Aperçu de thématiques sélectionnées

Aziz El Kacimi

Je donne brièvement un aperçu de quelques thèmes sur lesquels j'ai travaillé depuis le début de ma carrière d'enseignant-chercheur. Une notice plus détaillée et plus complète, en traitant d'autres, est accessible via le lien : http://perso.numericable.fr/azizelkacimi/AzizTravaux.pdf

J'ai débuté par la *théorie des feuilletages*. Et même si j'ai dévié de temps en temps vers d'autres thèmes, j'y ai toujours gardé un pied. Les problèmes auxquels je m'intéressais sont connectés à des thèmes voisins tels que les *systèmes dynamiques* (actions de groupes, mesures et courants invariants *etc.*) ainsi que l'*analyse globale* (réelle ou complexe) sur les variétés feuilletées aussi bien du point de vue transverse que tangent. Plus tard, ma rencontre avec Rajagopalan Parthasarathy lors d'un séjour au Tata Institute en 1992 m'a amené à collaborer avec lui sur des sujets plus éloignés tels que le *coloriage des quasi-cristaux* ou encore la *dynamique symbolique* (diagrammes de Bratteli, K-groupe d'un système de substitutions *etc.*)

1. Analyse globale sur l'espace des feuilles. Un feuilletage $\mathcal{F}$ sur une variété M est la réalisation géométrique d'un système différentiel complètement intégrable. A un instant donné on passe d'une feuille à une autre par un changement de condition initiale. On peut donc interpréter l'espace des feuilles $B = M/\mathcal{F}$ comme un "espace de paramètres" des solutions de ce système. Même si B n'a en général aucune structure différentiable, on peut définir dessus beaucoup d'objets géométriques ; ils correspondent à leurs analogues sur M invariants le long des feuilles ; ce qui suggère de travailler plutôt sur M mais de façon "$\mathcal{F}$-équivariante". Depuis le début de la théorie des feuilletages une question se pose explicitement ou implicitement :

Dans quelle mesure l'espace B ressemble-t-il à une bonne variété ?

Divers travaux ont été entrepris dans cette direction. De mon côté, je me suis intéressé à de l'*analyse globale* sur B lorsque la variété M est compacte et le feuilletage $\mathcal{F}$ est riemannien (le fibré normal $TM/T\mathcal{F}$ possède une métrique riemannienne invariante par le pseudo-groupe d'holonomie). On dira qu'un fibré vectoriel complexe $E \longrightarrow M$ est un *$\mathcal{F}$-fibré hermitien* s'il possède une connexion ∇ plate sur $\mathcal{F}$ et une métrique hermitienne invariante le long des feuilles (en un sens évident). Une section α de E est dite *basique* si elle vérifie $\nabla_X \alpha = 0$ pour tout champ X tangent à $\mathcal{F}$. Les sections basiques forment un espace vectoriel noté $C^\infty(E/\mathcal{F})$. A l'aide de la métrique hermitienne sur E et d'une métrique riemannienne quasi-fibrée sur M (qui existe car $\mathcal{F}$ est riemannien), on munit $C^\infty(E/\mathcal{F})$ d'une structure préhilbertienne. On note $\widetilde{E}$ le faisceau des germes de sections basiques de E. Un *opérateur différentiel basique* d'un $\mathcal{F}$-fibré hermitien E vers un autre $\mathcal{F}$-fibré hermitien F est un morphisme de faisceaux $D : \widetilde{E} \longrightarrow \widetilde{F}$ qui, dans un système de coordonnées locales $(x, y) = (x_1, \cdots, x_p, y_1, \cdots, y_n)$ pour lesquelles le feuilletage $\mathcal{F}$ est défini par les équations $dy_1 = \cdots = dy_n = 0$, est un opérateur différentiel au sens usuel s'écrivant seulement en les coordonnées $(y_1, \cdots, y_n)$. On dira que D est *transversalement elliptique* si sa restriction à toute transversale est un opérateur elliptique. J'ai alors démontré dans [11] que :

Le noyau N de D et celui N^* de son adjoint D^* sont de dimension finie et on a une décomposition orthogonale $C^\infty(E/\mathcal{F}) = \ker(D) \oplus \mathrm{Im}(D^*)$.

Ce théorème, appliqué au complexe de de Rham basique ou à celui de Dolbeault basique (lorsque $\mathcal{F}$ a une structure kählérienne transverse) montre que, du point de vue cohomologique, l'espace B se comporte exactement comme une variété riemannienne ou une variété kählérienne. (En 2009, j'ai eu l'occasion de discuter là-dessus avec Claire Voisin qui est à l'heure actuelle parmi les plus grands spécialistes de la théorie de Hodge. Je lui ai communiqué le papier [11] ; elle m'a écrit ceci «*J'ignorais qu'on pouvait aller aussi loin dans l'étude topologique de l'espace des feuilles et cela m'intéresse beaucoup.* »)

Le résultat susmentionné montre que l'opérateur D est de Fredholm ; il admet donc un indice (dit *indice basique*) : $\mathrm{ind}(D/\mathcal{F}) = \dim(N) - \dim(N^*)$. J'avais posé la question du calcul explicite de cet entier en fonction d'invariants topologiques transverses associés au feuilletage. De façon plus précise :

Y a-t-il une version basique du théorème de l'indice d'Atiyah-Singer ?

Encourageant : la cohomologie basique est un *invariant topologique* (dans la catégorie des feuilletages riemanniens complets) [14] et donc aussi la caractéristique d'Euler-Poincaré basique qui est l'indice du complexe de de Rham basique. La réponse au problème, dans un cas très particulier de feuilletage riemannien, vient d'être donnée récemment par Alexander Gorokhovsky et John Lott [*The index of a transverse Dirac-type operator: the case of abelian Molino sheaf.* J. Reine Angew. Math. 678, (2013) 125-162]. Mais, dans toute sa généralité, il reste toujours ouvert.

2. <u>La théorie de la déformation en géométrie</u>. Une n-variété compacte M est obtenue en recollant un nombre fini de boules de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ à l'aide de difféomorphismes. Toute structure géométrique supplémentaire (complexe, feuilletée ou autre) sur ces boules "compatible avec ces recollements" donne une structure géométrique globale $\mathcal{S}$ du même type sur M. Si on suppose que ces recollements dépendent continûment d'un paramètre $t \in]-T,T[$, pour des petites valeurs de t, la structure différentiable de M reste la même ; par contre la nouvelle structure géométrique $\mathcal{S}_t$ peut être différente de $\mathcal{S}$ pour t aussi proche de 0 que l'on veut ! On obtient ainsi une famille continue de structures géométriques $(\mathcal{S}_t)$ (paramétrée par $t \in]-T,T[$) sur M qu'on appelle *déformation* de $\mathcal{S} = \mathcal{S}_0$. L'objet de la théorie des déformations est de "mesurer" cette variation en fonction du paramètre t au voisinage de 0. Cela a été fait dans [9] pour les feuilletages transversalement holomorphes à type différentiable fixé, dans [12] et [19] pour les feuilletages transversalement kählériens et dans [23] pour les feuilletages transversalement homogènes. Des résultats de stabilité ont été obtenus dans [15]. Ce sont les premiers exemples de feuilletages C^∞-stables à feuilles denses qui ont été construits en dimension et codimension quelconques ; l'exemple de Etienne Ghys et Vlad Sergiescu [*Stabilité et conjugaison différentiable pour certains feuilletages.* Topology 19 (1980) 179-197] qui a surpris les spécialistes à l'époque, est de codimension 1 sur une 3-variété.

3. <u>Actions de groupes et objets invariants</u>. On se donne une variété M et un groupe discret Γ agissant dessus par difféomorphismes. *Sous quelles conditions l'action laisse-t-elle des objets géométriques invariants* ? L'étude des mesures invriantes est l'un des objets principaux de la théorie ergodique. Mais de telles mesures n'existent malheureusement pas souvent. Alors, à défaut, y a-t-il des courants invariants ? Dans cette direction, nous avons obtenu des résultats dans [13], [18] et [22] ; décrivons le principal obtenu dans [18]. On note $\mathbb{S}^n$ la sphère unité de l'espace euclidien $\mathbb{R}^{n+1}$ munie de sa métrique standard et $\mathbb{B}^{n+1}$ sa boule unité munie de la métrique hyperbolique. On note $\mathrm{Conf}_+(\mathbb{S}^n)$ le groupe des transformations conformes directes de $\mathbb{S}^n$; il s'identifie au groupe $\mathrm{Isom}_+(\mathbb{B}^{n+1})$ des isométries directes de la boule $\mathbb{B}^{n+1}$ (dont $\mathbb{S}^n$ est le bord). Un *groupe kleinéen* est un sous-groupe discret Γ de $\mathrm{Conf}_+(\mathbb{S}^n) = \mathrm{Isom}_+(\mathbb{B}^{n+1})$. Soient Γ un tel groupe, Λ son *ensemble limite* (l'intersection de l'adhérence de l'orbite d'un point quelconque $x \in \mathbb{B}^{n+1}$ et du bord $\mathbb{S}^n$; c'est indépendant de x), $\Omega = \mathbb{S}^n \setminus \Lambda$ son *domaine de discontinuité* et δ son *exposant critique* (qui est $\inf\{s \in \mathbb{R}_+^*\}$ tel que la série de Poincaré $\sum_{\gamma\in\Gamma} |\gamma'(x)|^s$ converge ; c'est indépendant de x). Le fermé Λ et l'ouvert Ω sont Γ-invariants ; en plus l'action de Γ sur Ω est propre. Pour tout $p \in \{0, 1, \cdots, n\}$, notons $\mathcal{C}^p_\Gamma(\mathbb{S}^n)$ l'espace les courants de degré p, Γ-invariants sur $\mathbb{S}^n$, $\mathcal{C}^p_\Gamma(\Omega)$ celui des courants Γ-invariants sur Ω, $\mathcal{C}^p_\Gamma(\mathbb{S}^n, \Lambda)$ celui des courants Γ-invariants sur $\mathbb{S}^n$ ayant leur support dans Λ et $L_p : \mathcal{C}^p_\Gamma(\mathbb{S}^n) \longrightarrow \mathcal{C}^p_\Gamma(\Omega)$ la localisation (l'application de restriction). On a le théorème qui suit :

Si Ω/Γ est compact et si $p > \delta$ alors l'application L_p est surjective. On a donc une suite exacte d'espaces vectoriels topologiques : $0 \longrightarrow \mathcal{C}^p_\Gamma(\mathbb{S}^n, \Lambda) \hookrightarrow \mathcal{C}^p_\Gamma(\mathbb{S}^n) \xrightarrow{L_p} \mathcal{C}^p_\Gamma(\Omega) \longrightarrow 0.$

Dans certaines situations, L_p a une section ; on peut donc décomposer un courant Γ-invariant sur $\mathbb{S}^n$ en la somme d'un courant Γ-invariant sur $\mathbb{S}^n$ à support dans Λ et d'un courant sur le quotient Ω/Γ. La suite exacte susmentionnée a permis par exemple à mon étudiant Fréderic Delacroix de donner une réponse positive à la conjecture de Borel-Harder pour un groupe kleinéen élémentaire (qui est toujours de covolume infini).

4. Le problème du $\overline{\partial}$ le long des feuilles. Un feuilletage $\mathcal{F}$ sur une variété M est dit *complexe* si ses feuilles possèdent une structure complexe variant (localement) de façon différentiable par rapport au paramètre transverse. Pour un tel feuilletage on peut définir un complexe de Dolbeault le long des feuilles $(A^{0,*}(M,\mathcal{F}), \overline{\partial}_{\mathcal{F}})$ et donc une cohomologie de Dolbeault feuilletée $H^{0,*}(M,\mathcal{F})$ qui apparaît comme l'obstruction à la résolution du *problème du* $\overline{\partial}$ *le long des feuilles* $\overline{\partial}_{\mathcal{F}}\alpha = \beta$. C'est un problème relativement difficile à résoudre du fait que l'opérateur $\overline{\partial}_{\mathcal{F}}$ n'est pas elliptique (il l'est seulement le long des feuilles) et ceci ne garantit pas la régularité transverse des solutions (quand elles existent comme courants ou sur chaque feuille individuellement). L'examen a priori d'exemples concrets paraît capital pour la compréhension et la mise en forme des méthodes d'attaque. C'est ce que nous avons fait dans [33] pour le feuilletage de Reeb de dimension complexe 2 sur la variété de Hopf $\mathbb{S}^4 \times \mathbb{S}^1$ et sur le tore hyperbolique $\mathbb{T}_A^{n+1}$ pour le feuilletage complexe de dimension 1 obtenu par une action localement libre du groupe affine GA de la droite réelle. Dans [35] j'ai résolu le problème sur une fibration en surfaces de Riemann non compactes avec groupe fondamental trivial ou $\mathbb{Z}$. Ceci a permis de donner des versions paramétrées du théorème de Guichard et du théorème de Mittag-Leffler. Sous d'autres hypothèses mais sans aucune restriction sur la topologie des feuilles (*i.e.* sur le groupe fondamental), j'ai aussi donné dans [38] une version paramétrée du théorème de Mittag-Leffler.

5. Coloriage et dynamique symbolique. Comme je l'avais déjà signalé, ce sont des thèmes sur lesquels j'ai collaboré avec Rajagopalan Parthasarathy (Tata Institute, Bombay). Cela a donné lieu à quatre publications [21], [25], [32] et [34]. Expliquer (même de façon très superficielle) leur contenu demande l'introduction de pas mal d'ingrédients techniques ; je me contente donc de la première.

Un pavage $\mathcal{P}$ de l'espace euclidien $\mathbb{E}^n$ est dit *répétitif* s'il peut être construit à partir d'un nombre fini de pavés et possède la propriété d'*isomorphie locale* : n'importe quel "morceau" de $\mathbb{E}^n$ dans une région bornée se répète dans n'importe quelle autre région de taille suffisamment grande. Le *pavage de Penrose-Robinson* du plan bâti à l'aide de deux triangles en est l'illustration parfaite. Un *coloriage* de $\mathcal{P}$ est une application surjective $\phi : \mathcal{P} \longrightarrow M$ où M est un ensemble fini (ensemble de couleurs). Supposons qu'un groupe fini G agit sur M à l'aide d'une application $\sigma : G \times M \longrightarrow M$. On dira que le coloriage $\phi : \mathcal{P} \longrightarrow M$ admet une *symétrie locale* (ou simplement a une (G,σ,M)-*symétrie*) si, pour tout $g \in G$ et tout morceau Σ du pavage $\mathcal{P}$ dans n'importe quelle région bornée, il existe $R > 0$ tel que toute boule de rayon R contient un morceau Σ' isométrique à Σ mais avec des couleurs obtenues à partir de celles des pavés de Σ permutées par g. Notre résultat fondamental est alors le suivant :

Soit $\mathcal{P}$ un pavage répétitif et hiérarchique. Alors pour tout triplet (G,σ,M) il existe un coloriage $\phi : \mathcal{P} \longrightarrow M$ ayant une (G,σ,M)-symétrie.

Liste des publications

[1] *Sur la cohomologie feuilletée.* Compositio Mathematica, 49 (1983), 195-215.

[2] *Cohomologie bigraduée de certains feuilletages* (avec A. Tihami). Bulletin de la Soc. Math. de Belgique, Fasc. 2, Vol. 38 (1986), 144-157.

[3] *La cohomologie basique d'un feuilletage riemannien est de dimension finie* (en collaboration avec G. Hector et V. Sergiescu). Math. Z., 188 (1985), 593-599.

[4] *Décomposition de Hodge sur l'espace des feuilles d'un feuilletage riemannien* (avec G. Hector). C.R. Acad. Sc. Paris, t. 298, Série I, $n°13$ (1984).

[5] *Décomposition de Hodge basique pour un feuilletage riemannien* (avec G. Hector). Ann. Inst. Fourier, Grenoble 36, 3 (1986), 207-227.

[6] *Equation de la chaleur sur les espaces singuliers.* C.R. Acad. Sc. Paris, t. 303, Série I, $n°$ 6, (1986).

[7] *Dualité pour les feuilletages transversalement holomorphes.* Manuscripta Math., Volume 58, (1987), 417-443 .

[8] *Stabilité des V-variétés kählériennes.* Lecture Notes In Math. $n°1345$ (1988), 111-123.

[9] *Déformations des feuilletages transversalement holomorphes à type différentiable fixé* (avec M. Nicolau) Publicacions Matemàtiques, Vol. 32 (1989), 485-500.

[10] *Examples of foliations and problems in transverse complex analysis.* Workshop on Functional Analytic Methods in Complex Analysis. World Sc. Pub. Com. in Singapore (1990), 341-364.

[11] *Opérateurs transversalement elliptiques sur les feuilletages riemanniens et applications.* Compositio Mathematica, 73, (1990), 57-106.

[12] *Structures géométriques invariantes et feuilletages de Lie* (avec M. Nicolau). Indagationes Math., N.S., 1 (3),(1990), 323-334.

[13] *Invariants de certaines actions de Lie. Instabilité du caractère Fredholm.* Manuscripta Math., 74, (1992), 143-160.

[14] *On the topological invariance of the basic cohomology* (avec M. Nicolau). Mathematische Annalen, 295, (1993), 627-634.

[15] *A class of C^∞-stable foliations* (avec M. Nicolau). Ergod. Th. & Dynam. Sys., 13 (1993), 697-704.

[16] *Un survol sur la théorie de Hodge-de Rham des variétés lisses et singulières.* Proyecciones, 12 N^o 2 (1993), 63-118.

[17] *Applications harmoniques feuilletées* (en collaboration avec E. Gallego). Illinois Journal of Math., Vol. 40, number 1 (1996), 115-122.

[18] *Currents invariant by a Kleinian group* (en collaboration avec S. Matsumoto et T. Moussa). Hokkaido Math. Journal Vol. 26, (1997), 177-202.

[19] *Stabilité du caractère kählérien transverse* (en collaboration avec B. Gmira). Israël J. of Math., 101 (1997), 323-347.

[20] *La cohomologie comme exemple d'invariant topologique.* Quelques aspects des mathématiques actuelles, Ellipses, (1999), 185-217.

[21] *Coloring quasicrystals with prescribed symmetries and frequencies* (avec R. Parthasarathy). In Discrete and Computational Geometry 22, (1999) 459-475.

[22] *Fonctionnelles invariantes et courants basiques* (avec A. Abouqateb). Studia Mathematica 143 (3) (2000), 199-219.

[23] *On deformations of transversely homogeneous foliations* (en collaboration avec G. Guasp et M. Nicolau). Topology. Vol. 40, (2001), 1363-1393.

[24] *Foliations* (avec R. Barre). Handbook of Differential Geometry Vol. II, Elsevier(2006), 33-77 edited by F.J.E. Dillen & L.C.A. Verstraelen.

[25] *Trace Splittings of C^*-algebras of tilings via colorings* (avec R. Parthasarathy). Proc. Amer. Math. Soc. 131 (2003), no. 4, 1191–1204.

[26] *de Rham-Hodge classique.* Colloque 2001, Société Mathématique de Tunisie, 113-142.

[27] *Towards a Basic Index Theory.* Proceedings of the Summer School and Workshop Dirac Operator: Yesterday and Today, CAMS-AUB, Beirut 2001, (2005), 251-261.

[28] *Sur le problème additif de Cousin basique* (en collaboration avec T. Sohou). Proyecciones Vol. 22, 3 (2003), 243-271.

[29] *Remarques sur certains groupes d'homéomorphismes d'espaces métriques* (avec H. Hattab et E. Salhi). JP Journal of Geometry & Topology Vol. 4 No. 3 (2004), 225-242.

[30] *Examples of transverse structures of foliations* in Differential Geometry and Topology, Discrete and Computational Geometry edited by M. Boucetta & J.-M. Morvan, NATO sciences Series III: Computer and Systems sciences Vol. 197 (2005), 109-132.

[31] *Équations cohomologiques de flots riemanniens et de difféomorphismes d'Anosov* (avec A. Dehghan-Nezhad). Journal of the Mathematical Society of Japan, Vol. 59 N 4 (2007), 1105-1134.

[32] *Skew-product for group-valued edge labellings of Bratteli diagrams* (avec R. Parthasarathy). Publicacions Matemàtiques 53 (2009), 329-354.

[33] *Cohomologie de Dolbeault le long des feuilles de certains feuilletages complexes* (avec J. Slimène). Annales de l'Institut Fourier, Grenoble Tome 60 n^{o}2, (2010), 727-757.

[34] *The K-group of substitutional systems* (avec R. Parthasarathy). Publicacions Matemàtiques 54 (2010) 3-23.

[35] *The $\overline{\partial}$ along the leaves and Guichard's Theorem for a simple complex foliation.* Math. Annalen 347, (2010), 885-897.

[36] *On some holomorphic cohomological equations.* Results in Mathematics. Volume 63, Issue 1 (2013), 329-334

[37] *Cohomological equations and invariant distributions on a compact Lie group* (avec H. Hmili). Hokkaido Mathematical Journal. Vol. 43 (2014), 1-23.

[38] *Leafwise meromorphic functions with prescribed poles.* Bulletin of the Brazilian Math. Society, New Series, 48(2), (2017), 261-282.
En ligne : http://rdcu.be/mMU1
Rapport du référé : http://www.perso.numericable.fr/azizelkacimi/Report-El-Kacimi-BSBM.pdf

[39] *Area and perimeter foliations on spaces of polygons* (avec A. Zeggar). Grad. J. Math. 4, (2019), no. 1, 18–29.

[40] *Cohomologie feuilletée du flot affine de Reeb sur $\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^1$.* Grad. J. Math. 4, (2019), no. 2, 85–95.

Prépublications

[41] *Cohomologie de Dolbeault feuilletée du feuilletage complexe affine de Reeb* (en collaboration avec R. Ben Charrada). arXiv:1909.11599v1 [math.CV] 25 Sep 2019.

[42] *Carré encadrant un quadrilatère.* Prépublication UVHC (janvier 2014). Thème à développer (peut-être vers une approche de la *Conjecture de Toeplitz*).

[43] *Cohomologie des groupes discrets à valeurs dans un Fréchet.* Prépublication LMI, UPHF (Octobre 2020).

[44] *Foliated cohomology and infinitesimal deformations of developable foliations.* Prépublication LMI, UPHF, (Octobre 2020).

Autres publications

[45] *Cohomologie feuilletée. Exemples de calcul.* Thèse de Doctorat de 3ème Cycle soutenue le 26 juin 1980 à Lille I.

[46] *Aspects analytiques et cohomologiques des variétés feuilletées.* Thèse de Doctorat d'Etat soutenue le 9 décembre 1986 à Lille I.

[47] *Déformations des feuilletages transversalement homogènes* (avec M. Nicolau). Publication $n°$47 du Centre de Recerca Mathematica, Barcelone, (1987).

[48] *G-feuilletages de type fini* (avec M. Nicolau). Pub. IRMA Vol. 9 $n°$X (1987), Lille I.