LES TRIANGLES COMPAGNONS

Aziz El Kacimi Alaoui
Professeur émérite
Université Polytechnique Hauts-de-France

Exposé au Café Mathématique
Dmaths-Céramaths
le 15 mai 2025

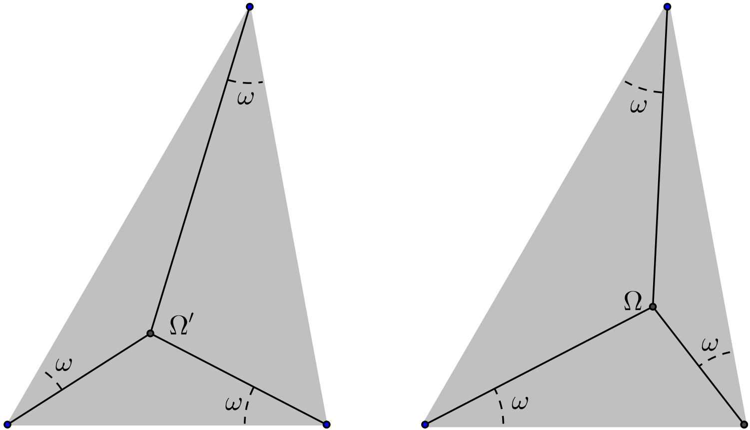
1. Le triangle

Le triangle est la plus élémentaire des figures géométriques non triviales du plan. Elle est aussi la plus riche : pléthore de questions ont été posées et de résultats obtenus dessus. C'est ce qui a fait dire à Crelle en 1816 (suite à la découverte du point de Brocard)

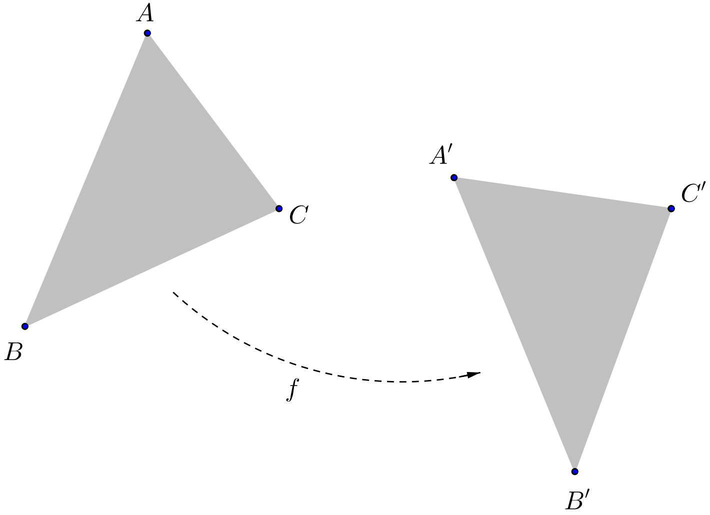
« Il est véritablement fascinant qu'une figure aussi simple que le triangle possède des propriétés aussi inépuisables ».

Une figure simple, oui ! Fondamentale ? Oui !

Angle de Brocard ω *et points de Brocard* Ω *et* Ω'



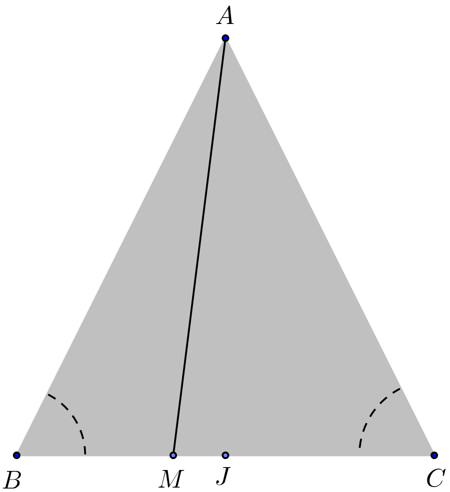
On dira que deux triangles ABC et $A'B'C'$ sont *égaux* s'il existe une isométrie f de $\mathbb{E}$ telle que : $f(A) = A'$, $f(B) = B'$ et $f(C) = C'$. Si une telle isométrie existe, elle est unique.



Y a-t-il des critères pratiques qui permettent de décider de l'égalité de deux triangles ABC et $A'B'C'$ sans avoir à chercher l'isométrie qui envoie l'un sur l'autre ?

Oui ! ça existe : ce sont les trois cas d'égalité des triangles !

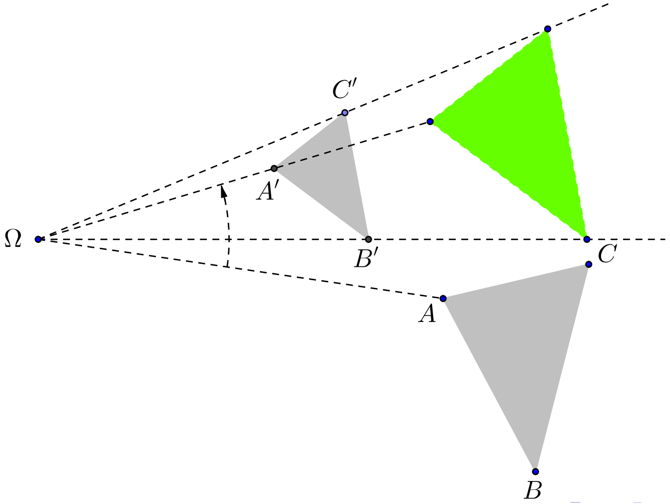
1. ***Premier cas*** **: Les trois côtés sont égaux : $AB = A'B'$, $BC = B'C'$ et $CA = C'A'$.**
2. ***Deuxième cas*** **: Un angle égal compris entre deux côtés égaux.**
3. ***Troisième cas*** **: Un côté égal compris entre deux angles égaux.**



Les deux triangles ABM et ACM ont deux côtés égaux $AB = AC$ (le triangle ABC étant isocèle) et AM est commun et un angle égal $\widehat{ABM} = \widehat{ACM}$ mais ne sont pas égaux !

1. **On appelle *similitude* de rapport $\lambda > 0$ toute application $f : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}$ telle que, pour tous points M et N de $\mathbb{E}$, on a $M'N' = \lambda MN$ où $M' = f(M)$ et $N' = f(N)$.**
2. **Une isométrie est une similitude de rapport $\lambda = 1$.**
3. **On démontre que toute similitude f de rapport $\lambda \neq 1$ admet un point fixe et un seul Ω appelé *centre* de f.**
4. **La composée d'une translation, d'une homothétie, d'une rotation... est une similitude. Inversement, toute similitude est la composée d'une homothétie, d'une rotation et d'une translation (l'une de ces transformations peut bien entendu être l'identité).**

On dira que deux triangles ABC et $A'B'C'$ sont *semblables* s'il existe une similitude f de $\mathbb{E}$ qui envoie ABC sur $A'B'C'$. Si une telle similitude existe, elle est unique.



Y a-t-il des critères pratiques qui permettent de dire que deux triangles ABC et $A'B'C'$ sont semblables sans avoir à chercher la similitude qui envoie l'un sur l'autre ?

Oui ! ça existe : ce sont les trois cas de similitude des triangles !

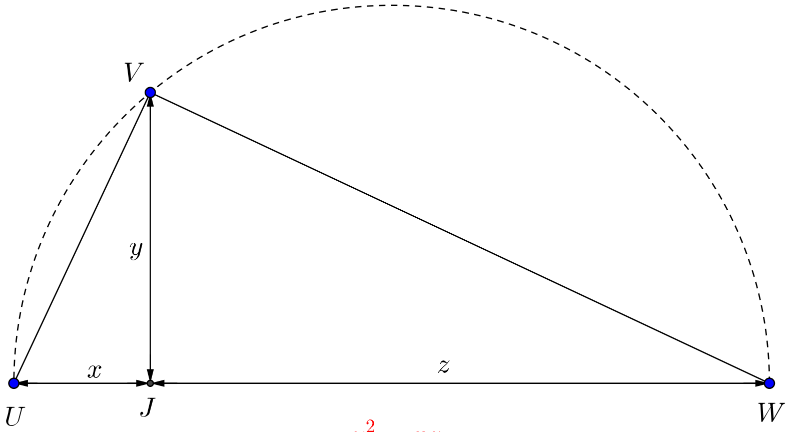
1. *Premier cas* : **Les trois côtés sont proportionnels :**

$$\frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA} = \frac{A'B'}{AB}.$$

2. *Deuxième cas* : **Un angle égal compris entre deux côtés proportionnels.**

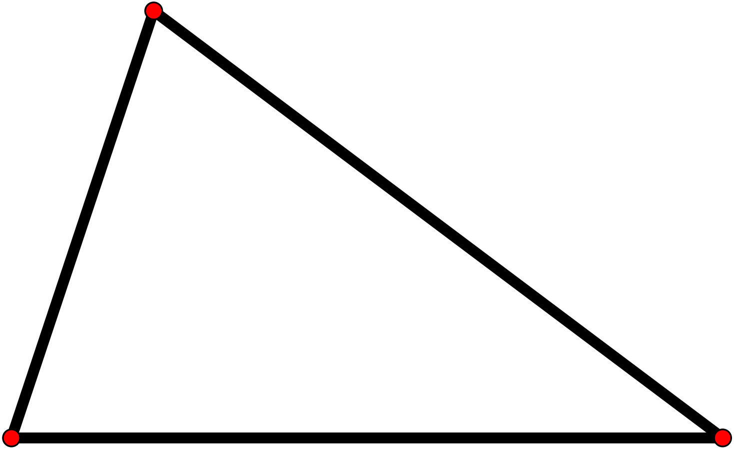
3. *Troisième cas* : **Deux angles égaux (et donc les trois angles égaux).**

Une propriété de la hauteur d'un triangle rectangle.

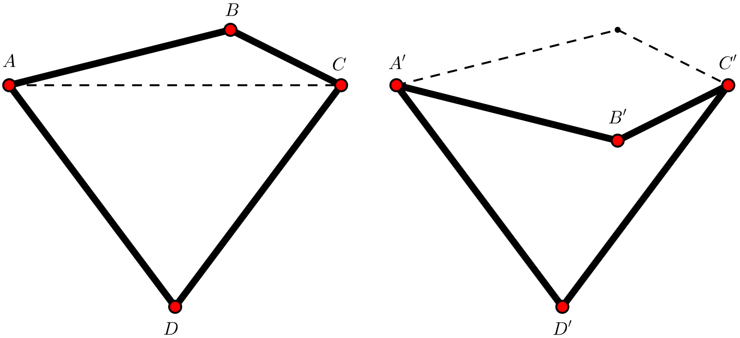


$$y^2 = xz$$

Une propriété importante du triangle : il est *rigide* ! Cela signifie que les mesures des côtés déterminent le triangle à déplacement près.



Contrairement au quadrilatère qu'on peut *déformer* !

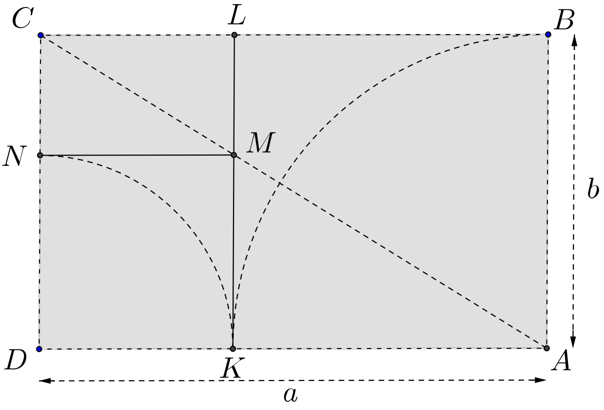


On se donne un quadrilatère $ABCD$. On symétrise le point B par rapport à la diagonale AC. On obtient alors un autre quadrilatère $A'B'C'D'$ qui a les mêmes mesures des côtés que $ABCD$ mais qui ne lui est pas égal. En fait, on peut déformer le quadrilatère $ABCD$ d'une infinité de façons. On dit qu'il est *articulé*.

CRIC

2. Le nombre d'or

Soit $\mathcal{R} = ABCD$ un rectangle de largeur $b > 0$ et de longueur $a > b$. On suppose en plus $b > a - b$. On le découpe en un carré $ABLK$ de côté b et un rectangle $CDKL$ de longueur b et de largeur $a - b$ (*cf.* dessin ci-dessous).



On dit que $\mathcal{R}$ est un *rectangle d'or* s'il est semblable au rectangle $CDKL$ (et donc aussi à $MLCN$ si on répète l'opération...). Cela signifie que les côtés des deux rectangles $\mathcal{R}$ et $CDKL$ sont proportionnels, c'est-à-dire :

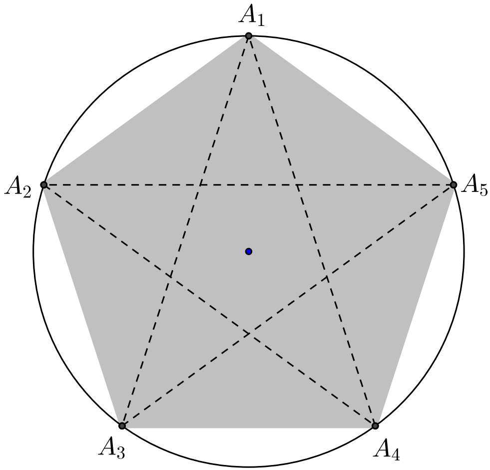
$$\frac{a}{b} = \frac{b}{a-b}$$

Ce qui donne l'égalité $a^2 = ab + b^2$. On posant $x = \frac{a}{b}$ on arrive à l'équation du second degré $x^2 = x + 1$ dont la solution positive est :

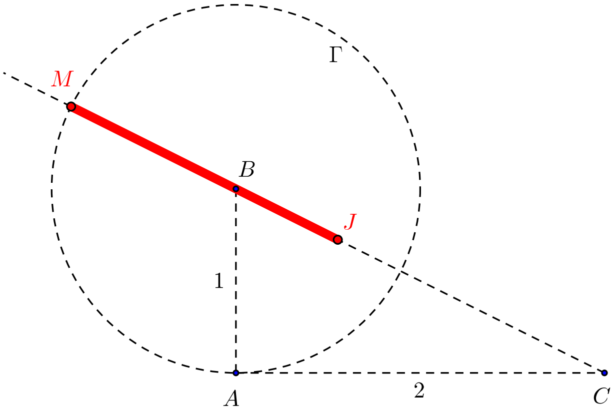
$$x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

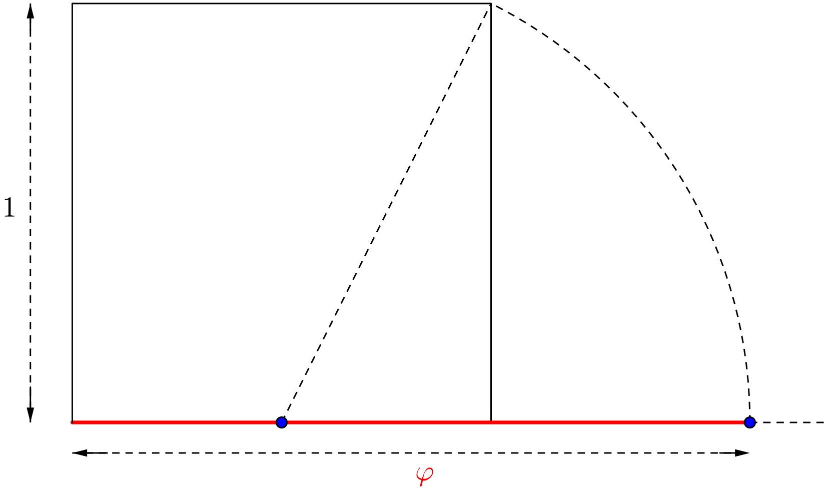
Ce nombre est habituellement noté φ et appelé *nombre d'or*. Sa valeur approchée à $1/1000$ près est $\varphi \simeq 1,618$.

Si la mesure du côté du pentagone régulier $A_1A_2A_3A_4A_5$ (convexe) ci-dessous est $A_1A_2 = 1$, celle du pentagone régulier croisé $A_1A_3A_5A_2A_4$ est $A_1A_3 = \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.



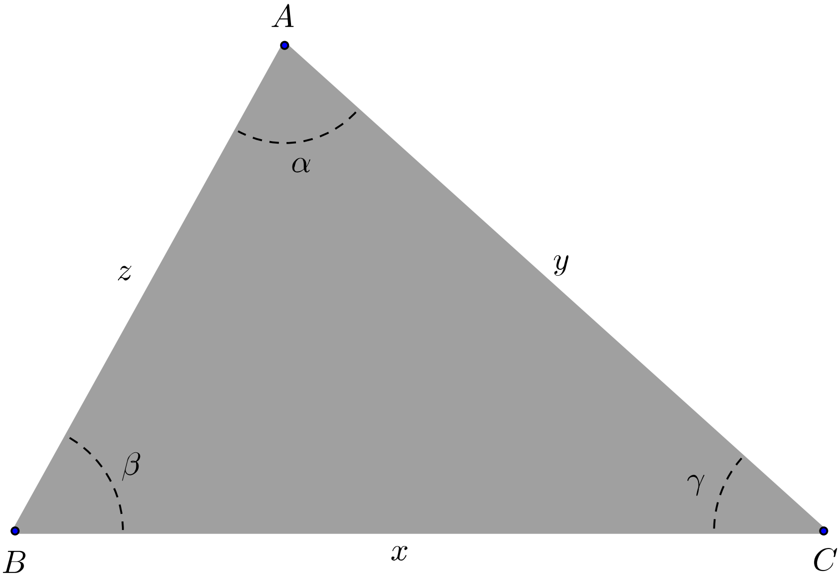
Le triangle ABC ci-dessous est rectangle en A avec $AB = 1$ et $AC = 2$. Par Pythagore $BC = \sqrt{5}$; par suite $MC = \sqrt{5} + 1$ (Γ étant le cercle de centre B et de rayon 1). Notons J le milieu de MC. Alors $MJ = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi$.





Une autre façon de construire le Nombre d'Or

3. Les triangles dorés



On voit sur la figure ci-dessus qu'à tout triangle non dégénéré sont associés 6 nombres : les mesures des côtés $x, y, z \in \mathbb{R}_+^*$ et les mesures des angles $\alpha, \beta, \gamma \in]0, \pi[$.

Question : *Deux triangles non dégénérés ayant 5 de ces 6 nombres égaux sont-ils égaux ?*

1. **Si parmi ces nombres égaux il y a les trois côtés alors la réponse est immédiate :** *Oui !*
2. **La question n'a donc réellement de l'intérêt que s'il n'y a que deux côtés égaux.**
3. **Donc les 5 nombres en question sont : trois angles égaux et deux côtés égaux.**
4. **Par suite, la vraie question est :**

On se donne deux triangles (non dégénérés) semblables ABC et $A'B'C'$ ayant deux côtés égaux. Ces deux triangles sont-ils nécessairement égaux ?

La réponse est non comme le montre l'exemple des deux triangles $\tau = ABC$ et $\tau' = A'B'C'$ dont les côtés ont pour mesures :

$$B'C' = 12 \quad C'A' = 18 \quad A'B' = 27.$$

et

$$BC = 8 \quad CA = 12 \quad AB = 18$$

Nous allons répondre plus précisément à la question :

Soit τ un triangle. Existe-t-il un triangle τ' non égal à τ et tel que :

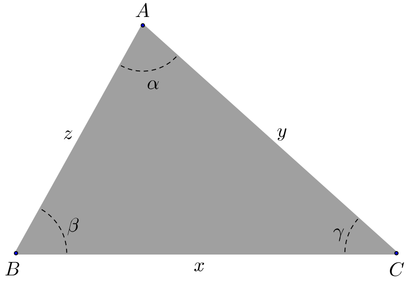
1. ***τ et τ' sont semblables,***
2. ***τ et τ' ont deux côtés égaux ?***

On dira que τ' est un compagnon de τ.

Pour ce faire, on représentera un triangle $\tau = ABC$ par le triplet $\langle x, y, z\rangle$ où x, y et z sont les mesures respectives de ses côtés $BC = x$, $CA = y$ et $AB = z$. Pour avoir un triangle non dégénéré, ces nombres seront supposés strictement positifs et vérifier les inégalités :

$$(*) \qquad \begin{cases} x < y + z \\ y < z + x \\ z < x + y. \end{cases}$$

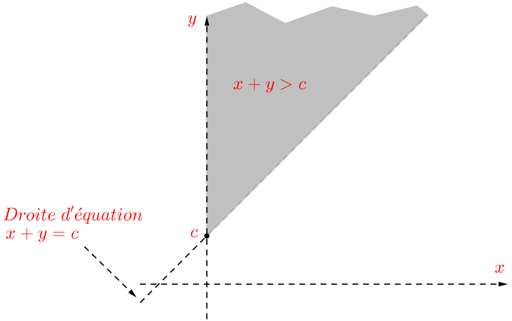
C'est équivalent à : $\alpha, \beta, \gamma \in]0, \pi[$.



L'ensemble $\mathfrak{T}$ de tous les triangles non dégénérés s'identifie donc à :

$$\Omega = \left\{ \langle x, y, z \rangle : x, y, z \in \mathbb{R} \ \textbf{tels que} \ \begin{cases} 0 < x < y + z \\ 0 < y < z + x \\ 0 < z < x + y. \end{cases} \right\}$$

C'est un ouvert de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$. Voici par exemple la trace sur Ω du plan horizontal $\{z = c\}$ (avec $c > 0$).



Le problème à résoudre est donc : étant donné $\tau = \langle x, y, z \rangle \in \mathfrak{T}$, trouver $\tau' = \langle x', y', z' \rangle \in \mathfrak{T}$ non égal à τ et tel que :

$$\frac{x'}{x} = \frac{y'}{y} = \frac{z'}{z} \quad \textbf{et} \quad \begin{cases} x' = y \\ y' = z \end{cases}$$

L'égalité $\frac{x'}{x} = \frac{y'}{y}$ s'écrit aussi $\frac{y}{x} = \frac{z}{y}$; ce qui donne $z = \frac{y^2}{x}$.
De même, l'égalité $\frac{z'}{z} = \frac{x'}{x}$ donne $z' = z\frac{x'}{x} = \frac{y^2}{x} \cdot \frac{y}{x} = \frac{y^3}{x^2}$.
A priori, nos deux deux triangles sont donnés par :

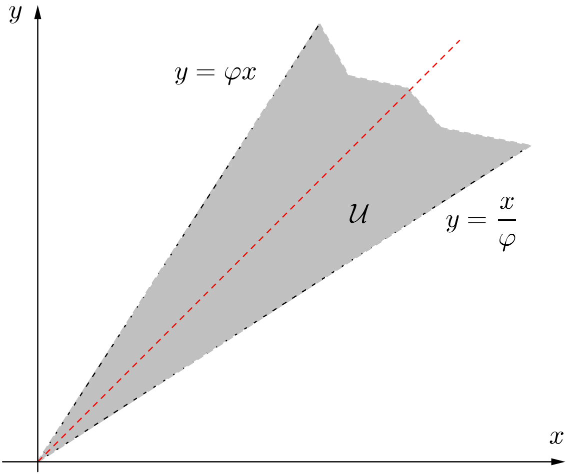
$$\tau = \left\langle x, y, \frac{y^2}{x} \right\rangle \quad et \quad \tau' = \left\langle y, \frac{y^2}{x}, \frac{y^3}{x^2} \right\rangle$$

où x et y sont deux réels strictement positifs variant arbitraiement.

Mais pour que $\langle x, y, \frac{y^2}{x} \rangle$ soit associé à un triangle non dégénéré, il faut en plus (et il suffit) que les trois nombres vérifient les inégalités du triangle $(*)$. Posons à cet effet $\lambda = \frac{y}{x}$. On doit avoir :

1. **$x < y + \frac{y^2}{x}$. Cette inégalité est équivalente à $\lambda^2 + \lambda - 1 > 0$. Ce qui donne $\lambda < -\frac{\sqrt{5}+1}{2} = -\varphi$ ou $\lambda > \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{1}{\varphi}$. Nous ne garderons donc que cette dernière inégalité.**
2. **$y < x + \frac{y^2}{x}$. Cette inégalité est équivalente à $\lambda^2 - \lambda + 1 > 0$. Ce polynome du second degré a son discriminant négatif ; l'inégalité est alors vérifiée pour tout λ et donc pour tout $x > 0$ et tout $y > 0$. Il n'y a pas de contrainte !**
3. **$\frac{y^2}{x} < x + y$. Cette inégalité est équivalente à $\lambda^2 - \lambda - 1 < 0$. Ce qui donne $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < \lambda < \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi$.**
4. **En résumé, on doit avoir : $\frac{1}{\varphi} < \frac{y}{x} < \varphi$.**

Si $x = y$ les deux triangles τ et τ' sont donnés par le triplet $\langle x, x, x\rangle$. Ils sont équilatéraux et égaux. Le couple (x, y) qui paramètre nos deux triangles cherchés est l'ouvert $\mathcal{U}$ ci-dessous privé de la première bissectrice (en rouge).

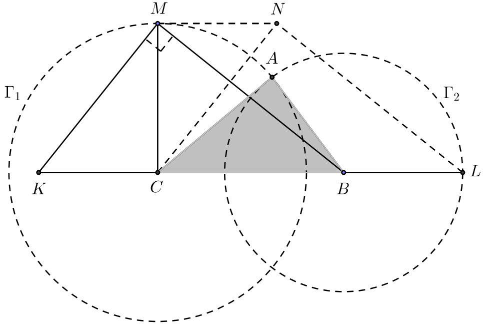


Finalement, si un triangle τ a un compagnon τ', les deux sont donnés par :

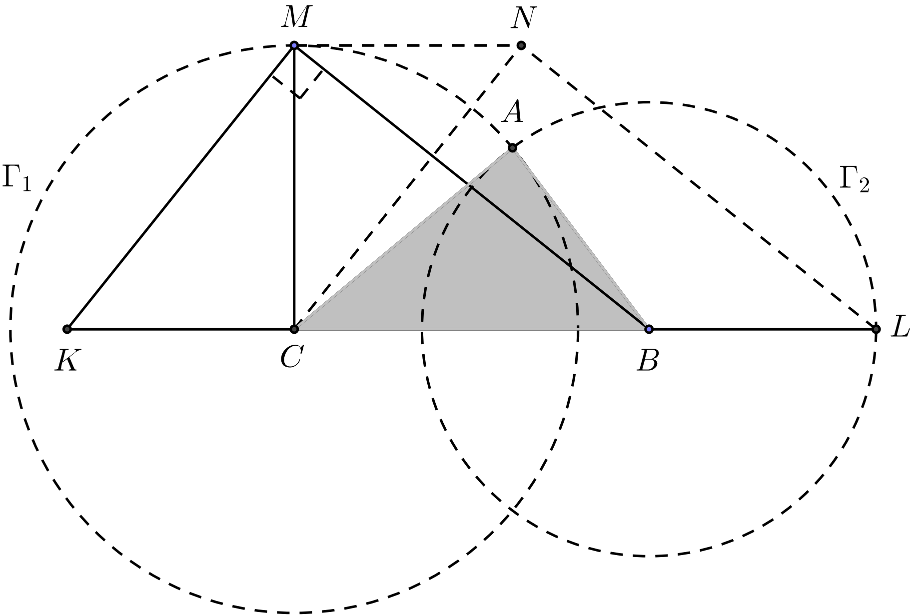
$\tau = \langle x, \lambda x, \lambda^2 x\rangle$ **et** $\tau' = \langle \lambda x, \lambda^2 x, \lambda^3 x\rangle$ **où** $x, \lambda \in \mathbb{R}_+^*$ **avec** $\frac{1}{\varphi} < \lambda < \varphi$ **et** $\lambda \neq 1$.

Et, pour les mêmes paramètres x **et** λ, τ **a aussi un second compagnon :** $\tau'' = \langle \frac{x}{\lambda}, x, \lambda x\rangle$.

Si on prend par exemple $x = 1$, **le triangle** $\tau_0 = \langle 1, \lambda, \lambda^2\rangle$ **a pour compagnons** $\tau_1 = \langle \lambda, \lambda^2, \lambda^3\rangle$ **et** $\tau_{-1} = \langle \frac{1}{\lambda}, 1, \lambda\rangle$. **Et, pour** $n \in \mathbb{Z}$, **le triangle** $\tau_n = \langle \lambda^n, \lambda^{n+1}, \lambda^{n+2}\rangle$ **a pour compagnons :** $\tau_{n+1} = \langle \lambda^{n+1}, \lambda^{n+2}, \lambda^{n+3}\rangle$ **et** $\tau_{n-1} = \langle \lambda^{n-1}, \lambda^n, \lambda^{n+1}\rangle$.
Soit $\lambda \in]\varphi^{-1}, \varphi[\setminus\{1\}$ **constructible ou longueur d'un segment donné. Construisons géométriquement la paire** (τ_0, τ_1) **en commençant par** $\tau_0 = ABC$ **avec** $BC = 1$, $CA = \lambda$ **et** $AB = \lambda^2$.



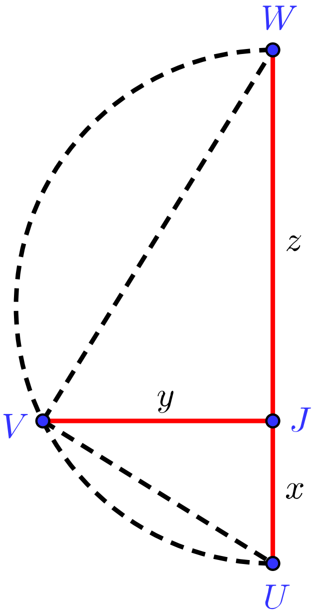
On trace un segment BC de longueur 1. Sur la perpendiculaire en C à la droite (BC), on repère un point M tel que $CM = \lambda$. La perpendiculaire en M à (BM) coupe la droite (BC) en un point K tel que $CK = \lambda^2$. On construit le parallélogramme $CKMN$ ensuite le parallélogramme $MNLB$; le segment LB mesure donc λ^2. Le point A, troisième sommet du triangle τ_0 (les deux premiers étant B et C) est l'intersection du cercle Γ_1 de centre C et passant par M et le cercle Γ_2 de centre B et passant par L.

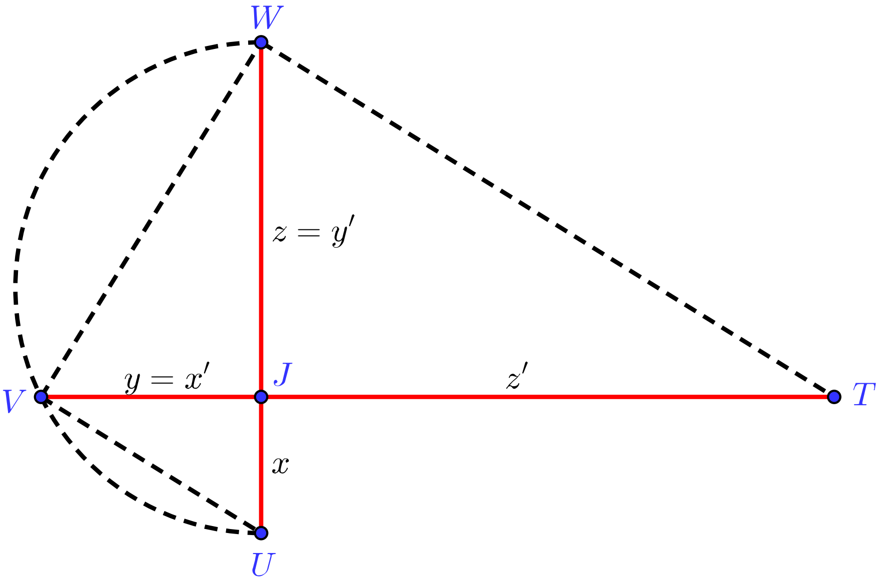

M
N
A
Γ_1
Γ_2
K
C
B
L

On se donne un triangle $\tau = \langle x, y, z \rangle$ admettant un compagnon $\tau' = \langle x', y', z' \rangle$. Ces deux triangles sont non isocèles, et on peut donc supposer $x < y < z$; ce qui implique $x' < y' < z'$. On a en plus les relations :

$$y^2 = xz \quad \textbf{et} \quad y'^2 = x'z'.$$

Ceci montre que le nombre y est la mesure de la hauteur (issue de l'angle droit) d'un triangle rectangle UVW et x et z sont les longueurs des segments qu'elle découpe sur l'hypoténuse UW.
Ceci permet de montrer comment construire géométriquement τ' à partir de τ.


W
z
y
V
J
x
U



W
$z = y'$
J
z'
$y = x'$
V
T
x
U

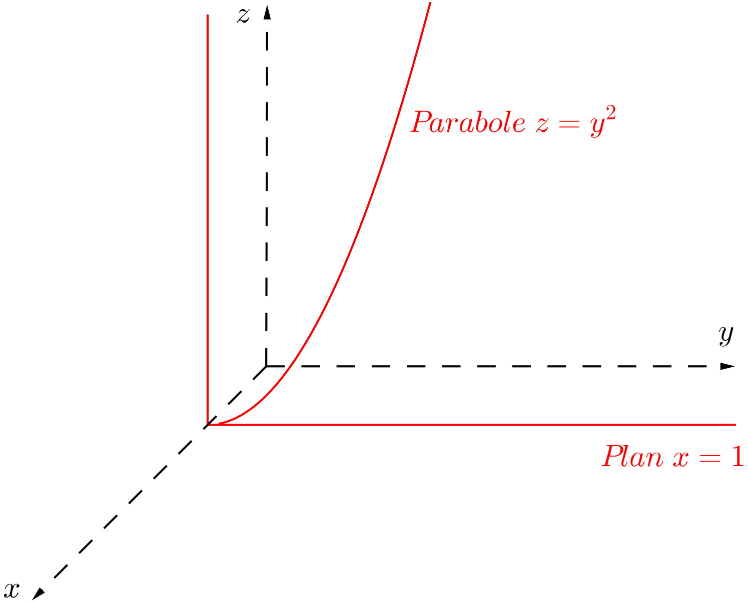
L'ensemble de nos triangles $\tau = \langle x, y, \frac{y^2}{x} \rangle$ avec $x > 0$ et $\frac{x}{\varphi} < y < \varphi x$ est en correspondance biunivoque avec le graphe Σ dans $\mathbb{R}^3$ de la fonction :

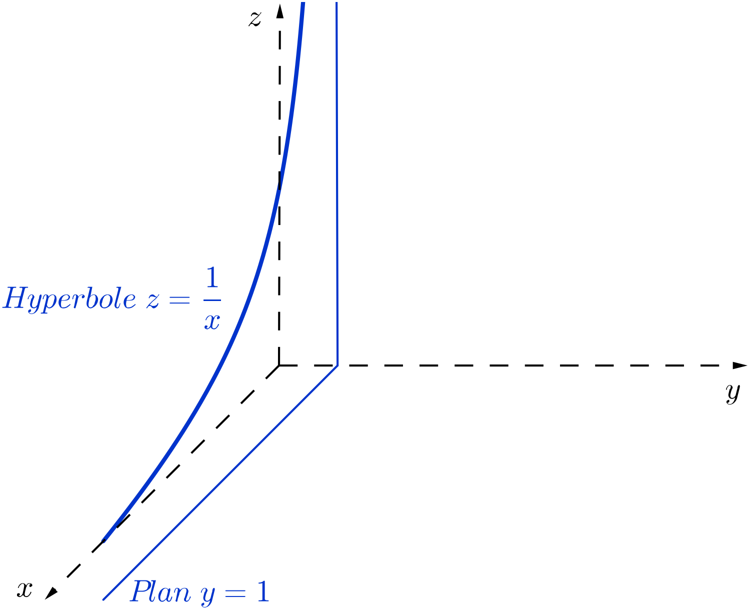
$$\sigma : (x, y) \in \mathcal{U} \longmapsto z = \frac{y^2}{x} \in \mathbb{R}.$$

C'est une surface *différentiable* et même algébrique car définie par l'équation polynomiale $xz - y^2 = 0$. Comme le polynôme $xz - y^2$ est homogène, la surface Σ est invariante par multiplication par tout $\mu \in \mathbb{R}_+^*$ et par suite Σ est un cône ouvert de base une courbe régulière, par exemple :

$$\Gamma = \left\{ (x, y, z) \in (\mathbb{R}_+^*)^3 : \begin{cases} xz - y^2 = 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \right\}.$$

Dans les dessins qui suivent, On peut voir les traces de Σ respectivement sur les plans d'équations $x = 1$ et $y = 1$.


z
y
x
Parabole $z = y^2$
Plan $x = 1$


z
y
x
Hyperbole $z = \dfrac{1}{x}$
Plan $y = 1$

On peut aussi se poser une autre question (supplémentaire) :

Parmi ces triangles solutions du problème, y en a-t-il qui sont rectangles ?

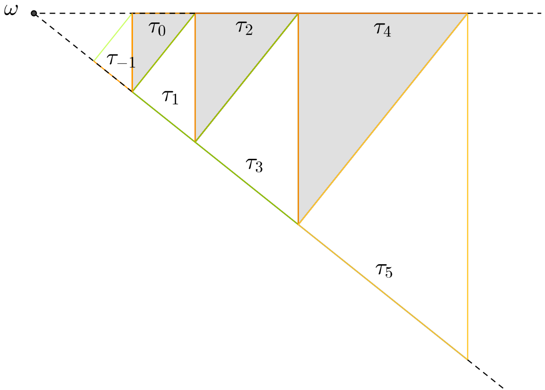
Une simple application du théorème de Pythagore montre que de tels triangles sont donnés comme suit :

$$\tau = (x, \lambda x, \lambda^2 x) \quad \textbf{et} \quad \tau' = (\lambda x, \lambda^2 x, \lambda^3 x)$$

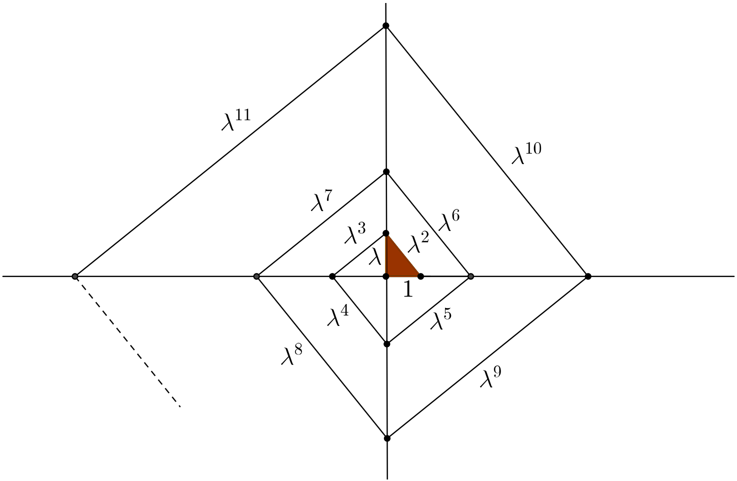
avec $x \in \mathbb{R}_+^*$ **et** $\lambda = \sqrt{\varphi}$.

On vérifie facilement que les nombres $\sqrt{\varphi}$ **et** $\frac{1}{\sqrt{\varphi}}$ **sont bien dans l'intervalle** $]\varphi^{-1}, \varphi[$.

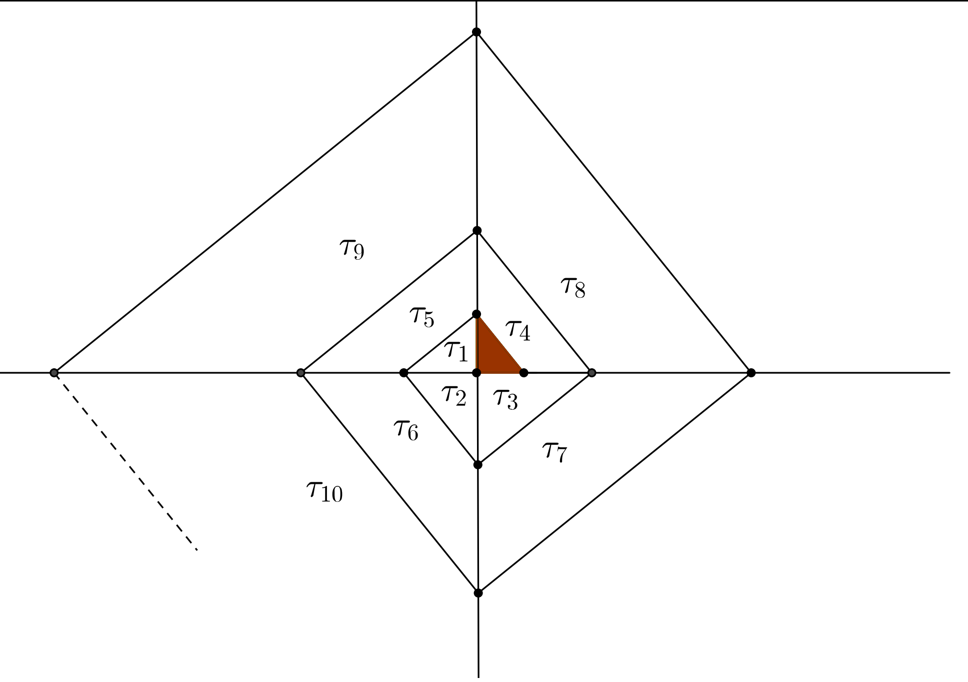
Le rapport des aires de ces deux triangles (du plus grand au plus petit) est donc exactement le nombre d'or φ **!**



On part du triangle rectangle $\tau_0 = \langle 1, \lambda, \lambda^2 \rangle$ et on construit $\tau_1 = \langle \lambda, \lambda^2, \lambda^3 \rangle$. Les triangles τ_2 et τ_3 sont les transformés respectifs de τ_0 et τ_1 par l'homothétie de centre ω et de rapport $\lambda^2 = \varphi$. Et ainsi de suite...



On part de $\tau_0 = \langle 1, \lambda, \lambda^2 \rangle$ et on construit $\tau_1 = \langle \lambda, \lambda^2, \lambda^3 \rangle$ en lui appliquant la similitude σ de centre l'origine, de rapport λ et d'angle $\frac{\pi}{2}$. De façon générale, τ_n (avec $n \in \mathbb{Z}$) est obtenu en appliquant à τ_0 la similitude $\sigma_n = \sigma^n$.


τ_9
τ_8
τ_5
τ_4
τ_1
τ_2
τ_3
τ_6
τ_7
τ_{10}

Une petite digression en passant

Soit AB un segment mesurant $AB = \Phi + 1$ où φ désigne toujours le nombre d'or $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$. On y repère deux points α et β tels que $\alpha A = \beta B = \varphi$; par suite $\beta A = \alpha B = 1$ et $\alpha\beta = \varphi - 1$. On trace la perpendiculaire à AB passant par α. Celle-ci coupe le cercle Γ de diamètre AB en un point C ; le triangle ABC est alors rectangle en C et le segment αC en est la ***hauteur*** issue de ce sommet. On a donc :

$$\alpha C^2 = \alpha A \cdot \alpha B = \varphi \cdot 1 = \varphi.$$

D'où $\alpha C = \sqrt{\varphi}$. Après de simples calculs, on arrive aux valeurs des différents segments intervenant dans la situation qu'on résume comme suit :

$$AB = \varphi{+}1 \quad \alpha A = \alpha B = \varphi \quad CD = \alpha\beta = \varphi{-}1 \quad BC = \varphi \quad AC = \varphi\sqrt{\varphi}.$$

Considérons les trois triangles rectangles $\tau_{-1} = CB\alpha$, $\tau_0 = AC\alpha$ et $\tau_1 = ABC$. Ils sont semblables et tels que :

$$\tau_{-1} = \langle 1, \sqrt{\varphi}, \varphi \rangle \quad \tau_0 = \langle \sqrt{\varphi}, \varphi, \varphi\sqrt{\varphi} \rangle \quad \tau_1 = \langle \varphi, \varphi\sqrt{\varphi}, \varphi^2 \rangle.$$

On voit donc que τ_{-1} a pour compagnon τ_0 et celui-ci a pour compagnon τ_1. Mais τ_{-1} n'est pas compagnon de τ_1.

De ce qui précède on tire :

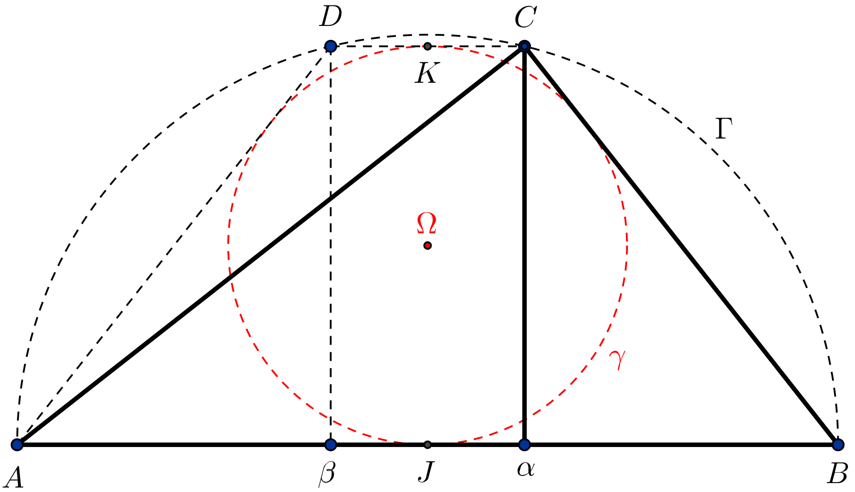
$$AB + CD = \varphi + 1 + (\varphi - 1) = 2\varphi = BC + AD.$$

D'où le, en appliquant le théorème de Pitot :

Beau corollaire : $ABCD$ *est le seul trapèze isocèle inscrit dans le cercle* Γ, *circonscrit à un cercle* γ *et ayant le diamètre* AB *comme grande base.*

Le problème étant invariant par homothétie positive, on peut prendre le segment AB de longueur quelconque mais le point α doit être tel que $\frac{\alpha A}{\alpha B} = \varphi$.

Ce résultat a été obtenu indépendamment par Paolo Maroscia de l'Université de Rome 1.


D
C
K
Γ
Ω
γ
A
β
J
α
B