Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis

Faculté des Sciences de Bizerte

ÉCHANGES D'INTERVALLES. ÉQUATIONS COHOMOLOGIQUES ET DISTRIBUTIONS INVARIANTES

Thèse soutenue le 4 juin 2012

par

Hadda HMILI

pour obtenir le grade de

Docteur en Mathématiques

Composition du Jury

Rapporteurs	Pierre ARNOUX	*Université de Méditerranée*
	Ali BAKLOUTI	*Université de Sfax*
Examinateur	Leopold VERSTRAELEN	*KU, Leuven*
Directeurs de Thèse	Aziz EL KACIMI	*Université de Valenciennes*
	Isabelle LIOUSSE	*Université de Lille I*
	Mahel MOSBAH	*Faculté des Sciences de Bizerte*
Invités	Raymond BARRE	*Université de Valenciennes*
	Luc VRANCKEN	*Université de Valenciennes*

N^{O} d'ordre : 12/19

.

REMERCIEMENTS

Cette thèse a été préparée sous la dirction conjointe de Aziz El Kacimi et Isablle Liousse. Je l'ai commencée sous la direction de Isabelle Liousse qui m'avait proposé le sujet sur les échanges d'intervalles ; ensuite Aziz El Kacimi m'a suggéré de travailler sur les équations cohomologiques et les distributions invariantes sur un groupe de Lie ainsi que quelques-unes de leurs applications aux déformations des feuilletages. Durant toute l'élaboration de ce travail, ils m'ont consacré génereusement leur temps pour m'écouter. Ils n'ont jamais cessé de me motiver, me guider et me prodiguer conseil et toujours avec une attention constante et sincère. Je suis certaine que les nombreuses connaissances qu'ils m'ont transmises me seront très utiles dans mes futures recherches. Je leur exprime ici toute ma profonde gratitude.

Un immence merci à Mahel Mosbah qui a gentiment accepté d'être codirectrice de ce travail et de m'avoir toujours aidée. Je la remercie vivement pour ses qualités humaines, ses encouragements constants et son soutien moral.

Je suis ravie que Pierre Arnoux et Ali Baklouti se soient intéressés à mon travail et aient accepté de rapporter dessus. Je les en remercie. Merci également à Raymond Barre, Leopold Verstraelen et Luc Vrancken pour avoir bien voulu faire partie du jury. Je remercie le gouvernement Tunisien et le gouvernement Français, qui m'ont permis financièrement de mener à bien la préparation de cette thèse ainsi que le CIMPA qui a supporté financièrement (tout ou en partie) deux de mes séjours en France dans le cadre du programme du RIAMI-GGTM.

Je tiens à remercier Nabila Daifi pour toute sa gentillesse ; elle m'a toujours aidée à régler tout problème administratif à l'université de Valenciennes. Merci aussi à tous les membres du LAMAV pour l'acceuil chaleureux qu'ils m'ont toujours réservé.

Enfin, je remercie du fond de mon cœur mes parents, mes frères, mes soeurs et mon mari sans lesquels je ne serai sûrement pas arrivée jusque là : ils m'ont soutenue depuis le début et continuent à le faire. J'associe à ces remerciements ma fille Farouha.

CONTENU

INTRODUCTION

Deux thèmes (un peu différents mais proches) sont développés dans ce mémoire de thèse : les *échanges d'intervalles* et l'étude des *mesures invariantes* par des difféomorphismes. En voici un résumé.

Échanges d'intervalles

Un *échange de m intervalles*(ou en abrégé i.e.t interval exchange transformation) est une bijection T de $[0,1[$ dans lui-même, telle que la restriction de T à chacun des m intervalles est une translation.

Un échange d'intervalles associé à une permutation irréductible est dit :

- *vérifiant la condition* (IDOC) *de Keane* (voir définition 3.5.1 chapitre II) si les orbites de ses points de discontinuité sont infinies et disjointes ;

- *uniquement ergodique* si sa seule mesure de probabilité invariante est la mesure de Lebesgue ;

- *faiblement topologiquement mélangeant* s'il n'existe pas de fonction continue f : $[0,1] \to \mathbb{C}$ non constante et de scalaire λ tels que $f \circ T = \lambda f$.

Un résultat de Nogueira-Rudolph affirme que tout échange d'intervalle qui n'est pas de la classe des rotations est faiblement topologiquement mélangeant.

Dans cette première partie, nous avons montré un critère d'existence de fonctions propres continues non constantes pour les échanges d'intervalles. Comme corollaire, nous avons construit, pour tout entier $m \geq 4$, les premiers exemples d'échanges de m intervalles uniquement ergodiques, vérifiant la condition de Keane et non topologiquement faiblement mélangeant répondant ainsi à une question de Ferenczi et Zamboni.

Ces résultats ont fait l'objet d'un article [Hmi] paru dans *Discrete and Continuous Dynamical Systems.*

Par ailleurs, nous avons travaillé sur les échanges d'intervalles affines (AIET). Un AIET est une bijection T d'un intervalle I dans lui même tel qu'il existe une partition de I en m intervalles telle que la restriction de T à chacun d'eux est une application affine. Les extrémités des intervalles sont appelées les *coupures* de T. Nous avons montré qu'un AIET dont les pentes sont des puissances d'un même entier n et dont les coupures et leurs images sont des rationnels a une dynamique très simple : toutes ses orbites sont propres et il possède une orbite périodique ou un cycle périodique.

Équations cohomologiques et distributions invariantes

Soient M une variété et γ un difféomorphisme de M. Habituellement, le couple (M, γ) est appelé *système dynamique discret* (SDD en abrégé). Question naturelle : *Quels sont les* *objets géométriques invariants sous l'action de* γ ? Formulée dans toute cette généralité, cette question est loin d'être triviale. Mais on sait y répondre dans certaines situations si on précise M, le difféomorphisme γ et la nature de l'objet géométrique. Il est d'usage, en théorie des systèmes dynamiques, de chercher une *mesure invariante* (mesure de Radon ou de Borel). Mais ce n'est pas toujours si évident à trouver. À défaut, on cherche plutôt une *distribution invariante* qui a plus de chance d'exister. Mais le problème peut aussi s'avérer difficile, ce qui amène à se focaliser sur des situations particulières et regarder ce qui se passe presque cas par cas ! La recherche de telles distributions conduit de façon systématique à la résolution de certaines équations dites *équations cohomologiques*. Indépendamment de cela, ces équations constituent un thème en plein essor actuellement.

Plus précisément, dans cette deuxième partie, on étudie l'existence de ces objets pour certains difféomorphismes sur un groupe de Lie $M = G$: d'abord, dans le cas où G est connexe compact quelconque et γ une translation, ensuite, celui où G est le tore $\mathbb{T}^n$ et γ un automorphisme affine.

En fonction des différentes situations qui se présentent, nous donnons des éléments de réponse aux questions qui suivent :

– Sous quelles conditions l'équation cohomologique $f - f \circ \gamma = g$ admet-elle des solutions dans l'espace de Fréchet $C^\infty(G)$?

– Déterminer le sous-espace $\mathcal{C}$ engendré par les éléments de la forme $f - f \circ \gamma$ avec f variant dans $C^\infty(G)$ ou, à défaut, son adhérence $\overline{\mathcal{C}}$.

– Calculer l'espace $\mathcal{D}_\gamma(G)$ des distributions sur G invariantes par γ. Celui-ci n'est rien d'autre que le dual topologique de l'espace vectoriel $H^1(\mathbb{Z}, C^\infty(M))$ (ou de son séparé associé $\overline{H}^1(\mathbb{Z}, C^\infty(M)) = C^\infty(G)/\overline{\mathcal{C}}$).

L'espace vectoriel de cohomologie $H^1(\mathbb{Z}, C^\infty(M))$ d'une action du groupe discret $\mathbb{Z}$ sur une variété compacte M via un difféomorphisme γ joue un rôle fondamental en théorie des déformations. Lorsque M est un groupe de Lie compact G et γ une translation par un élément de G, $H^1(\mathbb{Z}, C^\infty(G))$ est, au facteur tensoriel près par l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ du groupe G, exactement l'espace des *déformations infinitésimales* de γ dans le groupe $\mathrm{Diff}(G)$ (des difféomorphismes de G) ; il permet aussi la description de celles du feuilletage obtenu par suspension de γ. C'est une situation qui n'a jamais été révélée explicitement en tant que telle pour un groupe de Lie compact non abélien.

Ces résultats ont fait l'objet d'un article [EH] en collaboration avec Aziz El Kacimi à paraître dans *Hokkaido Mathematical Journal*.

CHAPITRE I

RAPPELS DU MATERIEL DE BASE

Le but de ce chapitre est de rappeler, dans un premier temps, quelques notions de géométrie différentielle : on introduira la notion de variété différentiable, ses groupes d'homéomorphismes, de difféomorphismes... ainsi que tout le matériel qui nous servira par la suite dans cette direction *i.e.* tout ce dont nous aurons besoin pour exposer notre travail. Nous exposerons dans un deuxième temps la notion de mesure de deux points vue différents : la mesure de Borel sur une tribu et celle de mesure de Radon. On définira la notion de mesure invariante par un homéomorphisme qui sera l'élément de base de l'un des chapitres de cette thèse.

1. La notion de variétés

Soit M un espace topologique paracompact *i.e.* M est séparé et tel que tout recouvrement ouvert admet un recouvrement ouvert plus fin et localement fini. *On dira que M est une* ***variété topologique*** *de dimension $n \in \mathbb{N}$ si tout point $x \in M$ possède un voisinage ouvert U homéomorphe à $\mathbb{R}^n$ i.e. il existe une application bijective $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow U$ telle que φ et son inverse φ^{-1} soient continues.* La paire (U, φ) est appelée *carte locale* et $(x_1, \ldots, x_n) = \varphi^{-1}(x)$ seront les *coordonnées* de x. Si (U, φ) et (V, ψ) sont deux cartes locales telles que l'intersection $U \cap V$ soit non vide alors un point $x \in U \cap V$ sera repéré par ses coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ dans U et ses coordonnées $(x'_1, \ldots, x'_n)$ dans V. Comme le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \varphi^{-1}(U \cap V) & \xrightarrow{\varphi} & U \cap V \\ \downarrow & & || \\ \psi^{-1}(U \cap V) & \xrightarrow{\psi} & U \cap V \end{array}$$

est commutatif on doit avoir :

$$(x'_1, \ldots, x'_n) = \psi^{-1} \circ \varphi(x_1, \ldots, x_n). \tag{I.1}$$

L'application $\psi^{-1} \circ \varphi$ est appelée *changement de coordonnées* de la carte (U, φ) à la carte (V, ψ). *Deux cartes locales (U, φ) et (V, ψ) sont dites C^r-**compatibles** si l'une des conditions suivantes est remplie* *i)* $U \cap V = \emptyset$,

ii) $U \cap V \neq \emptyset$ *et* $\psi^{-1} \circ \varphi$ *est un difféomorphisme de classe* C^r *; ceci a un sens car cette application est définie sur un ouvert de* $\mathbb{R}^n$ *et à valeurs dans* $\mathbb{R}^n$.

Un ensemble de cartes locales $(U_i, \varphi_i)_{i\in I}$ sur M est appelé C^r*-atlas* si $(U_i)_{i\in I}$ est un recouvrement de M et si deux cartes quelconques (U_i, φ_i) et (U_j, φ_j) sont C^r-compatibles. Deux C^r-atlas $(U_i, \varphi_i)_{i\in I}$ et $(V_j, \psi_j)_{j\in J}$ sont dits *équivalents* si leur réunion est un C^r-atlas *i.e.* pour tout $i \in I$ et tout $j \in J$, les cartes (U_i, φ_i) et (V_j, ψ_j) sont C^r-compatibles.

1.1. Définition. *Une classe d'équivalence de* C^∞*-atlas est appelée* ***structure différentiable*** *sur* M. *On dira que* M *est une variété différentiable.*

On dira que M est une *variété analytique* (réelle) ou de classe C^ω si elle admet un atlas $(U_i, \varphi_i)_{i\in I}$ tel que les applications $\varphi_j^{-1} \circ \varphi_i$ (pour $U_i \cap U_j \neq \emptyset$) soient analytiques en tant qu'applications d'un ouvert de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

Il est clair que toute variété analytique est une variété différentiable.

Tout ouvert non vide d'une variété différentiable de dimension n *est une variété différentiable de dimension* n.

Une variété différentiable M est dite *orientable* si elle peut être définie à l'aide d'un atlas (U_i, φ_i) pour lequel les difféomorphismes (I.1) préservent l'orientation de $\mathbb{R}^n$: pour $x \in U_i \cap U_j$, le déterminant de l'application linéaire $d\left(\varphi_j^{-1} \circ \varphi_i\right)(\varphi_i^{-1}(x))$ est strictement positif.

Dans toute la suite de cette section on ne considérera que les variétés différentiables connexes.

1.2. Applications différentiables

Soient M et N deux variétés différentiables de dimensions respectives n et p. On dira qu'une application $f : M \longrightarrow N$ est *différentiable* au point $x \in M$ si, pour toute carte locale de M, (U, φ) contenant x et toute carte locale (V, ψ) de N contenant $f(x)$ et tout voisinage ouvert W de x contenu dans U et tel que $f(W) \subset V$, l'application $\psi^{-1} \circ f \circ \varphi : \varphi^{-1}(W) \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \psi^{-1}(V) \subset \mathbb{R}^p$ est différentiable. On dira que f est *différentiable*, si elle est différentiable en tout point de M. En particulier, on dira qu'une fonction $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ est *différentiable* si, pour toute carte locale (U, φ), la fonction $f \circ \varphi : \varphi^{-1}(U) \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow U \longrightarrow \mathbb{R}$ est différentiable. La dérivée partielle de $\frac{\partial f}{\partial x_k}(x)$ sera donc par définition $\frac{\partial f}{\partial x_k}(x) = \frac{\partial (f\circ\varphi)}{\partial x_k}(\varphi^{-1}(x))$.

Si f est différentiable, bijective et f^{-1} différentiable, on dira que f est un *difféomorphisme* de M sur N. Dans ce cas les variétés M et N ont nécessairement la même dimension.

On notera $C^\infty(M,N)$ l'ensemble des applications différentiables de M dans N et simplement $C^\infty(M)$ lorsque $N = \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) ; ce dernier est une algèbre pour la multiplication des fonctions. L'ensemble des difféomorphismes d'une variété sur elle-même est un groupe (pour la composition des applications) noté $\mathrm{Diff}(M)$.

Soient M une variété et $\rho : M \longrightarrow \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ une fonction. On appelle *support* de ρ et on note $\mathrm{supp}(\rho)$ l'adhérence de l'ensemble $\{x \in M : \rho(x) \neq 0\}$.

Soit $\mathcal{U} = (U_i)_i$ un recouvrement ouvert de M. On dira que $\mathcal{U}$ est *localement fini* si tout point $x \in M$ possède un voisinage qui ne rencontre qu'un nombre fini d'ouverts de la famille $\mathcal{U}$. Sur une variété différentiable (paracompacte comme cela a été supposé avant) un tel recouvrement existe toujours ; on peut même le choisir dénombrable.

Soit $\mathcal{U} = (U_i)_i$ un recouvrement localement fini sur M. On appelle *partition de l'unité subordonnée* à $\mathcal{U}$ une famille de fonctions réelles différentiables positives $(\rho_i)_i$ telles que

- pour tout $i \in I$, $supp(\rho_i)$ est contenu dans U_i,
- $\sum_i \rho_i = 1$.

Tout recouvrement ouvert localement fini $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ de M admet une partion de l'unité différentiable $(\rho_i)_{i\in I}$.

2. Le fibré tangent

Soient M une variété différentiable et $(U_i, \varphi_i)_{i\in I}$ un atlas définissant M. On a vu qu'une fonction $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ est différentiable si, pour tout $i \in I$, la fonction $f \circ \varphi_i : \varphi^{-1}(U_i) \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow U_i \longrightarrow \mathbb{R}$ est différentiable et que la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x_k}(x)$ est donnée par $\frac{\partial f}{\partial x_k}(x) = \frac{\partial (f\circ\varphi_i)}{\partial x_k}(\varphi_i^{-1}(x))$. Pour tout $k = 1, \ldots, n$, on obtient donc un opérateur $\frac{\partial}{\partial x_k}$ qui à toute fonction différentiable f sur U_i associe la fonction $\frac{\partial f}{\partial x_k}$. En chaque point $x \in U_i$, les opérateurs $\frac{\partial}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}(x)$ sont linéairement indépendants.

En tout point $x \in M$, les opérateurs $\frac{\partial}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}(x)$ engendrent donc sur $\mathbb{R}$ un espace vectoriel de dimension n indépendant de la carte choisie (U_i, φ_i) pour le définir.

2.1. Définition. *On appelle* **espace tangent** *à M en x, l'espace vectoriel T_xM engendré par les opérateurs $\frac{\partial}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}(x)$ à l'aide d'une carte quelconque (U_i, φ_i).*

Soit maintenant h une application différentiable d'une variété M de dimension n dans une variété N de dimension q. On supposera que M et N sont définies par les atlas respectifs $(U_i, \varphi_i)_{i\in I}$ et $(V_j, \psi_j)_{j\in J}$ et, pour ne pas alourdir les notations, on fera comme si les ouverts de coordonnées U_i et V_j étaient en fait les espaces euclidiens $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^q$. Pour tout $x \in M$ de coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ l'application h définit une application linéaire

$$d_xh : T_xM \longrightarrow T_{h(x)}N$$

qui à tout opérateur $\frac{\partial}{\partial x_k}(x)$, k variant de 1 à n, associe l'opérateur $d_x h\left(\frac{\partial}{\partial x_k}(x)\right)$ donné sur une fonction $f : N \longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$d_x h\left(\frac{\partial}{\partial x_k}(x)\right)(f) = \sum_{\ell=1}^{q} \frac{\partial y_\ell}{\partial x_k}(x)\frac{\partial f}{\partial y_\ell}(h(x))$$

où $(y_1, \ldots, y_q)$ sont les coordonnées du point $h(x)$ pour tout $x \in M$. On peut vérifier que la définition de l'application $d_x h$ ne dépend pas du système de coordonnées locales. On l'appelle *application tangente* à h au point $x \in M$.

Pour tout $i \in I$ on pose $\Omega_i = \bigcup_{x \in U_i} T_x M$. L'application $\Phi_i : U_i \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \Omega_i$ définie par $\Phi_i(x, f_1, \ldots, f_n) = \left(x, \sum_{k=1}^n f_k \frac{\partial}{\partial x_k}(x)\right)$ est une bijection. On définit une unique structure de variété différentiable de dimension $2n$ sur l'ensemble $TM = \bigcup_{x \in M} T_x M$. On a une projection canonique $\pi : TM \longrightarrow M$ définie par $\pi(x, u_x) = x$.

2.2. Définition. *On appelle* **fibré tangent** *à M la variété TM et la projection canonique $\pi : TM \longrightarrow M$.*

On appelle *section* du fibré TM ou *champ de vecteurs* sur M toute application $X : M \longrightarrow TM$ telle que $\pi \circ X = id_M$. Sur une carte locale (U_i, φ_i) de coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$, un champ de vecteurs a pour expression

$$X_i(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)\frac{\partial}{\partial x_k}(x) \tag{I.2}$$

où les f_k sont des fonctions de classe C^∞ sur U_i. L'ensemble $C^\infty(TM)$ des champs de vecteurs sur M, ou des sections C^∞ du fibré TM, est un module sur l'anneau $C^\infty(M)$ des fonctions de classe C^∞. Soient X et Y deux champs de vecteurs sur M ; on peut les écrire localement :

$$X_i(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)\frac{\partial}{\partial x_k}(x) \ \text{ et } \ Y_i(x) = \sum_{\ell=1}^{n} g_\ell(x)\frac{\partial}{\partial x_\ell}(x).$$

Un calcul facile montre que pour toute fonction $h : M \longrightarrow \mathbb{R}$, de classe C^∞, on a :

$$X_i(Y_i(h)) - Y_i(X_i(h)) = \sum_{k,\ell}\left(f_k \frac{\partial g_\ell}{\partial x_k}\frac{\partial h}{\partial x_\ell} - g_\ell \frac{\partial f_k}{\partial x_\ell}\frac{\partial h}{\partial x_k}\right).$$

On définit ainsi un nouveau champ (local) de vecteurs $X_iY_i - Y_iX_i$; on montre que ceci ne dépend pas de la carte choisie ; on obtient alors un champ de vecteurs $XY - YX$ global qu'on note $[X, Y]$ et qu'on appelle *crochet* de X et Y ; $[X, Y]$ est le commutateur de X

et Y vus comme opérateurs (*différentiels d'ordre* 1) sur $C^\infty(M)$. On vérifie facilement l'identité suivante dite *identité de Jacobi* :

$$[X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[Y,X]]=0 \tag{I.3}$$

On dira que $(C^\infty(TM),[\ ,\ ])$ est l'*algèbre de Lie* des champs de vecteurs sur M.

Une variété M (de dimension n) est dite *parallélisable* s'il existe n champs de vecteurs tangents partout linéairement indépendants ; dans ce cas le $C^\infty(M)$-module $C^\infty(TM)$ est *libre* de rang n.

Considérons maintenant deux variétés M et N de dimensions respectives m et n, X un champ de vecteur sur M et $\gamma : M \longrightarrow N$ une application différentiable. On appelle *image* de X par γ le champ de vecteurs $\gamma_* X$ sur N défini par $\gamma_* X = d\gamma \circ X \circ \gamma^{-1}$ *i.e.* :

$$\forall\ y \in N:\ \gamma_* X(y) = d_{\gamma^{-1}(y)}\gamma\ (X(\gamma^{-1}(y))).$$

Dans le cas où $M = N$ et γ un difféomorphisme, le champ X est dit *invariant* par γ si $\gamma_* X = X$, c'est-à-dire si:

$$\forall\ x \in M,\ X(\gamma(x)) = d_x\gamma(X(x)). \tag{I.4}$$

Soient X un champ de vecteurs sur une variété M et $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction sur M. On appelle *dérivée* de Lie de f suivant X la fonction $L_X f$ sur M définie par $L_X f(x) = d_x f\ (X(x))$.

Regardons un aspect plus géometrique des champs de vecteurs : pour un champ $x \longmapsto V_x$ du plan, le simple tracé des vecteurs V_x vus comme vecteurs d'origine x permet de voir une famille de courbes auxquelles ces vecteurs sont tangents. On appelle *trajectoire* ou *courbe intégrale* d'un champ de vecteurs X sur une variété M toute courbe $t \longmapsto c(t)$, définie sur un intervalle ouvert $I \subseteq \mathbb{R}$ et à valeurs dans M et telle que, pour tout $t \in I$, on ait $c'(t) = X_{c(t)}$.

Pour un ouvert U de $\mathbb{R}^n$, si $X = \sum^n_{k=1} X^k \frac{\partial}{\partial x_k}$, cela revient à dire que les composantes de c sont solutions du système différentiel du premier ordre :

$$\frac{dc^k}{dt} = X^k(c^1, ..., c^n) \quad \text{avec} \quad 1 \leq k \leq n. \tag{I.5}$$

Les fonctions X^k étant lisses, on peut appliquer les résultats classiques d'existence et d'unicité pour les systèmes différentiels.

2.3. Proposition. *Soient X un champ de vecteurs sur un ouvert U de $\mathbb{R}$ et x un point de U. Alors il existe un intervalle ouvert I contenant* 0 *et une trajectoire $c : I \longrightarrow U$ de X*

telle que $c(0) = x$; si $c_1 : I_1 \longrightarrow U$ est une autre trajectoire ayant la même propriété, c et c_1 coïncident sur $I_1 \cap I$.

On démontre ensuite qu'il existe un unique intervalle de définition maximal de c. Nous noterons c_x la trajectoire correspondante. Si I_x est l'intervalle de définition (maximal) de c_x, la réunion des $I_x \times \{x\}$, quand x parcourt U, est un ouvert Ω de $\mathbb{R} \times U$, contenant $\{0\} \times U$, pour lequel l'application $(x, t) \longrightarrow c_x(t)$ est lisse. Par conséquent, si $t \longrightarrow c(t)$ est une trajectoire, il en est de même de $t \longrightarrow c(t + a)$ pour n'importe quel réel a. Tenant compte de l'unicité, on obtient l'identité $c_x(t + a) = c_{c_x(a)}(t)$. Nous allons réécrire cette relation en mettant l'accent sur la variable "espace" plutôt que la variable "temps". Autrement dit, on pose :

$$\varphi_t{}^X(x) = c_x(t).$$

En particulier $\varphi^X{}_0(x) = x$, et l'identité ci-dessus donne :

$$\varphi^X{}_{t+t'}(x) = \varphi_t{}^X(\varphi^X{}_{t'}(x)).$$

On écrit alors, avec un abus de notation évident :

$$\varphi^X{}_{t+t'} = \varphi_t{}^X \circ \varphi^X{}_{t'} = \varphi_{t'}{}^X \circ \varphi^X{}_t.$$

2.4. Definition. *L'application $\varphi^X : \Omega \longrightarrow U$ s'appelle* ***le flot*** *du champ de vecteurs X.*

La propriété suivante, très pratique, permet le passage inverse du flot au champ. Soit ψ une application définie sur un ouvert de $I \times U$ contenant $\{0\} \times U$ et à valeurs dans U telle que :

i) $\psi(t, \psi(t', x)) = \psi(t + t', x)$ dès que les deux membres ont un sens ;

ii) $\psi(0, x) = x$;

iii) $\frac{d}{dt}\psi(t, x)_{|t=0} = X_x$.

Alors $\psi(t, x) = \psi_t^X(x)$ partout où ψ est définie. Pour démontrer ce fait, il suffit de remarquer que :

$$\frac{d}{dt}\psi(t, x)\Big|_{t=t_0} = \frac{d}{dt}\psi(t + t_0, x)\Big|_{t=t_0} = \frac{d}{dt}\psi(t, \psi(t_0, x))\Big|_{t=0} = X_{\psi(0,x)}.$$

3. Actions de groupes

Un *groupe topologique* est un groupe G muni d'une topologie pour laquelle l'application $g, g' \in G \times G \longmapsto gg'^{-1} \in G$ est continue.

Soient M une variété et G un groupe topologique d'élément neutre e. Une *action* de G sur M est la donnée d'une application continue $\Phi : (g, x) \in G \times M \longmapsto gx \in M$ telle que :

(1) $\Phi(e,x) = x$ pour tout $x \in M$;

(2) $\Phi(gg',x) = \Phi(g,\Phi(g',x))$ pour tous $g,g' \in G$ et tout $x \in M$.

Si, pour tout $g \in G$, l'application $x \in M \longmapsto gx \in M$ est un difféomorphisme, on dira que l'action est *différentiable.*

L'action Φ définit une relation d'équivalence ouverte :

$$x \sim y \Longleftrightarrow \text{ il existe } g \in G \text{ tel que } y = gx.$$

On munit l'ensemble quotient, noté M/G de la *topologie quotient* : c'est la plus fine des topologies sur M/G rendant continue la projection canonique $\pi : M \longrightarrow M/G$.

Rappelons que :

1) La classe d'équivalence d'un élément $x \in M$ est son *orbite* notée O_x ;

2) $x \in M$ est un point fixe si $O_x = \{x\}$;

3) pour tout $x \in M$, l'ensemble $G_x = \{g \in G, gx = x\}$ est un sous-groupe de G appelé *groupe d'isotropie* de x ou *stabilisateur* de x ; on le note G_x ;

4) une partie M_0 de M est dite *invariante* si, pour tout $x \in M_0$, l'orbite O_x est contenue dans M_0 ;

L'action de G sur M est dite :

5) *libre* si tous les groupes d'isotropie sont réduits à l'élément neutre ;

6) *transitive* si M ne contient qu'une seule G-orbite ;

7) *totalement discontinue* si tout $x \in M$ admet un voisinage ouvert U tel que, pour tout $g \in G$, $U \cap gU = \emptyset$;

8) *séparante* si tous $x,y \in M$ ayant des orbites distinctes admettent des voisinages ouverts respectifs U et V tels que, pour tous $g,h \in G$, on ait $gU \cap hV = \emptyset$;

9) *propre* si, pour tout compact K de M, l'ensemble $\{g \in G, K \cap gK \neq \emptyset\}$ est relativement compact dans G, donc fini si G est discret.

Lorsque G est dénombrable discret et agit librement et proprement sur M, alors l'action est séparante et totalement discontinue. Cela permet de munir le quotient M/G d'une structure de variété.

3.1. Proposition. *Soient M une variété de dimension n et G un groupe dénombrable discret agissant librement et proprement sur M. Alors le quotient $X = M/G$ est une variété de dimension n et la projection canonique $\pi : M \longrightarrow X$ est un revêtement.*

Les exemples de telles situations ne manquent pas. Donnons-en deux qui vont apparaître constamment chez nous.

3.2. Exemples

i) Le tore $\mathbb{T}^n$ est l'espace produit de n cercles $\mathbb{S}^1$. C'est une variété différentiable compacte connexe sans bord de dimension n. Mais on peut aussi l'obtenir comme quotient par une action de groupe. L'action $(\mathbf{m}, x) \in \mathbb{Z}^n \times \mathbb{R}^n \longmapsto x + \mathbf{m} \in \mathbb{R}^n$ de $\mathbb{Z}^n$ sur $\mathbb{R}^n$ est propre et libre, et la variété $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ est difféomorphe au tore $\mathbb{T}^n$. La projection canonique $\pi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{T}^n$ est donnée par :

$$\pi(x_1, \cdots, x_n) = (e^{2i\pi x_1}, \cdots, e^{2i\pi x_n}).$$

ii) Si N est une variété de dimension n et γ un difféomorphisme de N, on définit une action de $\mathbb{Z}$ sur $N \times \mathbb{R}$ en posant :

$$k(t, x) = (t + k, \gamma^k(x)).$$

Il est très facile de voir que cette action est libre et propre. Comme le groupe $\mathbb{Z}$ est discret, le quotient de $\widehat{M} = N \times \mathbb{R}$ par cette action est une variété de dimension $n+1$. On dira qu'elle est obtenue par *suspension* de (N, γ).

Sur $\widehat{M}$ on a un champ de vecteurs canonique $\widehat{X} = \frac{\partial}{\partial t}$ invariant sous l'action du difféomorphisme $\sigma : (x, t) \in \widehat{M} \longmapsto (x+1, \gamma x) \in \widehat{M}$ (qui est le générateur de l'action de $\mathbb{Z}$ sur $\widehat{M}$). Il induit donc un champ X sur la variété quotient M.

4. Cohomologie feuilletée

4.1. Définition d'un feuilletage

On rappelle qu'un *feuilletage* $\mathcal{F}$ de dimension m sur une variété M est la donnée d'un sous-fibré τ de rang m du fibré tangent TM *complètement intégrable*, c'est-à-dire que pour toutes sections $X, Y \in C^\infty(\tau)$ de τ (*i.e.* des champs de vecteurs sur M tangents à τ), le crochet $[X, Y]$ est encore une section de τ. Les sous-variétés connexes tangentes à τ sont appelées *feuilles* de $\mathcal{F}$.

4.2. Le complexe feuilleté

Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage de dimension m sur M. Pour tout $r \in \mathbb{N}$, on note $\Lambda^r(T^*\mathcal{F})$ le fibré en coalgèbres extérieures de degré r sur $T\mathcal{F}$ (le fibré tangent à $\mathcal{F}$). Ses sections sont les formes différentielles *feuilletées* de degré r ; elles forment un espace vectoriel qu'on notera $\Omega^r_{\mathcal{F}}(M)$.

On a un opérateur de différentiation le long des feuilles $d_{\mathcal{F}} : \Omega^r_{\mathcal{F}}(M) \longrightarrow \Omega^{r+1}_{\mathcal{F}}(M)$ défini (comme dans le cas classique) par la formule :

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{F}}\alpha(X_1, \cdots, X_{r+1}) &= \sum_{i=1}^{r+1} (-1)^i X_i \cdot \alpha(X_1, \cdots, \widehat{X}_i, \cdots, X_{r+1}) \\ &+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \alpha([X_i, X_j], X_1, \cdots, \widehat{X}_i, \cdots, \widehat{X}_j, \cdots, X_{r+1}) \end{aligned}$$

où $\widehat{X}_i$ signifie qu'on a omis l'argument X_i. On vérifie facilement que l'opérateur $d_{\mathcal{F}}$ est de carré nul. On obtient ainsi un complexe différentiel (dit *complexe feuilleté*) :

$$\text{(CF)} \qquad 0 \longrightarrow \Omega^0_{\mathcal{F}}(M) \xrightarrow{d_{\mathcal{F}}} \Omega^1_{\mathcal{F}}(M) \xrightarrow{d_{\mathcal{F}}} \cdots \xrightarrow{d_{\mathcal{F}}} \Omega^{m-1}_{\mathcal{F}}(M) \xrightarrow{d_{\mathcal{F}}} \Omega^m_{\mathcal{F}}(M) \longrightarrow 0.$$

On note $Z^r_{\mathcal{F}}(M)$ le noyau de $d_{\mathcal{F}} : \Omega^r_{\mathcal{F}}(M) \longrightarrow \Omega^{r+1}_{\mathcal{F}}(M)$ et $B^r_{\mathcal{F}}(M)$ l'image de $d_{\mathcal{F}} : \Omega^{r-1}_{\mathcal{F}}(M) \longrightarrow \Omega^r_{\mathcal{F}}(M)$.

4.3. Définition. *Le quotient $H^r_{\mathcal{F}}(M) = Z^r_{\mathcal{F}}(M)/B^r_{\mathcal{F}}(M)$ est le $r^{\text{ème}}$ espace vectoriel de* ***cohomologie feuilletée*** *de $(M, \mathcal{F})$.*

C'est un invariant important du feuilletage. Par exemple le dual topologique de $H^m_{\mathcal{F}}(M)$ contient les *cycles feuilletés* au sens de [Su] et donc, en particulier, les mesures transverses invariantes (*cf.* [Elk]). Le calcul de $H^*_{\mathcal{F}}(M)$ est souvent très ardu ! Pour une utilisation intéressante de la cohomologie feuilletée dans l'étude de la rigidité de certaines actions de groupes de Lie voir [MM].

Il arrive que l'espace vectoriel topologique $H^r_{\mathcal{F}}(M)$ (les espaces de formes feuilletées sont munis de la topologie C^∞) ne soit pas séparé ! On appelle alors *cohomologie feuilletée réduite* le quotient $\overline{H}^r_{\mathcal{F}}(M) = Z^r_{\mathcal{F}}(M)/\overline{B^r_{\mathcal{F}}(M)}$ où $\overline{B^r_{\mathcal{F}}(M)}$ est l'adhérence de $B^r_{\mathcal{F}}(M)$.

Si X est un champ non singulier sur M, il induit un feuilletage (ou flot) $\mathcal{F}$. On peut définir sa cohomologie feuilletée de façon plus simple. Notons τ le fibré tangent à $\mathcal{F}$ et ν un sous-fibré supplémentaire à τ dans TM. Soit χ la 1-forme différentielle telle que $\chi(X) = 1$ et $\chi_{|\nu} = 0$. Il est facile de voir que, pour tout $r \in \mathbb{N}$, on a :

$$\Omega^r_{\mathcal{F}}(M) = \begin{cases} C^\infty(M) & \text{si } r = 0 \\ C^\infty(M) \otimes \chi & \text{si } r = 1 \\ 0 & \text{si } r \geq 2 \end{cases}$$

et que le complexe feuilleté se réduit à :

$$\text{(I.6)} \qquad 0 \longrightarrow \Omega^0_{\mathcal{F}}(M) \xrightarrow{d_X} \Omega^1_{\mathcal{F}}(M) \longrightarrow 0$$

où d_X est l'opérateur défini par $d_X f = (X \cdot f) \otimes \chi$. Son conoyau $\Omega^1_{\mathcal{F}}(M)/\mathrm{Im} d_X$ est exactement le premier espace de *cohomologie feuilletée* $H^1_{\mathcal{F}}(M)$ de $\mathcal{F}$. Il ne dépend pas du champ qui le définit : on vérife aisément, en exhibant explicitement un isomorphisme de complexes feuilletés, qu'on obtiendrait la même cohomologie si on remplaçait le champ X par un champ $Z = hX$ avec h fonction partout non nulle. On montre qu'il ne dépend pas non plus du choix du fibré supplémentaire ν.

Le calcul de l'espace $H^1_{\mathcal{F}}(M)$ revient exactement à la résolution de l'équation cohomologique continue pour le champ X :

(I.7) Étant donnée $g \in C^\infty(M)$ existe-t-il $f \in C^\infty(M)$ telle que $X \cdot f = g$?

5. Cohomologie des groupes

5.1. Soit Γ un groupe discret (dénombrable pour simplifier) agissant sur un espace vectoriel E. L'action d'un élément $\gamma \in \Gamma$ sur un élément $u \in E$ sera notée $\gamma \cdot u$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, soit $C^k(\Gamma, E)$ l'ensemble des fonctions de Γ^k dans E qu'on appelle *k-cochaînes inhomogènes* sur Γ à valeurs dans E. On définit l'application linéaire $d : C^k(\Gamma, E) \longrightarrow C^{k+1}(\Gamma, E)$ par :

$$\begin{aligned}(dc)(\gamma_1, \ldots, \gamma_{k+1}) = \ & \gamma_1 \cdot c(\gamma_2, \ldots, \gamma_{k+1}) \\ & + \sum_{i=1}^{k} (-1)^i c(\gamma_1, \ldots, \gamma_{i-1}, \gamma_i\gamma_{i+1}, \gamma_{i+2}, \ldots, \gamma_{k+1}) \\ & + (-1)^{k+1} c(\gamma_1, \ldots, \gamma_k).\end{aligned} \tag{I.8}$$

L'opérateur d satisfait $d^2 = 0$; l'image $B^k(\Gamma, E)$ de $d : C^{k-1}(\Gamma, E) \longrightarrow C^k(\Gamma, E)$ est donc un sous-espace vectoriel du noyau $Z^k(\Gamma, E)$ de $d : C^k(\Gamma, E) \longrightarrow C^{k+1}(\Gamma, E)$. Les quotients

$$H^k(\Gamma, E) = Z^k(\Gamma, E)/B^k(\Gamma, E) \ \text{ pour } \ k \in \mathbb{N} \tag{I.9}$$

sont appelés les *groupes de cohomologie* de Γ à valeurs dans le Γ-module E.

5.2. Supposons que Γ est le groupe infini cyclique $\mathbb{Z}$ et que son action sur E est engendrée par un élément γ. Alors un calcul facile montre que :

$$H^*(\Gamma, E) = \begin{cases} E^\gamma & \text{si } * = 0 \\ E/\langle x - \gamma x\rangle & \text{si } * = 1 \\ 0 & \text{si } * \geq 2 \end{cases} \tag{I.10}$$

où $\langle x - \gamma x\rangle$ est le sous-espace vectoriel de E constitué des éléments de la forme $x - \gamma x$ avec x variant dans E. Le calcul de $H^1(\Gamma, E)$ se ramène donc à la résolution de l'équation cohomologique discrète :

(I.11) Étant donné $y \in E$, existe-t-il $x \in E$ tel que $y = x - \gamma x$?

CHAPITRE II

ÉCHANGES D'INTERVALLES

Dans ce chapitre on introduit la notion d'échange d'intervalles. On en donne des généralités, les éléments qui leur sont rattachés ainsi que certains des résultats fondamentaux qui ont été obtenus dans le domaine.

1. Généralités

Dans toute la suite on notera I l'intervalle semi-ouvert $[0,1[$ de $\mathbb{R}$. (L'étude peut être faite bien entendu pour tout autre intervalle du même type.)

1.1. Définition. *On appelle* ***échange de*** m ***intervalles*** *de* I *une bijection* T *de* I *définie comme suit : il existe une subdivision* $a_o = 0 < a_1 < ... < a_m = 1$*, telle que* $T(x) = x + \delta_i$ *pour tout* $x \in [a_{i-1}, a_i[$,$(\delta_i \in \mathbb{R})$

Pour tout $i = 1, ..., m$ *on note* I_i *l'intervalle* $[a_{i-1}, a_i[$. *L'application* T *est continue sur* $I \setminus \{a_1, a_2, ..., a_{m-1}\}$. *Elle est continue à droite en tout point* a_i.

1.2. Exemples

1 - Une rotation d'angle α sur le cercle $\mathbb{S}^1$ définit un échange de 2 intervalles.

2 - Pour $m = 3$, l'application définie comme suit est un échange de 3 intervalles:

$$T(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{4} & \text{si } x \in [0, \frac{1}{4}[\\ x - \frac{1}{4} & \text{si } x \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}[\\ x & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 1[\end{cases}$$

3 - Pour $m = 4$, soient $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \triangle^3$(voir paragraphe 1.3).

L'application T suivante est un échange de 4 intervalles

$$T(x) = \begin{cases} x + \lambda_4 & \text{si } x \in [0, \lambda_1[\\ x + \lambda_3 + \lambda_4 & \text{si } x \in [\lambda_1, \lambda_1 + \lambda_2[\\ x - \lambda_2 + \lambda_4 & \text{si } x \in [\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3[\\ x - \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 & \text{si } x \in [\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, 1[\end{cases}$$

1.3. Vecteur translation, vecteur longueur et permutation associée

Le vecteur $\delta = (\delta_1, \delta_2, ..., \delta_m)$ donné dans la définition précédente est appelé *vecteur de translation* de l'échange d'intervalles T.

On désigne par :

$$\text{(II.1)} \qquad \triangle^{m-1} = \left\{ \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m) \in \mathbb{R}^m, \lambda_i \geq 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1 \right\}$$

et $\mathfrak{S}_m$ le groupe des permutations de l'ensemble $\{1, ..., m\}$. À chaque échange d'intervalles T on associe :

• Une permutation $\pi \in \mathfrak{S}_m$ définie par $T(I_i) = J_{\pi(i)}$ où $J_j = [b_{j-1}, b_j[, j = 1, 2, ..., m$, avec $b_0 = 0 < b_1 < ... < b_m = 1$.

• Un vecteur longueur $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m) \in \triangle^{m-1}$ où $\lambda_i = a_i - a_{i-1}$.

Réciproquement, étant donnés $\lambda \in \triangle^{m-1}$ et $\pi \in \mathfrak{S}_m$, on pose : $a_0 = 0$, $a_i = \sum_{k \leq i} \lambda_k$ et on considère la famille d'intervalles $I_i = [a_{i-1}, a_i[$. L'échange $T_{(\lambda,\pi)}$ de m intervalles associé à (λ, π) est défini par :

$$\text{(II.2)} \qquad T_{(\lambda,\pi)}(x) = x + \sum_{k \leq \pi(i)} \lambda_{\pi^{-1}(k)} - \sum_{k \leq i} \lambda_k \text{ pour } x \in I_i.$$

L'échange $T_{(\lambda,\pi)}$ ainsi défini vérifie:

1) $T_{(\lambda,\pi)}$ est une bijection de $[0, 1[$ sur $[0, 1[$ et d'inverse $T_{(\lambda^\pi,\pi^{-1})}$, où :

$$\lambda^\pi = (\lambda_{\pi^{-1}(1)}, ..., \lambda_{\pi^{-1}(m)}).$$

2) En posant $b_i = \sum_{k \leq i} \lambda_{\pi^{-1}(k)}$, on a $T_{(\lambda,\pi)}(I_i) = [b_{\pi(i)-1}, b_{\pi(i)}[$ car :

$$T_{(\lambda,\pi)}(a_{i-1}) = b_{\pi(i)-1} \quad \text{et} \quad T_{(\lambda,\pi)}(a_i^-) = b_{\pi(i)}$$

où $T_{(\lambda,\pi)}(a_i^-) = \lim\limits_{x \to a_i^-} Tx$.

Pour simplifier l'application $T_{(\lambda,\pi)}$ sera noté T.

1.4. Ensemble de discontinuité. On note $D(T) = \{a_1, a_2, ..., a_{m-1}\}$ l'ensemble qui contient les *discontinuités* de T ; T est continue à droite en tout point a_i et est continue en a_i si, et seulement si, $\pi(i + 1) = \pi(i) + 1$.

1.5. Permutation irréductible.

1.5.1. Définition. *Une permutation $\pi \in \mathfrak{S}_m$ est dite **irréductible** si $\pi(\{1, 2, ..., k\}) \neq \{1, 2, ..., k\}$ pour tout $k < m$.*

On note $\mathfrak{S}_m^0$ l'ensemble des permutations irréductibles de $\mathfrak{S}_m$.

1.5.2 Remarque. Si $\pi(\{1, ..., k\}) = \{1, ..., k\}$ pour un $k < m$, on décompose $T_{(\lambda,\pi)}$ en deux morceaux : en prenant T_1 comme la restriction de T à $[0, a_k[$ et T_2 comme la restriction de T à $[a_k, 1[$. On obtient ainsi deux échanges d'intervalles.

En effet, $T_1([0,a_k[) = [0,a_k[$ et $T_2([a_k,1[) = T([a_k,1[) = [a_k,1[$ car :

$$T([0,a_k[) = \bigcup_{i=1}^{i=k}(T(I_i) = \bigcup_{i=1}^{i=k} J_{\pi(i)} = \bigcup_{i=1}^{i=k} J_i = [0,b_k[.$$

Comme T préserve la longueur on a $a_k = b_k$. On peut donc décomposer un échange d'intervalles en un nombre fini d'échanges d'intervalles T_i où la permutation associée à chaque T_i est irréductible. Une permutation peut être irréductible et fixer un point. Par exemple :

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

est irréductible et fixe 3 alors que $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ est réductible mais sans point fixe.

1.6.Notions dynamiques.

• On appelle *orbite* de x par T l'ensemble $O_T(x) = \{T^n(x) : n \in \mathbb{Z}\}$.

• On dit que x est un point *périodique* s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $T^n(x) = x$; ce qui est équivalent à dire que l'orbite $O_T(x)$ est finie ; dans ce cas cette orbite est alors dite *périodique*.

• L'orbite $O_T(x)$ est dite *dense* dans I si son adhérence $\overline{O_T(x)}$ est tout l'intervalle I.

• On dit que T est *minimal* si, pour tout $x \in I$, $O_T(x)$ est dense dans I.

• On dira que $O_T(x)$ est *localement dense* si $int(\overline{O_T(x)}) \neq \emptyset$ où $int(A)$ désigne l'intérieur de A.

• Une partie A de I est dite T-*invariante* si $T(A) = A$. Par exemple, toute orbite est T-invariante. Pour une partie quelconque A de I, la partie $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} T^n(A)$ est une partie T-invariante. Une réunion (resp intersection) quelconque de parties T- invariantes est T -invariante. En particulier $D^\infty(T) - \{1\}$ est $T-$invariant où $D^\infty(T) = \bigcup_{i=0}^{m} O_T(a_i) \cup \{1\}$. On vérifie que, si A est T-invariant alors $I - A$ est aussi T-invariant. En revanche, l'adhérence (resp. la frontière, l'intérieur) de A ne l'est pas toujours.

• $\overline{D^\infty(T)}$ est T-invariant.

1.7. Ensemble de type M

Un *ensemble de type M* est un sous ensemble de I qui est une réunion finie d'intervalles de la forme $[\alpha_i, \beta_i[$ avec $\alpha_i, \beta_i \in D^\infty(T)$. On a les propriétés suivantes :

1) L'intersection et la réunion de deux ensembles de type M est de type M.

2) Le complémentaire d'un ensemble de type M est de type M.

3) Toute réunion (resp. intersection) d'ensembles de type M est de type M.

4) Un ensemble de type M et T-invariant contient au moins un point de discontinuité de T. En effet, si A est de type M et T-invariant, il s'écrit comme réunion finie d'intervalles de la forme $[\alpha_k, \beta_k[$, $\alpha_k, \beta_k \in D^\infty(T)$. Donc $\alpha_k = T^k(a_i)$ pour un $a_i \in D(T)$. Comme $D^\infty(T)$ est T-invariant, $T^{-k}(\alpha_k) = a_i \in D^\infty(T)$.

1.8. Composante

On appelle *composante* de T un ensemble de type M qui est T-invariant, non vide et minimal pour ces propriétés.

i) Une telle composante existe en vertu de lemme de Zorn.

ii) Une composante est dite *périodique* si tous ses points sont périodiques et de même période.

iii) Une composante C de T est dite *minimale* si toute orbite de C y est dense (*i.e.* pour tout $x \in C, \overline{O_T(x)} \cap C = C$).

Il résulte de la définition que deux composantes de T sont soit disjointes soit égales. En effet, Si C_1 et C_2 sont deux composantes de T telles que $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$ alors $C_1 \cap C_2$ est un ensemble de type M, T-invariant et non vide. Par minimalité de C_1 (resp. C_2) on aura : $C_1 \cap C_2 = C_1 = C_2$.

2. Notions spectrales

Soit T un échange d'intervalles sur $I = [0, 1[$. On note μ la mesure de Lebesgue sur I et :

$$L^2(I, \mu) = \{f : I \longrightarrow \mathbb{C} : ||f||_2 = (\int |f|^2 d\mu)^{\frac{1}{2}} < \infty\}$$

l'espace des fonctions complexes mesurables sur I et de carré μ-intégrable.

2.1. Définition. *L'opérateur :*

$$U_T : f \in L^2(I, \mu) \longmapsto f \circ T \in L^2(I, \mu) \qquad \text{(II.3)}$$

est appelé ***opérateur de composition*** *par T.*

Il bien défini et il est *unitaire*, c'est-à-dire il vérifie $||U_T(f)||_2 = ||f||_2$.

2.2. Définition. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. *Une fonction $f \in L^2([0, 1[,\ \mu)$ est appelée* ***fonction propre*** *de T associée à la* ***valeur propre*** *λ si $f \circ T = \lambda f$, μ-presque partout.*

2.3. Remarque. Par définition, les fonctions propres de l'opérateur T associées à la valeur propre 1 sont les fonctions constantes sur les orbites de T. Comme U_T est unitaire ($||U_T(f)||_2 = ||f||_2$), les valeurs propres de U_T sont de module 1 et s'écrivent $\lambda = \exp(2i\pi\alpha)$ avec $\alpha \in [0, 1[$.

La valeur propre λ est dite *rationnelle* (resp. *irrationnelle*) si α est rationnel (resp. irrationnel).

2.4. Définition. *Soit T un échange d'intervalles.*

• *On dit que T est* **ergodique** *par rapport à la mesure de Lebesgue μ si les ensembles T-invariants sont de μ-mesure pleine ou nulle.*

• *T est dit C^0-***ergodique** *si les fonctions propres continues de T associées à la valeur propre 1 sont les constantes.*

• *On dit que T est* **uniquement ergodique** *si la mesure μ est la seule mesure borélienne de probabilité T-invariante.*

• *T est dit* **faiblement mélangeant** *si les fonctions propres dans $L^2(I, \mu)$ de T sont les constantes.*

• *T est* **topologiquement faiblement mélangeant** *si les fonctions propres continues de T sont les constantes.*

2.5. Propriétés

i) Si T est minimal alors T est C^0-ergodique.

ii) Si T est ergodique par rapport à la mesure de Lebesgue μ alors T est minimal et donc T est C^0-ergodique.

iii) Si T est uniquement ergodique alors T est ergodique par rapport à μ.

iv) Si T est faiblement mélangeant alors T est topologiquement faiblement mélangeant. La réciproque est fausse. En effet, soit R_α la rotation d'angle irrationnel α définie sur l'intervalle unitaire $[0, 1[$ c'est un échange de 2 intervalles avec $\alpha \notin \mathbb{Q}$. On sait que les fonctions propres de U_{R_α} sont de la forme $g_k(x) = Ae^{2i\pi kx}$, $k \in \mathbb{Z}^*$, où A est une constante complexe. Soit h un échange de m sous-intervalles de $[0, 1[$, posons $T = h \circ R_\alpha \circ h^{-1}$. Alors T est un échange d'au plus $2m$ intervalles.

Les fonctions $f_k = g_k \circ h^{-1}$, avec $k \in \mathbb{Z}$, sont les fonctions propres non constantes de T dans $L^2(I, \mu)$. Donc, T n'est pas faiblement mélangeant. Mais, T est topologiquement faiblement mélangeant car si f est une fonction propre continue non constante de T alors $f \circ h$ est une fonction propre de R_α, donc f s'écrit $f = g_k \circ h^{-1}$ pour un $k \in \mathbb{Z}^*$ qui est continue par morceaux et jamais continue dès que $m > 2$.

3. Les résultats fondamentaux

3.1. Proposition Si T est un échange de m intervalles alors pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$, T^n est un échange d'au plus $(n(m-1)+1)$ intervalles.

Preuve. Elle se fait par récurrence sur n. $\diamondsuit$

3.2. Théorème (Kronecker). *Soit T_α un échange de 2 intervalles de* $[0,1[$. *Alors :*

– *si $\alpha \in \mathbb{Q}$, toutes les orbites de T_α sont périodiques de même période.*

– *si $\alpha \notin \mathbb{Q}$, toutes les orbites de T_α sont denses dans I.*

Preuve. Il suffit de la faire pour la rotation R_α de $\mathbb{S}^1$ d'angle α associée à T_α.

• Si $\alpha = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, on a $R_\alpha^q z = e^{2i\pi q\alpha} z = e^{2i\pi p} z = z$, pour tout $z \in \mathbb{S}^1$. Donc z est un point périodique. Montrons que q est la période de z :

Si $q' \in \mathbb{N}^*$,$(q' < q)$ est tel que $R_\alpha^{q'} z = z$, on aura $e^{2i\pi q'\alpha} z = z$. Donc il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $pq' = qn$. Puisque p et q sont premiers entre eux alors q divise q'. Ce qui est impossible.

• Si $\alpha \notin \mathbb{Q}$ soit $z \in \mathbb{S}^1$ et soit $I \subset \mathbb{S}^1$ un intervalle de longueur $\varepsilon > 0$. Montrons qu'il existe $n \in \mathbb{Z}$ telque $R_\alpha^n z \in I$.

Il existe $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$, $n_1 \neq n_2$ tels que $|R_\alpha^{n_1} 1 - R_\alpha^{n_2} 1| < \varepsilon$. D'où : $|1 - R^{n_2 - n_1} 1| < \varepsilon$. Soit $p = |n_2 - n_1|$. On a, pour $z = e^{2i\pi x}$:

$$|z - R_\alpha^p\, z| = |R_x 1 - R_\alpha^p . R_x 1| = |R_x 1 - R_x R_\alpha^p 1| = |1 - R_\alpha^p 1| < \varepsilon.$$

Soit $N < \frac{\varepsilon}{|1 - R_\alpha^p(1)|}$ un entier et considérons la subdivision $(R_\alpha^{pk} z)_{0 \leq k \leq N}$ de $\mathbb{S}^1$. Chaque intervalle de la subdivision est de longueur inférieure à ε car $\left| R_\alpha^{pk} z - R_\alpha^{pk'} z \right| \leq N\,|1 - R_\alpha^p 1| < \varepsilon$. On déduit alors qu'il existe $s \in \{0, 1, ..., N\}$ tel que $R_\alpha^{ps} z \in I$. Donc $O_{R_\alpha} z$ est dense dans $\mathbb{S}^1$. $\diamondsuit$

3.3. Théorème de structure (de Keane-Arnoux [Arx2]). L'énoncé de ce théorème est le suivant : *Soit T un échange de m intervalles de I. Alors T a au plus* $(m-1)$ *composantes périodiques ou minimales.*

Sa démonstration sera découpée et se fera en quelques étapes. Notons P la réunion des orbites périodiques de T.

3.3.1. Proposition. *Si P est non vide alors $P = P_{N_1} \cup P_{N_2} \cup \cdots \cup P_{N_k}$ où P_{N_k} est une composante périodique et $1 \leq k \leq m - 1$.*

Preuve. Pour démontrer cette proposition, on aura besoin du lemme suivant :

Lemme. i) *Soit x_0 un point périodique de période N_0. Alors l'intervalle de continuité de T^{N_0} contenant x_0 est formé de points périodiques de période N_0.*

ii) *Pour N_0 fixé, l'ensemble P_{N_0} des points périodiques de période N_0 est un ensemble de type M,T-invariant et contenant au moins un point de discontinuité de T.*

Preuve du lemme. i) Soit $I_{x_0} = [\alpha, \beta[$ l'intervalle de continuité de T^{N_0} contenant x_0 où $\alpha, \beta \in D(T^{N_0})$.

Si $T^{N_0}(x_0) = x_0$ alors $T^{N_0}(x) = x$ pour tout $x \in I_{x_0}$.

ii) P_{N_0} est du type M : D'après i) P_{N_0} est une réunion d'intervalles de continuité de T^{N_0} qui sont de la forme $[a_k, b_k[$ où $a_k,\ b_k \in D(T^{N_0})$. D'après la proposition 3.1, ces intervalles sont en nombre fini ($\leq N_0(m-1)+1$).

– P_{N_0} est T- invariant : Si $x_0 \in P_{N_0}$ alors $T^{N_0}(x_0) = x_0$. D'où : $T^{N_0}(T(x_0)) = T^{N_0+1}(x_0) = T(T^{N_0}(x_0)) = T(x_0)$. D'où $T(x_0) \in P_{N_0}$.

– P_{N_0} contient au moins un point de $D(T)$: résulte de la propriété 4 du paragraphe 2.4.

Revenons maintenant à la preuve de la proposition, On suppose que P est non vide. Soit donc $x \in P$ de période N_1.

D'après le ii) du lemme précédent, l'ensemble Q_{N_1} des points périodiques de période N_1 est non vide de type M et T-invariant. Donc d'après le lemme de Zorn, Q_{N_1} contient un élément minimal pour l'inclusion , noté , P_{N_1} dans la famille des ensembles de type M, T-invariants et non vides. P_{N_1} est donc une composante périodique contenant un point de discontinuité a_{p_1} (d'aprés la propriété 4 du paragraphe 1.7).

Si $P = P_{N_1}$, la proposition est démontrée.

Si $P \neq P_{N_1}$, soit $y \in P - P_{N_1}$ de période N_2. Comme précédement, il existe une composante périodique P_{N_2} de période N_2 et contenant y. On a aussi P_{N_2} contient un point de discontinuité noté a_{p_2} ($a_{p_2} \neq a_{p_1}$) et y. Comme $y \in P_{N_2}$ et $y \notin P_{N_1}$, alors P_{N_1} et P_{N_2} sont disjointes et on a $P_{N_2} \subset P - P_{N_1}$.

Puisque chaque composante contient au moins un point de discontinuité de T alors au bout de $(m-1)$ étapes, on arrive à un nombre fini de composantes périodiques $P_{N_1}, P_{N_2}, ..., P_{N_k}$, et on a: $P = P_{N_1} \cup P_{N_2} \cup ... \cup P_{N_k}$, $k = 1, 2, ..., m-1$.

On désigne par N la réunion des orbites non périodiques de T.

3.3.2. Proposition. *Soit T un échange de m intervalles de I. Si N est non vide alors $N = M_1 \cup \cdots \cup M_s$ où M_i est une composante minimale de T et $s \leq m-1$.*

Preuve. On suppose que N est non vide. Puisque P est de type M et T-invariant alors $N = I - P$ est de type M et T-invariant. D'après le lemme de Zorn, N contient une composante: M_1.

Montrons que M_1 est une composante minimale, ce qui revient à montrer que :
pour tout $y \in M_1$ on a $\overline{O(y)} \cap M_1 = M_1$.

On suppose le contraire : il existe $y \in M_1$ et un intervalle $I_0 =]\alpha_0, \beta_0[\subset M_1$ et disjoint de $O(y)$. On distingue deux cas :

1^{er} cas. I_0 contient au moins un point α de $D^\infty(T)$. D'après le théorème de récurrence de Poincaré on sait que presque tout point (au sens de la mesure de Lebesgue) est récurrent. Donc, il existe $n \in \mathbb{N}^*$: $\beta = T^n(\alpha) \in I_0$. On a $\beta \neq \alpha$ et $\alpha, \beta \in D^\infty(T)$.

Posons $J = [\alpha, \beta[$. On a $J \subset I_0$. D'après le paragraphe 1.6, $\bigsqcup_{n\in\mathbb{Z}} T^n(J)$ est un ensemble de type M et T-invariant. Puisque $J \subset M_1$ et M_1 est T-invariant $\bigsqcup_{n\in\mathbb{Z}} T^n(J) \subset M_1$. Par minimalité de M_1, $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}} T^n(J) = M_1$.

Comme $y \in M_1$ alors $y \in \bigsqcup_{n\in\mathbb{Z}} T^n(J)$, donc il existe n_0 tel que $y \in T^{n_0}(J)$. D'où, $T^{-n_0}(y) \in J \subset I_0$, ceci est absurde car $O(y) \cap I_0 = \emptyset$.

$2^{\text{ème}}$ cas. I_0 ne contient pas de point de $D^\infty(T)$.

Posons $I_0 =]\alpha_0\, \beta_0[$. Puisque $\overline{D^\infty(T)}$ est un compact de $\mathbb{R}$ donc il existe $\alpha, \beta \in \overline{D^\infty(T)}$ tels que :

$$d(\alpha_0, \overline{D^\infty(T)}) = d(\alpha_0, \alpha)$$

et :

$$d(\beta_0, \overline{D^\infty(T)}) = d(\beta_0, \beta)$$

où $d(x, A) = \inf_{a\in A} d(x, a)$et A une partie de I.

Posons $J =]\alpha, \beta[$. On a $I_0 \subset J$ et $J \cap \overline{D^\infty(T)} = \emptyset$. Donc J s'itère continûment et tous ses itérés $(T^n J)_{n\in\mathbb{Z}}$ sont disjoints deux à deux. En effet, s'il existe $n, m \in \mathbb{Z}$, $n \neq m$ tels que $T^n(J) \cap T^m(J) \neq \emptyset$ alors pour $N = |n - m|$,$T^N(J) \cap J \neq \emptyset$. Puisque $\text{Leb}(T^N J) = \text{Leb}(J)$, alors soit $T^N(\alpha) \in J$ soit $T^N(\beta) \in J$. On suppose que $T^N\alpha \in J$. Puisque $\overline{D^\infty(T)}$ est T-invariant (d'après la définition 1.6), $T^N\alpha \in \overline{D^\infty(T)}$ ceci implique que $T^N\alpha \in J \cap \overline{D^\infty(T)}$, ce qui est absurde. On a de même si $T^N\beta \in J$. On en déduit alors que $\text{Leb}(\bigsqcup_{n\in\mathbb{Z}} T^n(J)) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \text{Leb}(T^n(J)) \leq 1$. En particulier, $\text{Leb}(T^n(J)) \to 0$. Comme $\text{Leb}(T^n(J)) = \text{Leb}(J)$ on aura $\text{Leb}(J) = 0$, ce qui est absurde.

Si $N = M_1$, on a la proposition. Sinon, il existe une composante $M_2 \subset N - M_1$. Puisque chaque composante contient au moins un point de discontinuité alors au bout d'au plus $(m - 1)$ étapes, on aura $N = M_1 \cup \cdots \cup M_s$ où M_i est une composante minimale et $s \leq m - 1$. $\diamondsuit$

3.3.3. Preuve du théorème de structure de Keane Arnoux

Puisque $I = P \cup N$et que chaque composante contient au moins un point de discontinuité, le théorème résulte alors des propositions 3.2.1 et 3.2.2. ci-dessus.

3.4. Critère de périodicité

3.4.1. Définition. *T est dit **périodique** si toutes ses composantes sont périodiques.*

3.4.2. Théorème (critère de périodicité). *Soit $T = (\lambda, \pi)$ un échange de m intervalles associé à $(\lambda, \pi) \in \triangle^{m-1} \times \mathfrak{S}^0_m$. Si $\lambda \in \mathbb{Q}^m$ alors T est périodique.*

Preuve. Soit $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_m) \in \Delta^{m-1}$ avec $\lambda_i = \frac{p_i}{q_i}$, $p_i \in \mathbb{N}, q_i \in \mathbb{N}^*$.

3.4.2.1. Proposition. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $T^n(x) = x + \sum_{i=1}^m N_i^n(x)\delta_i$ où :*

$$N_i^n(x) = \#(\{x, T(x), ..., T^{n-1}(x)\} \cap I_i).$$

Preuve. La preuve se fait par récurrence sur n. Pour $n = 1$, on a $N_i^1(x) = 1$ si $x \in I_i$ et donc :

$$x + \sum_{i=1}^{m} N_i^1(x)\delta_i = x + \delta_i = Tx,$$

si $x \in I_i$.

On suppose que $T^n(x) = x + \sum_{i=1}^{m} N_i^n(x)\delta_i$ pour $n \geq 1$ et montrons que :

$$T^{n+1}(x) = x + \sum_{i=1}^{m} N_i^{n+1}(x)\delta_i.$$

- On a $T^{n+1}(x) = T(T^n(x)) = T^n(x) + \delta_k$ où $T^n(x) = x + \sum_{i=1}^{m} N_i^n(x)\delta_i \in I_k$.
- On a $N_i^n(x) = \#(\{x, T(x), ., T^{n-1}(x)\} \cap I_i)$.
- Pour $i \neq k$, on a $N_i^n(x) = N_i^{n+1}(x)$ car $T^n x \notin I_i$.
- Pour $i = k$, on a $N_k^{n+1}(x) = N_k^n(x) + 1$.

Donc :

$$\begin{aligned}
T^{n+1}(x) &= x + \sum_{i=1}^{m} N_i^n(x)\delta_i + \delta_k \\
&= x + \left(\sum_{i=1, i\neq k}^{m} N_i^{n+1}(x)\delta_i \right) + N_k^n(x)\delta_k + \delta_k \\
&= x + \sum_{i=1, i\neq k}^{m} N_i^{n+1}(x)\delta_i + (N_k^n(x) + 1)\delta_k \\
&= x + \sum_{i=1, i\neq k}^{m} N_i^{n+1}(x)\delta_i + N_k^{n+1}(x)\delta_k \\
&= x + \sum_{i=1}^{m} N_i^{n+1}(x)\delta_i.
\end{aligned}$$

Revenons maintenent à la preuve du théorème. Comme :

$$\begin{aligned}
\delta_i &= \sum_{\pi(s)<\pi(i)} \lambda_s - \sum_{s<i} \lambda_s \\
&= \sum_{j=1}^{m} L_{ij}(\pi)\lambda_j
\end{aligned}$$

où $L_{ij}(\pi) \in \{-1, 0, 1\}$, alors :

$$\begin{aligned}
T^n(x) &= x + \sum_{i=1}^{m} N_i^n(x) \left(\sum_{j=1}^{m} L_{ij}(\pi)\lambda_j \right) \\
&= x + \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{m} N_i^n(x) L_{ij}(\pi) \right) \lambda_j \\
&= x + \sum_{j=1}^{m} M_{n,j}\lambda_j
\end{aligned}$$

où $M_{n,j} = \sum_{i=1}^{m} N_i^n(x) L_{ij}(\pi)$. Par suite $T^n(x) = x + r_n$ où :

$$r_n = \sum_{j=1}^{m} M_{n,j} \frac{p_j}{q_j} = \frac{M_n}{q_1 \cdot \cdots \cdots \cdot q_m}.$$

Comme $-x \leq r_n \leq 1 - x$, alors la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée, elle a alors un nombre fini de valeurs. Donc $O_T(x)$ est finie. $\diamondsuit$

3.5. Critère de minimalité

Dans cette section, on donnera des critères assurant la minimalité d'un échange d'intervalles.

3.5.1. Définition. *On se donne un échange d'intervalles comme ceux qu'on a considérés précedement.*

1) *On dit que T satisfait la condition (IDOC) si :*

a) $O(a_i) = \{T^n(a_i) : n \in \mathbb{Z}\}$ est infini pour tout $1 \leq i < m$.

b) $O(a_i) \cap O(a_j) = \emptyset$ pour tous $1 \leq i, j \leq m-1$, $i \neq j$.

2) *On dit que T vérifie* ***la condition de minimalité*** *si :*

i) *Pour tout $x \in [0, 1[$, $O_T(x)$ est infinie ($O_T(x)$ est non périodique).*

ii) *Si F est un ensemble de type M, T-invariant et non vide alors $F = [0, 1[$.*

3) *On dit que T est de* **rang** *2 si les longueurs associées λ_i appartiennent à un même $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de rang 2. On peut montrer [Bos] que l'on peut toujours se ramener au cas où les λ_i appartiennent à un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel engendré par 1 et un irrationnel α.*

3.5.2. Théorème (Keane [Kea1]). *Si $T = T_{(\lambda,\pi)}$ satisfait la condition idoc où π est une permutation irréductible, alors T est minimal.*

Preuve. Elle est basée sur les deux lemmes suivants :

Soit F un ensemble de type M, T-invariant et non vide.

3.5.2.1. Lemme. *Si $x \in Fr(F)$ et $x \neq 1$ alors $Tx \in Fr(F)$ ou $x \in D(T) \cup \{0\}$.*

En effet, si $x \notin D(T) \cup \{0\}$ alors x est un point de continuité de T et donc $Tx \in \overline{T(F)} = \overline{F}$.

Si $Tx \in int(F)$ il existe $\beta > 0$ tel que $T(]x-\beta, x+\beta[) \subset int(F)$. D'où $]x-\beta, x+\beta[\subset F$ car $TF = F$, ce qui est une contradiction car $x \in Fr(F) \setminus \{1\}$ et $x \neq 0$ implique $]x-\beta, x[\cap F = \emptyset$. Par suite $Tx \in \overline{F} \setminus int(F) = Fr(F)$.

3.5.2 .2. Lemme. *Si $x \in Fr(F)$ et $x \neq 1$ alors $T^{-1}(x) \in Fr(F)$ ou $T^{-1}(x) \in D(T)$.*

En effet, d'après le lemme 3.5.2.1, si $T^{-1}x \notin Fr(F)$ alors $x \in D(T^{-1}) \cup \{0\}$ or $D(T^{-1}) = T(D(T))$ et $0 \in T(D(T))$. Donc $x \in T(D(T))$ et par suite, $T^{-1}(x) \in D(T)$.

Revenons maintenant à la preuve du théorème : Soit T vérifiant l'IDOC. Montrons que T satisfait la condition de minimalité:

i) T n'a pas de composantes périodiques puisqu'une composante périodique contient un point de discontinuité a_i. Alors l'orbite $O_T(a_i)$ est périodique, ce qui contredit l'IDOC.

ii) T n'a pas d'ensemble de type M, T-invariant , non vide et distinct de I:

Soit F un ensemble de type M , T-invariant et non vide de I.

Puisque $Fr(F)$ est fini et que $O_T(x) = O_T(a_j)$ (pour un $a_j \in D(T)$), est infinie, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $T^n x \notin Fr(F)$. D'après le lemme 3.2.1, il exiserait $s \in \mathbb{N}$ tel que $T^s x \in D(T) \cup \{0\}$.

D'après le lemme 3.5..2.2 et comme précédement, il existe $t \in \mathbb{N}^*$ tel que $T^{-t}x \in D(T)$.
Soit $y = T^{-t}x \in D(T)$. On a $T^{s+t}y = T^s x \in D(T) \cup \{0\}$. Puisque les orbites des points de $D(T)$ sont distinctes alors nécessairement $T^{s+t}y = 0$. D'où $T(T^{s+t-1}y) = 0$ et comme $T(0) \neq 0$ donc $T^{s+t-1}y \in D(T)$. Par suite $s + t = 1$. D'où $s = 0$ et $t = 1$. Donc $Ty = x \in D(T) \cup \{0\}$. D'où $x = 0$. Par suite, $Fr(F) = \{0, 1\}$ et donc $F = [0, 1[$. $\diamondsuit$

3.5.3. Théorème (Keane [Kea1]). *L'échange d'intervalles T est minimal si, et seulement si, T satisfait la condition de minimalité.*

Preuve. Si l'une des conditions i) ou ii) n'est pas satisfaite alors soit T a des points périodiques, ce qui contredit la minimalité de T, soit il existe un ensemble F de type M, T-invariant et distinct de $[0, 1[$. Dans ce cas , on a $\bar{F} \neq [0, 1[$. Pour $x \in F$, $\overline{O_T(x)} \subset \overline{F}$ et $\overline{F} \neq [0, 1[$ car il existe $x \in [0, 1[- F$ et $\varepsilon > 0$ tel que $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\cap F = \emptyset$. Donc pour tout $x \in F$, $O_T(x)$ sera contenue dans F et ne sera plus dense dans $[0, 1[$.

Réciproquement, On suppose T non minimal. Soit donc $x \in [0, 1[$ tel que $\overline{O_T(x)} \neq [0, 1[$. Soit $I = [a, b[$ une composante connexe de $[0, 1[- \overline{O_T(x)}$. On a besoin du lemme qui suit.

Lemme. *I contient au moins 2 points αet β de $D^\infty(T)$.*

Preuve du lemme. Supposons le contraire, c'est-à-dire I contient un seul point de $D^\infty(T)$ ou ne contient aucun point de $D^\infty(T)$. On peut supposer que I ne contient pas de point de $D^\infty(T)$, quitte à diminuer I. Soient c et $d \in \overline{D^\infty(T)}$ tels que $d(a, \overline{D^\infty(T)}) = d(a, c)$ et $d(b, \overline{D^\infty(T)}) = d(b, d))$. On a $I \subset]c, d[$ et $]c, d[\cap \overline{D^\infty(T)} = \emptyset$ donc $]c, d[$ s'itère continûment. On vérifie que les itérés de $]c, d[$ sont deux à deux disjoints. Mais alors $\mathrm{Leb}(\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} T^n(]c, d[) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{Leb}(T^n(]c, d[)) = +\infty$, ce qui est absurde.

Terminons maintenant la preuve du théorème. Posons $J = [\alpha, \beta[$. Puisque α et β sont deux points de $D^\infty(T)$, $M_0 = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} T^n(J)$ est un ensemble de type M et invariant par T. On a alors :

$$O_T(x) \cap J \subset O_T(x) \cap I = \emptyset.$$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $x \notin M_0$. Par suite $M_0 \neq [0, 1[$, ce qui contredit la condition de minimalité. $\diamondsuit$

CHAPITRE III

ÉCHANGES D'INTERVALLES NON TOPOLOGIQUEMENT FAIBLEMENT MÉLANGEANTS

Dans cet chapitre on prouve un critère d'existence de fonctions propres continues non constantes pour les échanges d'intervalles, c'est à dire de non mélange faible topologique. On construit pour tout entier $m > 3$ des échanges de m intervalles de rang 2 uniquement ergodiques et non topologiquement faiblement mélangeants. Nous répondons aussi à une question de Ferenczi et Zamboni dans [FZ]. On construit aussi pour tout entier pair $m \geq 4$ des échanges de m intervalles possédant des valeurs propres irrationnelles (avec fonctions propres associées continues donc non topologiquement faiblement mélangeants) et possédant aussi des valeurs propres rationnelles (avec fonctions propres associées continues par morceaux) et qui sont soit uniquement ergodiques, soit non minimaux.

1. Historique

Les échanges d'intervalles ont été introduits, suivant une idée d'Arnold [Arn], par Osoledec [Oso] qui a évoqué le spectre des échanges d'intervalles . Katok et Stepin [KS] ont utilisé les échanges de 3 intervalles pour construire des familles de transformations avec spectre continu simple. Ensuite, Keane [Kea1] a donné un critère de minimalité pour les échanges d'intervalles : la condition idoc (voir la définition 3.1). Keynes et Newton [KN] ont donné un contre -exemple à la conjecture de Keane. Ensuite Keane [Kea2] a construit des échanges d'intervalles minimaux et non uniquement ergodiques. Veech [Vee1] et Masur [Mas] ont prouvé que presque tout échange d'intervalles est uniquement ergodique. Veech [Vee2] a posé de nombreuses questions sur les propriétés spectrales réalisables par les échanges d'intervalles. Récemment, Avila et Forni [AF] ont montré que presque tout échange d'intervalles est faiblement mélangeant, précédement, Nogueira et Rudolph [Nog] avaient montré que presque tout échange d'intervalles est topologiquement faiblement mélangeant. Ici, à l'opposé du cas générique, nous construisons des familles d'échanges d'intervalles avec spectre non trivial. Nénamoins nous rappelons que tous les exemples que nous présentons ici sont semi-conjugués à des rotations.

2. Questions et résultats

Arnoux a exhibé dans [Arx1] un exemple non trivial d'échange de 7 intervalles qui possède une fonction propre continue non constante. De plus, Nogueira et Rudolph ont prouvé que les échanges de 3 intervalles sont topologiquement faiblement mélangeants (voir [Nog]). Dans le paragraphe questions de [FZ], Ferenczi et Zamboni s'interrogent sur l'existence d'échange d'intervalles possédant des fonctions propres continues. Plus précisement, ils souhaitent de tels exemples dans le cas particulier d'échanges de 4 intervalles vérifiant la condition (IDOC) de Keane et dont la permuation associée est $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Ici, nous répondons par l'affirmative à cette question.

2.1. Proposition (Existence des fonctions propres continues)

Soit $T = T_{(\lambda,\pi)}$ un i.e.t de m sous-intervalles de $I = [0,1[$, de vecteur de translation associé $\delta = (\delta_1, \delta_2, ..., \delta_m)$.

A) *S'il existe des réels r et s, et des entiers p_j tels que $\delta_j = r + p_j s$, pour tout $j \in \{1, ..., m\}$ alors T admet $f(x) = \exp(\frac{2i\pi}{s}x)$ comme fonction propre associée à la valeur propre $\exp(2i\pi\frac{r}{s})$.*

B) *Si T est uniquement ergodique et admet une fonction propre dérivable g non conctante dont la dérivée est dans $L^2(I,\mu)$ alors $g(x) = C\exp(2i\pi kx)$(*), pour une constante $C \in \mathbb{C}$ et un entier $k \in \mathbb{R}$, et T est de rang 2.*

Preuve.

A) Soient $I_1, ..., I_m$ les intervalles échangés par T et $f(x) = \exp\left(\frac{2i\pi}{s}x\right)$. On calcule $f \circ T$.

On a : Pour tout $x \in I_j$,

$$\begin{aligned} f \circ T(x) &= \exp\left(\frac{2i\pi}{s}T(x)\right) \\ &= \exp\left(\frac{2i\pi}{s}(x+\delta_j)\right) \\ &= \exp\left(\frac{2i\pi}{s}(x+r+p_j s)\right) \\ &= \exp\left(\frac{2i\pi}{s}x\right)\exp\left(2i\pi\frac{r}{s}\right)\exp\left(2i\pi p_j\right) \\ &= \exp\left(2i\pi\frac{r}{s}\right)f(x) \end{aligned}$$

B) Par hypothèse, on a $g \circ T = \lambda g$, car T preserve la mesure de Lebesgue, alors $\mid \lambda \mid = 1$. On écrit $\lambda = \exp(2i\pi\beta)$ où $\beta \in \mathbb{R}$. Comme g n'est pas constante, il existe $x \in I$ tel que $g(x) \neq 0$. Par conséquent $g(T^n(x)) = \lambda^n g(x) \neq 0$. Ainsi $|g(T^n(x))| = |g(x)| > 0$.

Comme T est minimal, l'orbite de x par T est dense, donc pour tout $y \in I$, $|g(y)| = |g(x)| > 0$ par la continuité de g.En dérivant (*), on obtient $g' \circ T = \lambda g'$; puis en divisant avec (*), on a $\frac{g'}{g} \circ T = \frac{g'}{g}$. Ainsi, $\frac{g'}{g}$ est une fonction constante le long des orbites de T

et puisque T est uniquement ergodique, elle est constante. On a alors $\frac{g'}{g} = 2i\pi K$ où k est une constante réelle. En intégrant on obtient $g(x) = C\exp(2i\pi kx)$ pour tout $x \in I$ où C est une constante complexe non nulle. Ainsi, $\exp(2i\pi kT(x)) = \lambda\exp(2i\pi kx)$ pour tout $x \in I$

Par conséquent, pour tout $x \in I_j$: $\exp(2i\pi k(x+\delta_j)) = \exp(2i\pi(kx+\beta))$. on en déduit que $K\delta_j = K_j + \beta$, où $K_j \in \mathbb{Z}$ et par suite $K \in \mathbb{R}$. Les δ_j sont dans le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel engendré par $\frac{1}{K}$ et $\frac{\beta}{K}$, donc T est de rang 2.

On peut remarquer que les δ_j sont de la forme décrite en partie A avec $r = \frac{\beta}{K}$ et $s = \frac{1}{K}$. ♢

D'autre part, nous construisons de nombreux exemples d'échanges d'intervalles possédant des fonctions propres continues, en montrant les résultats suivants:

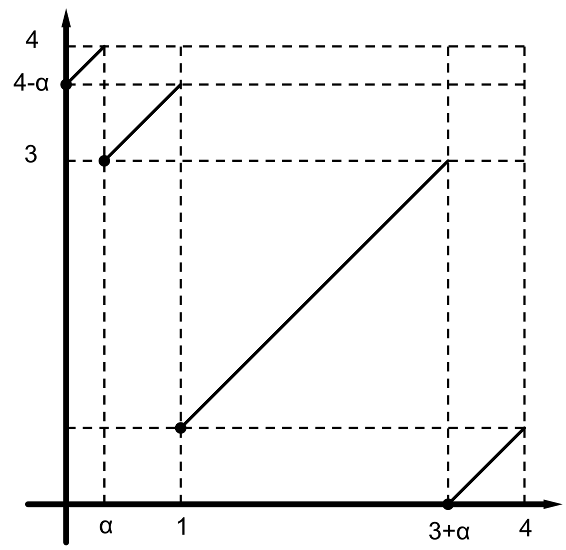
2.2. Proposition. *Il existe un échange de 4 intervalles vérifiant la condition (IDOC) de Keane, uniquement ergodique, de permutation associée* $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ *et non faiblement topologiquement mélangeant.*

Preuve

Soient $m = 4$ et $0 < \alpha < 1$ un irrationnel. Soit T l'échange de 4 intervalles de $I^4 = [0, 4[$ associé à la permutation $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et au vecteur longueur $\lambda = (\alpha, 1-\alpha, 2+\alpha, 1-\alpha)$.

- Les discontinuités de T sont : $\alpha, 1, 3+\alpha$.

- Le vecteur de translation de T est $(4-\alpha, 3-\alpha, -\alpha, -3-\alpha)$.



L'échange d'intervalle T vérifie la condition (IDOC), en effet :

- Les orbites des points de discontinuité de T sont infinies : Sinon il existe $a \in D(T)$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $T^n(a) = a$. On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$T^n(a) = a + \sum_{i=1}^{4} N_i^n(a)\delta_i, \tag{III.1}$$

où :

$-I_i$ désigne le i-ième sous-intervalle de $I = [0, 1[$, pour $1 \leq i \leq 4$

– $N_i^n(a) = \#(\{a, T(a), T^2(a), ..., T^{n-1}(a)\} \bigcap I_i)$ (où #(A) désigne le cardinal de A).

– $\delta = (\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4)$ le vecteur de translation de T. .

Alors :

$$\begin{aligned} a + \sum_{i=1}^{4} N_i^n(a)\delta_i &= a + N_1^n(a)\delta_1 + N_2^n(a)\delta_2 + N_3^n(a)\delta_3 + N_4^n(a)\delta_4 \\ &= a + N_1^n(a)(4-\alpha) + N_2^n(a)(3-\alpha) - N_3^n(a)\alpha - N_4^n(a)(3+\alpha) \\ &= a - \alpha n + 4N_1^n(a) + 3N_2^n(a) - 3N_4^n(a). \end{aligned}$$

car :

$$n = N_1^n(a) + N_2^n(a) + N_3^n(a) + N_4^n(a))$$

Si $T^n(a) = a$, on aura :

$$\alpha = \frac{4N_1^n(a) + 3N_2^n(a) - 3N_4^n(a)}{n}$$

ou encore α est rationnel ce qui est impossible.

– Les orbites des points de $D(T)$ sont distinctes:

Si deux discontinuités a_i et a_j de T sont sur une même orbite, alors il existe un entier $n > 0$ (quitte à échanger a_i et a_j) tel que : $T^n(a_i) = a_j$.Par le calcul précédent on a:

$$T^n(a_i) = a_i - \alpha n + 4N_1^n(a_i) + 3N_2^n(a_i) - 3N_4^n(a_i) = a_j.$$

Chaque fois, en remplaçant a_i et a_j par deux éléments de $D(T)$ on aura $\alpha \in \mathbb{Q}$ ou $n = 1$ ce qui est impossible. $\diamondsuit$

Donc T vérifie la condition (IDOC) et par le théoréme de Keane T est minimal. Aussi, T vérifie les conditions de la proposition 2.1 partie A avec $r = -\alpha$ et $s = 1$. Par suite $f(x) = \exp(2i\pi x)$ est une fonction propre continue associée à la valeur propre $\exp(-2i\pi\alpha)$. Ainsi T n'est pas topologiquement faiblement mélangeant, ce qui répond à la question posée dans [FZ]. De plus, d'après le théorème suivant, T est uniquement ergodique.

Théorème (Boshernitzan [Bos]). *Tout échange d'intervalles minimal et de rang* 2 *est uniquement ergodique.*

Dans ce même article, Boshernitzan pose aussi la question de la stabilité des propriétés spectrales pour les échanges d'intervalles de rang 2.

2.3. Théorème *Pour tout entier* $m > 3$, *pour tout* $\beta \in [0,1]$ *irrationnel, il existe des échanges* T_β *de* m *intervalles uniquement ergodiques, vérifiant la condition (IDOC) de Keane et non topologiquement faiblement mélangeant, avec fonctions propres continues non constantes associées à la valeur propre* $exp(2i\pi\beta)$.

2.4. Théorème

Pour tout entier pair $m \geq 4$, *pour tout* $\alpha \in [0,1]$ *irrationnel, il existe des échanges* T_α *de* m *intervalles non topologiquement faiblement mélangeants, avec fonctions propres continues non constantes associées à la valeur propre* $exp(-2i\pi\alpha)$ *et possédant aussi* $exp(4i\pi\frac{1}{m})$ *comme valeur propre rationnelle. De plus, ces exemples peuvent être choisis soit uniquement ergodiques, soit non minimaux.*

Remarques. Ce dernier résultat constitue un phénomène spectral nouveau par rapport aux rotations. D'autre part, tous les exemples construits pour ces deux théorèmes sont de rang 2.

3. Preuve du résultat principal

3.1. Preuve du théorème 2.3 : Construction des T_β : échanges de m intervalles uniquement ergodiques vérifiant la conditon (IDOC) de Keane et non topologiquement faiblement mélangeants.

Soient $m > 3$ et $\alpha \in]0, \frac{1}{m-1}[$ un irrationnel. Soit T l'échange d'intervalles de $[0,1[$ associé à la permutation :

(III.2) $$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & . & . & . & . & m-2 & m-1 & m \\ m-1 & m-2 & . & . & . & . & 2 & m & 1 \end{pmatrix}$$

et au vecteur longueur :

(III.3) $$\lambda = \left(\frac{1}{m-1}, \frac{1}{m-1}, .., \frac{1}{m-1}, \frac{1}{m-1} - \alpha, \alpha\right).$$

On détermine facilement que :

- Les discontinuités de T sont :

$$\frac{1}{m-1}, \frac{2}{m-1}, ..., \frac{m-2}{m-1}, 1-\alpha.$$

• Les images des discontinuités de T sont :

$$\frac{m-4}{m-1}+\alpha, \frac{m-5}{m-1}+\alpha, \cdots, \frac{1}{m-1}+\alpha, \alpha, \frac{m-2}{m-1}+\alpha, 0.$$

• Le vecteur de translation de T est donné par :

$$\begin{cases} \delta_i = \frac{m-1-2i}{m-1}+\alpha \text{ pour } 1 \leq i \leq m-2 \\ \delta_{m-1} = \alpha \\ \delta_m = \alpha - 1. \end{cases}$$

Pour tout $l \in \mathbb{N}$, on a :

$$T^l(x) = x + \sum_{i=1}^{m} N_i(x,l)\delta_i \tag{III.4}$$

où $N_i(x,l) = \sharp\{0 \leq k \leq l-1 : T^k x \in I_i\}$. Par conséquent , d'après la forme des δ_j,

$$T^l(x) = x + \frac{p_l(x)}{m-1} + l\alpha$$

avec $p_l(x) \in \mathbb{Z}$.

L'échange T vérifie la condition (IDOC), en effet:

– Les orbites des points de discontinuité de T sont infinies :

S'il existe $a \in D(T)$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $T^n(a) = a$, alors $\frac{p_n(a)}{m-1} + n\alpha = 0$, ceci est absurde par irrationnalité de α.

– Les orbites des points de $D(T)$ sont distinctes:

Si deux discontinuités a_i et a_j de T sont sur une même orbite, alors il existe un entier $l > 0$ (quitte à échanger a_i et a_j) tel que : $T^l(a_i) = a_j$. Alors on aura $T^l(\frac{i}{m-1}) = \frac{j}{m-1}$ ou $T^l(1-\alpha) = \frac{j}{m-1}$ ou $T^l(\frac{i}{m-1}) = 1-\alpha$, pour $1 \leq i \neq j \leq m-2$.

Si $T^l(\frac{i}{m-1}) = \frac{j}{m-1}$ alors $\frac{p_l(\frac{i}{m-1})}{m-1} + l\alpha = \frac{j-i}{m-1}$ ce qui est impossible par irrationnalité de α. Si $T^l(\frac{i}{m-1}) = 1-\alpha$, $1 \leq i \neq j \leq m-2$ alors $\frac{p_l(\frac{i}{m-1})}{m-1} + (l+1)\alpha = 1 - \frac{i}{m-1}$, également impossible par irrationnalité de α.

Le cas $T^l(1-\alpha) = \frac{j}{m-1}$ implique que $\frac{p_l(1-\alpha)}{m-1} + (l-1)\alpha = \frac{j}{m-1} - 1$, n'est possible que si $l = 1$ auquel cas, on a $T(1-\alpha) = \frac{j}{m-1} = 0$ ce qui est impossible (0 n'est pas une discontinuité de T).

Puisque la permutation π est irréductible et que T vérifie la condition (IDOC) alors d'après le théorème de Keane, T est minimal. Comme les λ_i sont dans le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel engendré par 1 et α alors T est de rang 2 et donc d'après le théorème de Boshernitzan, T est uniquement ergodique.

D'autre part, les δ_i s'écrivent $\delta_i = r + p_i s$ avec $r = \alpha$ et $s = \frac{1}{m-1}$, $p_i \in \mathbb{Z}$. Donc d'après la proposition 2.1 partie A, T admet $f(x) = \exp(2i\pi(m-1)x)$ comme fonction propre associée à la valeur propre $\exp(2i\pi(m-1)\alpha)$. On obtient le théorème 2.3. en posant $\beta = (m-1)\alpha$ et $T_\beta = T$. $\diamondsuit$

Exemples

• **m =4.** Dans ce cas, T est un échange de 4 intervalles sur $[0,1[$ de permutation associée :

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

et de vecteur longueur :

$$\lambda = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} - \alpha, \alpha\right)$$

où $\alpha \in]0, \frac{1}{3}[$ est un irrationnel.

On vérifie que $f(x) = \exp(6i\pi x)$ est une fonction propre continue associée à la valeur propre $\exp(6i\pi\alpha)$.

• **m = 5.** Dans ce cas, T est un échange de 5 intervalles sur $[0,1[$ associé à la permutation

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

et au vecteur longueur :

$$\lambda = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4} - \alpha, \alpha\right)$$

où $\alpha \in]0, \frac{1}{4}[$ est un irrationnel. Le vecteur de translation est :

$$\delta = \left(\alpha + \frac{1}{2}, \alpha, \alpha - \frac{1}{2}, \alpha, \alpha - 1\right).$$

On vérifie alors que $f(x) = \exp(8i\pi x)$ est une fonction propre de T associée à la valeur propre $\exp(8i\pi\alpha)$.

3.2. Preuve du théorème 2.4. Construction des T_α : échanges de m intervalles, avec valeurs propres irrationnelles et rationnelles non triviales, uniquement ergodiques ou non minimaux.

Soient $m = 2n$ un entier pair, σ une permutation de $\{1, ..., n\}$ et $\alpha \in [0,1]$ un irrationnel. Soit T l'échange de m intervalles de $[0, n[$ défini par :

$$T([i-1, i[) = [\sigma(i) - 1, \sigma(i)[\text{ pour } i = 1, .., n$$

et, sur $[i-1, i[$, on pose :

$$T(x) = \begin{cases} x+1-\alpha+\sigma(i)-i & \text{si } x \in [i-1, i-1+\alpha[\\ x-\alpha+\sigma(i)-i & \text{si } x \in [i-1+\alpha, i[\end{cases}$$

Le vecteur longueur associé à T est :

$$\lambda = (\alpha, 1-\alpha, \alpha, 1-\alpha, ..., \alpha, 1-\alpha).$$

Donc, T est de rang 2.

Les discontinuités de T sont :

$$\alpha, 1, 1+\alpha, 2, ..., (n-1)+\alpha.$$

Le vecteur translation δ est :

(III.5) $$\delta_j = \begin{cases} 1-\alpha+\sigma(i)-i & \text{si } j = 2i-1 \text{ est impair} \\ -\alpha+\sigma(i)-i & \text{si } j = 2i \text{ est pair} \end{cases}$$

où $j = 1, ..., 2n$ et $i = 1, ..., n$.

La preuve du théorème 2.4 est conséquence des lemmes 3.3 et 3.4 ci-dessous :

3.3. Lemme. *Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) *T est uniquement ergodique ,*

ii) *T est minimal,*

iii) *σ est un n-cycle.*

Preuve. L'implication $i) \Longrightarrow ii)$ est claire (voir les propriétés des notions spectrales). Quant à $ii) \Longrightarrow i)$ elle résulte du fait que T est de rang 2 et du théorème de Boshernitzan.

$ii) \Longrightarrow iii)$: Si σ n'est pas un n- cycle, σ contient un cycle de longueur $p < n$, donc il existe $p < n$ tel que $T^p([0,1[) = [0,1[$. Comme :

$T([0,1[) = [\sigma(1)-1, \sigma(1)[$,
$T^2([0,1[) = [\sigma^2(1)-1, \sigma^2(1)[$
$\vdots$
$T^{p-1}([0,1[) = [\sigma^{p-1}(1)-1, \sigma^{p-1}(1)[$, alors $\displaystyle\bigcup_{k=0}^{p-1} T^k([0,1[)$ est un ensemble invariant de mesure p donc distinct de $[0,n[$. L'échange T n'est donc pas minimal.

$iii) \Longrightarrow ii)$: si σ est un n-cycle, alors $\displaystyle\bigcup_{k=0}^{n-1} T^k([0,1[) = [0,n[$. L'application de premier retour de T sur $[0,1[$ est la rotation irrationnelle d'angle $n(1-\alpha)$. Par suite, T est minimal.

3.4. Lemme. *Soit T l' i.e.t de m sous-intervalles construit au début de la preuve du théorème 2.4 sur $I = [0, 1[$.*

a) *$f(x) = exp(2i\pi x)$ est une fonction propre de U_T de valeur propre $exp(-2i\pi\alpha)$.*

b) *$exp(2i\pi\frac{1}{n})$ est valeur propre rationnelle de U_T.*

Preuve.

a) On vérifie directement avec la proposition 2.1 A que $f(x) = \exp(2i\pi x)$ est une fonction propre associée à la valeur propre $\exp(-2i\pi\alpha)$.

b) Dans la construction précédente (début de la preuve du théorème 2.4)on divise toutes les données par n pour se ramener à l'intervalle $[0, 1[$. On voit que i vérifie $\sigma^n(i) = i$ donc on a $T^n(I_i) = I_i$ où $I_i = [\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}[$ et donc la fonction :

$$\phi(x) = \exp\left(2i\pi\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k}{n}\mathbb{I}_{T^k(I_1)}\right) \tag{III.5}$$

est une fonction propre associée à la valeur propre rationnelle $\exp(\frac{2i\pi}{n})$, où $\mathbb{I}_J$ représente la fonction indicatrice de l'ensemble J. En effet, soit $x \in I_i$, pour $i \in \{1, ..., n\}$ par définition de T et puisque σ est un cycle, il existe k_i tel que $I_i = T^{k_i}(I_1)$, ainsi $x \in T^{k_i}(I_1)$ et $T(x) \in T^{k_i+1}(I_1)$, on a alors :

$$\begin{aligned}\phi(x) &= \exp\left(2i\pi\frac{k_i}{n}\mathbb{I}_{T^{k_i}(I_1)}(x)\right)\\ &= \exp\left(2i\pi\frac{k_i}{n}\right)\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}\phi(T(x)) &= \exp\left(2i\pi\frac{k_i+1}{n}\mathbb{I}_{T^{k_i+1}(I_1)}T(x)\right)\\ &= \exp\left(2i\pi\frac{k_i+1}{n}\right)\\ &= \exp\left(2i\pi\frac{1}{n}\right)\exp\left(2i\pi\frac{k_i}{n}\right)\\ &= \exp\left(2i\pi\frac{1}{n}\right)\phi(x).\end{aligned}$$

<u>**Exemples**</u>

• **Exemple 1** : Soit $m = 2n$ un entier pair et α un irrationnel. Soit σ la permutation donnée par :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & . & . & . & . & n-1 & n \\ 2 & 3 & . & . & . & . & n & 1 \end{pmatrix}.$$

On considère l'échange de m intervalles T de $[0, n[$ construit comme au début du paragraphe 3.2. Puisque σ est un n-cycle, alors d'après le lemme 3.3, l'échange T est uniquement ergodique. La fonction $f(x) = \exp(2i\pi x)$ est une fonction propre de T associée à la valeur propre $\exp(-2i\pi\alpha)$, d'après le lemme 3.4 a.

• **Exemple 2** : Soit $m = 2n$ $(n \geq 1)$ et T l'échange de m intervalles de $I^n = [0, n[$ correspondant à la permutation :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & . & . & . & . & n-1 & n \\ n & n-1 & . & . & . & . & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

- La permutation associée à T est :

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & . & . & . & . & m-1 & m \\ m & m-1 & . & . & . & . & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Le vecteur longueur associé est :

$$\lambda = (\alpha, 1-\alpha, \alpha, 1-\alpha, ..., \alpha, 1-\alpha).$$

- Les discontinuités de T sont :

$$\alpha, 1, 1+\alpha, 2 \cdots, (n-1)+\alpha.$$

- Le vecteur de translation de T est donné par :

$$\delta_i = (n-i+1) - \alpha, \ 1 \leq i \leq m.$$

- Les images des discontinuités de T sont :

$$0, 1-\alpha, 1, 2-\alpha, 2, \cdots, n-\alpha.$$

Pour $n \geq 3$, T n'est pas minimal car $T([0,1] \cup [n-1, n]) = [0,1] \cup [n-1, n]$, aussi car σ n'est pas un n-cycle. D'autre part, puisque $\delta_i = -\alpha + (n-i+1)$, $1 \leq i \leq m$, donc T vérifie les conditions de la proposition 2.1.A) avec $r = -\alpha$ et $s = 1$. Par suite, $f(x) = \exp(2i\pi x)$ est une fonction propre associée à la valeur propre $\exp(-2i\pi\alpha)$.

Remarque. Dans cette famille (T_α) d'échanges d'intervalles de rang 2 un paramètre α, on voit que le non mélange faible topologique et l'existence d'une valeur propre rationnelle non triviale $exp(2i\pi\frac{1}{n})$ sont des propriétés stables, comme conjecturé dans [FZ].

• Cas particulier $\mathbf{n = 2}$: Echanges de 4 intervalles.

Dans ce cas, la permutation $\sigma = (21)$ est un 2-cycle, donc par le lemme 4.3 T est uniquement ergodique. Par contre, T ne vérifie pas la condition (IDOC) car $T(\alpha) = \frac{1}{2}$. En divisant les longueurs par 2 afin de se placer sur $I = [0, 1[$ et en changeant $\frac{\alpha}{2}$ par α, on obtient :

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

et :

$$\lambda = \left(\alpha, \frac{1}{2} - \alpha, \alpha, \frac{1}{2} - \alpha\right).$$

D'où :

$$T(x) = \begin{cases} x + 1 - \alpha \text{ si } x \in [0, \alpha[\\ x + \frac{1}{2} - \alpha \text{ si } x \in [\alpha, \frac{1}{2}[\\ x - \alpha \text{ si } x \in [\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \alpha[\\ x - \alpha - \frac{1}{2} \text{ si } x \in [\frac{1}{2} + \alpha, 1[\end{cases}.$$

On vérifie directement que $f(x) = \exp(4i\pi x)$ est une fonction propre de U_T de valeur propre $\exp(-4i\pi\alpha)$ et que $\exp(i\pi)$ est valeur propre puisque $T^2([0, \frac{1}{2}[) = [0, \frac{1}{2}[$.

CHAPITRE IV

ETUDE DYNAMIQUE DES ÉLÉMENTS DES GROUPES DE STEIN-THOMPSON

Les groupes de bijections affines par morceaux du cercle de type fini sont connus pour avoir fourni d'intéressants exemples de groupes dénombrables. En 1965, R. Thompson exhiba les groupes T et V de bijections dyadiques de l'intervalle comme premiers exemples de groupes infinis simples et de type fini. Depuis , de nombreux travaux sur les groupes de Thompson ont été effectués. Un article introductif et de survol sur les groupes de Thompson est [CFP]. Dans [GS], Ghys et Sergiescu ont étudié la dynamique des actions différentiables de T sur le cercle. L'action standard contenant toutes les rotations d'angle dyadique a toutes ses orbites denses. Cependant, Ghys et Sergiescu ont montré qu'il existe une action lisse de T semi-conjuguée à l'action standard et qui possède un minimal exceptionnel sur S^1. En résulte, par le théorème de Denjoy et l'invariance par semi-conjugaison du nombre de rotation, que le nombre de rotation de tout homéomorphisme dyadique du cercle est rationnel. Ensuite, différentes preuves de ce résultat ont été données par I.Liousse [Lio], V.Kleptsyn [Kle] et D.Calegari [Cal]. Dans ce chapitre, nous généralisons ce résultat aux groupes de Stein-Thompson $V_{r,m}$(cf définition b). Plus précisement, nous montrons que tout élément de $V_{r,m}$ a ses orbites propres et possède au moins une orbite périodique ou un cycle périodique.

1. Echanges d'intervalles affines par morceaux de $I = [0, r[$.

1.1. Définition. *On dit que f est un échange d'intervalles* ***affine par morceaux*** *(ou* ***AIET*** *en abrégé) de $[0, r[$ s'il existe une subdivision finie $0 = a_0 < a_1 < .... < a_p = r$ de $[0, r[$ telle que pour tout $i = 0, ..., p-1$, on a $f(x) = \lambda_i x + \beta_i$ pour $x \in [a_i, a_{i+1}[$, où $\lambda_i \in \mathbb{R}_+^*$ et $\beta_i \in \mathbb{R}$.*

La restriction de f à un intervalle de la forme $[a_i, a_{i+1}[$ est un homéomorphisme croissant dont l'image est un intervalle de la forme $[b_{\pi(i)}, b_{\pi(i)+1}[$. On dit que f est *subordonné* à la permutation π.

On appelle *permutation indicatrice* de f la permutation $\tau \in \mathfrak{S}_p$ définie par :

$$f_+(a_i) = f_-(a_{\tau(i)})$$

(avec $f_+(a_i) = \lim\limits_{x \to a_i^+} f(x) = f(a_i)$ et $f_-(a_i) = \lim\limits_{x \to a_i^-} f(x)$) *i.e.* $\tau(i) = \pi^{-1}(\pi(i) - 1) + 1$.

– Les a_i sont les *points de coupure* de f. Un point de coupure peut être une discontinuité de f et/ou de Df.

– Les λ_i sont les *pentes* de f.

1.2. Notions dynamiques.

• L'orbite $O_f(a)$ d'un point a est dite :

– *périodique* si elle est finie (cela signifie qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^{n_0}(a) = a$),

– *propre* s'il existe un voisinage V_a de a tel que $V_a \cap O_f(a) = \{a\}$,

– *récurrente* si, pour tout voisinage V_a de a, il existe un entier $n = n(V_a) \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^n(a) \in V_a$.

• Une orbite qui est à la fois propre et récurrente est périodique.

• On appelle *cycle périodique* un ensemble de la forme $\{a_i, f_-(a_i), ..., f_-^{p-1}(a_i)\}$ avec $f_-^p(a_i) = a_i$.

• On dit que x appartient à l'ensemble limite w_a de a (resp. α_a de a) si et seulement si il existe $t_n \to +\infty$(resp. $t_n \to -\infty$) tel que $\lim_{n \to +\infty} f^{t_n}(a) = x$ (resp. $\lim_{n \to -\infty} f^{t_n}(a) = x$).

2. Groupes de Stein-Thompson

2.1. Définitions

a) **Groupes de Bieri-Strebel**

Soient r un entier strictement positif, Λ un sous-groupe multiplicatif de $\mathbb{R}^{+*}$ et A un $\mathbb{Z}$-module de $\mathbb{R}$ invariant par Λ et contenant r.On définit $V_{r,\Lambda,A}$ (resp. $T_{r,\Lambda,A}$) comme étant l'ensemble des AIET de $[0, r[$ (resp. des homéomorphismes f de $S_r = [0, r]/(0 = r)$) tels que :

i) f est affine par morceaux et préserve l'orientation,

ii) les pentes de f appartiennent à Λ,

iii) les points de coupure de f appartiennent à A et

iv) les images par f des points de coupure de f appartiennent à A.

b) **Cas particuliers**

1) *Les AIET rationnels.* Ce sont les éléments des groupes $V_{r,\mathbb{Q},\mathbb{Q}}$.

2) *Les groupes de Stein-Thompson* $V_{r,(n_i)}$.

Soient $(n_1, ..., n_p)$ un p-uplet d'entiers strictement positifs dont les logarithmes sont rationnellement indépendants et $m = \text{ppcm}(n_i)$.

On note $\Lambda = \langle n_1, ..., n_p\rangle$ le sous-groupe multiplicatif de $\mathbb{R}^{+*}$ engendré par les n_i, autrement dit $\Lambda = \{\prod_i n_i^{s_i}, s_i \in \mathbb{Z}\}$ et $A = \mathbb{Z}[\frac{1}{n_1}, \frac{1}{n_2} .... \frac{1}{n_p}]$ l'ensemble des rationnels de la forme $\frac{N}{(m)^s}$ avec $N \in \mathbb{N}$ et $s \in \mathbb{Z}$.
On note $V_{r,(n_i)}$(resp.$T_{r,(n_i)}$) le groupe $V_{r,\Lambda,A}$(resp. $T_{r,\Lambda,A}$) correspondant à ces choix de Λ et A. Ces groupes sont dits de *Stein-Thompson* et sont de présentation finie d'après [Ste].

En particulier, si $\Lambda =< m >$ et $A = \mathbb{Z}[\frac{1}{m}]$, le groupe correspondant est noté $V_{r,m}$. On retrouve le groupe de Thompson classique en posant $V = V_{1,2}$.

c) **Exemples.**

1) Un exemple d'élément de $T_{1,m}$.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{m} & \text{si } x \in [0, \frac{1}{m}[\\ x + \frac{1}{m^2} - \frac{1}{m} & \text{si } x \in [\frac{1}{m}, 1 - \frac{1}{m^2}[\\ mx + 1 - m & \text{si } x \in [1 - \frac{1}{m^2}, 1[\end{cases}$$

Ici les points de coupure de f sont des discontinuités de Df.

2) Un exemple d'élément de $V_{1,m}$.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{m} + (1 - \frac{1}{m^2}) & \text{si } x \in [0, \frac{1}{m}[\\ x & \text{si } x \in [\frac{1}{m}, 1 - \frac{1}{m^2}[\\ mx - (m - \frac{1}{m}) & \text{si } x \in [1 - \frac{1}{m^2}, 1[\end{cases}$$

Dans cet exemple les coupures de f sont des discontinuités de f.

3. Résultat Principal

Le résultat principal est une généralisation du théorème ci dessous démontré par I. Liousse :

Théorème [Lio]. *Soient $m \geq 2$, $r \geq 1$ et $q \geq 1$ des entiers. Alors :*

A) *Tout élément de $T_{r,m}$ a des points périodiques.*

B) pgcd$(m-1, q)$ *divise r si et seulement si $T_{r,m}$ contient un élément d'ordre q.*

Plus précisement on montre le théorème suivant :

3.1. Théorème. *Soient $m \geq 2$, $r \geq 1$ et $q \geq 1$ des entiers. Alors :*

A) *Tout élément f de $V_{r,m}$ a au moins une orbite périodique ou un cycle périodique et toutes ses orbites sont propres.*

B) *$V_{r,m}$ contient des éléments d'ordre quelconque.*

Remarque. Plus généralement, le théorème précedent reste vrai pour tout AIET dont les pentes sont des puissances d'un même entier m et dont les coupures et leurs images sont rationnelles.

4. Généralités sur les flots

4.1. Définitions

Dans cette partie nous donnons des notions générales et des propriétés concernant les flots sur les surfaces fermées orientables.

Soit M une surface fermée orientable. *Un flot* continu F sur M est une application continue $F : \mathbb{R} \times M \longrightarrow M$ vérifiant les propriétés suivantes:

(i) $F(t+s,x) = F(t, F(s,x))$, pour tout $t, s \in \mathbb{R}$ et $x \in M$.

(ii) $F(0,x) = x$, pout tout $x \in M$.

Soit $x \in M$ on définit l'application $F_x : \mathbb{R} \longrightarrow M$ par $F_x(t) = F(x,t)$. On appelle *orbite ou feuille* de x $L_x = \{F(x,t), t \in \mathbb{R}\} = F_x(\mathbb{R})$.

Pour toute orbite L de F et tout $x \in L$ on appelle :

– $L_x^+ = \{F_x(t); t \in \mathbb{R}_+\}$(resp.$L_x^- = \{F_x(t); t \in \mathbb{R}_-\}$) la *demi-orbite positive* (resp. la *demi-orbite négative*) de x.

– $\Omega_L = \bigcap_{x\in L} \overline{L_x^+}$ (resp. $A_L = \bigcap_{x\in L} \overline{L_x^-}$) *ensemble w-limite* (resp. l'*ensemble α-limite*) de L.

Un point $y \in \Omega_L$ (resp. $\in A_L$) signifie qu'il existe une suite t_n tendant vers $+\infty$ (resp. vers $-\infty$) telle que $lim_{n\to\infty} F(t_n, x) = y$. L'ensemble Ω_L (resp. A_L) est fermé, connexe, invariant et non vide.

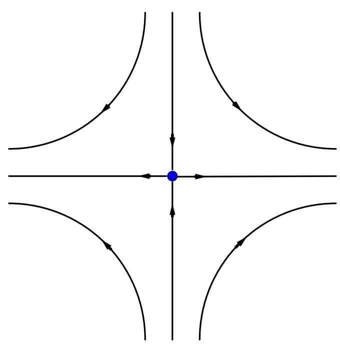
On dit qu'une orbite L de F est *propre* si $\overline{L} \setminus L$ est fermé. Une orbite non propre est:

– soit *localement dense* si $\overline{L}$ est d'intérieur non vide ;

– soit *exceptionnelle* si L n'est nulle part dense.

On dit que x est *une singularité* de F si F_x est constant.

On appelle *selle* une singularité dont le portrait local est le suivant :



Notons que si x est une selle à p branches de x, les p feuilles issues de F sont appelées *séparatrices* d'extrémité x.

Dans toute la suite on ne considère que les flots avec singularités de type selle.

Une feuille de F qui n'est pas une séparatrice est dite *régulière.*

On appelle *cycle-limite* un sous ensemble H de M qui est réunion de séparatrices et de singularités, qui est connexe , fermé et qui satisfait aux conditions suivantes:

–toute extrémité d'une séparatrice de H est dans H.

–si une selle s appartient à H alors H contient un nombre pair de séparatrices issues de s deux à deux adjacentes.

–il existe une orbite régulière qui possède H comme ensemble limite.

On dit qu'une feuille L réalise *une liaison* s'il existe $x \in L$ tel que les deux demi-feuilles d'origine x sont singulières.

On appelle *quasi-minimal* l'adhérence d'une orbite non propre.

4.2. Résultats sur les flots.

Etant donné un flot F sur une surface fermée orientable M avec un nombre fini de singularités et L une orbite on a les résultats suivants :

Proposition 1 ([God]). Si $\overline{L}$ contient une orbite périodique alors L est propre.

Proposition 2 ([God] et[Scz]). *Chacun des ensembles Ω_L(resp.A_L)est l'un des types suivants* :

i) *Une singularité.*

ii) *Une orbite périodique ou un cycle limite.*

iii) *Un quas-iminimal.*

Proposition 3 ([Lev]). *Toute demi feuille infinie contenue dans un quasi-minimal y est dense et est non propre.*

Proposition 4 ([Scz]). *Si F_Φ est de classe C^2 et M_Φ distinct du tore $\mathbb{T}^2$ alors tout quasi-minimal contient une singularité.*

Comme conséquence de Levitt [Lev] et Schwartz [Scz] ou de résultat d'Arnoux ([Arx2]), on a :

Proposition 5. *Si F_Φ est la suspension d'un AIET et M_Φ est distinct du tore $\mathbb{T}^2$ alors tout quasi-minimal contient une séparatrice libre positivement récurrente ou négativement récurrente.*

4.3. Suspension d'un AIET.

Soit f un AIET sur $[0,r[$; on pose $\Phi = \Pi \circ f \circ \Pi^{-1}$ où $\Pi : [0,r[\to S_r$ ($S_r = [0,r[/(0 = r)$) définie par $\Pi(x) = \frac{r}{2\pi} exp(\frac{2i\pi x}{r})$; Π étant la projection naturelle qui est donc une bijection continue.

On peut voir que Φ est un AIET sur le cercle S_r.

Théorème-définition [Arx2]. *Soit Φ un AIET sur S_r.*

1) *Il existe une surface fermée orientable M_Φ, un feuilletage à selles F_Φ de M_Φ et un plongement $i_\Phi : S_r \hookrightarrow M_\Phi$ tels que :*

   – $i_\Phi(S_r)$ est transverse à F_Φ et rencontre toute demi-feuille ainsi que toute liaison.

   – l'application du premier retour induite par F_Φ sur $i_\Phi(S_r)$ s'identifie à Φ.

2) *F_Φ est déterminé à une conjugaison près.*

3) *De plus, les selles de F_Φ correspondent bijectivement aux cycles de la permutation indicatrice τ (une selle à $2k$ branches correspond à un cycle de longueur k de τ).*

Le couple (M_Φ, F_Φ) s'appelle *suspension* de Φ.

De plus, toutes les selles sont en nombre fini et ont un nombre fini de séparatrices telles que deux séparatrices consécutives soient séparées par un secteur hyperbolique.

Définition. *On dit que Φ a un* ***cycle périodique*** *s'il existe une discontinuité a_i de Φ et $p \in \mathbb{N}^*$ tels que $(\Phi_-)^p(a_i) = a_i$.*

Les propriétés topologiques de F_Φ sont liées à celles de Φ par la :

Proposition 6 ([Arx2])

i) *F_Φ a une demi orbite dense $\Leftrightarrow$ Φ a une demi-orbite dense.*

ii) *F_Φ a une orbite périodique ou un cycle limite $\Leftrightarrow$ Φ a une orbite périodique ou un cycle périodique.*

5. Preuve du résultat principal

A) Soit $f \in V_{r,m}$ un AIET de $[0,r[$(ou plus généralement un AIET dont les pentes sont des puissances de m et dont les coupures ainsi que leurs images sont rationnelles.On peut conjuguer f par une homothétie de rapport R de sorte que les points de coupure de la conjuguée de f ainsi que leurs images soient des entiers (il suffit de prendre R le *ppcm* des dénominateurs des points de coupure de f). On peut donc supposer, sans perte de généralité que f est un AIET dont les pentes sont des puissances de m et les points de coupure et leurs images sont des entiers.

Pour tout $x \in [0,r[$, on a $f(x) = m^{e(x)}x + \dfrac{p(x)}{m^{k(x)}}$, avec $e(x) \in \mathbb{Z}$, $p(x) \in \mathbb{Z}$ et $k(x) \in \mathbb{N}$. les trois fonctions e, p et k sont des fonctions bornées par des constantes qui ne dépendent ni de x ni des itérées de f. On note $\mathbb{Z}[\frac{1}{m}]$ l'ensemble des nombre m-adiques.

1) Les orbites de $\mathbb{Z}[\frac{1}{m}]$ sont propres.

5.1. Lemme. *Soit $\theta \in \mathbb{Z}[\frac{1}{m}]$. Alors $N_n(\theta) \to +\infty$ ou bien l'orbite de θ est périodique où $N_n(\theta)$ est l'entier tel que $f^n(\theta) = \frac{M_n(\theta)}{m^{N_n(\theta)}}$ avec $M_n(\theta)$ non divisible par m.*

Preuve. Si la suite $N_n(\theta)$ ne tend pas vers $+\infty$ alors il existe une sous suite $N_{S_n}(\theta)$ bornée par un certain B. Dans ce cas on a :

$$f^{S_n}(\theta) = m^{e(\theta)}\theta + \frac{p(\theta)}{m^{N_{S_n}(\theta)}}, \tag{IV.1}$$

ou encore :

$$f^{S_n}(\theta) = \frac{m^{e(\theta)}\theta m^{N_{S_n}(\theta)} + p(\theta)}{m^{N_{S_n}(\theta)}}$$

or $N_{S_n}(\theta)$ est borné par B et θ est un élément de l'intervalle $[0, r[$ donc l'orbite $f^{S_n}(\theta)$ est contenue dans l'ensemble fini:$\{\frac{p}{m^k} \quad : \quad 0 \leq p \leq r.m^B \text{ et } 0 \leq k \leq B\}$, ce qui n'est possible que lorsque l'orbite de θ est périodique. $\diamondsuit$

5.2. Lemme. Soit $\theta \in \mathbb{Z}[\frac{1}{m}]$ d'orbite non périodique. Alors il existe un entier $P_0 = P_0(\theta)$ tel que, pour tout entier n :

$$\sum_{k=0}^{k=n-1} \left(e(f^k(\theta)\right) = -N_n(\theta) + P_n(\theta), \tag{IV.2}$$

où :

$$P_n(\theta) \in [-P_0, P_0] \cap \mathbb{Z}.$$

Preuve. Montrons tout d'abord que $N_n(\theta)$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$. Par l'absurde: $N_n(\theta)$ ne tend pas vers $+\infty$ alors l'orbite de θ serait périodique. On a :

$$f^{n+1}(\theta) = f(f^n(\theta)) = m^{e(f^n(\theta))} f^n(\theta) + \frac{p(f^n(\theta))}{m^{k(f^n(\theta))}}.$$

Or :

$$f^n(\theta) = \frac{M_n(\theta)}{m^{N_n}(\theta)}.$$

Donc :

$$f^{n+1}(\theta) = \frac{M_n(\theta)}{m^{N_n(\theta)-e(f^n(\theta))}} + \frac{p(f^n(\theta))}{m^{k(f^n(\theta))}}. \tag{IV.3}$$

Comme $N_n(\theta)$ tend vers $+\infty$ et que e et k sont bornés, alors il existe un entier $n_0 = n_0(\theta)$ tel que pour tout $n \geq n_0$, on ait $N_n(\theta) - e(f^n(\theta)) > k(f^n(\theta))$, il en est résulte que :

$$f^{n+1}(\theta) = \frac{M_n(\theta) + m^{N_n(\theta)-e(f^n(\theta))-k(f^n(\theta))}p(f^n(\theta))}{m^{N_n(\theta)-e(f^n(\theta))}} = \frac{M_{n+1}(\theta)}{m^{N_{n+1}(\theta)}}.$$

Puisque m divise $m^{N_n(\theta)-e(f^n(\theta))-k(f^n(\theta))}$ mais ne divise pas :

$$M_n(\theta) + m^{N_n(\theta)-e(f^n(\theta))-k(f^n(\theta))}p(f^n(\theta),$$

par unicité de l'écriture de $f^{n+1}(\theta)$ sous la forme $\frac{M_{n+1}(\theta)}{m^{N_{n+1}(\theta)}}$, on a pour tout $n \geq n_0$:

$$N_{n+1}(\theta) = N_n(\theta) - e(f^n(\theta)).$$

Donc, pour tout $n \geq n_0$, on a :

$$N_n(\theta) = N_{n_0}(\theta) - (e(f^{n_0}(\theta)) + ... + e(f^{n-1}(\theta))).$$

ou encore :

$$N_n(\theta) = N_{n_0}(\theta) + \sum_{k=0}^{k=n_0-1} e(f^k(\theta)) - \sum_{k=0}^{k=n-1} e(f^k(\theta)).$$

Ainsi, pour $n \geq n_0$:

$$N_n(\theta) + \sum_{k=0}^{n-1}(e(f^k(\theta)) = N_{n_0}(\theta) + \sum_{k=0}^{n_0-1}(e(f^k(\theta)).$$

Par conséquent, il suffit de poser:

(IV.4)
$$P_0 = \max_{n \leq n_0}\left\{|N_n(\theta) + \sum_{k=0}^{k=n-1}(e(f^k(\theta)))|\right\}$$

,pour obtenir le lemme 5.2. ♢

Revenons maintenant à la preuve du théorème, pour $\theta = \frac{M}{m^N} \in \mathbb{Z}[\frac{1}{m}]$, on considère $[\theta, a_n[$ l'intervalle maximal où f^n est affine c'est à dire le plus grand intervalle de la forme $[\theta, a_n[$ où $a_n \in D(f^n)$($D(f^n)$ désigne l'ensemble des points de coupure de f^n) , tel que $]\theta, a_n[$ ne contient pas de point de $D(f^n)$.

Pour tout $x \in [\theta, a_n[$ et pour $0 \leq i \leq n-1$, on a :

$$f^i(x) = Df^i_+(\theta)(x-\theta) + f^i(\theta).$$

Puisque $Df^i_+ = m^{\left(\sum_{k=0}^{k=i-1}(e(f^k(\theta))\right)}$, alors $f^i(x) = m^{\left(\sum_{k=0}^{k=i-1}(e(f^k(\theta))\right)}(x-\theta)+f^i(\theta)$.
D'après le lemme 5.2, on a:

$$\sum_{k=0}^{k=i-1} e(f^k(\theta)) = -N_i(\theta) + P_i(\theta)$$

et :
$$f^i(\theta) = \frac{M_i(\theta)}{m^{N_i(\theta)}}.$$
D'où :
$$f^i(x) = m^{-N_i(\theta)+P_i(\theta)}(x-\theta) + \frac{M_i(\theta)}{m^{N_i(\theta)}}.$$
Ou encore :

(IV.(5)
$$\begin{aligned} f^i(x) &= m^{-N_i(\theta)}(m^{P_i(\theta)}(x-\theta) + M_i(\theta)) \\ &= m^{-N_i(\theta)}(m^{P_i(\theta)}x + M_i(\theta) - m^{P_i(\theta)}\theta) \\ &= m^{-(N_i(\theta)+N)}(m^{P_i(\theta)+N}x + M_i(\theta)m^N - m^{P_i(\theta)}M) \\ f^i(x) &= (m^{P_i'(\theta)}x + M_i'(\theta))m^{-N_i'(\theta)} \end{aligned}$$

Où $m^{P_i'(\theta)} = m^{P_i(\theta)+N}$, $M_i'(\theta) = M_i(\theta)m^N - m^{P_i(\theta)}M$ et $N_i'(\theta) = N_i(\theta) + N$.

Comme $a_n \in D(f^n)$, il existe donc $a \in D(f)$ tel que $a_n = f^{-k_n}(a)$ pour un $k_n \in \mathbb{Z}$. On a :
$$f^{k_n}(a_n) = m^{-N'_{k_n}(\theta)}(m^{P'_{k_n}(\theta)}a_n + M'_{k_n}(\theta)) = a.$$
Ou encore :
$$m^{N'_{k_n}(\theta)}a - M'_{k_n}(\theta) = m^{P'_{k_n}(\theta)}a_n.(*)$$
Comme $a \in D(f)$, alors il existe $A, B \in \mathbb{N}$ tels que $a = \frac{A}{m^B}$. On a alors :
$$m^B(m^{N'_{k_n}(\theta)}a - M'_{k_n}(\theta)) = m^{P'_{k_n}(\theta)+B}a_n.$$
Donc $(*)$ devient: $m^{P'_{k_n}(\theta)+B} = m^{N'_{k_n}(\theta)}A - M'_{k_n}(\theta))m^B = \in \mathbb{Z}$ Comme $a_n \in [0, r[$ et $P'_{k_n}(\theta) \in [-P_0(\theta)+N, P_0(\theta)+N] \cap \mathbb{Z}$ (lemme 5.2), :
$$m^{P'_{k_n}(\theta)+B}a_n \in [0, m^{P_0(\theta)+N+B}r] \cap \mathbb{Z}.$$
Ce qui montre qu'il n'y a qu'un nombre fini de a_n.

Soit $a_0 = \min(a_n) > 0$, sur l'intervalle $[\theta, a_0[$, f^n est affine pour tout $n \geq 0$ On peut montrer qu'il existe un intervalle $[\theta, a_0[$ tel que f^{-n} est affine(en échangeant f par f^{-1}), on conclut donc qu'il existe un intervalle minimal sur lequel f^n est affine pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Montrons que $O_f(\theta) \cap [\theta, a_0[$ est fini :

Si $f^k(\theta) \in]\theta, a_0[$, alors, d'après (IV.5), on a :
$$\theta = f^{-k}(f^k(\theta)) = m^{-N'_{-k}(\theta)}(m^{P'_{-k}(\theta)}f^k(\theta) + M'_{-k}(\theta)),$$

et donc :

$$f^k(\theta) = \frac{m^{N'_{-k}(\theta)}\theta - M'_{-k}(\theta)}{m^{P'_{-k}(\theta)}}, \tag{IV.6}$$

où $-P_o(\theta) + N \leq P'_{-k}(\theta) \leq P_o(\theta) + N$ et $m^{N'_{-k}(\theta)}\theta - M'_{-k}(\theta)$ est de la forme $\frac{Z_k}{m^N}$ avec $Z_k \in \mathbb{Z}$ et m^N est le dénominateur de θ.

Par conséquent l'entier :

$$m^N(m^{N'_{-k}(\theta)}\theta - M'_{-k}(\theta)) = m^N m^{P'_{-k}(\theta)} f^k(\theta) \in [0, m^N m^{P'_{-k}(\theta)} r[\subset [0, m^N m^{P_0(\theta)+N} r[.$$

Et par suite, $m^N m^{P'_{-k}(\theta)} f^k(\theta)$ ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs et $O_f(\theta) \cap [\theta, a_0[= F$ est un ensemble fini.

Soit $b_0 = minF$ alors $O_f(\theta) \cap [\theta, b_0[= \emptyset$.

On montre de même qu'il existe un $c_0 < \theta$ tel que $O_f(\theta) \cap [c_0, b_0[= \emptyset$ et par suite l'orbite de θ est propre.

2) Toutes les orbites de $[0, r[$ sont propres :

On suppose que Φ possède une orbite non propre alors $F_\Phi = sus(\Phi)$(défini au paragraphe 4.3) possède aussi une feuille non propre L, par définition $\overline{L}$ est un quasi-minimal. D'après proposition 4, $\overline{L}$ contient une singularité s qui est selle donc il existe une séparatrice libre qui ne réalise pas une liaison entre selles $\gamma \subset \overline{L}$, d'après (1) de la preuve γ est propre.D'après proposition 3, $\overline{\gamma} = \overline{L}$ et γ est non propre , contradiction.

3) F_Φ a au moins une orbite périodique ou un cycle limite.

Soit L une orbite de F qui n'est pas une séparatrice. Considérons l'ensemble limite Ω_L. Ω_L ne peut pas être une singularité. Puisque les orbites sont propres, Ω_L ne peut pas être un quasi-minimal alors Ω_L sera une orbite périodique ou un cycle limite.

Conclusion:Φ possède une orbite périodique ou un cycle périodique.

B) Pour construire un élément f de $V_{r,m}$ d'ordre q, on considère le plus petit entier s tel que $q \leq rm^s$.

On pose donc :

$$f(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{m^s} & \text{si } x \in [0, \frac{q-1}{m^s}[\\ x - \frac{q-1}{m^s} & \text{si } x \in [\frac{q-1}{m^s}, \frac{q}{m^s}[\\ x & \text{si } x \in [\frac{q}{m^s}, r[\end{cases} .$$

On a : pour tout $x \in [0, r[$, $f^q(x) = x$. En effet,

–Si $x \in [0, \frac{q-1}{m^s}[$, $f(x) = x + \frac{1}{m^s} \in [\frac{1}{m^s}, \frac{q}{m^s}[$.

On montre que $f^n(x) = x + \frac{n}{m^s}$, pour $1 \leq n \leq q-1$ et que $f^{q-1}(x) \in [\frac{q-1}{m^s}, \frac{q}{m^s}[$ et par suite $f^q(x) = x$.

–Si $x \in [\frac{q-1}{m^s}, \frac{q}{m^s}[$, $f(x) \in [0, \frac{1}{m^s}[$ $f^2(x) = f(x) + \frac{1}{m^s} = x - \frac{q-1}{m^s} + \frac{1}{m^s} = x + \frac{q}{m^s} + \frac{2}{m^s}$.

On montre que $f^q(x) = x - \frac{q}{m^s} + \frac{q}{m^s} = x$.

–Si $x \in [\frac{q}{m^s}, r[$,$f(x) = x$ et donc $f^q(x) = x$. $\diamondsuit$

6. Remarques, exemples et questions

(1) Le B du théorème de Liousse précédent ne peut pas se généraliser car le groupe $V_{r,m}$ contient des éléments d'ordre quelconque ce qui n'était pas le cas pour tous les groupes $T_{r,m}$ des homéomorphismes linéaires par morceaux.

(2) Le groupe de Thompson classique ne contient qu'une seule classe de conjugaison d'éléments d'ordre 2 celle de la rotation d'angle $\frac{1}{2}$.

Le groupe de Thompson V contient au moins deux classes de conjugaisons d'éléments d'ordre 2: celle de la rotation d'angle $\frac{1}{2}$ et celle de l'échange affine U défini comme suit :

(IV.7)
$$U(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}[\\ x + \frac{1}{4} & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}[\\ x - \frac{1}{4} & \text{si } x \in [\frac{3}{4}, 1[\end{cases}.$$

La question qui se pose est la suivante: est ce que tout élément d'ordre 2 de V est conjugué à la rotation $R_{\frac{1}{2}}$ ou à U ?

(3) Il existe des AIET tels que les ensembles limites sont tous des cycles périodiques. Par exemple l'AIET f définie ci dessus :

(IV.7)
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}[\\ x - \frac{1}{2} & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}[\\ 2x + \frac{1}{4} & \text{si } x \in [\frac{3}{4}, 1[\end{cases}.$$

On a pour tout $x \in [0,1[$, $\lim\limits_{n \to \to +\infty} f^n(x) = \dfrac{1}{2}$ donc $w_x = \{\frac{1}{2}\}$. De même $\lim\limits_{n \to -\infty} f^n(x) = 1$ donc $\alpha_x = \{1\}$.

On conclut que les ensemble w_x et α_x ne sont pas des orbites périodiques mais des cycles périodiques.

CHAPITRE V

ÉQUATIONS COHOMOLOGIQUES, DISTRIBUTIONS INVARIANTES SUR UN GROUPE DE LIE ET APPLICATIONS

Ce chapitre traite deux questions d'analyse sur un groupe de Lie connexe compact G. i) Soient $a \in G$ et γ le difféomorphisme de G donné par $\gamma(x) = ax$ (translation à gauche par a). On donne les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'équation cohomologique $f - f \circ \gamma = g$ admette des solutions dans l'espace de Fréchet $C^\infty(G)$ des fonctions complexes C^∞ sur G. ii) Lorsque G est le tore $\mathbb{T}^n$, on détermine explicitement les distributions sur $\mathbb{T}^n$ invariantes par un automorphisme affine γ *i.e.* $\gamma(x) = A(x + a)$ avec $A \in \mathsf{GL}(n, \mathbb{Z})$ et $a \in \mathbb{T}^n$. On en donne une application aux déformations infinitésimales d'un feuilletage obtenu par suspension d'une translation d'un groupe de Lie compact.

0. Préliminaires

Soient G un groupe de Lie connexe compact. On note $C^\infty(G)$ l'espace des fonctions complexes de classe C^∞ sur G qu'on munit de la topologie C^∞ et qu'on peut définir comme suit. On prend une base $(X_1, \cdots, X_n)$ de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ de G formée par des champs de vecteurs invariants (à la fois à gauche et à droite). Pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$, le champ X_i définit un opérateur différentiel $X_i : C^\infty(G) \longrightarrow C^\infty(G)$ d'ordre 1 donné par :

$$(X_i \cdot f)(x) = (d_x f)(X_i(x))$$

où $d_x f$ est la différentielle de f au point x et $X_i(x)$ la valeur du champ X_i au point x qui est un vecteur de $T_x M$. Pour tout $s \in \mathbb{N}$, on note X_i^s le composé s fois de X_i ; c'est un opérateur différentiel d'ordre s ; pour $s = 0$, X_i^s est l'identité de $C^\infty(G)$. Pour tout $\mathbf{s} = (s_1, \cdots, s_n) \in \mathbb{N}^n$, $|s| = s_1 + \cdots + s_n$ est la *longueur* de $\mathbf{s}$ et $D^{\mathbf{s}}$ l'opérateur $X_1^{s_1} \cdots X_n^{s_n}$. Soient $f \in C^\infty(G)$ et $r \in \mathbb{N}$; on pose :

$$||f||_r = \sum_{|\mathbf{s}| \leq r} \sup_{x \in G} |(D^{\mathbf{s}} f)(x)|.$$

Alors $||\ \ ||_r$ est une norme sur $C^\infty(G)$ et la famille $\{||\ \ ||_r\}_{r \geq 0}$ définit la topologie C^∞ sur $C^\infty(G)$ qui en fait un espace de Fréchet.

Soit $a \in G$; on lui associe le difféomorphisme analytique $\gamma : x \in G \longmapsto ax \in G$ (translation à gauche par a). Alors γ agit sur les fonctions : $f \in C^\infty(G) \longmapsto f\circ\gamma \in C^\infty(G)$. La fonction $f \in C^\infty(G)$ est dite *γ-invariante* si elle vérifie $f = f \circ \gamma$; la quantité $f - f \circ \gamma$ mesure alors le défaut d'invariance de f ; on l'appelle *divergence* de f pour γ. Les fonctions divergences engendrent un sous-espace vectoriel $\mathcal{C}$ de $C^\infty(G)$. Sa détermination amène au problème :

(V.1) Étant donnée $g \in C^\infty(G)$, existe-t-il $f \in C^\infty(G)$ telle que $f - f \circ \gamma = g$?

Ce qui revient à calculer le conoyau $C^\infty(G)/\mathcal{C}$ de l'opérateur continu (qu'on appelle *opérateur cobord*) :

$$\delta : f \in C^\infty(G) \longmapsto (f - f \circ \gamma) \in C^\infty(G).$$

Ce conoyau est exactement le premier espace vectoriel de *cohomologie* $H^1(\mathbb{Z}, C^\infty(G))$ du *groupe discret* $\mathbb{Z}$ à valeurs dans le $\mathbb{Z}$-module $C^\infty(G)$. Le quotient $C^\infty(G)/\overline{\mathcal{C}}$, où $\overline{\mathcal{C}}$ est l'adhérence de $\mathcal{C}$, est le premier espace de *cohomologie réduite* du groupe discret $\mathbb{Z}$ à coefficients dans $C^\infty(G)$; on le note $\overline{H}^1(\mathbb{Z}, C^\infty(G))$.

Un élément T du dual topologique de l'espace $C^\infty(G)$ est appelé *distribution* sur G ; l'évaluation de T sur $f \in C^\infty(G)$ sera notée $\langle T, f\rangle$. On dira que T est *γ-invariante* si, pour toute fonction $f \in C^\infty(G)$, on a $\langle T, f \circ \gamma\rangle = \langle T, f\rangle$; c'est donc une forme linéaire continue $C^\infty(G) \longrightarrow \mathbb{C}$ nulle sur le sous-espace $\mathcal{C}$. L'espace $\mathcal{D}_\gamma(G)$ des distributions γ-invariantes sur G s'identifie donc au dual topologique du quotient $C^\infty(G)/\mathcal{C}$ (ou de son séparé associé $C^\infty(G)/\overline{\mathcal{C}}$).

Nous commencerons par le tore $\mathbb{T}^n$ et une translation γ. Ce sera une étape décisive pour résoudre le problème aussi bien pour une translation sur G compact quelconque que pour G encore le tore $\mathbb{T}^n$ mais où, cette fois-ci, γ est un automorphisme affine *i.e.* un élément du groupe $\mathbb{T}^n \rtimes \mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$ (c'est le groupe des automorphismes affines du groupe de Lie $\mathbb{T}^n$).

1. Cas où le groupe G est un tore

Soit $n \geq 1$ un entier. L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ sera équipé de son produit scalaire habituel $\langle\ ,\ \rangle$ et la norme associée sera notée $|\ |$. Le tore $\mathbb{T}^n$ est obtenu comme le quotient de $\mathbb{R}^n$ par son réseau standard $\mathbb{Z}^n$. Une fonction sur $\mathbb{T}^n$ n'est rien d'autre qu'une fonction $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ qui vérifie $f(x + \mathbf{m}) = f(x)$ pour tous $x \in \mathbb{R}^n$ et $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n$. Pour $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n$, on note $\Theta_{\mathbf{m}}$ la fonction $\Theta_{\mathbf{m}}(x) = e^{2i\pi\langle \mathbf{m}, x\rangle}$. Si f est intégrable, elle peut être développée en série de Fourier :

$$f(x) = \sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^n} f_{\mathbf{m}}\Theta_{\mathbf{m}}(x)$$

où les $f_{\mathbf{m}}$ sont les coefficients de Fourier donnés par les formules intégrales :

$$f_{\mathbf{m}} = \int_{\mathbb{T}^n} f(x) e^{-2i\pi\langle \mathbf{m}, x\rangle} dx.$$

Si, en plus, f est de carré intégrable, les coefficients $f_{\mathbf{m}}$ vérifient la condition de convergence $\sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^n} |f_{\mathbf{m}}|^2 < +\infty$.

De la même façon, toute distribution T sur le tore $\mathbb{T}^n$ (vue comme une distribution $\mathbb{Z}^n$-périodique sur $\mathbb{R}^n$) peut s'écrire sous la forme :

$$T = \sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^n} T_{\mathbf{m}} \Theta_{\mathbf{m}}$$

où la famille de nombres complexes $T_{\mathbf{m}}$ (indexée par $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n$) est à *croissance polynomiale*, c'est-à-dire, il existe un entier $r \in \mathbb{N}$ et une constante $C > 0$ tels que $|T_{\mathbf{m}}| \leq C|\mathbf{m}|^r$ pour tout $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n$.

Pour tout $r \in \mathbb{N}$, on note $W^{1,r}$ l'espace des fonctions f sur le tore $\mathbb{T}^n$ données par leurs coefficients de Fourier $(f_{\mathbf{m}})_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^n}$ vérifiant la condition $\sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^n} |\mathbf{m}|^r |f_{\mathbf{m}}| < +\infty$. De même, $W^{2,r}$ sera l'espace des fonctions f sur le tore $\mathbb{T}^n$ données par leurs coefficients de Fourier $(f_{\mathbf{m}})_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^n}$ vérifiant la condition $\sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^n} |\mathbf{m}|^{2r} |f_{\mathbf{m}}|^2 < +\infty$. Ce sont des espaces complets respectivement pour les normes :

$$||f||_{1,r} = |f_{\mathbf{0}}| + \sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^n\setminus\{\mathbf{0}\}} |\mathbf{m}|^r |f_{\mathbf{m}}| \quad \text{pour } f \in W^{1,r}$$

et :

$$||f||_{2,r} = \sqrt{|f_{\mathbf{0}}|^2 + \sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^n\setminus\{\mathbf{0}\}} |\mathbf{m}|^{2r} |f_{\mathbf{m}}|^2} \quad \text{pour } f \in W^{2,r}.$$

$W^{2,r}$ est le r-ième espace de Sobolev du tore $\mathbb{T}^n$; il a une structure d'espace de Hilbert donnée par le produit hermitien :

$$\langle f, g\rangle_r = f_{\mathbf{0}}\overline{g}_{\mathbf{0}} + \sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^n\setminus\{\mathbf{0}\}} |\mathbf{m}|^{2r} f_{\mathbf{m}}\overline{g}_{\mathbf{m}}.$$

On a des inclusions naturelles :

$$C^\infty(\mathbb{T}^n) \subset \cdots \subset W^{1,r+1} \subset W^{1,r} \subset \cdots \subset W^{1,0}$$

et :

$$C^\infty(\mathbb{T}^n) \subset \cdots \subset W^{2,r+1} \subset W^{2,r} \subset \cdots \subset W^{2,0} = L^2(\mathbb{T}^n).$$

La proposition suivante est facile à démontrer.

1.1. Proposition. *Soit* $T = \sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^n} T_{\mathbf{m}}\Theta_{\mathbf{m}}$ *une série (les* $T_{\mathbf{m}}$ *sont des nombres complexes). Alors les assertions* i), ii) et iii) *qui suivent sont équivalentes* :

i) T *est une distribution régulière (i.e.* T *est une fonction de classe* C^∞*)* ;

ii) *pour tout* $r \in \mathbb{N}$*, la série* $\sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^n} |\mathbf{m}|^{2r}|T_{\mathbf{m}}|^2$ *est convergente* ;

iii) *pour tout* $r \in \mathbb{N}$*, la série* $\sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^n} |\mathbf{m}|^{r}|T_{\mathbf{m}}|$ *est convergente.*

Pour tout $r \in \mathbb{N}$*, les injections* $j_{1,r} : W^{1,r+1} \hookrightarrow W^{1,r}$ *et* $j_{2,r} : W^{2,r+1} \hookrightarrow W^{2,r}$ *sont des opérateurs compacts.*

Les trois premiers points de cette proposition disent : $\bigcap_{r\in\mathbb{N}} W^{1,r} = \bigcap_{r\in\mathbb{N}} W^{2,r} = C^\infty(\mathbb{T}^n)$.

Tout vecteur $a \in \mathbb{R}^n$ définit une forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$: $x \in \mathbb{R}^n \longmapsto \langle a, x\rangle \in \mathbb{R}$ et donc a fortiori sur le réseau $\mathbb{Z}^n$.

$\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$

1.2. Définition [Sch]. *Soit* $a = (a_1, \cdots, a_n)$ *un vecteur de* $\mathbb{R}^n$ *tel que le groupe engendré par sa projection sur* $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ *soit dense dans* $\mathbb{T}^n$*. (Ceci implique en particulier que les nombres* $1, a_1, \cdots, a_n$ *sont linéairement indépendantes sur* $\mathbb{Q}$*.)*

i) *On dira que le vecteur* a *est* ***diophantien*** *s'il existe des nombres réels* $A > 0$ *et* $\tau > 0$ *tels que* $|1 - e^{2i\pi\langle m,a\rangle}| \geq \frac{A}{|\mathbf{m}|^\tau}$ *pour tout* $\mathbf{m} = (m_1, ..., m_n) \in \mathbb{Z}^n$ *non nul.*

ii) *On dira que* a *est un* ***vecteur de Liouville*** *s'il existe* $A > 0$ *tel que, pour tout* $\tau > 0$*, il existe* $\mathbf{m}_\tau \in \mathbb{Z}^n$ *vérifiant* $\left|1 - e^{2i\pi\langle m,a\rangle}\right| \leq \frac{A}{|\mathbf{m}_\tau|^\tau}$*.*

Par exemple, tout vecteur a de $\mathbb{R}^n$ comme dans la Définition 1.2 et tel les composantes $a_1, \cdots, a_n$ soient des nombres algébriques $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants est diophantien.

Remarque. *Le fait qu'un vecteur* a *soit diophantien est une propriété invariante par l'action de* $\mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$*, c'est-à-dire, si* $\xi \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$ *et* a *is diophantie, alors* $\xi(a)$ *l'est aussi.*

En effet, soient ξ^* la matrice transposée de ξ et A et τ les constantes données par i) dans la Définition 1.2. Pour tout $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n$ different de $\mathbf{0}$, on a :

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{m}, \xi(a)\rangle &= \langle \xi^*(\mathbf{m}), a\rangle \\ &\geq \frac{A}{|\xi^*(\mathbf{m})|^\tau} \\ &\geq \frac{A}{||\xi^*||^\tau} \cdot \frac{1}{|\mathbf{m}|^\tau}.\end{aligned}$$

Cette remarque justifie ce qu'on entend par élément diophantien dans un groupe de Lie compact qui n'est pas un tore.

On définit une forme linéaire continue $\mathcal{L} : C^\infty(\mathbb{T}^n) \longrightarrow \mathbb{C}$ par :

$$\mathcal{L}(g) = \int_{\mathbb{T}^n} g(x)dx = g_{\mathbf{0}}$$

pour toute fonction $g = \sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^n} g_{\mathbf{m}}\Theta_{\mathbf{m}}$. On peut aussi interpréter $\mathcal{L}$ comme un opérateur sur $C^\infty(\mathbb{T}^n)$ qui à g associe la fonction $\mathcal{L}(g)\mathbf{1}$ où $\mathbf{1}$ est la fonction constante égale à 1 ; c'est donc un opérateur compact car de rang fini (son rang est 1). Son noyau $\mathcal{N}$ est fermé et tel que $C^\infty(\mathbb{T}^n) = \mathcal{N} \oplus \mathbb{C}\cdot\mathbf{1}$. Notons P la première projection $C^\infty(\mathbb{T}^n) = \mathcal{N} \oplus \mathbb{C}\cdot\mathbf{1} \longrightarrow \mathcal{N}$. Elle vérifie $P \oplus \mathcal{L} = I$ (où I est l'identité de $C^\infty(\mathbb{T}^n)$). On a alors le :

1.3. Théorème. *Soit γ le difféomorphisme du tore $\mathbb{T}^n$ associé à une translation de vecteur $a = (a_1, \cdots, a_n)$ avec les $a_1, \cdots, a_n$ linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$. Alors :*

i) *Si a est diophantien, il existe un opérateur borné $G : C^\infty(\mathbb{T}^n) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{T}^n)$ tel que $\delta G = I - \mathcal{L}$. Il en découle que l'équation $f - f\circ\gamma = g$ a une solution $f \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ si, et seulement si, $\mathcal{L}(g) = 0$ et que l'espace vectoriel $H^1(\mathbb{Z}, C^\infty(\mathbb{T}^n))$ est de dimension 1 engendré par la fonction constante égale à 1.*

ii) *Si a est de Liouville, il existe une famille infinie libre de fonctions g vérifiant la condition $\mathcal{L}(g) = 0$ et telles que l'équation $f - f\circ\gamma = g$ n'ait aucune solution. Dans ce cas, $H^1(\mathbb{Z}, C^\infty(\mathbb{T}^n))$ est un espace vectoriel topologique de dimension infinie non séparé. Mais son séparé associé est de dimension 1 engendré par la fonction constante égale à 1.*

Dans les deux cas l'espace $\mathcal{D}_\gamma(\mathbb{T}^n)$ des distributions γ-invariantes est de dimension 1 engendré par la mesure de Haar $dx = dx_1 \otimes \cdots \otimes dx_n$.

Démonstration. Si on intègre les deux membres de l'équation (V.1), celui de gauche donne 0. Donc une condition nécessaire d'existence d'une solution est $\mathcal{L}(g) = 0$. Supposons-la remplie. Les développements de Fourier de f et g :

$$f(x) = \sum_{\mathbf{m}\in Z^n} f_{\mathbf{m}} e^{2i\pi\langle x,\mathbf{m}\rangle} \quad \text{et} \quad g(x) = \sum_{\mathbf{m}\in Z^n} g_{\mathbf{m}} e^{2i\pi\langle x,\mathbf{m}\rangle}$$

permettent de ramener l'équation (1) au système :

$$\left(1 - e^{2i\pi\langle \mathbf{m},a\rangle}\right) f_{\mathbf{m}} = g_{\mathbf{m}} \quad \text{avec} \quad \mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n.$$

Comme $\mathcal{L}(g) = g_{\mathbf{0}} = 0$, on peut poser :

$$f_{\mathbf{m}} = \begin{cases} 0 & \text{si } \mathbf{m} = \mathbf{0} \\ \frac{g_{\mathbf{m}}}{1 - e^{2i\pi\langle \mathbf{m},a\rangle}} & \text{si } \mathbf{m} \neq \mathbf{0}. \end{cases} \tag{V.2}$$

La fonction f est donc donnée formellement par ses coefficients de Fourier $(f_{\mathbf{m}})_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^n}$. Étudions sa régularité. Soit $r \in \mathbb{N}$.

i) $\underline{a \text{ diophantien}}$

On a :

$$|\mathbf{m}|^{2r}|f_{\mathbf{m}}|^2 = |\mathbf{m}|^{2r}\left|\frac{g_{\mathbf{m}}}{1-e^{2i\pi\langle \mathbf{m},a\rangle}}\right|^2 \leq \frac{1}{A^2}|g_{\mathbf{m}}|^2|\mathbf{m}|^{2(r+\tau)}. \tag{V.3}$$

Comme g est de classe C^∞, la série numérique $\sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^n}|g_{\mathbf{m}}|^2|\mathbf{m}|^{2(r+\tau)}$ converge, par suite $\sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^n}|\mathbf{m}|^{2r}|f_{\mathbf{m}}|^2 < +\infty$ qui montre bien que f est de classe C^∞. L'image de l'opérateur $\delta : C^\infty(\mathbb{T}^n) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{T}^n)$ s'identifie donc au sous-espace $\mathcal{N}$; en fait la restriction de δ à $\mathcal{N}$ est un isomorphisme (algébrique continu) sur $\mathcal{N}$; notons G_0 son inverse : à g dans $\mathcal{N}$ on associe f unique solution dans $\mathcal{N}$ de l'équation $\delta f = g$. On pose alors $G = G_0P$; on vérifie facilement que $\delta G = I - \mathcal{L}$.

Reste à montrer que G est borné. Il suffit en fait de montrer que G_0 l'est. L'inégalité (V.3) montre que, pour tout entier naturel s, l'opérateur :

$$G_0 : g \in \mathcal{N} \subset W^{2,s+r} \longmapsto G_0(g) = f \in C^\infty(\mathbb{T}^n) \subset W^{2,s}$$

vérifie l'inégalité :

$$||G_0(g)||_{2,s} \leq \beta||g||_{2,s+r}$$

où $r = 1+$ (partie entière de τ) et β une constante réelle positive ; G_0 est donc borné.

Il est immédiat de voir que l'espace vectoriel $H^1(\mathbb{Z}, C^\infty(\mathbb{T}^n))$ est de dimension 1 engendré par la fonction constante 1 et que $\mathcal{D}_\gamma(\mathbb{T}^n)$ est aussi de dimension 1 engendré par la n-forme volume $dx = dx_1 \otimes \cdots \otimes dx_n$.

ii) $\underline{a \text{ de Liouville}}$

On sait qu'il existe $A > 0$ tel que, pour tout $\tau \in \mathbb{N}^*$, il existe $\mathbf{m}_\tau \in \mathbb{Z}^n$ vérifiant :

$$\left|1 - e^{2i\pi\langle \mathbf{m},a\rangle}\right| \leq \frac{A}{|\mathbf{m}_\tau|^\tau}.$$

Soit $(\tau_k)_k$ une suite strictement croissante dans $\mathbb{N}^*$; les $\mathbf{m}_{\tau_k}$ correspondants seront notés $\mathbf{m}_k$. On définit alors une fonction g à l'aide de ses coefficients de Fourier :

$$g_{\mathbf{m}} = \begin{cases} |\mathbf{m}_k|^{-\frac{\tau_k}{2}} & \text{si } \mathbf{m} = \mathbf{m}_k \\ \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{V.4}$$

La fonction g est de classe C^∞ et vérifie $\int_{\mathbb{T}^n} g(x)dx = g_{\mathbf{0}} = 0$. Mais :

$$\begin{aligned} |f_{\mathbf{m}_k}|^2 &= \left|\frac{g_{\mathbf{m}_k}}{1-e^{2i\pi\langle \mathbf{m},a\rangle}}\right|^2 \\ &= \frac{|\mathbf{m}_k|^{-\tau_k}}{|1-e^{2i\pi\langle \mathbf{m},\alpha\rangle}|^2} \\ &\geq \frac{1}{A^2}|\mathbf{m}_k|^{\tau_k}. \end{aligned}$$

Les coefficients $f_{\mathbf{m}}$ sont donc à croissance surpolynomiale et ne définissent même pas une distribution f solution de l'équation (V.1) ! De cette façon on peut fabriquer une famille infinie libre de fonctions $(g^\ell)_{\ell\in\mathbb{N}^*}$ de classe C^∞ pour lesquelles l'équation (V.1) n'a pas de solution et pour aucune combinaison linéaire finie d'éléments de cette famille non plus. Le conoyau de l'opérateur $\delta : C^\infty(\mathbb{T}^n) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{T}^n)$ est donc de dimension infinie.

Si g est un polynôme trigonométrique sans terme constant, l'équation a toujours une solution : le problème de la convergence ne se pose pas. Comme l'adhérence du sous-espace engendré algébriquement par ces polynômes est de codimension 1 (c'est l'orthogonal de la fonction constante $\mathbf{1}$), l'image de l'opérateur $\delta : C^\infty(\mathbb{T}^n) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{T}^n)$ n'est pas fermée, donc $H^1(\mathbb{Z}, C^\infty(\mathbb{T}^n))$ n'est pas séparé mais son séparé associé est de dimension 1. Ceci montre en même temps que l'espace vectoriel $\mathcal{D}_\gamma(\mathbb{T}^n)$ est de dimension 1 engendré par la n-forme volume $dx = dx_1 \otimes \cdots \otimes dx_n$. $\square$

La situation où les nombres $a_1, \cdots, a_n$ sont linéairement dépendants sur $\mathbb{Q}$ n'a pas été traitée ici mais elle est contenue dans le théorème 2.5.

2. Cas général

Soit G un groupe de Lie connexe compact. Soit $a \in G$; alors a engendre un sous-groupe abélien Γ dont l'adhérence K est un sous-groupe abélien compact de G. On a donc les deux situations qui suivent que nous allons expliquer tout de suite après.

(1) - Le groupe K est fini si Γ est déjà fermé dans G. (Donc dans ce cas $K = \Gamma$.)

(2) - Le groupe K est une extension d'un tore $\mathbb{T}^n$ par un groupe fini abélien Λ si Γ n'est pas fermé dans G. (Le tore $\mathbb{T}^n$ est la composante connexe de l'élément neutre.)

Nous ne considérerons dans le suite que le cas où Λ est trivial, c'est-à-dire K est connexe ; il se confond donc avec sa composante neutre $\mathbb{T}^n$. Une légère modification de toutes les démonstrations que nous donnerons permet de traiter le cas où Λ n'est pas trivial.

2.1. Le groupe Γ est fini

Nous avons un revêtement $\Gamma \hookrightarrow G \xrightarrow{\pi} B = G/K$ de groupe Γ au-dessus de la variété compacte B. On définit une application $\pi_* : C^\infty(G) \longrightarrow C^\infty(B)$ linéaire, continue et surjective par :

$$\pi_*(f) = \sum_{\sigma\in\Gamma} f \circ \sigma. \tag{V.5}$$

A priori, $\pi_*(f)$ est une fonction sur G mais comme elle est Γ-invariante, elle définit de façon naturelle une fonction sur B. Le noyau de π_* contient le sous-espace $\mathcal{C}$ des fonctions de la forme $f - f \circ \gamma$. En fait, il est démontré dans [EMM] que la suite :

$$0 \longrightarrow \mathcal{C} \hookrightarrow C^\infty(G) \xrightarrow{\pi_*} C^\infty(B) \longrightarrow 0 \tag{V.6}$$

est exacte. Ce qui montre clairement que l'équation cohomologique $f - f \circ \gamma = g$ a une solution si, et seulement si, $\sum_{\sigma \in \Gamma} g \circ \sigma = 0$.

2.2. Le groupe Γ est infini

Dans cette situation Γ n'est pas fermé et est strictement contenu dans K. Comme on l'a déjà signalé précédemment, K est donc un tore $\mathbb{T}^n$. Son action (à gauche) sur G définit un fibré principal :

$$\mathbb{T}^n \hookrightarrow G \xrightarrow{\pi} B = G/\mathbb{T}^n$$

au-dessus de l'espace homogène $B = G/\mathbb{T}^n$ qui est une variété compacte.

Par exemple si $G = \mathrm{SO}(3)$, γ est une matrice carrée orthogonale d'ordre 3, donc une rotation d'axe une droite vectorielle Δ dans $\mathbb{R}^3$. Tout élément de Γ est aussi une rotation d'axe Δ. Par conséquent le groupe K est soit un groupe cyclique $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ soit un cercle $\mathbb{S}^1 = \mathrm{SO}(2)$. Dans ce cas, la variété $B = G/K$ est la sphère $\mathbb{S}^2$.

Recouvrons la variété B par des ouverts $U_1, \cdots, U_p$ (tous difféomorphes à $\mathbb{R}^d$ où d est la dimension de B) tels que, si U est l'un des U_i, il existe un difféomorphisme $\Psi : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times \mathbb{T}^n$ rendant commutatif le diagramme qui suit :

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\Psi} & U \times \mathbb{T}^n \\ \pi \downarrow & & \downarrow p_1 \\ U & \xrightarrow{\mathrm{id}} & U. \end{array}$$

(Ici p_1 désigne la première projection.) Le difféomorphisme Ψ peut être construit come suit. Soit $\sigma : U \longrightarrow \pi^{-1}(U)$ une C^∞-section de π; on définit $\Psi^{-1} : U \times \mathbb{T}^n \longrightarrow \pi^{-1}(U)$ par $\Psi^{-1}(u, x) = x \cdot \sigma(u)$ the sign "point" désigne multiplication dans le groupe $\mathbb{T}^n$.

Il existe alors une fonction continue $a : u \in U \longmapsto a(u) = (a_1(u), \cdots, a_n(u)) \in \mathbb{T}^n$ avec les $a_1(u), \cdots, a_n(u)$ linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$ tels que l'action de Γ sur l'ouvert $\pi^{-1}(U)$ soit équivalente (via Ψ) à l'action :

$$(u, x) \in U \times \mathbb{T}^n \longrightarrow (u, x + a(u)) \in U \times \mathbb{T}^n.$$

2.3. Remarque importante. *L'élément $a(u)$ est indépendant de u. (On le notera a.)*

Ceci vient du choix de la trivialisation de la fibration π au-dessus de U et du fait que l'action à gauche de γ sur G commute à l'action à droite de G (sur G bien sûr) et donc les translations à droite sont des automorphismes de l'action de K engendrée par γ. Autrement dit, la translation dans chaque tore $F_u = \pi^{-1}(u) = \mathbb{T}^n$ se fait par le même vecteur a. Ce qui nous permettra d'appliquer le théorème 1.3 dans chaque fibre F_u mais indépendamment de $u \in B$.

2.4. Nous allons mettre une topologie sur l'espace des fonctions $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ adaptée à cette structure fibrée et qui permet le contrôle de leur régularité. Soit U l'un des ouverts $U_1, \cdots, U_p$ et notons Ψ le difféomorphisme de trivialisation qui lui est associé. Soit $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction mesurable. Via le difféomorphisme Ψ, la restriction de f à $V = \pi^{-1}(U)$ peut être vue comme une fonction $f_U : U \times \mathbb{T}^n \longrightarrow \mathbb{C}$; on utilisera donc les coordonnées $(u, x) = (u_1, \cdots, u_d, x_1, \cdots, x_n)$. On supposera que f est de carré intégrable et on la regardera comme une distribution qu'on notera simplement f. Mettons-nous sur l'ouvert V et fixons quelques notations. Pour un multi-indice $\mathbf{k} = (k_1, \cdots, k_d) \in \mathbb{N}^d$, on pose :

(i) $\mathbf{k}^{\mathbf{s}} = k_1^{s_1} \cdots k_d^{s_d}$ pour tout $\mathbf{s} = (s_1, \cdots, s_d) \in \mathbb{N}^d$,

(ii) $|\mathbf{k}| = k_1 + \cdots + k_d$ (c'est la *longueur* de $\mathbf{k}$),

(iii) $\frac{\partial^{|\mathbf{k}|}}{\partial u^{\mathbf{k}}} = \frac{\partial^{|\mathbf{k}|}}{\partial u_1^{k_1} \cdots \partial u_d^{k_d}}$.

Pour $u \in B$ fixé et pour tous multi-indices $\mathbf{r} \in \mathbb{N}^d$ et $\mathbf{s} \in \mathbb{N}^n$, la distribution $\frac{\partial^{|\mathbf{r}|+|\mathbf{s}|} f}{\partial u^{\mathbf{r}} \partial x^{\mathbf{s}}}$ sur $F_u = \pi^{-1}(u) = \mathbb{T}^n$ se développe en série de Fourier :

$$\frac{\partial^{|\mathbf{r}|+|\mathbf{s}|} f}{\partial u^{\mathbf{r}} \partial x^{\mathbf{s}}}(u, x) = \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^{\mathbf{n}}} \frac{\partial^{|\mathbf{r}|} f_{\mathbf{m}}}{\partial u^{\mathbf{r}}}(u)(2i\pi)^{|\mathbf{s}|} \mathbf{m}^{\mathbf{s}} e^{2i\pi\langle x, \mathbf{m}\rangle}.$$

Soient $r, s \in \mathbb{N}$. On pose :

$$||f||_{r,s}^U = \left(\sum_{|\mathbf{r}| \leq r} \int_U \left| \frac{\partial^{|\mathbf{r}|} f_{\mathbf{0}}}{\partial u^{\mathbf{r}}}(u) \right|^2 du + \sum_{|\mathbf{r}| \leq r} \sum_{|\mathbf{s}| \leq s} \int_U \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n \setminus \{\mathbf{0}\}} |\mathbf{m}|^{2|\mathbf{s}|} \left| \frac{\partial^{|\mathbf{r}|} f_{\mathbf{m}}}{\partial u^{\mathbf{r}}}(u) \right|^2 du \right)^{\frac{1}{2}}.$$

(Exceptionnellement ici $|\mathbf{m}|$ est la norme euclidienne du vecteur $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n$.) On note $L^2(G)$ l'espace des fonctions $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ mesurables et de carré intégrable. L'ensemble des $f \in L^2(G)$ qui vérifient $||f||_{r,s}^U < +\infty$ pour tout ouvert U de B et trivialisant la fibration π est un espace vectoriel $W^{r,s}(G)$ sur lequel $|| \; ||_{r,s}^U$ est une norme. Cette norme est en fait associée au produit hermitien (sur $L^2(U)$) :

$$\langle f, g\rangle_{r,s}^U = \sum_{|\mathbf{r}| \leq r} \int_U \frac{\partial^{|\mathbf{r}|} f_{\mathbf{0}}}{\partial u^{\mathbf{r}}} \overline{\frac{\partial^{|\mathbf{r}|} g_{\mathbf{0}}}{\partial u^{\mathbf{r}}}} du + \sum_{|\mathbf{r}| \leq r} \sum_{|\mathbf{s}| \leq s} \int_U \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n \setminus \{\mathbf{0}\}} |\mathbf{m}|^{2|\mathbf{s}|} \frac{\partial^{|\mathbf{r}|} f_{\mathbf{m}}}{\partial u^{\mathbf{r}}} \overline{\frac{\partial^{|\mathbf{r}|} g_{\mathbf{m}}}{\partial u^{\mathbf{r}}}} du.$$

On reprend le recouvrement par les ouverts $U_1, \cdots, U_p$ de B où chacun d'eux trivialise la fibration π ; notons la norme $|| \; ||_{r,s}^{U_i}$ par $|| \; ||_{r,s}^i$. Une fonction $f \in L^2(G)$ est de classe C^∞ si, et seulement si, $||f||_{r,s}^i < +\infty$ pour tout $i = 1, \cdots, p$ et tous $r, s \in \mathbb{N}$.

Pour toute fonction $f \in L^2(G)$, on note $I(f)$ la fonction sur B définie par :

(V.7) $$I(f)(u) = \int_{\mathbb{T}^n} f(u, x_1, \cdots, x_n) dx_1 \otimes \cdots \otimes dx_n.$$

Il est facile de voir (via le théorème de Fubini) que $I(f) \in L^2(B)$ et que l'application $I : L^2(G) \longrightarrow L^2(B)$ est linéaire continue et surjective. En plus, elle envoie l'espace $C^\infty(G)$ surjectivement sur l'espace $C^\infty(B)$.

2.5. Théorème. *Soit γ le difféomorphisme du groupe G associé à une translation et $g \in C^\infty(G)$. On reprend toutes les notations qu'on vient de fixer. Alors :*

(i) *Si le vecteur a est diophantien, l'équation $f - f \circ \gamma = g$ a une solution $f \in C^\infty(G)$ si, et seulement si, $I(g) = 0$. Dans ce cas, l'espace vectoriel $H^1(\mathbb{Z}, C^\infty(G))$ est canoniquement isomorphe à l'espace $C^\infty(B)$ des fonctions C^∞ sur B.*

(ii) *Supposons a de Liouville. Pour chaque $u \in B$, il existe une famille infinie libre de fonctions $\left(g^\ell\right)_{\ell \in \mathbb{N}^*}$ dans $C^\infty(G)$ telles que $I(g^\ell) = 0$ et pour lesquelles l'équation cohomologique $f - f \circ \gamma = g^\ell$ n'a pas de solution en restriction à la fibre F_u, donc a fortiori pas de solution dans le groupe G.*

Dans le cas ii), on peut interpréter, de façon abusive, $H^1(\mathbb{Z}, C^\infty(G))$ comme l'espace des "fonctions C^∞ sur B à valeurs dans $H^1(\mathbb{Z}, C^\infty(\mathbb{T}^n))$" même si $H^1(\mathbb{Z}, C^\infty(\mathbb{T}^n))$ n'est pas séparé !

Démonstration.

i) La démonstration de ce point se fera en deux étapes. D'abord sur chacun des ouverts $V_i = \pi^{-1}(U_i)$ difféomorphe à $U_i \times \mathbb{T}^n$ ensuite globalement sur le groupe G.

• On se met sur V_i qu'on confondra avec $U_i \times \mathbb{T}^n$. Écrite au niveau des coefficients de Fourier, l'équation $f - f \circ \gamma = g$ donne le système :

$$\left(1 - e^{2i\pi\langle \mathbf{m}, a\rangle}\right) f_{\mathbf{m}} = g_{\mathbf{m}} \quad \text{pour} \quad \mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n.$$

On voit donc que la condition nécessaire pour que g soit du type $f - f \circ \gamma$ est que $g_{\mathbf{0}} = 0$, qui n'est rien d'autre que la condition $I(g) = 0$. Supposons-la satisfaite. On a alors une solution formelle :

$$f_{\mathbf{m}}(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } \mathbf{m} = \mathbf{0} \\ \frac{g_{\mathbf{m}}(u)}{1 - e^{2i\pi\langle \mathbf{m}, a\rangle}} & \text{si } \mathbf{m} \neq \mathbf{0}. \end{cases}$$

Il est très facile de montrer que ces coefficients définissent bien une fonction f de classe C^∞ : il suffit de vérifier que, pour tous $r, s \in \mathbb{N}$ et tout $i = 1, \cdots, p$, on a $||f||^i_{r,s} < +\infty$; ceci se fait sans aucune difficulté.

• Soit $\{\overline{\rho}_i\}$ une partition de l'unité sur B subordonnée au recouvrement $\{U_i\}$. Alors $\{\rho_i\}$, où $\rho_i = \overline{\rho}_i \circ \pi$, est une partition de l'unité sur G subordonnée au recouvrement $\{V_i\}$ avec ρ_i constante sur les fibres de π. Pour chaque $i = 1, \cdots, p$, on note g_i la restriction de g à l'ouvert V_i ; alors g_i est une fonction de classe C^∞ sur V_i satisfaisant la condition $I(g_i) = 0$. D'après le point qui précède, il existe une fonction de classe C^∞ sur V_i qu'on notera f_i et qui vérifie $f_i - f_i \circ \gamma = g_i$. Il est alors immédiat de voir que $f = \sum_{i=1}^{p} \rho_i f_i$ est une fonction de classe C^∞ sur G et est solution du problème *i.e.* vérifie $f - f \circ \gamma = g$. Ce qui termine la démonstration.

ii) Soient $u \in B$ et $\ell \in \mathbb{N}^*$. On prend $g_u^\ell = g$ la fonction de classe C^∞ sur le tore $\mathbb{T}^n = F_u$ construite dans le point ii) de la démonstration du théorème 1.3. Soit $\overline{\psi} : B \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction à support dans un voisinage W de u contenu dans un ouvert trivialisant π et valant 1 sur un voisinage $W' \subset W$ de u. Posons $\psi = \overline{\psi} \circ \pi$. Alors ψ est une fonction C^∞ sur G et vaut 1 sur un voisinage de la fibre $F_u = \mathbb{T}^n$; en plus, elle est constante sur les fibres de π. On pose $g^\ell = \psi g_u^\ell$; on obtient ainsi une fonction C^∞ sur G qui vérifie $I(g^\ell) = 0$ mais qui n'est pas solution de l'équation cohomologique $f - f \circ \gamma = g^\ell$. En faisant varier ℓ dans $\mathbb{N}^*$ on obtient la suite (g^ℓ) cherchée. $\square$

2.6. Remarque. *Nous nous sommes restreints au cas d'un groupe compact pour simplifier l'exposé. Mais tout fonctionne pour un groupe de Lie quelconque et tel quel s'il est en plus exponentiel.*

2.7. Qu'en est-il pour les fonctions continues ?

Nous venons de voir que la régularité des solutions de l'équation cohomologique (V.1) dépend de la nature arithmétique du vecteur a. *Qu'en est-il si, au lieu de travailler sur l'espace $C^\infty(G)$ des fonctions de classe C^∞, on se place sur celui des fonctions qui sont seulement continues* ? Le résultat qui suit a été établi dans [MS] :

Soit $C_0^{bv}(\mathbb{S}^1)$ l'espace de Banach des fonctions continues à variation bornée et d'intégale nulle sur le $G = \mathbb{S}^1$. Soit γ une rotation irrationnelle de $\mathbb{S}^1$. Alors il existe un ensemble résiduel de $\mathcal{R}$ de $C_0^{bv}(\mathbb{S}^1)$ dont les éléments sont des fonctions d'intégrale nulle et tel que, pour tout $g \in \mathcal{R}$, il n'existe aucune fonction continue f sur $\mathbb{S}^1$ qui soit solution de l'équation cohomologique $f - f \circ \gamma = g$.

3. Automorphisme affine d'un tore $\mathbb{T}^n$

Dans tout ce paragraphe, le groupe G sera le tore $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ et γ l'automorphisme affine $\gamma(x) = A(x + a)$ où A est une matrice de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$ *i.e.* A est à coefficients entiers et de déterminant 1 ou -1 et $a = (a_1, \cdots, a_n)$ un élément de $\mathbb{T}^n$ (vu comme un vecteur de $\mathbb{R}^n$).

3.1. Notations

Nous allons en fixer quelques-unes. Cela nous permettra de travailler de façon plus fluide et facilitera la compréhension des étapes du calcul.

Le difféomorphisme γ est un automorphisme affine de $\mathbb{T}^n$ dont la direction est donnée par la matrice A. Notons A' la transposée de A et B l'inverse de A'. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, B^k

sera la puissance $|k|$-ième de B si $k \geq 0$ et celle de B^{-1} si $k < 0$. On définit une suite de matrices $(S_k)_k$ par $\mathbb{Z}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} S_0 = 0 \\ S_{k+1} = S_k B + I. \end{array} \right. \tag{V.8}$$

(Une telle suite est facile à construire par récurrence.) On pose $a^\perp = \{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n : \langle \mathbf{m}, a \rangle = 0\}$ et $F_B = \{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n : B(\mathbf{m}) = \mathbf{m}\}$. Alors $a^\perp$ et F_B sont des sous-groupes de $\mathbb{Z}^n$. Dans toute la suite, on fera l'hypothèse suivante :

La matrice B ne possède pas de vecteurs $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n \setminus F_B$ périodiques, c'est-à-dire pour lesquels il existe $q \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ tel que $B^q(\mathbf{m}) = \mathbf{m}$.

3.2. Un calcul immédiat montre que l'action de γ sur les fonctions $f : \mathbb{T}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ est donnée comme suit :

$$f \circ \gamma = \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n} e^{2i\pi \langle A'(\mathbf{m}), a \rangle} f_{\mathbf{m}} \Theta_{A'(\mathbf{m})} = \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n} e^{2i\pi \langle \mathbf{m}, a \rangle} f_{B(\mathbf{m})} \Theta_{\mathbf{m}}.$$

L'équation cohomologique (V.1) donne donc au niveau des coefficients de Fourier la famille d'équations :

$$f_{\mathbf{m}} - e^{2i\pi \langle \mathbf{m}, a \rangle} f_{B(\mathbf{m})} = g_{\mathbf{m}} \quad \text{pour} \quad \mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n. \tag{V.9}$$

Il est alors facile de voir que le noyau L de l'opérateur δ est engendré par les $\Theta_{\mathbf{m}}$ avec $\mathbf{m}$ variant dans le sous-groupe $a^\perp \cap F_B$ *i.e.* :

$$L = \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{T}^n) : f_{\mathbf{m}} = 0 \text{ pour } \mathbf{m} \notin a^\perp \cap F_B \right\}. \tag{V.10}$$

On a clairement $L \subset \mathrm{Ker}(\delta)$. Démontrons l'inclusion $\mathrm{Ker}(\delta) \subset L$. Rappelons que :

$$\delta(f)_{\mathbf{m}} = f_{\mathbf{m}} - e^{2i\pi \langle \mathbf{m}, a \rangle} f_{B(\mathbf{m})}.$$

Si $f \in \mathrm{Ker}(\delta)$ et si $\mathbf{m} \in F_B \setminus a^\perp$, il est facile de déduire $f_{\mathbf{m}} = 0$. Considérons le cas où $\mathbf{m} \notin F_B$. Si $\delta(f) = 0$, on a $|f_{\mathbf{m}}| = |f_{B(\mathbf{m})}|$. Donc, par la Proposition 1.1, la non nullité de $f_{\mathbf{m}}$ contredit la décroissance rapide des coefficients $f_{\mathbf{m}}$. Finalement $\mathrm{Ker}(\delta) = L$.

Une condition nécessaire pour que l'équation (9) ait une solution est donc $g_{\mathbf{m}} = 0$ pour $\mathbf{m} \in a^\perp \cap F_B$. Soit V le sous-espace de $C^\infty(\mathbb{T}^n)$ défini par :

$$V = \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{T}^n) : f_{\mathbf{m}} = 0 \text{ pour } \mathbf{m} \in a^\perp \cap F_B \right\}.$$

L'opérateur $\delta : C^\infty(\mathbb{T}^n) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{T}^n)$ préserve chacun des facteurs de la décomposition orthogonale :

$$C^\infty(\mathbb{T}^n) = V \oplus L. \tag{V.11}$$

Le sous-espace L est clairement invariant par δ. D'autre part, si $f \in V$, $f_{\mathbf{m}} = 0$ pour $\mathbf{m} \in a^{\perp} \cap F_B$. Comme $B(\mathbf{m}) = \mathbf{m}$, on a $\delta(f)_{\mathbf{m}} = f_{\mathbf{m}} - e^{2i\pi\langle \mathbf{m},a\rangle} f_{B(\mathbf{m})} = f_{\mathbf{m}} - f_{\mathbf{m}} = 0$, donc $\delta(f) \in V$. Nous pouvons alors nous restreindre à l'étude de l'opérateur δ sur le sous-espace V. Pour $g \in V$ donnée, le système (V.9) a, a priori, deux solutions formelles :

$$\text{(V.12)} \qquad f^{+}_{\mathbf{m}} = \begin{cases} 0 & \text{pour } \mathbf{m} \in a^{\perp} \cap F_B \\ \frac{g_{\mathbf{m}}}{1-e^{2i\pi\langle \mathbf{m},a\rangle}} & \text{pour } \mathbf{m} \in \left(a^{\perp}\right)^c \cap F_B \\ f_{\mathbf{m}} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} e^{2i\pi\langle S_k(\mathbf{m}),a\rangle} g_{B^k(\mathbf{m})} & \text{sinon.} \end{cases}$$

ou :

$$\text{(V.12')} \qquad f^{-}_{\mathbf{m}} = \begin{cases} 0 & \text{pour } \mathbf{m} \in a^{\perp} \cap F_B \\ \frac{g_{\mathbf{m}}}{1-e^{2i\pi\langle \mathbf{m},a\rangle}} & \text{pour } \mathbf{m} \in \left(a^{\perp}\right)^c \cap F_B \\ f_{\mathbf{m}} = -\displaystyle\sum_{k=-1}^{-\infty} e^{2i\pi\langle S_k(\mathbf{m}),a\rangle} g_{B^k(\mathbf{m})} & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'injectivité de δ force ces deux solutions à coïncider ; ce qui impose alors la condition :

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{2i\pi\langle S_k(\mathbf{m}),a\rangle} g_{B^k(\mathbf{m})} = 0.$$

On verra qu'elle ne signifie rien d'autre que demander à g d'annuler les distributions invariantes par γ qu'on va tout de suite exhiber.

3.3. Nous avons déjà fait remarquer que l'annulation des distributions γ-invariantes par une fonction $g \in C^{\infty}(\mathbb{T}^n)$ est une condition nécessaire pour que l'équation cohomologique (V.1) admette une solution pour la donnée g. Il semble donc naturel de déterminer de telles distributions. C'est l'objet de cette sous-section.

Soit Σ_0 une partie de $\mathbb{Z}^n$ contenant un, et un seul élément, de chacune des orbites de l'action de B sur $\mathbb{Z}^n \setminus F_B$. On pose $\Sigma = \left(a^{\perp} \cap F_B\right) \cup (\Sigma_0 \setminus F_B)$. Pour tout $\mathbf{m} \in \Sigma$, on note $T_{\mathbf{m}}$ la forme linéaire $C^{\infty}(\mathbb{T}^n) \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par :

$$\text{(V.13)} \qquad \langle T_{\mathbf{m}}, g\rangle = \begin{cases} \int_{\mathbb{T}^n} \overline{\Theta}_{\mathbf{m}}(x) g(x) dx = g_{\mathbf{m}} & \text{pour } \mathbf{m} \in a^{\perp} \cap F_B \\ \displaystyle\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{2i\pi\langle S_k(\mathbf{m}),a\rangle} g_{B^k(\mathbf{m})} & \text{pour } \mathbf{m} \in \Sigma_0 \setminus F_B \end{cases}$$

où $\overline{\Theta}_{\mathbf{m}}(x) = e^{-2i\pi\langle \mathbf{m},x\rangle}$. Un calcul immédiat montre que $T_{\mathbf{m}}$ est bien continue et vérifie $\langle T_{\mathbf{m}}, f \circ \gamma\rangle = \langle T_{\mathbf{m}}, f\rangle$; c'est donc une distribution γ-invariante.

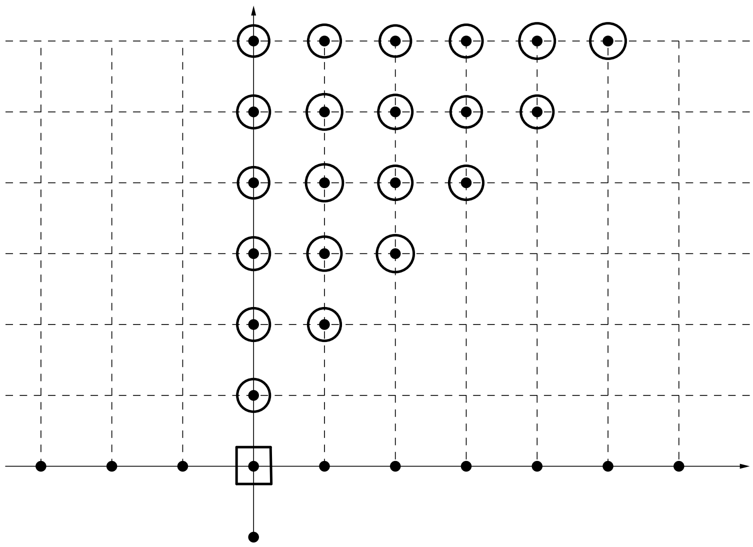
Avant de continuer donnons un exemple concret sur lequel on peut voir l'ensemble Σ et la nature des distributions invariantes. On prend $n = 2$. Soient $a = (a_1, 0)$ avec a_1 un réel non rationnel dans $]0, 1[$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Alors :

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B^k = \begin{pmatrix} 1 & -k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{pour} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Il est facile de voir que :

$$a^\perp = \{(0, m_2) \in \mathbb{Z}^2 : m_2 \in \mathbb{Z}\} \qquad \text{and} \qquad F_B = \{(m_1, 0) \in \mathbb{Z}^2 : m_1 \in \mathbb{Z}\}.$$

La matrice B agit sur le réseau $\mathbb{Z}^2$. L'équivalence de deux éléments (m_1, m_2) et (m_1', m_2') est donnée comme suit : $(m_1, 0) \sim (m_1', 0) \iff m_1 = m_1'$; et pour m_2 et m_2', tous deux différents de 0 : $(m_1, m_2) \sim (m_1', m_2') \iff m_2 = m_2'$ et $m_1 - m_1' \in m_2\mathbb{Z}$.



Points de l'ensemble Σ indexant les distributions invariantes : $a^\perp \cap F_B$ est réduit à $(0, 0)$ et représente l'unique mesure invariante qui est la mesure de Lebesgue $dx_1 \otimes dx_2$; les points qui sont encerclés représentent les autres distributions invariantes (qui sont seulement d'ordre 1).

Désignons par $N_{\mathbf{m}}$ le noyau de $T_{\mathbf{m}}$ et par $\mathcal{N}$ l'intersection de tous les $N_{\mathbf{m}}$; $\mathcal{N}$ est un sous-espace fermé de $C^\infty(\mathbb{T}^n)$. On montre alors que, lorsque g est un polynôme trigonométrique dans l'espace $\mathcal{N}$, les nombres $f_{\mathbf{m}}$ donnés par les expressions (V.12) ou (V.12') sont les coefficients de Fourier d'une fonction f de classe C^∞ solution de l'équation $\delta f = g$.

Nous avons donc démontré le :

3.4. Théorème. *Pour tout polynôme trigonométrique g appartenant au sous-espace $\mathcal{N}$ l'équation cohomologique $f - f \circ \gamma = g$ admet une solution $f \in V$. L'adhérence de l'image de l'opérateur $\delta : C^\infty(\mathbb{T}^n) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{T}^n)$ est donc égale au sous-espace $\mathcal{N}$. Ceci montre que l'espace vectoriel topologique $\overline{H}^1(\mathbb{Z}, C^\infty(G))$ est isomorphe à $C^\infty(\mathbb{T}^n)/\mathcal{N}$ et que l'espace $\mathcal{D}_\gamma$ des distributions invariantes par γ est engendré par les $T_{\mathbf{m}}$.*

4. Application aux déformations de certains feuilletages

L'espace vectoriel de cohomologie $H^1(\mathbb{Z}, C^\infty(M))$ d'une action du groupe discret $\mathbb{Z}$ sur une variété compacte M via un difféomorphisme γ joue un rôle fondamental en théorie des déformations : il est relié aux *déformations infinitésimales* de γ dans le groupe $\mathrm{Diff}(M)$ (des difféomorphismes de M) et à celles du feuilletage obtenu en suspendant γ. Nous allons voir comment appliquer nos calculs pour décrire de telles déformations infinitésimales dans un cas, à notre connaissance, encore inconnu : une translation de G compact non abélien.

4.1. Quelques définitions

• On rappelle qu'un *feuilletage* $\mathcal{F}$ de dimension m sur une variété N est la donnée d'un sous-fibré τ de rang m du fibré tangent TN *complètement intégrable*, c'est-à-dire que pour toutes sections $X, Y \in C^\infty(\tau)$ de τ (*i.e.* des champs de vecteurs sur M tangents à τ), le crochet $[X, Y]$ est encore une section de τ. Les sous-variétés connexes tangentes à τ sont appelées *feuilles* de $\mathcal{F}$.

• Soit N une variété compacte de dimension $m + n$. Pour tout $x \in N$, on note $G_x(N, n)$ la grassmanienne des plans de codimension n de T_xN. On obtient ainsi un fibré localement trivial $\mathcal{G}(N, n) \longrightarrow N$ de fibre type la grassmanienne $G(m + n, n)$. Un champ C^∞ de m-plans sur N n'est alors rien d'autre qu'une section de $\mathcal{G}(N, n) \longrightarrow M$. Soient τ un champ de m-plans et $(\tau_1, \cdots, \tau_m)$ une base de sections locales de τ. Si $X = \sum_{i=1}^m a_i\tau_i$ et $Y = \sum_{j=1}^m b_j\tau_j$ sont deux sections locales de τ, on a :

$$[X, Y] = \sum_{i,j=1}^m a_ib_j[\tau_i, \tau_j] + \sum_{i,j=1}^m \{a_i(\tau_i \cdot b_j)\tau_j - b_j(\tau_j \cdot a_i)\tau_i\}. \tag{V.14}$$

Dans le quotient $\mathcal{V} = TN/\tau$, la valeur de $[X, Y]$ en un point $x \in N$ ne dépend que de celles de X et Y et non de celles de leurs dérivées respectives. Ce qui permet de définir une 2-forme $Q_\tau : \tau \times \tau \longrightarrow \mathcal{V}$ dont la valeur en X_x et Y_x est la classe dans le quotient $\mathcal{V}_x = T_xN/\tau_x$ du vecteur $[X, Y]_x$. Par le théorème de Frobenius, le champ de m-plans τ est intégrable si, et seulement si, la 2-forme Q_τ est identiquement nulle. Dans ce cas, τ définit un feuilletage $\mathcal{F}$ de codimension n sur N.

On munit l'espace $C^\infty(\mathcal{G}(N,n))$ des sections C^∞ de $\mathcal{G}(N,n)$ de la topologie C^∞ qui en fait une variété de Fréchet [Ham2]. L'ensemble $\mathfrak{F}(M,n)$ des feuilletages de codimension n ("zeros de Q") en est un fermé ; on le munit de la topologie induite.

• Une *déformation* de $\mathcal{F}$ paramétrée par un voisinage T de 0 dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^d$ est une application continue $t \in T \longrightarrow \mathcal{F}_t \in \mathfrak{F}(N,n)$ telle que $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}$. L'étude des déformations des feuilletages est un sujet très difficile en général. Nous nous restreindrons à celle des *déformations infinitésimales* ; celles-ci sont décrites exactement par les éléments de l'espace vectoriel de cohomologie feuilletée $H^1_{\mathcal{F}}(N,\mathcal{V})$ à valeurs dans le fibré normal $\mathcal{V}$ que nous allons définir tout de suite (le lecteur désireux d'en savoir plus peut consulter [Ham1] ou [EN]).

• Le fibré normal $\mathcal{V}$ est *feuilleté i.e.* il existe un recouvrement par des ouverts U_i trivialisant le feuilletage et tel que les fonctions de transition $g_{ij} : U_i \cap U_j \longrightarrow \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ qui le définissent soient constantes sur les feuilles. L'opérateur $d_{\mathcal{F}}$ s'étend donc en un opérateur $d_{\mathcal{F}} : \Omega^r_{\mathcal{F}}(N,\mathcal{V}) \longrightarrow \Omega^{r+1}_{\mathcal{F}}(N,\mathcal{V})$ sur les formes différentielles le long des feuilles mais cette fois-ci à valeurs dans le fibré $\mathcal{V}$. Ceci permet de définir la cohomologie feuilletée de $(N,\mathcal{F})$ à valeurs dans $\mathcal{V}$ et qu'on note $H^*_{\mathcal{F}}(N,\mathcal{V})$. L'espace $H^1_{\mathcal{F}}(N,\mathcal{V})$ contient exactement les *déformations infinitésimales* de $\mathcal{F}$; sa connaissance est capitale dans l'étude des déformations.

4.3. Cas d'une suspension

On se donne une variété compacte M et γ un difféomorphisme de M. On note (x,t) les coordonnées d'un point z de $\widetilde{N} = M \times \mathbb{R}$ et $\widetilde{X}$ le champ $\frac{\partial}{\partial t}$; $\widetilde{X}$ est invariant par le difféomorphisme :

$$(x,t) \in M \times \mathbb{R} \longmapsto (\gamma(x), t+1) \in M \times \mathbb{R}$$

et induit donc un champ de vecteurs X partout non nul sur la variété quotient :

$$N = M \times \mathbb{R}/(x,t) \simeq (\gamma(x), t+1).$$

La deuxième projection $\widetilde{\pi} : \widetilde{N} = M \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est équivariante par rapport aux actions du groupe $\mathbb{Z}$: $\tau_k : t \in \mathbb{R} \longmapsto t+k \in \mathbb{R}$ et $(\gamma^k, \tau_k) : (x,t) \in \widetilde{N} \longmapsto (\gamma^k(x), t+k) \in \widetilde{N}$; cela signifie que, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{N} & \xrightarrow{(\gamma^k,\tau_k)} & \widetilde{N} \\ \widetilde{\pi} \downarrow & & \downarrow \widetilde{\pi} \\ \mathbb{R} & \xrightarrow{\tau_k} & \mathbb{R} \end{array}$$

Donc $\widetilde{\pi}$ induit une submersion $\pi : N \longrightarrow \mathbb{S}^1$; c'est une fibration plate de monodromie γ. Notons $\mathcal{F}$ le flot (ou feuilletage de dimension 1) défini par X ; on dit que $(N,\mathcal{F})$ est la *suspension* de (M,γ). Le résultat suivant a été établi dans [DE] :

4.4. Théorème. *L'équation différentielle $X \cdot f = g$ a une solution dans $C^\infty(N)$ si, et seulement si, l'équation cohomologique discrète $K - K \circ \gamma = \Phi$ a une solution dans $C^\infty(M)$ pour la fonction $\Phi = \int_0^1 g(\cdot, t)dt$. Par conséquent les espaces vectoriels topologiques $H^1_{\mathcal{F}}(N)$ et $H^1(\mathbb{Z}, C^\infty(M))$ sont canoniquement isomorphes.*

Nous disposons maintenant de tous les ingrédients nécessaires qui nous permettent d'appliquer les résultats des sections précédentes aux déformations de certains feuilletages. Soient G un groupe de Lie connexe compact de dimension n d'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ et γ le difféomorphisme de G associé à une translation.

4.5. Théorème. *Soit $\mathcal{F}$ le feuilletage obtenu sur $N = G \times \mathbb{R}/(x,t) \simeq (\gamma x, t+1)$ par suspension de γ. Alors si γ est diophantien, l'espace vectoriel topologique $H^1_{\mathcal{F}}(N, \mathcal{V})$ est isomorphe à l'espace de Fréchet $C^\infty(B) \otimes \mathcal{G}$ où B est l'espace homogène $B = G/K$.*

Démonstration. Elle consiste simplement à se mettre dans les hypothèses de certains énoncés des sections 1, 2 et 3.

Soient $(X_1, \cdots, X_n)$ une base de $\mathcal{G}$ où les $X_1, \cdots, X_n$ sont des champs invariants par translations à gauche sur G. Les éléments ω et α respectivement de $\Omega^0_{\mathcal{F}}(N, \mathcal{V})$ et $\Omega^1_{\mathcal{F}}(N, \mathcal{V})$ sont de la forme $\omega = \sum_{i=1}^n f_i \otimes X_i$ et $\alpha = \sum_{j=1}^n g_j \otimes \chi \otimes X_j$ où les f_i et g_j sont des fonctions C^∞ sur N. L'opérateur $d_{\mathcal{F}} : \Omega^0_{\mathcal{F}}(N, \mathcal{V}) \longrightarrow \Omega^1_{\mathcal{F}}(N, \mathcal{V})$ s'écrit $d_{\mathcal{F}}\omega = \displaystyle\sum_{i=1}^n (X \cdot f_i) \otimes \chi \otimes X_i$. Résoudre l'équation $d_{\mathcal{F}}\omega = \alpha$ revient donc à résoudre le système :

$$X \cdot f_i = g_i \qquad \text{pour} \qquad i = 1, \cdots, n.$$

De cela on déduit aisément que $H^1_{\mathcal{F}}(N, \mathcal{V}) = H^1_{\mathcal{F}}(N) \otimes \mathcal{G}$. Le reste de la démonstration découle des théorèmes 3.4 et 4.4. $\diamondsuit$

Le théorème 5.5 montre que si G est non abélien, la dimension de la variété B est strictement positive ; donc l'espace vectoriel $H^1_{\mathcal{F}}(N, \mathcal{V})$ est de dimension infinie. Cela laisse supposer que les déformations du feuilletage $\mathcal{F}$ sont abondantes !

RÉFÉRENCES

[Ara] S. K. ARANSON & G. R. BELITSKY, E.V. ZHUZHOMA.*Introduction to the qualitative theory of dynamical systems on surfaces.*Trans. Math. Monographs, AMS 153, (1996).

[Arn] V. I. ARNOLD. *Small denominators and problems of stability of motion in classical and celestial mechanics.* Russian Math. Surveys 18 (1963), 86-194.

[Arx1] P. ARNOUX. *Un exemple de semi-conjugaison entre un échange d'intervalles et une translation sur le tore.* Bull SMF 116 (1988), 489-500.

[Arx2] P. ARNOUX. *Echanges d'intervalles et flots sur les surfaces ı.* Monographie, Enseignement Math. 29 (1981), 5-38.

[AF] A. AVILA & G. FORNI. *Weak mixing for interval exchange transformations and translation flow.*, Ann. of Math. (2) 165 (2007), 637-664.

[Bos] M. D. BOSHERNITZAN. *Rank two interval exchange transformation.* Ergodic Theory and Dynam. Sys. 8 (1988), 379-394.

[Cal] D. CALEGARI. *Denominator bounds in Thompson-like groups and flows.* Geometry, Dynamics 1. 2 (2007), 101-109.

[CFP] J. I. CANNON, W. J. FLOYD & W. PARRY. *Introductory notes on Richard Thompson's groups.* Enseign.Math.(2).42(1996), no 3-4, 215-256.

[DE] A. DEHGHAN-NEZHAD & A. EL KACIMI ALAOUI. *Équations cohomologiques de flots riemanniens et de difféomorphismes d'Anosov.* Journal of the Mathematical Society of Japan, Vol. 59 N 4 (2007), 1105-1134.

[Eℓk] A. EL KACIMI ALAOUI. *Sur la cohomologie feuilletée.* Compositio Mathematica 49, (1983), 195-215.

[EH] A. EL KACIMI ALAOUI & H. HMILI. *Cohomological equations and invariant distributions on a compact Lie group.* Hokkaido Mathematical Journal. À paraître courant 2012 ou 2013.

[EMM] A. EL KACIMI ALAOUI, S. MATSUMOTO & T. MOUSSA. *Currents invariant by a Kleinian group.* Hokkaido Mathematical Journal, Vol. 26 (1997), p. 177-202.

[EN] A. EL KACIMI ALAOUI & M. NICOLAU. *A class of C^∞-stable foliations.* Ergod Th and Dynam. Sys. 13 (1993), 697-704.

[FZ] S. FERENCZI & L. ZAMBONI. *Examples of* 4 *interval exchange transformations.* Prépublication (2006).

[GS] É. GHYS & V. SERGIESCU. *Sur un groupe remarquable de difféomorphismes du cercle.* Comment. Math. Helv. 62.(1987).185-239.

[God] C. GODBILLON. *Dynamical systems on surfaces.* Springer-Verlag, (1983).

[Ham1] R. S. HAMILTON. *Deformation Theory of foliations.* Preprint Cornell University, New-York, (1978).

[Ham2] R. S. HAMILTON. *The inverse function theorem of Nash and Moser.* Bulletin of the AMS Vol. 7 Number 1, (1982), 65-222.

[KN] Harvey B. Keynes & D.Newton. *A minimal, non-uniquely ergodic interval exchange transformation.* Math. Z. 148 (1976), 101-105.

[Hmi] H. Hmili. *Non topologically weakly mixing interval exchanges.* Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series A, Vol. 27, Issue 3 (2010), 1079 - 1091.

[KS] A. Katok & A. Stepin. *Approximations in ergodic theory.* Russian math. Surveys 22,5 (1967) 76-102.

[Kea1] M. Keane. *Interval exchange transformations.* Math. Z. 141 (1975), 25-31.

[Kea2] M. Keane. *Non-ergodic Interval exchange transformations.* Isr. Jour. Math. 2 (1977), 188-196.

[Kle] V. Kleptsyn. *Sur une interprétation algorithmique du groupe de Thompson.* En préparation.

[Lev] G. Levitt. *Feuilletage des surfaces.* Thèse d'état. Université Paris 7. Juin 1983.

[Lio] I. Liousse. *Rotation numbers in Thompson-Stein groups and applications.* Geometria Dedicata. 131.(2008), 49-71.

[Mas] H. Masur. *Interval exchange transformation and measured foliations.* Annals of Math. (2), 115(1)(1982), 169-200.

[MM] S. Matsumoto & Y. Mitsumatsu. *Leafwise cohomology and rigidity of certain Lie group actions.* Ergod.Theory & Dynam.Systems. (23), (2003), 1839-1866.

[MS] Matsumoto, S. & Shishikura, M. *Minimal sets of certain annular homeomorphisms.* Hiroshima Mathematical Journal Vol. 32, (2002), 207-215.

[Nog] A. Nogueira, D. Rudolph. *Topological weak mixing of interval exchange maps.* Ergod Th and Dynam. Sys. 17 (1997), 1183-1209.

[Oso] V. I. Osoledec. *The spectrum of ergodic autompsorphism.* Dokl. Akad. Nauk. SSSR 168(1966), 1009-1011.

[Sch] W. M. Schmidt. *Diophantine approximation.* Lecture Notes in Math. 785, (1980).

[Scz] A. J. Schwartz. *A generalisation of the Poincaré-Bendixon theorem to closed two dimensional manifolds.* Amer.J.Math .85.(1963). 453-548.

[Sep] M. R. Sepanski. *Compact Lie Groups.* GTM 235, Springer-Verlag (2007). (1980).

[Ste] M. Stein. *Groups on piecewise linear homeomorphisms.* Trans. AMS 332.(1992),no 2, 477-514.

[Su] D. Sullivan. *Cycles for the dynamical study of foliated manifolds and complex manifolds* . Invent. Math. 36.(1978), 225-255.

[Vee1] W. Veech. *Gauss measures for transformations on the space of interval exchange maps.* Ann. of Math. (2) 115 (1982), no. 1, 201-242.

[Vee2] W. Veech. *The metric theory of interval exchange transformations. I. Generic spectral properties.* Amer. J. Math.

[Yoc] J. C. Yoccoz. *Petits diviseurs en dimension* 1. Astérisque 231, (1995). 106 (1984), no. 6, 1331–1359.

ABSTRACT

In this thesis, we study two subjects, which are priori different but are within the scope of dynamical systems: interval exchange, the resolution of cohomological equations and the explicit description of invariant distributions by a diffeomorphism on a compact Lie group.

1. We prove a criterion for the existence of continuous non constant eigenfunctions for interval exchange transformations which are non topologically weakly mixing. We first construct, for any $m > 3$, uniquely ergodic interval exchange transformations of $\mathbb{Q}$-rank 2 with irrational eigenvalues associated to continuous eigenfunctions which are not topologically weakly mixing; this answers a question of Ferenczi and Zamboni [5]. Moreover we construct, for any even integer $m \geq 4$, interval exchange transformations of $\mathbb{Q}$-rank 2 with both irrational eigenvalues (associated to continuous eigenfunctions) and non trivial rational eigenvalues (associated to piecewise continuous eigenfunctions); these examples can be chosen to be either uniquely ergodic or non minimal.

2. We prove that an affine interval exchange, whose slopes are integer powers of the same integer n, and whose cuts and their images are rational, has a very simple dynamic: all its orbits are proper and it has a periodic orbit or a periodic cycle.

3. A third section deals with two analytic questions on a connected compact Lie group G. i) Let $a \in G$ and denote by γ the diffeomorphism of G given by $\gamma(x) = ax$ (left translation by a). We give necessary and sufficient conditions for the existence of solutions of the cohomological equation $f - f \circ \gamma = g$ on the Fréchet space $C^\infty(G)$ of complex C^∞ functions on G. ii) When G is the torus $\mathbb{T}^n$, we compute explicitly the distributions on $\mathbb{T}^n$ invariant by an affine automorphism γ, that is, $\gamma(x) = Ax + a$ with $A \in \mathsf{GL}(n, \mathbb{Z})$ and $a \in \mathbb{T}^n$.

4. We apply the results of the preceding section to describe the infinitesimal deformations of a foliation obtained by suspension of a translation associated to an element on a compact Lie group.

Résumé

Dans cette thèse, on étudie deux thèmes, a priori différents mais qui rentrent dans le cadre des systèmes dynamiques : les *échanges d'intervalles*, la résolution d'*équations cohomologiques* et la description explicite des *distributions invariantes* par certains difféomorphismes d'un groupe de Lie compact.

1 - On établit un critère dexistence de fonctions propres continues non constantes pour les échanges dintervalles, cest-à-dire de non mélange faible topologique. On construit pour tout entier $m > 3$ des échanges de m intervalles de rang 2 uniquement ergodiques et non topologiquement faiblement mélangeants. Nous répondons aussi à une question de Ferenczi et Zamboni. On construit aussi pour tout entier pair $m \geq 4$ des échanges de m intervalles possédant des valeurs propres irrationnelles et des valeurs propres rationnelles (avec fonctions propres associées continues par morceaux) et qui sont soit uniquement ergodiques, soit non minimaux.

2 - On montre qu'un échange d'intervalles affine, dont les pentes sont des puissances d'un même entier n, et dont les coupures et leurs images sont des rationnels , a une dynamique très simple : toutes ses orbites sont propres et il possède une orbite périodique ou un cycle périodique.

3 - On traite deux questions d'analyse sur un groupe de Lie connexe compact G. i) Soient $a \in G$ et γ le difféomorphisme de G donné par $\gamma(x) = ax$ (translation à gauche par a). On donne les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'équation cohomologique $f - f \circ \gamma = g$ admette des solutions dans l'espace de Fréchet $C^\infty(G)$ des fonctions complexes C^∞ sur G. ii) Lorsque G est le tore $\mathbb{T}^n$, on détermine explicitement les distributions sur $\mathbb{T}^n$ invariantes par un automorphisme affine γ *i.e.* $\gamma(x) = Ax + a$ avec $A \in \mathsf{GL}(n, \mathbb{Z})$ et $a \in \mathbb{T}^n$.

4 - On donne des résultats obtenus dans 3) une application aux déformations infinitésimales d'un feuilletage obtenu par suspension d'une translation d'un groupe de Lie compact.

Discipline

Mathématiques

Mots-Clés

Échange d'intervalles, minimalité, fonction propre, valeurs propre, homéomorphisme, mesure invariante, cohomologie des groupes.

Adresses des Laboratoires

LAMAV
Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis
Le Mont Houy
59313 Valenciennes Cedex 9 – France

Département de Mathématiques
Faculté des Sciences de Bizerte
7021 Jarzouna
Bizerte – Tunisie