son ordre est le cardinal de $\langle a \rangle$. De façon générale, soit S une partie de G ; le plus petit sous-groupe (au sens de l'inclusion) contenant S est appelé sous-groupe *engendré* par S ; on le note $\langle S \rangle$; c'est l'intersection de tous les sous-groupes de G contenant S (il y en a au moins un : G lui-même). Si $\langle S \rangle = G$, on dira que S est un *système générateur* de G . Par exemple, le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ est engendré par les *transpositions* c'est-à-dire les permutations de $\{1, \dots, n\}$ qui échangent deux éléments et fixent tous les autres.

Si H est un sous-groupe, on peut définir sur G une relation d'équivalence : $x \sim y$ si, et seulement si, $xy^{-1} \in H$. Pour tout $x \in G$, on notera $\bar{x}$ sa classe d'équivalence ; G/H sera l'ensemble quotient et $\pi : x \in G \longmapsto \bar{x} \in G/H$ la projection canonique.

2. Homomorphismes

2.1. Définition. Une application $\varphi : G \longrightarrow H$ entre deux groupes G et H est un **homomorphisme** (ou simplement **morphisme**) si elle vérifie $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ pour tous $x, y \in G$.

Un morphisme vérifie donc $\varphi(e) = e$ et $\varphi(x^{-1}) = (\varphi(x))^{-1}$. Le *noyau* de φ est l'ensemble $\{x \in G : \varphi(x) = e\}$ qu'on note $\text{Ker} \varphi$; l'*image* de φ est l'ensemble $\{\varphi(x) \in H : x \in G\}$ qu'on note $\text{Im} \varphi$. On vérifie de façon immédiate que $\text{Ker} \varphi$ est un sous-groupe de G et $\text{Im} \varphi$ est un sous-groupe de H . Le morphisme φ est injectif si, et seulement si, son noyau est réduit à l'élément neutre.

Si H est un sous-groupe de G , l'inclusion $h \in H \hookrightarrow h \in G$ est un morphisme. Il n'existe qu'un seul morphisme d'un groupe G sur le groupe trivial ; on le note simplement $G \longrightarrow \{1\}$, $G \longrightarrow \{0\}$, $G \longrightarrow 1$ ou $G \longrightarrow 0$. De même il n'existe qu'un seul morphisme du groupe trivial vers n'importe quel groupe G ; on le note $\{1\} \longrightarrow G$, $\{0\} \longrightarrow G$, $1 \longrightarrow G$ ou $0 \longrightarrow G$.

On dira que $\varphi : G \longrightarrow H$ est un *isomorphisme* si c'est un morphisme bijectif. Un isomorphisme $\varphi : G \longrightarrow G$ est appelé *automorphisme* de G . Pour la loi de composition des applications l'ensemble $\text{Aut}(G)$ des automorphismes de G est un groupe d'élément neutre l'identité $x \in G \longmapsto x \in G$.

2.2. Sous-groupes distingués

Pour tout $g \in G$, l'application $\varphi_g : x \in G \longmapsto g^{-1}xg \in G$ est un automorphisme de G dit *intérieur*. On dit que deux éléments x et y sont *conjugués* s'il existe $g \in G$ tel que $y = g^{-1}xg$.

On dira qu'un sous-groupe H de G est *distingué* (*normal* ou *invariant*) s'il est stable par tout automorphisme intérieur : pour tout $g \in G$ et tout $h \in H$, $g^{-1}hg \in H$.

Il est facile de voir que le noyau $\text{Ker} \varphi$ d'un morphisme $\varphi : G \longrightarrow K$ est toujours distingué.

Lorsque H est distingué, la *classe à gauche* de tout $x \in G$ modulo H qui est l'ensemble $Hx = \{hx \in G : h \in H\}$ coïncide avec sa *classe à droite* modulo H qui est l'ensemble $xH = \{xh \in G : h \in H\}$. Dans ce cas on peut mettre une loi de composition interne sur le quotient G/H par $\bar{x} \cdot \bar{y} = \overline{xy}$. Cette loi confère à G/H une structure de groupe. La projection canonique $\pi : x \in G \longmapsto \bar{x} \in G/H$ est alors un morphisme de groupes.

Soit $\varphi : G \longrightarrow H$. Notons N son noyau et R son image ; alors R est un sous-groupe de H et N est un sous-groupe distingué de G ; notons $\pi : G \longrightarrow G/N$ le morphisme projection canonique. Le morphisme $\varphi : G \longrightarrow R$ est surjectif et a aussi pour noyau N . Il existe alors un unique morphisme $\bar{\varphi} : G/N \longrightarrow R$ tel que $\bar{\varphi} \circ \pi = \varphi$; $\bar{\varphi}$ est injectif et on a un isomorphisme :

$$\bar{\varphi} : G/N \xrightarrow{\sim} R.$$

Soient $x, y \in G$. Le *commutateur* de x et y est l'élément $xyx^{-1}y^{-1}$; il égal à e si x et y commutent. Le *centre* de G est l'ensemble des éléments qui commutent avec tous les éléments de G ; c'est un sous-groupe distingué. Le *centralisateur* d'une partie A de G est l'ensemble des éléments de G qui commutent avec tous les éléments de A ; c'est un sous-groupe de G qu'on note $Z(A)$; en particulier $Z(G)$ est le centre de G . Plus le centre est grand, plus le groupe est proche d'un groupe commutatif.

2.3. Suites exactes

Une suite de groupes et de morphismes : $\cdots \longrightarrow G_{i-1} \xrightarrow{\varphi_{i-1}} G_i \xrightarrow{\varphi_i} G_{i+1} \longrightarrow \cdots$ est dite *exacte* au rang i si $\text{Ker} \varphi_i = \text{Im} \varphi_{i-1}$; on dira que cette suite est *exacte* si elle est exacte à n'importe quel rang. Par exemple, dire que la suite :

$$1 \longrightarrow G_0 \xrightarrow{\varphi_0} G_1 \xrightarrow{\varphi_1} G_2 \longrightarrow 1$$

est exacte, c'est dire que φ_0 est injectif, φ_1 surjectif et $\text{Ker} \varphi_1 = \text{Im} \varphi_0$. On dira alors que G_1 est une *extension* de G_2 par G_0 .

3. Produit semi-direct

On se donne deux groupes H et Γ . Peut-on en construire d'autres à partir de ces deux-là ? Oui ! Nous allons en donner deux (ceux qui nous servent en géométrie).

Pour éviter des confusions éventuelles, on note $+$ la loi sur H ; l'élément neutre de H sera 0 et 1 celui de Γ .

3.1. Produit direct

On pose $G = H \times \Gamma$; sur cet ensemble on définit la loi de composition interne :

$$(h, \gamma) \cdot (h', \gamma') = (h + h', \gamma\gamma').$$

Il est facile de voir qu'on obtient ainsi un groupe dans lequel l'élément neutre est $(0, 1)$ et l'inverse de (h, γ) est $(-h, \gamma^{-1})$. Tout élément de la forme $(h, 1)$ commute avec tout élément de la forme $(0, \gamma)$.

3.2. Produit semi-direct

On suppose H abélien (juste pour simplifier). Une *représentation* de Γ dans H est un morphisme de groupes $\rho : \Gamma \longrightarrow \text{Aut}(H)$. Il permet de définir une action du groupe Γ sur H : $(\gamma, h) \in \Gamma \times H \longmapsto \rho(\gamma)(h) \in H$. On munit $H \times \Gamma$ de la loi de composition :

$$(h', \gamma') \cdot (h, \gamma) = (\rho(\gamma')(h) + h', \gamma'\gamma).$$

Alors $(H \times \Gamma, \cdot)$ est un groupe. Son élément neutre est $(0, 1)$ et l'inverse de (h, γ) est $(\rho(\gamma)^{-1}(h), \gamma^{-1})$. Le groupe G ainsi construit se note $H \rtimes_{\rho} \Gamma$ et s'appelle *produit semi-direct* de H par Γ relativement à ρ . On vérifie facilement que si ρ est le morphisme trivial c'est-à-dire $\rho(h) = \text{identité de } H$ pour tout $\gamma \in \Gamma$, alors $H \rtimes_{\rho} \Gamma$ n'est rien d'autre que le produit direct $H \times \Gamma$.

On a aussi le :

Théorème. Soient H et Γ deux sous-groupes d'un groupe G tels que :

- i) H est abélien et distingué dans G ;
- ii) $H \cap \Gamma = \{1\}$;
- iii) l'application $\sigma : (h, \gamma) \in H \times \Gamma \longmapsto h\gamma \in G$ est bijective.

Soit ρ le morphisme de Γ dans $\text{Aut}(G)$ qui à γ associe l'automorphisme intérieur φ_{γ} . Alors l'application $\sigma : (h, \gamma) \in H \rtimes_{\rho} \Gamma \longmapsto h\gamma \in G$ est un isomorphisme de groupes. On dira que G est le produit semi-direct **interne** de ses deux sous-groupes H et Γ .

4. Exemples tirés de la géométrie

Pas mal de situations géométriques simples amènent à des groupes intéressants. On peut par exemple regarder les groupes d'isométries qui laissent invariante globalement une figure géométrique. Ce groupe sera plus ou moins grand suivant que cette figure est plus ou moins symétrique.

4.1. Le groupe symétrique

On en a déjà parlé mais nous allons le voir un peu plus géométriquement. On se donne un espace vectoriel $\vec{V}$ de dimension n qu'on munit de sa structure affine canonique. Considéré comme espace affine, il sera noté $\mathcal{P}$ comme d'habitude et ses éléments

sont des points. De la même manière que pour un plan affine, on peut construire le groupe affine $\text{Aff}(\mathcal{P})$ de $(\mathcal{P}, \vec{V})$. Il contient le groupe linéaire $\text{GL}(\vec{V})$ de $\vec{V}$ et on a une suite exacte :

$$0 \longrightarrow \vec{V} \hookrightarrow \text{Aff}(\mathcal{P}) \longrightarrow \text{GL}(\vec{V}) \longrightarrow 1.$$

Soit $\mathcal{C}$ une partie de $\mathcal{P}$; alors les transformations affines de $\mathcal{P}$ qui préservent $\mathcal{C}$ forment un sous-groupe $\text{Aff}_{\mathcal{C}}(\mathcal{P})$ de $\text{Aff}(\mathcal{P})$. On peut le décrire explicitement dans le cas où $\mathcal{C}$ est un repère affine $\{C_0, C_1, \dots, C_n\}$.

Soit $f \in \text{Aff}_{\mathcal{C}}(\mathcal{P})$. Si $C_i \in \mathcal{C}$, $f(C_i)$ est un élément $C_{i'}$ de $\mathcal{C}$. On définit ainsi une unique permutation σ de l'ensemble $\{0, 1, \dots, n\}$ telle que $f(C_i) = C_{\sigma(i)}$ et par suite une application :

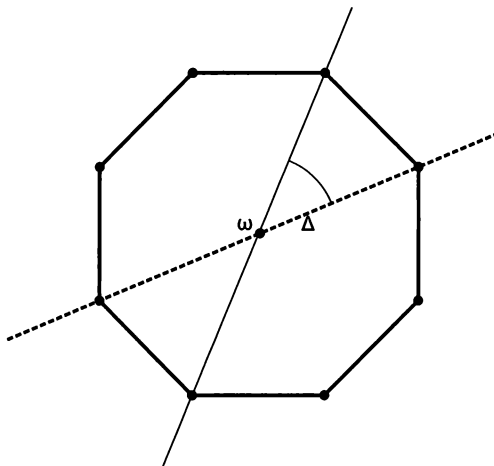
$$\theta : f \in \text{Aff}_{\mathcal{C}}(\mathcal{P}) \longmapsto \sigma(f) \in \mathfrak{S}_{n+1}$$

où $\mathfrak{S}_{n+1}$ est le groupe des permutations de l'ensemble $\{0, 1, \dots, n\}$. On montre alors exactement comme pour le cas $n = 2$ (cf. Exercice 11 de la partie *Exercices résolus*) que θ est un isomorphisme de groupes.

4.2. Le groupe diédral

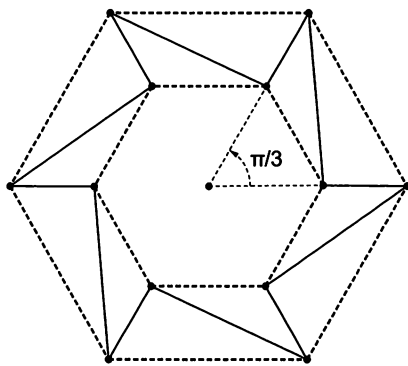
Soit $\mathfrak{P}_n$ un polygone régulier à n côtés (avec $n \geq 3$) dans un plan affine euclidien $(\mathcal{P}, \vec{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Pour $n = 3$, c'est un triangle équilatéral, pour $n = 4$, c'est un carré *etc.* Un tel polygone est toujours inscrit dans un cercle γ dont on notera ω le centre.

Soit Δ la droite passant par ω et l'un des sommets de $\mathfrak{P}_n$ et posons $\theta_n = \frac{2\pi}{n}$. Un examen de la figure ci-dessous montre immédiatement que la réflexion s d'axe Δ et la rotation ρ de centre ω et d'angle θ_n sont des isométries de $\mathcal{P}$ qui préservent le polygone $\mathfrak{P}_n$. Elles engendrent un groupe noté D_n et qu'on appelle *groupe diédral* d'ordre $2n$ (nombre de ses éléments). En fait D_n est le groupe des symétries de $\mathfrak{P}_n$. La rotation ρ engendre un groupe cyclique $C_n = \{1, \rho, \rho^2, \dots, \rho^{n-1}\}$ d'ordre n ; les autres éléments de D_n sont $s\rho, \dots, s\rho^{n-1}$ et sont les réflexions par rapport aux droites passant par ω et les autres sommets du n -gone (autres que celui qu'on a fixé). En fait, le groupe D_n est un produit semi-direct $C_n \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.



Le groupe $D_1 \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est le groupe des symétries d'un triangle isocèle qui n'est pas équilatéral ; $D_2 \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est celui d'un rectangle qui n'est pas un carré.

On peut aussi voir facilement que le $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (avec $p \geq 4$) peut être le groupe de symétrie d'une figure géométrique plane (cf. le dessin qui suit dans le cas $p = 6$).



Groupe cyclique $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$

Nous avons rencontré deux types de sous-groupes finis du groupe des isométries du plan euclidien : le groupe C_n engendré par la rotation centrée à l'origine et d'angle $\theta_n = \frac{2\pi}{n}$ et le groupe diédral D_n . Y en a-t-il d'autres ? Non ! Voici pourquoi :

4.3. Théorème de Leonardo. *Tout groupe fini G d'isométries de $\mathcal{P}$ est isomorphe au groupe cyclique $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ou au groupe diédral D_n avec $p = 2n$ (où p est l'ordre de G).*

Démonstration. Il s'agit évidemment de Léonard de Vinci (*) ! Il a été le premier à avoir remarqué les symétries possibles d'un bâtiment central et comment y attacher des chapelles et des niches sans détruire les symétries du noyau. C'est la raison pour laquelle ce théorème lui revient. Sa démonstration est assez élégante ; en voici les différentes étapes :

i) G ne contient ni translation ni symétrie glissée (la composée d'une translation et d'une réflexion d'axe parallèle au vecteur de translation) ; ces éléments sont d'ordre infini. Et si G en contenait, cela contredirait le fait qu'il est fini.

ii) On suppose que G préserve l'orientation. Il ne contient donc que des rotations. Si deux rotations ρ_1 et ρ_2 avaient des centres différents, le commutateur $\rho_2^{-1}\rho_1^{-1}\rho_2\rho_1$ serait une translation non triviale (cf. sous-section 5.3 du chapitre IV de la *Première partie*), ce qui n'est pas possible, donc tous les éléments de G sont des rotations de même centre et par suite G est isomorphe à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (ici p est l'ordre de G).

iii) Supposons que G contient au moins une réflexion. Les éléments qui préserve l'orientation forment un sous-groupe H non trivial isomorphe à C_n d'après ce qui

(*) Léonard DE VINCI : était Italien. Il est né en 1452 et mort en 1519. Esprit universel : grand scientifique, ingénieur, anatomiste... Et aussi grand peintre : on lui doit, entre autres, les deux fameux tableaux *La Joconde* et *La Cène*.

précède. C'est le noyau du morphisme signature $\varepsilon : G \longrightarrow \{1, -1\}$ qui est non trivial et donc surjectif ; il est donc d'indice 2 dans G et par suite normal ; G s'identifie à un produit semi-direct $H \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ qui est isomorphe au groupe diédral D_n . $\square$

5. Groupes résolubles, groupes nilpotents

Soit G un groupe d'élément neutre e . On appelle *commutateur* de $x, y \in G$, l'élément $xyx^{-1}y^{-1}$; on dira que x et y *commutent* si $xyx^{-1}y^{-1} = e$. Évidemment, dans un groupe abélien, tout commutateur est trivial. Le groupe G n'est pas abélien s'il admet au moins un commutateur non trivial. Ces commutateurs vont permettre de “mesurer” le “degré de non commutativité” du groupe. Pour simplifier $xyx^{-1}y^{-1}$ sera noté $[x, y]$.

On note G_1 ou $[G, G]$ le sous-groupe de G engendré par tous les commutateurs, c'est-à-dire le plus petit sous-groupe contenant la partie $\{[x, y] : x, y \in G\}$. On vérifie facilement que G_1 est un sous-groupe distingué de G . On pose :

$$G_0 = G \text{ et, pour tout } k \geq 2, \quad G_k = [G_{k-1}, G_{k-1}].$$

On vérifie facilement que $\cdots G_k \subset G_{k-1} \subset \cdots \subset G_2 \subset G_1 \subset G_0 = G$ et que, pour tout $k \geq 1$, G_k est un sous-groupe distingué de G_{k-1} .

5.1. Définition. On dira que le groupe G est **résoluble** s'il existe $k \geq 1$ tel que $G_k = \{e\}$.

Le plus petit entier k tel que $G_k = \{e\}$ et $G_{k-1} \neq \{e\}$ est appelé *degré de résolubilité* du groupe G . Si $k = 1$, le groupe G est commutatif. Plus l'entier k est “petit” plus G est “proche” d'un groupe commutatif. Les groupes résolubles forment une classe très importante et sont à la base de la *théorie de Galois* (résolution des équations algébriques par radicaux).

Il existe une catégorie intermédiaire entre les groupes abéliens et les groupes résolubles. Elle joue aussi un rôle important en géométrie et dans pas mal d'autres domaines en algèbre. Posons :

$$G^0 = G \text{ et, pour tout } k \geq 2, \quad G^k = [G^{k-1}, G].$$

On vérifie aussi facilement que $\cdots G^k \subset G^{k-1} \subset \cdots \subset G^2 \subset G^1 \subset G^0 = G$ et que, pour tout $k \geq 1$, G^k est un sous-groupe distingué de G^{k-1} .

5.2. Définition. On dira que le groupe G est **nilpotent** s'il existe $k \geq 1$ tel que $G^k = \{e\}$.

Le plus petit entier k tel que $G^k = \{e\}$ et $G^{k-1} \neq \{e\}$ est appelé *degré de nilpotence* du groupe G . Si $k = 1$, le groupe G est commutatif ; si $k = 2$, on dira que G est *métabélien*.

Comme $G_k \subset G^k$ pour tout k , un groupe nilpotent est forcément soluble. On a donc la suite d'inclusions entre catégories de groupes :

$$\{\text{groupes abéliens}\} \subset \{\text{groupes nilpotents}\} \subset \{\text{groupes résolubles}\}.$$

Un exemple de groupe résoluble et non nilpotent est l'objet de l'exercice 21 de la partie *Exercices résolus*. Le lecteur pourrait aussi montrer que le groupe de Heisenberg des matrices 3×3 (à coefficients entiers, rationnels, réels ou complexes) de la forme :

$$\begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est un groupe nilpotent non abélien. On peut aussi prendre les coefficients de ces matrices dans un corps fini, par exemple $K = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ avec p premier. Le groupe en question sera alors fini d'ordre p^3 .

6. Sous-groupes finis d'isométries de l'espace

On note $\mathcal{E}$ l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure affine canaonique et de son produit scalaire usuel $\langle , \rangle$. Vu comme espace vectoriel, $\mathcal{E}$ sera noté $\vec{\mathcal{E}}$.

Comme pour le cas du plan euclidien, le groupe $\text{Isom}(\mathcal{E})$ est engendré par le groupe $\mathcal{T}$ des translations (isomorphe au groupe additif $(\vec{\mathcal{E}}, +)$) et les isométries linéaires qui constituent un groupe noté $O(\vec{\mathcal{E}})$ (groupe orthogonal de l'espace euclidien $(\vec{\mathcal{E}}, \langle , \rangle)$). Notons j l'injection naturelle de $\mathcal{T}$ dans $\text{Isom}(\mathcal{E})$ et $\pi : \text{Isom}(\mathcal{E}) \rightarrow O(\vec{\mathcal{E}})$ le morphisme qui, à tout élément f , associe sa direction $\vec{f}$. On a une suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathcal{T} \xrightarrow{j} \text{Isom}(\mathcal{E}) \xrightarrow{\pi} O(\vec{\mathcal{E}}) \longrightarrow \{I\}$$

où $\{I\}$ est le sous-groupe de $O(\vec{\mathcal{E}})$ réduit à l'identité. La question qui suit est tout à fait naturelle : *quels sont les sous-groupes finis de $\text{Isom}(\mathcal{E})$?* Il est évident qu'un sous-groupe fini G de $\text{Isom}(\mathcal{E})$ ne peut pas contenir une translation non triviale (elle engendre un groupe infini d'isométries de l'espace) ; par suite, G est nécessairement contenu dans $O(\vec{\mathcal{E}})$.

Les sous-groupes finis du groupe des isométries linéaires de l'espace sont tous connus de façon explicite :

- Le groupe cyclique d'ordre $n : C_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ qui correspond au groupe de symétrie d'une "scie à dents circulaire" (cf. Figure page 212).
- Le groupe diédral $D_n = C_n \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ qui correspond au groupe de symétrie d'un polygone régulier plan à n côtés (cf. Figure page 211).

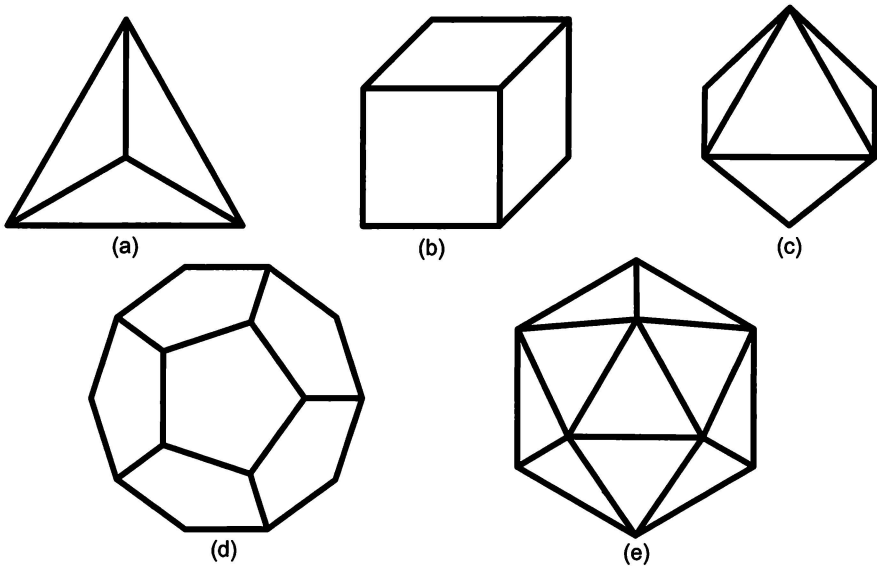
Pour les autres, on se contente de donner ceux dont les éléments préservent l'orientation de l'espace (donnée par exemple en décrétant que la base canonique est directe), c'est-à-dire ceux qui sont contenus dans le groupe spécial linéaire $\text{SO}(\vec{\mathcal{E}})$:

- Le groupe du *tétraèdre* isomorphe à A_4 .
- Le groupe du *cube* isomorphe à $\mathfrak{S}_4$.
- Le groupe de l'*octaèdre* isomorphe à $\mathfrak{S}_4$.
- Le groupe du *dodécaèdre* isomorphe à A_5 .
- Le groupe de l'*icosaèdre* isomorphe à A_5 .

(On rappelle que le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ est engendré par les *transpositions*. Les éléments qui sont composés d'un nombre pair de transpositions forment un sous-groupe A_n de $\mathfrak{S}_n$ appelé *groupe alterné*.)

Un plan $\mathcal{H}$ dans l'espace euclidien partage celui-ci en deux parties fermées chacune appelée *demi-espace fermé*. (L'intersection de ces deux demi-espaces est le plan $\mathcal{H}$.) Un *polyèdre convexe* est une partie compacte (on dit aussi *solide*) qui est une intersection finie de demi-espaces fermés. Son intérieur est donc homéomorphe à une boule ; sa frontière est constituée de *faces* (qui sont des polygones), d'*arêtes* et de *sommets*.

On dit qu'un polyèdre convexe est *régulier* si toutes ses faces sont des polygones réguliers isométriques et si le nombre d'arêtes qui partent d'un sommet est le même pour tous les sommets. Les polyèdres réguliers sont au nombre de 5 et portent le nom de *solides de Platon* (cf. dessin qui suit).



Les 5 solides de Platon

- (a) *Tétraèdre* : 4 triangles équilatéraux, 6 arêtes et 4 sommets.
- (b) *Cube* : 6 carrés, 12 arêtes et 8 sommets.
- (c) *Octaèdre* : 8 triangles équilatéraux, 12 arêtes et 6 sommets.
- (d) *Dodécaèdre* : 12 pentagones réguliers, 30 arêtes et 20 sommets.
- (e) *Icosaèdre* : 20 triangles équilatéraux, 30 arêtes et 12 sommets.

Pour une étude plus ou moins détaillée des solides de Platon, des sous-groupes finis d'isométries de l'espace... le lecteur peut consulter par exemple [Aud], [Arm], [B1] ou [Cox].

BIBLIOGRAPHIE

- [Arm] ARMSTRONG, M.A. *Groups and Symmetry*. Undergraduate Texts in Mathematics, Springer (1988).
- [Aud] AUDIN, M. *Géométrie*. Collection *Enseignement Sup*, Editions EDP (2006).
- [Adr] AUDIRAC, J.-L. et 6 autres coauteurs. *Algèbre et géométrie*, Terminale C et E. Editeur : Magnard (1983).
- [B1] BERGER, M. *Géométrie* (5 tomes). Cedic / Fernand Nathan (1979).
- [B2] BERGER, M. *Géométrie vivante ou l'échelle de Jacob*. Éditions Cassini (2009).
- [BR] BOUVIER, A. & RICHARD, D. *Groupes*. Collection *Formation des enseignants*, Hermann (1974).
- [Cox] COXETER, H.S.M. *Introduction to Geometry*. John Wiley & Sons, Inc. U.S.A.
- [CG] COXETER, H.S.M. & GREITZER, S.L. *Redécouvrons la géométrie*. Dunod (1971).
- [Del] DELODE, C. *Géométrie affine et euclidienne*. Collection *CAPES de Mathématiques*, Dunod (2000).
- [GL] GIRARD, G. & LENTIN, A. *Géométrie et mécanique*. Cours Maillard (1964).
- [Gra] GRAMAIN, A. *Géométrie élémentaire*. Collections Méthodes, Hermann (1999).
- [GS] GRÜNBAUM, B. & SHEPHARD, G. *Tilings and Patterns*. Freeman, New York (1987).
- [K1] KLEIN, F. *Leçons sur certaines questions de géométrie élémentaire*. Collections La règle et le compas, Diderot Éditeur Arts et Sciences (1998).
- [K2] KLEIN, F. *Le programme d'Erlangen*. Collection *Discours de la méthode*, Éditeur Gauthiers-Villars, (1974).
- [LB] LEHMANN, D. & BKOUCHE, R. *Initiation à la géométrie*. Presses Universitaires de France (1988).
- [LP] LESPINARD, V. & PERNET, R. *Géométrie*, Terminale C. Editeur : A. Desvigne (1966).
- [Mar] MARTIN, G.E. *Transformation Geometry. Introduction to Symmetry*. Undergraduate Texts in Mathematics, Springer Verlag (1982).
- [Niv] NIVEN, I. Convex polygons that cannot tile the plane. *American Mathematical Monthly*, Vol. 85 (1978), 785-792.
- [Ped] PEDOE, D. *Geometry. A comprehensive course*, Dover Publications, INC. (1988).
- [Per] PERRIN, D. *Mathématiques d'école : nombres, mesures et géométrie*. Éditions Cassini (1966).
- [Pri] PRITCHARD, C. *The Changing Shape of Geometry*. Celebrating a Century of Geometry and Geometry Teaching. Cambridge University Press (2003).
- [Sch] SCHWERDTFEGER, H. *Geometry of Complex Numbers*. Dover Publications (1979).
- [Vid] VIDONNE, R. *Groupe circulaire, rotations et quaternions*. Collections CAPES et Agrégation, Ellipses (2001).
- [Wel] WELLS, D. *Le dictionnaire penguin des curiosités géométriques*. Editions Eyrolles (1997).

INDEX ALPHABÉTIQUE

Affine	
– espace	16
– sous-espace	20
– application	27
Affinité	194
Angle	
– de droites	50
– de demi-droites	49
– de vecteurs	49
– géométrique	51
– orienté	49
– de rotation	53
Application	
– affine	27
Axe	
– radical	108
Barycentre	18
Coordonnées	
– cartésiennes	21
– barycentriques	21
Birapport	
– de quatre points	92
– d'un faisceau de quatre droites	93
Centre	
– d'un groupe	227
– de symétrie	53
Cercle	
– d'Euler	101
– circonscrit	101
– inscrit	101
– d'inversion	109
– directeur	129
– principal	129
Cocycliques	70
Conforme	
– transformation	10
Contruction	
– géométrique	75

Convexité	21
Direction	
– d’une application affine	27
– d’un espace affine	17
– d’un sous-espace affine	20
Droite	
– affine	20
– directrice	124
– d’Euler	197
Division	
– harmonique	92
Ellipse	129
Formule	
– Al-Kashi	179
– de Brahmagupta	149
– de Héron	150
Groupe	51
– affine	33
– diédral	200
– des isométries	46
– nilpotent	231
– orthogonal	47
– paveur	211
– résoluble	231
– des similitudes	57
– symétrique	91
Harmonique	
– division	92
– faisceau	93
Homothétie	28
Homographie	118
Hyperbole	136
Inversion	108
Isométrie	
– affine	46
– linéaire	46
Mesure algébrique	21
Orientation	24
Orthocentre	101
Orthogonalité	45

Parabole	124
Parallèle	
– sous-espaces	23
Pavages	
– du Caire	219
– hexagonal	217
– monoiédral	213
– pentagonal	219
– périodique	209
– régulier	213
– automorphisme d'un	209
Polaire	
– d'un point	93
Pôle d'inversion	108
Polygone	
– régulier	199
Produit	
– scalaire	43
– semi-direct	228
Projection	
– affine	32
– linéaire	31
– orthogonale	76
Puissance	
– d'un point	108
– d'une inversion	108
Réflexion	52
Relation	
– Euler	146
Réseau	
– carré	211
– d'un groupe d'automorphismes	209
– hexagonal	211
– oblique	211
– rectangulaire	211
– domaine fondamental d'un	209
Retournement	84
Riemann	
– sphère de	119
Rotation	53

Similitude	57
Sous-groupe	
– distingué	227
– engendré	226
Symétrie	
– axiale	52
– centrale	53
– glissée	54
– plane	84
Théorème	
– Ceva	66
– Desargues	39
– du face à face	185
– Gauss-Wantzel	199
– Leonardo	230
– Ménélaüs	38
– Newton	144
– du papillon	151
– Pappus	37
– Poncelet	146
– Ptolémée	149
– Pythagore	46
– Steiner	102
– Thalès	35
Triangle	
– cas d'isométrie	68
– cas de similitude	69
Translation	28
Vectorialisé	
– d'un espace affine	18
Vissage	90

Géométrie euclidienne élémentaire

Cet ouvrage est une introduction élémentaire à la géométrie affine euclidienne (essentiellement plane). Il est issu de cours professés par l'auteur aux étudiants de la Licence 3 et du Master enseignement. Sa lecture ne requiert que les notions de base de l'algèbre linéaire. Plusieurs figures accompagnent chacun des chapitres pour bien l'illustrer et rappeler constamment au lecteur que c'est l'aspect géométrique qui est visé en premier lieu.

Le texte est constitué de trois parties. La première introduit les notions d'espace affine, de repère et de coordonnées barycentriques. On définit ensuite la convexité, le parallélisme, les applications affines dont on donne la caractérisation barycentrique. Le groupe affine du plan est dévissé sous son aspect géométrique et algébrique. Puis on introduit le plan euclidien, ses isométries et ses similitudes. La notion d'angle y est développée en détail. Un chapitre est dédié au triangle et au cercle (figures de base de la géométrie plane), et un autre aux constructions géométriques (sur des exemples). La deuxième partie se présente sous forme de fiches de travail. Y sont étudiés les isométries de l'espace, le birapport d'un faisceau de quatre droites, la puissance d'un point par rapport à un cercle, l'inversion et les homographies de la sphère de Riemann. L'étude des coniques est limitée à la parabole, l'ellipse et l'hyperbole. La troisième partie traite d'une notion d'intérêt culturel pour un enseignant : les pavages du plan. Plus précisément : on étudie de façon élémentaire les pavages périodiques réguliers mais aussi les pavages périodiques par n'importe quel quadrilatère et certains pentagones et hexagones.

Aziz El Kacimi Alaoui est professeur à l'université de Valenciennes. Ses travaux de recherche portent essentiellement sur les systèmes dynamiques et la théorie des feuilletages sous des aspects analytiques et cohomologiques.

